PASVALIO KRAŠTO
16-OJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA
PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO
TAUREI LAIMĖTI

Pasvalys, 2014m. lapkričio 21d.

UŽDAVINIŲ SPRENDIMAI
jaunesniųjų klasių mokiniams

1. Klasėje yra 20 mokinių. Bet kurie du iš jų turi bendrą senelį. Įrodykite, kad ne mažiau kaip 14 klasės mokinių yra to paties senelio anūkai.

Įrodymas. Jei kiekvienas mokinys turėtų tik vieną senelį, tai jis būtų visų mokinių senelis.

Tarkime, kad yra nors vienas mokinys, kuris turi du senelius; juos pažymėkime S_1 ir S_2. Visus mokinius suskirstykime į tris grupes:

1) S_1 yra senelis, o S_2 nėra senelis;

2) S_1 nėra senelis, o S_2 yra senelis;

3) S_1 ir S_2 yra seneliai.

Aišku, kad nei S_1, nei S_2 nėra bendras pirmos ir antros grupės mokinių senelis. Vadinasi, yra bendras abiejų grupių mokiniams senelis; jį pažymėkime S_3.

Aišku, kad yra viena grupė, kurios mokinių skaičius nėra didesnis už 6. Tada bendras kitų dviejų grupių mokinių skaičius yra nemažesnis už 14. Tų grupių mokiniai yra to paties senelio anūkai.

2. N-jų metų 300-ji diena ir $(N+1)$-jų metų 200-ji diena buvo antradienis. Kokia buvo $(N-1)$-jų metų 100-ji diena?

Sprendimas. Tarp N-jų metų 300-ios dienos ir $(N+1)$-jų metų 200-ios dienos yra $65+200=265$ arba $66+200=266$ dienos. Kadangi $266=7\cdot 38,$ tai N-iais metais buvo 366 dienos. Todėl $(N-1)$-iais metais buvo 365 dienos. Tarp $(N-1)$-jų metų 100-ios dienos ir N-jų metų 300-ios dienos yra $265+300=565$ dienos. Dalydami iš 7, gauname liekaną 5. Vadinasi, $(N-1)$-jų metų 100-ji diena buvo ketvirtadienis.

Ats.: ketvirtadienis.

3. Raskite sandaugą

$$\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2013^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2014^2}\right).$$

Sprendimas. Kadangi

$$1-\frac{1}{m^2}=\frac{m^2-1}{m^2}=\frac{(m-1)(m+1)}{m^2},$$

kai $m=3, 4, ..., 2014,$ tai

$$\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2013^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2014^2}\right)=$$

$$=\frac{2\cdot 4}{3^2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4^2}\cdot\frac{4\cdot 6}{5^2}\cdot\ldots\cdot\frac{2012\cdot 2014}{2013^2}\cdot\frac{2013\cdot 2015}{2014^2}=\frac{2}{3}\cdot\frac{2015}{2014}=\frac{2015}{3021}.$$

Ats.: $\frac{2015}{3021}$.

4. Iš keturių skaičių sudaromos visos įmanomos poros ir apskaičiuojamos porų sumos. Ar gali būti, kad tos sumos yra 1, 2, 3, 4, 5 ir 7?

Sprendimas. Tegu a, b, c ir $d\,(a \le b \le c \le d)$ yra tokie keturi skaičiai, kuriuos sudėjus po du gaunamos sumos 1, 2, 3, 4, 5 ir 7.

Aišku, kad turėtų būti $a+b=1$ ir $c+d=7.$ Iš čia gautume, kad $a+b+c+d=8.$
Kita vertus

$$(a+b)+(a+c)+(a+d)+(b+c)+(b+d)+(c+d)=1+2+3+4+5+7=22.$$

Iš čia gauname, kad

$$3(a+b+c+d)=22.$$

Bet taip negali būti, nes $a+b+c+d=8.$

Vadinasi, nėra tokių keturių skaičių, kuriuos sudėję po du gautume sumas 1, 2, 3, 4, 5 ir 7.

*Ats.:*negali.

5. Lentoje surašyti skaičiai 1, 2, 3, ..., 2014. Leidžiama nutrinti bet kuriuos du skaičius ir užrašyti jų skirtumą (iš didesnio atėmus mažesnį). Įrodykite, kad jeigu pačioje pabaigoje liko nulis, tai buvo padaryta klaida.

*Įrodymas.*Iš pradžių parašytų skaičių suma buvo

$$(1+2014)\cdot 1007 = 2015\cdot 1007;$$

taigi nelyginis skaičius. Bet kuriuos du skaičius pakeitus jų skirtumu, sumos lyginumas nepasikeičia:

1) $2m-2k=2(m-k)$ ir $2m+2k=2(m+k);$

2) $(2m+1)-2k=2(m-k)+1$ ir $(2m+1)+2k=2(m+k)+1;$

3) $2m-(2k+1)=2(m-k)-1$ ir $2m+(2k+1)=2(m+k)+1;$

4) $(2m+1)-(2k+1)=2(m-k)$ ir $(2m+1)+(2k+1)=2(m+k+1).$

Taigi pačioje pabaigoje turi likti nelyginis skaičius.

6. Skaičiai 1, 2, 3, ..., 25 surašomi į 5×5 lentelę. Kiekvienoje eilutėje skaičiai rašomi didėjimo tvarka. Kokia gali būti mažiausia ir didžiausia trečio stulpelio skaičių suma?

Sprendimas. Trečio stulpelio skaičius pažymėkime $a_1, a_2,$ $a_3,$ a_4 ir a_5. Keičiant eilutes vietomis visada galima pasiekti, kad galiotų sąlygą

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5.$$

Visi skaičiai į kairę nuo a_i, $i=1, 2, 3, 4, 5,$ ir į viršų nuo a_i (kai $i=2, 3, 4, 5)$ yra mažesni už a_i. Todėl $a_1 \ge 3,$ $a_2 \ge 6,$ $a_3 \ge 9,$ $a_4 \ge 12,$ $a_5 \ge 15.$ Vadinasi,

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5 \ge 3+6+9+12+15=45.$$

Visi skaičiai į dešinę nuo a_i, $i=1, 2, 3, 4, 5)$ ir į apačią nuo a_i (kai $i=1, 2, 3, 4)$ yra didesni už a_i. Todėl

$$a_5 \le 23,\ a_4 \le 20,\ a_3 \le 17,\ a_2 \le 14,\ a_1 \le 11.$$

Vadinasi,

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5 \le 11+14+17+20+23=85.$$

Įmanoma sudaryti lentelę, kurios trečio stulpelio skaičių suma lygi 45 (*žr.* 1 pav.), ir lentelę, kurios trečio stulpelio skaičių suma lygi 85 (*žr.* 2 pav.). Todėl 45 yra pati mažiausia trečio stulpelio skaičių suma, o 85 – pati didžiausia.

1	2	**3**	16	17
4	5	**6**	18	19
7	8	**9**	20	21
10	11	**12**	22	23
13	14	**15**	24	25

1 pav.

1	2	**11**	12	13
3	4	**14**	15	16
5	6	**17**	18	19
7	8	**20**	21	22
9	10	**23**	24	25

2 pav.

Ats.: 45 ir 85.

7. Raskite visas natūraliųjų skaičių, kurių sandauga yra 10 kartų didesnė už jų sumą, poras.

Sprendimas. Tegu x ir y $(x \le y)$ yra natūralieji skaičiai, ir tenkinantys sąlygą

$$xy = 10(x+y).$$

Iš čia

$$x(y-10) = 10y \text{ ir } y(x-10) = 10x.$$

Sudauginę abi lygybes gauname:

$$x(y-10)\cdot y(x-10) = 100xy,$$

$$(y-10)(x-10) = 100.$$

Kadangi $100 = 1\cdot 100 = 2\cdot 50 = 4\cdot 25 = 5\cdot 20 = 10\cdot 10,$ tai reikia išspręsti tokias lygčių sistemas:

$$\begin{cases} x-10=1, \\ y-10=100; \end{cases} \quad \begin{cases} x-10=2, \\ y-10=50; \end{cases} \quad \begin{cases} x-10=4, \\ y-10=25; \end{cases} \quad \begin{cases} x-10=5, \\ y-10=20; \end{cases} \quad \begin{cases} x-10=10, \\ y-10=10. \end{cases}$$

Gauname tokias skaičių poras $(x;\ y)$: (11; 110), (12; 60), (14; 35), (15; 30) ir (20; 20).

Kitas sprendimo būdas. Iš lygybės $xy = 10(x+y)$ gauname:

$$xy - 10y = 10x,$$

$$y(x-10) = 10x,$$

$$y = \frac{10x}{x-10} = \frac{(10x-100)+100}{x-10} = 10 + \frac{100}{x-10}.$$

Skaičius $\dfrac{100}{x-10}$ yra sveikasis skaičius tik tada, kai $x = 11, 12, 14, 15, 20, 30, 35, 60, 110.$
Atitinkamos y reikšmės yra 110, 60, 35, 30, 20, 15, 14, 12, 11.

Gauname tokias skaičių poras: 11 ir 110, 12 ir 60, 14 ir 35, 15 ir 30, 20 ir 20

Ats.: 11 ir 110; 12 ir 60; 14 ir 35; 15 ir 30; 20 ir 20.

8. Taisyklingojo devynkampio viršūnėse užrašomi skaičiai 1, 2, ..., 9. Prie kiekvienos įstrižainės užrašoma jos galuose esančių skaičių sandauga. Ar įmanoma taip išdėstyti tuos skaičius, kad visi skaičiai prie įstrižainių būtų skirtingi?

Sprendimas. Kadangi

$$1\cdot 6 = 2\cdot 3,\ 1\cdot 8 = 2\cdot 4,\ 2\cdot 6 = 3\cdot 4,\ 2\cdot 9 = 3\cdot 6 \text{ ir } 3\cdot 8 = 4\cdot 6,$$

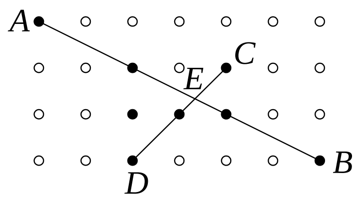
tai vienoje kiekvienos lygybės pusėje esančius skaičius reikia rašyti gretimose devynkampio viršūnėse (kad neatsidurtų įstrižainės galuose). Tai padaryti įmanoma, pavyzdžiui, taip:

$$3-8-1-6-2-9.$$

Likusius tris skaičius (4, 5 ir 7) galima rašyti bet kuria tvarka.

Ats.: įmanoma.

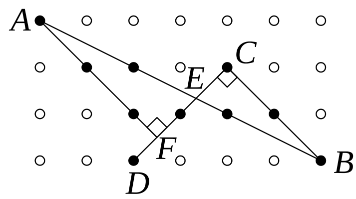
9. Diagramoje pavaizduoti 28 gardelės taškai. Atstumas tarp artimiausių taškų lygus 1. Atkarpa AB susikerta su atkarpa CD taške E. Raskite atkarpos AE ilgį.



Sprendimas. Nubrėžkime atkarpas AF ir BC. Aišku, kad $AF \perp CD$ ir $BC \perp CD$. Be to,

$$AF = \sqrt{2{,}5^2 + 2{,}5^2} = 2{,}5\sqrt{2}, \quad BC = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}.$$

Iš trikampių AFE ir BCE panašumo gauname:



$$\frac{AE}{AF} = \frac{BE}{BC}.$$

Kadangi $AB = \sqrt{6^2 + 3^2} = 3\sqrt{5}$, tai $BE = 3\sqrt{5} - AE$.

Iš lygybės

$$\frac{AE}{2{,}5\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{5} - AE}{2\sqrt{2}}$$

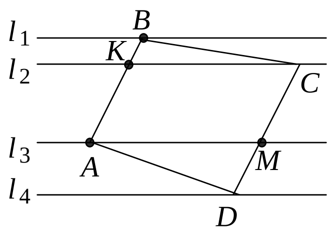
gauname, kad $AE = \dfrac{5\sqrt{5}}{3}$.

Ats.: $\dfrac{5\sqrt{5}}{3}$.

10. Atstumai tarp gretimų tos pačios plokštumos lygiagrečių tiesių yra 1, 3 ir 2. Ar įmanoma rasti po vieną kiekvienos tiesės tašką, kad jie būtų lygiagretainio viršūnės?

Sprendimas. Tegu atstumas tarp l_1 ir l_2 yra 1, tarp l_2 ir l_3 yra 3, o tarp l_3 ir l_4 yra 2. Jei keturkampis $ABCD$ būtų lygiagretainis, tai keturkampis $AKCM$ taip pat būtų lygiagretainis. Tada gautume, kad

$$KB = MD,\ BC = AD \ \text{ ir } \ KC = AM.$$



Tai reikštų, kad trikampiai KBC ir AMD yra lygūs, nors jų atitinkamos aukštinės yra skirtingo ilgio (1 ir 2).

Kadangi taip negali būti, tai prielaidą, jog $ABCD$ yra lygiagretainis reikia atmesti.

Ats.: neįmanoma.

PASVALIO KRAŠTO
16-OJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA
PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO
TAUREI LAIMĖTI

Pasvalys, 2014m. lapkričio 21d.

UŽDAVINIŲ SPRENDIMAI
vyresniųjų klasių mokiniams

1. Natūralusis skaičius n yra „gražus“, jei egzistuoja toks natūralusis skaičius m, turintis lygiai keturis daliklius (įskaitant 1 ir m), kurių suma lygi n. Kiek „gražių“ skaičių yra aibėje $\{2010; 2011; ...; 2019\}$?

Sprendimas. Pagal „gražaus“ skaičiaus apibrėžimą, skaičius m turi būti dviejų pirminių skaičių, sakykim, a ir b sandauga arba kurio nors pirminio skaičiaus, sakykim, c kubas. Bet pastaroji galimybė atkrenta, nes $11^3 = 1331 < 2010$ ir $13^3 = 2197 > 2019.$

Išnagrinėkime atvejį $m = ab.$ Pagal apibrėžimą turi galioti lygybė

$$a + b + ab + 1 = n.$$

Iš jos gauname:

$$(a + ab) + (b + 1) = n,$$
$$(a + 1)(b + 1) = n.$$

Toliau nagrinėkime lygtis

$$(a + 1)(b + 1) = n, \quad n \in \{2010; 2011; ...; 2019\}.$$

Jei $a = 2,$ tai skaičius n turi dalytis iš 3. Galimi keturi atvejai

$$3(b + 1) = n, \quad n \in \{2010; 2013; 2016; 2019\}.$$

Gauname tokius rezultatus:

n	b
2010	669
2013	670
2016	671
2019	672

Bet skaičiai 669, 670 ir 672 nėra pirminiai, todėl „gražiu“ skaičiumi galėtų būti tik $n = 2016.$ Tikrindami gauname, kad

$$1 + 2 + 671 + 2 \cdot 671 = 2016.$$

Taigi 2016 skaičius yra „gražus“.

Jei $a > 2,$ tai ir $b > 2.$ Vadinasi, ir a, ir b yra nelyginiai skaičiai, o sandauga $(a + 1)(b + 1)$ yra lyginis skaičius. Be to, ši sandauga dalijasi iš 4. Todėl nagrinėtinos tik tos lygtys

$$(a + 1)(b + 1) = n, \quad n \in \{2010; 2011; ...; 2019\},$$

kurių n dalijasi iš 4. Tokie skaičiai yra $n = 2012$ ir $n = 2016.$

Skaičius 2016 yra „gražus“, o spręsdami lygtį

$$(a + 1)(b + 1) = 2012$$

gauname:

$$((a + 1)(b + 1) = 4 \cdot 503, a + 1 \geq 4, b + 1 \geq 4) \Rightarrow a + 1 = 4, b + 1 = 503 \Rightarrow a = 3, b = 502 = 2 \cdot 251 \Rightarrow b$$

nėra pirminis skaičius.

Taigi tarp skaičių 2010, 2011, ..., 2019 yra tik vienas „gražus“ skaičius.

Ats.: vienas (skaičius 2016).

2. Ar įmanoma skaičius 1, 2, 3, ..., 2000 suskirstyti į poras taip, kad kiekvienos poros skaičių skirtumas dalytųsi iš 3?

Sprendimas. Kiekvieną natūralųjį skaičių n galima užrašyti viena iš tokių formulių:

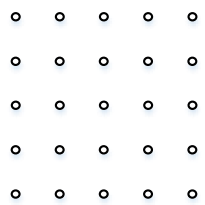
$$n = 3k,\ n = 3k + 1,\ n = 3k + 2;\ k = 0, 1, 2, \dots .$$

Aišku, kad dviejų natūraliųjų skaičių skirtumas dalijasi iš 3 tik tada, kai abu skaičiai užrašomi tokia pat formule.

Suskaičiuokime skaičius nuo 1 iki 2000, kurie užrašomi formule $n = 3k + 1.$ Galimos k reikšmės yra 0, 1, 2, ..., 666, todėl iš viso yra 667 tokie skaičiai. Skirstant juos po du vienas skaičius bus atliekamas. Jį reikėtų poruoti su skaičiumi, kuris užrašomas arba formule $n = 3k,$ arba formule $n = 3k + 2.$ Tokių dviejų skaičių skirtumas nesidalija iš 3.

Ats.: negalima.

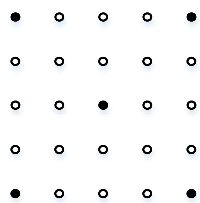
3. 25 mokiniai rašo kontrolinį darbą salėje, kurioje 25 stalai sustatyti į 5 eiles po 5 stalus (*žr.* pav.). Tarpai tarp gretimų eilių ir gretimų stalų yra vienodi. Kaip reikia išdalyti penkis kontrolinio darbo variantus, kad mažiausias atstumas tarp mokinių, rašančių tą patį variantą, būtų didžiausias?



Sprendimas. Išdalijus kontrolinio darbo variantus pagal 1 paveiksle pavaizduotą schemą, mažiausias atstumas tarp gretimų variantų yra $\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}.$ Kitas pagal didumą atstumas galėtų būti $\sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}.$ Bet taip galima paskirstyti tik vieną variantą (*žr.* 2 pav.). Taigi $\sqrt{5}$ yra didžiausias iš mažiausių atstumų.

1	2	3	4	5
4	5	1	2	3
2	3	4	5	1
5	1	2	3	4
3	4	5	1	2

1 pav.



2 pav.

4. 21 natūraliojo skaičiaus suma lygi 3000. Įrodykite, kad tuos skaičius galima suskirstyti į 7 trejetus taip, kad kiekvieno trejeto skaičių suma dalytųsi iš 3.

Įrodymas. Kiekvieną natūralųjį skaičių galima užrašyti viena iš trijų formulių: $3k,$ $3l + 1,$ $3m + 2$ ($k,$ l ir m – sveikieji skaičiai). Į vieną grupę surinkime pavidalo $3k$ skaičius, į antrą grupę – pavidalo $3l + 1$ skaičius, o į trečią grupę – pavidalo $3m + 2$ skaičius. Bet kurio kiekvienos grupės skaičių trejeto suma dalijasi iš 3, todėl laisvai pasirinktu būdu iš kiekvienos grupės skaičių sudarykime tiek trejetų, kiek įmanoma. Atlikusių skaičių skaičius pirmoje, antroje ir trečioje grupėje pažymėkime atitinkamai $r_1,$ r_2 ir $r_3;$ jie gali būti 0, 1 arba 2. Kadangi visų skaičių suma, trejetus sudarančių skaičių sumos ir atlikę pirmos grupės skaičiai dalijasi iš 3, tai visų atlikusių antros ir trečios grupės skaičių suma dalijasi iš 3. Bet taip gali būti tik tada, kai $r_2 = r_3.$ Vadinasi, galimi tik tokie skaičių $r_1,$ r_2 ir r_3 trejetai: (0; 0; 0), (1; 1; 1) ir (2; 2; 2). Atveju (0; 0; 0) nieko nebereikia daryti, o kitais dviem atvejais reikia sudaryti trejetus imant po vieną skaičių iš kiekvienos grupės.

Taigi įmanoma sudaryti 7 trejetus taip, kad kiekvieno skaičių suma dalytųsi iš 3.

5. Raskite visas sveikųjų skaičių x ir y poras $(x; y)$, kurios tenkina lygtį

$$3xy - 2x - 5y + 1 = 0.$$

Sprendimas. Iš lygybės $3xy-2x-5y+1=0$ gauname:

$$x(3y-2)=5y-1,$$
$$x=\frac{5y-1}{3y-2},$$
$$3x=\frac{15y-3}{3y-2}=\frac{5(3y-2)+7}{3y-2}=5+\frac{7}{3y-2}.$$

Skaičius $3x$ yra sveikasis skaičius, todėl 7 turi dalytis iš $3y-2$.

Galimos y reikšmės yra 1 ir 3. Pirmu atveju $3x=5+7\Rightarrow x=4,$ o antru atveju $3x=5+1\Rightarrow x=2.$

Ats.: (4; 1), (2; 3).

6. Nustatykite kokią plokštumos kreivę stačiakampėje Dekarto koordinačių sistemoje sudaro taškai $(x;\,y),$ kai $x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2},$ $y=\dfrac{2t}{1+t^2},$ o t įgyja visas realiąsias reikšmes.

Sprendimas. Apskaičiuokime kvadratų sumą:

$$x^2+y^2=\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2+\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2=\frac{1-2t^2+t^4+4t^2}{(1+t^2)^2}=\frac{(1+t^2)^2}{(1+t^2)^2}=1.$$

Iš lygybės $x^2+y^2=1$ matyti, kad visi $(x;\,y)$ yra apskritimo taškai (jo centras (0; 0), o spindulys lygus 1).

Nagrinėdami x ir y reikšmių aibes, gauname, kad y reikšmės užpildo intervalą [–1; 1], o x reikšmės – tik intervalą (–1; 1]. Vadinasi, taškas (–1; 0) grafikui nepriklauso.

Ats.: apskritimas (jo centras (0; 0), o spindulys lygus1) be taško (–1; 0).

7. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x^5=y+y^5, \\ y^5=z+z^5, \\ z^5=t+t^5, \\ t^5=x+x^5. \end{cases}$$

Sprendimas. Sudėję visas lygtis, gauname lygtį $y+z+t+x=0.$

Jei $x>0,$ tai $t>0;$ jei $t>0,$ tai $z>0;$ jei $z>0,$ tai $y>0;$ jei $y>0,$ tai $x>0.$ Analogiškai gautume, kad visi dydžiai būtų neigiami, jei $x<0.$ Vadinasi, visi lygties

$$y+z+t+x=0$$

dėmenys yra to paties ženklo. Todėl $x=y=z=t=0.$

Ats.: (0; 0; 0; 0).

8. Raskite nors vieną natūraliųjų skaičių *x*, *y* ir *z*, didesnių už 100, trejetą, tenkinantį lygybę

$$x^2+y^3=z^2.$$

Sprendimas. Kadangi

$$y^3=z^2-x^2=(z-x)(z+x),$$

tai ieškokime sprendinio, kuriame

$$y=z-x.$$

Tada

$$y^3=y(y+2x),$$

$$y^2 = y + 2x,$$
$$y^2 - y - 2x = 0.$$

Iš čia

$$y = \frac{1+\sqrt{1+8x}}{2}.$$

Kad galiotų nelygybė $y > 100,$ turi galioti nelygybė

$$1+\sqrt{1+8x} > 200 \Rightarrow 1+8x > 199^2.$$

Jei $1+8x = 201^2,$ tai

$$8x = 200\cdot 202 \Rightarrow x = 25\cdot 202 = 5050.$$

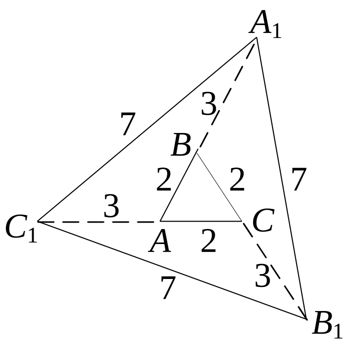
O tada

$$y = \frac{1+201}{2} = 101,$$
$$z = y + x = 101 + 25\cdot 202 = 101\cdot 51 = 5151.$$

Ats.: $x = 5050,\ y = 101,\ z = 5151.$

9. Ar įmanoma sudaryti lygiakraštį trikampį iš trijų trikampių, kurių kraštinių ilgiai 3, 5, 7 ir vieno lygiakraščio trikampio, kurio kraštinės ilgis 2?

Sprendimas. Pratęskime ΔABC (*žr.* pav.) kraštines, o jų tęsiniuose pažymėkime taškus A_1, B_1 ir C_1 taip, kad būtų $BA_1 = CB_1 = AC_1 = 3.$ Sujungę taškus A_1, B_1 ir $C_1,$ gausime trikampį $A_1B_1C_1$. Pagal kosinusų teoremą (taikant trikampiui A_1B_1B)



$$A_1B_1^2 = 3^2 + 5^2 - 2\cdot 3\cdot 5\cos 120^\circ = 9 + 25 - 30\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = 49.$$

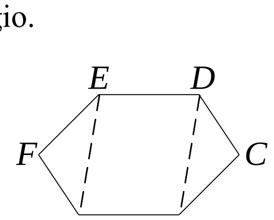
Iš čia $A_1B_1 = 7.$

Analogiškai gauname, kad

$$B_1C_1 = C_1A_1 = 7.$$

Taigi trikampis $A_1B_1C_1$ yra lygiakraštis. Jis sudarytas iš trijų trikampių, kurių kraštinių ilgiai 3, 5, 7 ir vieno lygiakraščio trikampio, kurio kraštinė 2.

10. Erdvinio šešiakampio viršūnės nėra vienoje plokštumoje, o jo priešingos kraštinės yra tarpusavyje lygiagrečios. Įrodykite, kad priešingos šešiakampio kraštinės yra vienodo ilgio.



Įrodymas. Kadangi $AB \parallel ED,$ tai taškai $A,$ $B,$ D ir E yra vienoje plokštumoje; ją pažymėkime P. Kadangi $AF \parallel CD$ ir $FE \parallel BC,$ tai trikampiai BCD ir AFE yra lygiagrečiose plokštumose. Plokštuma P nesutampa nė su viena iš jų (nes tada visos šešiakampio viršūnės būtų vienoje plokštumoje).

Kadangi trikampių BCD ir AFE plokštumos yra tarpusavyje lygiagrečios, tai jos atkerta vienodo ilgio lygiagrečių tiesių atkarpas. Vadinasi, $AB = DE.$

Analogiškai įrodoma, kad $BC = EF$ ir $CD = AF$.