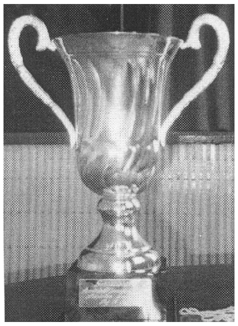


PASVALIO KRAŠTO
14-OJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA
PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO
TAUREI LAIMĖTI

Pasvalys, 2012 m. lapkričio 23 d.

UŽDAVINIŲ SPRENDIMAI
jaunesniųjų klasių mokiniams

1. Raskite natūraliųjų skaičių x, y ir z trejetus (x; y; z), kurie tenkina lygybę $x+\dfrac{1}{y+\dfrac{1}{z}}=\dfrac{10}{7}$.

Sprendimas. Kadangi $\dfrac{10}{7}=1+\dfrac{3}{7}$, tai $x=1$, o $y+\dfrac{1}{z}=\dfrac{7}{3}$. Vadinasi, $y=2$, $z=3$, nes $\dfrac{7}{3}=2+\dfrac{1}{3}$.

Ats.: $x=1$, $y=2$, $z=3$.

2. Tegu x^2+y^2 dalijasi iš 3, čia x ir y yra sveikieji skaičiai. Įrodykite, kad tada x ir y dalijasi iš 3.

Įrodymas. Tegu $x=3a+r_1$ ir $y=3b+r_2$; čia a ir b sveikieji skaičiai, o r_1 ir r_2 galimos reikšmės yra skaičiai –1, 0, 1. Tada

$$x^2+y^2=3(3a^2+3b^2+2ar_1+2br_2)+r_1^2+r_2^2.$$

Iš čia išplaukia, kad

$$r_1^2+r_2^2=0,$$

t. y. $r_1=r_2=0$. Taigi $x=3a$ ir $y=3b$.

3. Įrodykite, kad lygybė

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}$$

yra teisinga su visais $n\geq 2$.

Įrodymas. Pastebėsime, kad

$$1-\frac{1}{n^2}=\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}.$$

Todėl

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{n}{n-1}\right)\cdot\left(\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}\right)=\frac{n+1}{2n}.$$

4. Realieji skaičiai x ir y, $x\neq y$, tenkina lygybes $x^2=8x+y$ ir $y^2=x+8y$. Raskite x^2+y^2.

Sprendimas. Sudėję abi lygybes, gausime, kad $x^2+y^2=9(x+y)$, o atėmę antrą lygybę iš pirmos, gausime lygybę $x^2-y^2=7(x-y)$, iš kurios išplaukia, kad $x+y=7$. Vadinasi, $x^2+y^2=9\cdot 7=63$.

Ats.: 63.

5. Inde yra 320 g balto cukraus. Mišinys A gaunamas iš indo išbėrus x g balto ir po to įbėrus x g rudo cukraus ir gerai sumaišius. Balto ir rudo cukraus santykis mišinyje A yra a:b (trupmena a:b nesuprastinama). Mišinys B gaunamas iš indo išbėrus x g mišinio A ir po to įbėrus x g rudo cukraus. Balto ir rudo cukraus santykis mišinyje B yra 49:15. Raskite $x+a+b$.

Sprendimas. Balto cukraus mišinyje B yra $\left(320\cdot\frac{49}{49+15}\right)=245$ (g), o rudo $320-245=75$ (g).

Rudo cukraus mišinyje A yra x g, o balto $(320-x)$ g.

Rudo cukraus mišinyje B yra $\left(x-\frac{x}{320}\cdot x\right)+x=2x-\frac{x^2}{320}$ (g).

Taigi

$$2x-\frac{x^2}{320}=75,$$

$$x^2-640x+24000=0,$$

$$x=320\pm\sqrt{102\,400-24\,000}=320\pm 280,$$

$$x=40.$$

$$a:b=(320-x):x=280:40=7:1\Rightarrow a=7,\ b=1,\ x=40\Rightarrow x+a+b=48.$$

Ats.: 48.

6. Raskite natūraliųjų skaičių p ir q porų (p, q), tenkinančių sąlygas

$$\frac{p+q^{-1}}{p^{-1}+q}=17,\quad p+q\le 100,$$

skaičių.

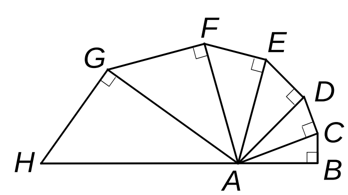
Sprendimas. Aišku, kad $\frac{p(pq+1)}{q(pq+1)}=17\Rightarrow p=17q$.

Tada

$$p+q=18q\le 100,\ q\ge 1\Rightarrow q\le 5\frac{5}{9}\Rightarrow q=1,2,3,4,5.$$

Ats.: Penkios.

7. „Sraigės kiautas“ sudarytas iš 6 trikampių (žr. pav.), kurių kampai 30°, 60° ir 90°; $AB=1$ cm. Raskite AH.



Sprendimas. Kadangi

$$\frac{AH}{AG}=\frac{AG}{AF}=\frac{AF}{AE}=\frac{AF}{AD}=\frac{AD}{AC}=\frac{AC}{AB}=\frac{2}{\sqrt{3}},$$

tai

$$AH=\frac{2}{\sqrt{3}}AG=\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2AF=\ldots=\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^6AB=\frac{64}{27}$$

Ats.: $\frac{64}{27}$.

8. Raskite $a-\frac{1}{a}$, kai $\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}=3,\ a>0.$

Sprendimas. Kadangi $a>0,$ tai $a=(\sqrt{a})^2.$ Todėl

$$a-\frac{1}{a}=\left(\sqrt{a}\right)^2-\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2=\left(\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)\left(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)=3\left(\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right).$$

Skirtumą $\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}$ galima rasti taip:

$$\left(\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2=\left(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2-4=9-4=5\Rightarrow\left|\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right|=\sqrt{5}\Rightarrow\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}=\pm\sqrt{5}.$$

Taigi $a-\frac{1}{a}=\pm3\sqrt{5}.$

Ats.: $\pm3\sqrt{5}.$

9. Kam lygi skaičiaus $\frac{10^{27}+2}{3}$ skaitmenų suma?

Sprendimas. Kadangi $\frac{10^{27}+2}{3}=\frac{10^{27}-1}{3}+1=\underbrace{33\ldots3}_{26}4,$ tai ieškomoji skaitmenų suma lygi $26\cdot3+4=82.$

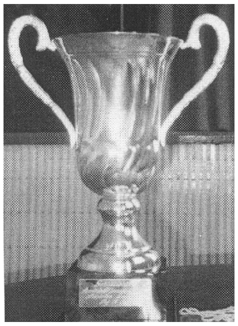
Ats.: 82.

10. Ūkininkas mirdamas liepė savo keturiems sūnums pasidalinti arklius: vyriausiam – trečdalį, antrajam – ketvirtadalį, o jaunėliams dvyniams – po penktadalį arklių. Bet sūnums nesisekė pasidalinti arklius, nes skaičiuodami gaudavo trupmeninius skaičius. Kai viena kumelė atsivedė kumeliuką, ūkininko sūnūs arklius pasidalino, nors kumeliukas niekam neatiteko. Kiek arklių turėjo ūkininkas?

Sprendimas. Arklių skaičių pažymėkime *N*. Pagal uždavinio sąlygą turi galioti lygybė $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right)(N+1)=N.$

Iš čia gauname: $\frac{59}{60}(N+1)=N,\quad N=59.$

Ats.: 59.



PASVALIO KRAŠTO
14-OJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA
PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO
TAUREI LAIMĖTI

Pasvalys, 2012m. lapkričio 23d.

UŽDAVINIŲ SPRENDIMAI
vyresniųjų klasių mokiniams

1. Duoti $n+1$ skirtingi natūralieji skaičiai, mažesni už $2n$. Įrodykite, kad iš jų galima išrinkti tris tokius skaičius, kad vienas iš jų būtų lygus kitų dviejų sumai.

Įrodymas. Tegu $a_1 < a_2 < ... < a_{n+1}$ yra duotieji skaičiai. Skaičiai $a_2 - a_1$, $a_3 - a_1$, ... , $a_{n+1} - a_1$ bus teigiami skirtingi skaičiai, mažesni už $2n$. Tuo būdu tarp $2n+1$ natūraliųjų skaičių $(a_1, a_2, ..., a_{n+1}, a_2 - a_1, a_3 - a_1, ..., a_{n+1} - a_1)$ atsiras du lygūs. Vadinasi, egzistuoja tokie k ir m, kad

$$a_k = a_m - a_1$$

arba

$$a_m = a_k + a_1.$$

2. Išspręskite lygtį $\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x.$

Sprendimas. Užrašę lygtį pavidalu

$$2\sqrt{x^2 - 1} = x - \sqrt{x^2 - p}$$

ir pakėlę kvadratu, gauname:

$$4(x^2 - 1) = x^2 - 2x\sqrt{x^2 - p} + x^2 - p,$$

$$2x^2 - 4 + p = -2x\sqrt{x^2 - p}$$

ir

$$4x^4 + 4x^2(-4 + p) + (p - 4)^2 = 4x^4 - 4x^2 p.$$

Taigi

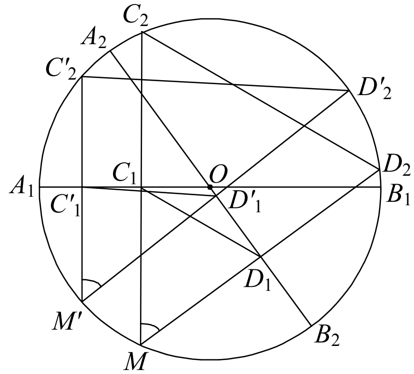
$$8x^2(p - 2) + (p - 4)^2 = 0.$$

Kai $p \geq 2$, ši lygtis sprendinių neturi, o kai $p < 2$, tai

$$x = \sqrt{\frac{(p-4)^2}{8(2-p)}}.$$

Ats.: $x = \sqrt{\frac{(p-4)^2}{8(2-p)}}$, kai $p < 2$.

3. Įrodykite, kad atstumas tarp statmenų, nuleistų iš apskritimo taško į du fiksuotus jo skersmenis, pagrindų nepriklauso nuo to taško pasirinkimo.



Įrodymas. Tegu yra fiksuoti skersmenys A_1B_1 ir A_2B_2. Statmenis iš pasirinktojo taško M į tuos skersmenis MC_1 ir MD_1 pratęsiame iki susikirtimo su apskritimu. Atkarpa C_1D_1 bus trikampio MC_2D_2 vidurio linija. Jos ilgis bus lygus pusei stygos C_2D_2 ilgio. Pasirinkę kitą apskritimo tašką M' analogiškai turėsime, kad atkarpos $C_1'D_1'$ ilgis bus lygus pusei stygos $C_2'D_2'$ ilgio. Tačiau stygų C_2D_2 ir $C_2'D_2'$ ilgiai yra vienodi, nes kampai C_2MD_2 ir $C_2'M'D_2'$ yra akivaizdžiai lygūs. Tai išplaukia iš to, kad keturkampių MC_1OD_1 ir $M'C_1'OD_1'$ kampai yra lygūs.

4. Žinoma, kad $x+\frac{1}{x}$ yra sveikas skaičius. Įrodykite, kad tada $x^n+\frac{1}{x^n}$ taip pat yra sveikas skaičius su visais sveikaisiais n.

Įrodymas. Užtenka apsiriboti natūraliaisiais skaičiais n. Tegu $x^k+\frac{1}{x^k}$ yra sveikasis skaičius bet kuriam natūraliajam skaičiui $k \le n$. Tada $x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}$ ir $\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)$ yra sveikieji skaičiai.

Bet

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)=\left(x^{n+1}+\frac{1}{x^{n+1}}\right)+\left(x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}\right).$$

Iš čia išplaukia, kad $x^{n+1}+\frac{1}{x^{n+1}}$ yra sveikasis skaičius. Belieka pasinaudoti matematine indukcija.

5. Darbas pradėtas tarp 9 ir 10 val., baigtas tarp 10 ir 11 val. Baigus darbą minutinė rodyklė buvo toje pačioje vietoje, kurioje buvo valandinė rodyklė darbo pradžioje. Ir atvirkščiai, valandinė rodyklė buvo minutinės rodyklės vietoje. Per kiek laiko buvo atliktas darbas?

Sprendimas. Tarkime, kad valandinė rodyklė pasisuko x°kampu. Tada minutinė pasisuko $12x$° kampu. Kita vertus, ji pasisuko 360°– x° laipsnių kampu. Gauname:

$$360^\circ - x^\circ = 12x^\circ \Rightarrow x^\circ = \frac{360^\circ}{13}.$$

Per vieną valandą valandinė rodyklė pasisuka 30° kampu. Todėl laikui t, per kurį buvo atliktas darbas,rasti gauname lygtį

$$30^\circ \cdot t = \frac{360^\circ}{13}.$$

Iš čia $t=\frac{12}{13}$ (val.).

Ats.: $\frac{12}{13}$ val.

6. Išspręskite lygtį $\log_{5x+9}(x^2+6x+9)+\log_{x+3}(5x^2+24x+27)=4.$

Sprendimas. Lygtį pertvarkykime taip:

$$\frac{\lg(x+3)^2}{\lg(5x+9)}+\frac{\lg((5x+9)(x+3))}{\lg(x+3)}=4,$$

$$\frac{2\lg(x+3)}{\lg(5x+9)}+\frac{\lg(5x+9)+\lg(x+3))}{\lg(x+3)}=4.$$

Pažymėkime

$$y=\frac{\lg(x+3)}{\lg(5x+9)},$$

ir gausime lygtį

$$2y+\frac{1}{y}+1=4,$$

turinčią du sprendinius:

$$y=1 \text{ ir } y=\frac{1}{2}.$$

Jei $y=1,$ tai $x=-\frac{3}{2}.$ Jei $y=\frac{1}{2},$ tai $x=0$ arba $x=-1.$

Ats.: $\{-3/2, -1, 0\}$.

7. Salėje buvo kelios vienodoskėdžių eilės. Kiekvienoje horizontalioje eilėje sėdėjo po 14 berniukų, o kiekvienoje vertikalioje eilėje sėdėjo po 10 mergaičių. Trys kėdės buvo tuščios. Įrodykite, kad iš viso buvo nemažiau kaip 567 kėdės.

Įrodymas. Tegu *r*yra horizontalių eilių skaičius, o*c*– vertikalių eilių skaičius.Tada

$$rc=14r+10c+3 \Rightarrow r(c-14)=10c+3 \Rightarrow r=\frac{10c+3}{c-14}=10+\frac{143}{c-14};\ c>14.$$

Kadangi r yra natūralusis skaičius, tai $\frac{143}{c-14}$ turi būti natūralusis skaičius. Taigi $c-14$ yra $143=11\cdot 13$ daliklis.

Kadangi $143=11\cdot 13,$ tai teigiami 143 dalikliai yra 1, 11, 13, 143.

Sudarykime lentelę

c–14	c	r	rc
1	15	153	2295
11	25	23	575
13	27	21	567
143	157	11	1727

Iš jos matyti, kad kėdžių skaičiaus *rc* galimos reikšmės yra tokios: 567, 575, 1727, 2295. Mažiausia reikšmė yra 567.

Ats.: 567.

8. Duota seka $\{a_n\}$:

$$a_n=\left[10^n\cdot\frac{1}{13}\right]-10\left[10^{n-1}\frac{1}{13}\right],\ n=1, 2, \ldots;$$

čia $[a]$ yra skaičiaus a sveikoji dalis. Kokia didžiausia a_n reikšmė?

Sprendimas. Pakeitę paprastąją trupmeną $\frac{1}{13}$ dešimtaine trupmena, gauname, kad

$$\frac{1}{13}=0{,}769237692376\ldots=0{,}(76923).$$

Todėl

$$a_1=[7{,}69\ldots]-10[0{,}76\ldots]=7-0=7,$$
$$a_2=[76{,}92\ldots]-10[7{,}69\ldots]=76-70=6,$$
$$a_3=[769{,}23\ldots]-10[76{,}92\ldots]=769-760=9,$$
$$a_4=[7692{,}37\ldots]-10[769{,}23\ldots]=7692-7690=2,$$
$$a_5=[76923{,}76\ldots]-10[7692{,}37\ldots]=76923-76920=3,$$

$$a_6 = [769237{,}69...] - 10[769233{,}76...] = 769237 - 769230 = 7,$$
ir t. t.

Matome, kad sekos narių reikšmės pradeda kartotis. Didžiausia a_n reikšmė 9.

Ats.: 9.

9. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x + xy + x^2 = 9, \\ y + xy + y^2 = -3. \end{cases}$$

Sprendimas. Sudėję abi lygtis, gauname lygtį

$$x + y + (x + y)^2 = 6.$$

Iš čia $x + y = 2$ arba $x + y = -3$.

Toliau spręskime dvi sistemas:

1) $\begin{cases} x + y = 2, \\ x + xy + x^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 - x, \\ x + x(2 - x) + x^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 - x, \\ 3x = 9 \end{cases} \Rightarrow x = 3,\ y = -1;$

2) $\begin{cases} x + y = -3, \\ x + xy + x^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -3 - x, \\ x + x(-3 - x) + x^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -3 - x, \\ -2x = 9 \end{cases} \Rightarrow x = -4{,}5,\ y = 1{,}5.$

Ats.:(3; –1), (–4,5; 1,5).

10. Natūralieji skaičiai išdėstyti didėjančia tvarka trikampyje (žr. pav.). Raskite eilutės, kurioje yra skaičius 400, narių sumą.

1
2 3
4 5 6
7 8 9 10
....

Sprendimas. Pirmosiose$n$ eilučių yra $1 + 2 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ skaičių.

Didžiausias narys n-oje eilutėje yra $\dfrac{n(n+1)}{2}$. Turime rasti mažiausią n reikšmę, kuriai esant galioja nelygybė.

$$400 \le \frac{n(n+1)}{2}.$$

Kai $n = 27$, tai $n(n+1) = 378$; kai $n = 28$, tai $\dfrac{n(n+1)}{2} = 406$. Taigi ieškomasis skaičius n yra 28.

Toje eilutėje didžiausias skaičius yra 406. Kadangi 27-oje eilutėje didžiausias skaičius yra $\dfrac{27 \cdot 28}{2} = 378$, tai 28-os eilės skaičių suma yra

$$379 + 380 + ... + 406 = \frac{379 + 406}{2} \cdot (406 - 378) = 10990.$$

*Ats.:*10990.