PASVALIO KRAŠTO 13-OJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO TAUREI LAIMĖTI

Pasvalys, 2011 m. lapkričio 25 d.

UŽDAVINIŲ SPRENDIMAI jaunesniųjų klasių mokiniams

1. Devyni vienodi rašikliai kainuoja 11 litų su centais, o trylika tokių pat rašiklių kainuoja 15 litų su centais. Kiek kainuoja vienas rašiklis?

Sprendimas. Tegu vieno rašiklio kaina yra x centų. Tada

$$1100<9x<1200 \text{ ir } 1500<13x<1600,$$

arba

$$\frac{1500}{13}<\frac{1100}{9}<x<\frac{1600}{13}<\frac{1200}{9}.$$

Bet

$$\frac{1100}{9}>122, \text{ o } \frac{1600}{13}<124.$$

Todėl $122<x<124$.

Vadinasi, vieno rašiklio kaina yra 123 ct.

Ats.: 123 ct.

2. Įrodykite, kad skaičius p^2-1 dalijasi iš 24, jei $p>3$ yra pirminis skaičius.

Sprendimas. Skaičius $(p-1)p(p+1)$ dalijasi iš 3. Kadangi $p>3$ yra pirminis, tai $(p-1)(p+1)=p^2-1$ dalijasi iš 3. Skaičiai $p-1$ ir $p+1$ yra paeiliui einantys lyginiai skaičiai. Vadinasi, abu dalijasi iš 2, o vienas iš jų dalijasi iš 4. Taigi $p^2-1=(p-1)(p+1)$ dalijasi iš $3\cdot 8=24$.

3. Ar galima užpildyti $n\times n$ lentelę skaičiais -1, 0, $+1$ taip, kad tų skaičių sumos kiekvienoje eilutėje, kiekviename stulpelyje ir abiejose įstrižainėse būtų skirtingos?

Sprendimas. Bendras lentelės eilučių, stulpelių ir įstrižainių skaičius yra $n+n+2=2n+2$.

Sumos $x_1+x_2+...+x_n$, kuriose x_j, $j=1,2,...,n$, įgyja reikšmes -1, 0, $+1$, gali įgyti reikšmes $-n$, $-n+1$, $-n+2,...,-1,0,1,2,...,n-1,n$. Iš viso tokių sumų skirtingų reikšmių yra $n+n+1=2n+1$. Vadinasi, reikalaujamas lentelės užpildymas yra negalimas.

Ats.: negalima.

4. Raskite visus sveikųjų skaičių x, y ir z trejetus $(x; y; z)$, kuriems esant galioja lygybės

$$x+y=2 \text{ ir } xy-z^2=1.$$

Sprendimas. Kadangi $xy=1+z^2\geq 1$, tai x ir y yra vienodų ženklų skaičiai. Iš sąlygos $x+y=2$ išplaukia, kad $x>0$ ir $y>0$. Todėl $x=1$, $y=1$ ir $z=0$.

Ats.: $(1; 1; 0)$.

5. Iš keturženklio skaičiaus A, kurį sudaro skaitmenys 1, 3, 5 ir 7, atimtas keturženklis skaičius B, sudarytas iš skaitmenų 2, 4, 6 ir 8. Raskite galimai mažiausią teigiamą skirtumą $A-B$.

Sprendimas. Tegu $A=\overline{a_1a_2a_3a_4}$, $B=\overline{b_1b_2b_3b_4}$. Pagal sąlygą $a_i, i=1,2,3,4,$ yra skaičiai 1, 3, 5, 7, o $b_j, j=1,2,3,4,$ yra skaičiai 2, 4, 6, 8. Kad skirtumas $A-B$ būtų teigiamas, negali būti $a_1=1$. Galimi tik tokie atvejai:

1) $a_1=3,\ b_1=2;$

2) $a_1=5,\ b_1=2$ arba $b_1=4;$

3) $a_1=7,\ b_1=2$ arba $b_1=4,$ arba $b_1=6.$

Pirmuoju atveju galimai mažiausias skirtumas yra

$$A-B=3157-2864=293,$$

antruoju atveju

$$A-B=5137-4862=275,$$

o trečiuoju atveju

$$A-B=7135-6842=293.$$

Ats.: 275.

6. Raskite skaičiaus $a=1!+2!+...+2011!$ dalybos iš 18 liekaną. Čia $n!=n(n-1)\cdot...\cdot 2\cdot 1,$ $n=1,2,...,2011,$ yra skaičiaus n faktorialas.

Sprendimas. Iš 18 nesidalija tik šie sumos $a=1!+2!+...+2011!$ dėmenys: 1!, 2!, 3!, 4! ir 5!. Jų suma yra

$$1!+2!+3!+4!+5!=1+2+6+24+120=153.$$

Skaičiaus 153 dalybos iš 18 liekana 9 kartu yra skaičiaus a dalybos iš 18 liekana.

Ats.: 9.

7. Tegu $a_1<a_2<...<a_{44}$ yra natūralieji skaičiai, ne didesni už 125. Įrodykite, kad tarp skirtumų $d_i=a_{i+1}-a_i,\ i=1,2,...,43,$ reikšmių yra tokia, kuri įgyjama ne mažiau kaip 10 kartų.

Sprendimas. Pagal apibrėžimą

$$d_1+d_2+...+d_{43}=(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+...+(a_{44}-a_{43})=a_{44}-a_1\le 124.$$

Tarus, kad nėra tokios $d_i, i=1,2,...,43,$ reikšmės, kuri įgyjama ne mažiau kaip 10 kartų, galimai mažiausia sumos $d_1+d_2+...+d_{43}$ reikšmė būtų $9\cdot1+9\cdot2+9\cdot3+9\cdot4+7\cdot5=125.$ Ji didesnė už 124, todėl prielaidą reikia atmesti.

8. Nustatykite, kiek sprendinių turi lygtis

$$\left(\frac{2x^2-5}{3}\right)^{x^2-2x}=1.$$

Sprendimas. Pakanka išnagrinėti tris atvejus:

1) $\frac{2x^2-5}{3}=1;$ 2) $\frac{2x^2-5}{3}=-1$ ir 3) $x^2-2x=0.$

Pirmuoju atveju $x=\pm2.$ Abu skaičiai tenkina lygtį.

Antruoju atveju $x=\pm1,$ bet x^2-2x reikšmė lygi -1 arba 3. Taigi lygties netenkina nei $x=1,$ nei $x=-1.$

Trečiuoju atveju $x=0$ arba $x=2.$ Abu skaičiai tenkina lygtį, nes $\frac{2x^2-5}{3}\ne 0.$

Ats.: $0,\ \pm2.$

9. Kiek yra natūraliųjų skaičių n, kurie tenkina nelygybę

$$\left(n-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(n-\frac{3}{2}\right)^3\cdot\left(n-\frac{5}{2}\right)^5\cdot\ldots\cdot\left(n-\frac{4021}{2}\right)^{4021}<0?$$

Sprendimas. Sandaugoje

$$\left(n-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(n-\frac{3}{2}\right)^3\cdot\left(n-\frac{5}{2}\right)^5\cdot\ldots\cdot\left(n-\frac{4021}{2}\right)^{4021}$$

yra 2011 dauginamųjų; jie užrašomi formule

$$\left(n-\frac{2k-1}{2}\right)^{2k-1}=\left(\frac{2(n-k)+1}{2}\right)^{2k-1},\quad k=1,2,\ldots,2011.$$

Kai $n\in\{1;2;\ldots;k-1\}$, šie dauginamieji yra neigiami. Jei neigiamų dauginamųjų yra nelyginis skaičius, tai ir sandauga bus neigiama. Vadinasi, skaičius k turi būti lyginis. Sekoje $1, 2, \ldots, 2011$ jų yra 1005.

Ats.: 1005.

10. Su kuriais natūraliaisiais skaičiais k iš eilės einančių k natūraliųjų skaičių suma dalijasi iš k?

Sprendimas. Tegu m yra bet kuris natūralusis skaičius arba nulis. Iš eilės einančių k natūraliųjų skaičių $m+1, m+2, \ldots, m+k$ sumą pažymėkime $s(k)$. Tada

$$s(k)=(m+1)+(m+2)+\ldots+(m+k)=km+(1+2+\ldots+k)=km+\frac{k(k+1)}{2},$$

todėl

$$\frac{s(k)}{k}=m+\frac{k+1}{2}.$$

Trupmena $\frac{k+1}{2}$ yra sveikasis skaičius tik tada, kai $k+1=2l, l=1,2,\ldots$. Iš čia $k=2l-1$, $l=1,2,\ldots$.

Taigi $s(k)$ dalijasi iš k tik tada, kai k yra nelyginis skaičius.

Ats.: $k=2l-1,\ l=1,2,\ldots$.

PASVALIO KRAŠTO
13-OJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA
PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO
TAUREI LAIMĖTI

Pasvalys, 2011 m. lapkričio 25 d.

UŽDAVINIŲ SPRENDIMAI
vyresniųjų klasių mokiniams

1. Rasti sumą

$$1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\ldots+n\cdot n!.$$

Sprendimas. $1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\ldots+n\cdot n!=(2-1)\cdot 1!+(3-1)\cdot 2!+\ldots+((n+1)-1)\cdot n!=$
$=(2\cdot 1!-1!)+(3\cdot 2!-2!)+\ldots+((n+1)\cdot n!-n!)=(2!-1!)+(3!-2!)+\ldots+((n+1)!-n!)=(n+1)!-1.$

2. Įrodykite, kad su visais natūraliaisiais n

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{8}\right)\left(1+\frac{1}{15}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)<2.$$

Sprendimas. Kadangi

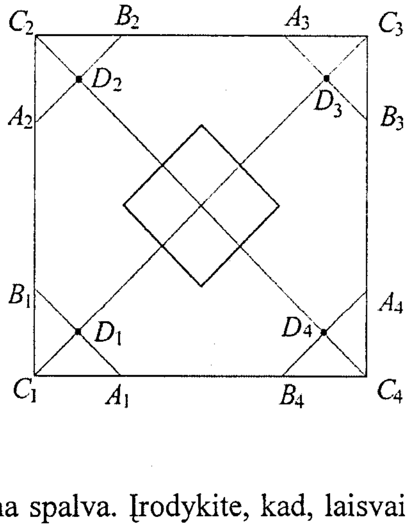
$$a_k=1+\frac{1}{k^2+2k}=\frac{k^2+2k+1}{k^2+2k}=\frac{(k+1)^2}{k(k+2)},\quad k=1,2,3,\ldots,n,$$

tai

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{8}\right)\left(1+\frac{1}{15}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)=a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\ldots\cdot a_n=$$
$$=\frac{2^2}{1\cdot 3}\cdot\frac{3^2}{2\cdot 4}\cdot\frac{4^2}{3\cdot 5}\cdot\ldots\cdot\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}=\frac{2\cdot((n+1)!)^2}{n!(n+2)!}=\frac{2(n+1)}{n+2}<2.$$

3. Ar galima suvynioti kubą į kvadratinį popieriaus lapą, jei lapo kraštinė yra tris kartus ilgesnė už kubo briauną?

Sprendimas. Parodysime, kad tai padaryti galima. Kubą statome į lapo centrą taip, kad jo briaunos būtų lygiagrečios su kvadrato įstrižainėmis ir užlenkiame lapo kampus. Tegu kubo briaunos ilgis yra a. Kadangi kvadrato kraštinės ilgis yra $3a$, tai jo įstrižainių ilgiai yra $\sqrt{18}a$. Užtenka įsitikinti, kad lenkimo linijų A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 ir A_4B_4 ilgiai nėra mažesni už a, o atkarpų C_1D_1, C_2D_2, C_3D_3 ir C_4D_4 ilgiai nėra mažesni už $\frac{1}{2}a$. Gauname:

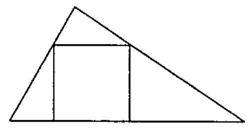


$$A_iB_i=2C_iD_i=\sqrt{18}a-3a>a\ \text{ ir }\ C_iD_i>\frac{1}{2}a;\ i=1,2,3,4.$$

4. Kiekvienas plokštumos taškas nudažomas raudona arba mėlyna spalva. Įrodykite, kad, laisvai pasirinkus teigiamą skaičių d, galima rasti ta pačia spalva nudažytų taškų, tarp kurių atstumas lygus d.

Sprendimas. Tarkime, kad taip nėra. Tai reiškia, kad yra tokie teigiami skaičiai a ir b, kad nėra raudonų taškų, nutolusių atstumu a, ir nėra mėlynų taškų, nutolusių atstumu b. Tarkime, kad $a\le b$. Pasirinkime mėlyną tašką A ir nubrėžkime apskritimą, kurio centras A, o spindulys lygus b. Pagal prielaidą visi šio apskritimo taškai turi būti raudoni. Pasirinkę centru bet kurį šio apskritimo tašką, nubrėžkime apskritimą, kurio spindulys lygus a. Kadangi $a \le b$, gausime du abiejų apskritimų susikirtimo taškus; abu jie raudoni kaip ir apskritimo centras. Gavome prieštaravimą prielaidai, kad nėra raudonų taškų, nutolusių vienas nuo kito atstumu a.

5. Kvadratas, kurio kraštinės ilgis yra a, įbrėžtas į trikampį (žr. 1 pav.), kurio pagrindo ilgis lygus b. Įrodykite, kad kvadrato plotas negali viršyti pusės trikampio ploto.



1 pav.

Sprendimas. Tegu h yra trikampio aukštinės, nuleistos į pagrindą, ilgis, $x = h - a$, S – trikampio plotas, o S_1 viršutinio trikampio (esančio virš kvadrato) plotas. Tada

$$\frac{S}{S_1} = \left(\frac{b}{a}\right)^2, \quad S = \frac{(a+x)b}{2}, \quad S_1 = \frac{ax}{2}.$$

Todėl

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{a+x}{x}\cdot\frac{b}{a} \Rightarrow x = \frac{a^2}{b-a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}S - a^2 = \frac{1}{4}\left(a + \frac{a^2}{b-a}\right)b - a^2 = \frac{ab^2}{4(b-a)} - a^2 = \frac{a(b-2a)^2}{4(b-a)} \Rightarrow a^2 \le \frac{1}{2}S.$$

6. Tegu $a_1 < a_2 < \ldots < a_{100}$ yra realieji skaičiai. Raskite visus realiuosius skaičius x, su kuriais funkcija

$$f(x) = \sum_{i=1}^{100} |x - a_i| = |x - a_1| + |x - a_2| + \ldots + |x - a_{100}|$$

įgyja mažiausią reikšmę.

Sprendimas. Taikydami realiųjų skaičių sumos modulio savybę $|a+b| \le |a| + |b|$, gauname:

$$\begin{aligned} f(x) &= |x-a_1| + |x-a_2| + \ldots + |x-a_{99}| + |x-a_{100}| = \\ &= (|x-a_1| + |x-a_{100}|) + (|x-a_2| + |x-a_{99}|) + \ldots + (|x-a_{50}| + |x-a_{51}|) \ge \\ &\ge |(x-a_1) + (a_{100}-x)| + |(x-a_2) + (a_{99}-x)| + \ldots + |(x-a_{50}) + (a_{51}-x)| = \\ &= (a_{100}-a_1) + (a_{99}-a_2) + \ldots + (a_{51}-a_{50}). \end{aligned}$$

Kadangi lygybės

$|x-a_i| + |x-a_{101-i}| = |x-a_i| + |a_{101-i}-x| = |(x-a_i) + (a_{101-i}-x)| = a_{101-i} - a_i$, $i = 1, 2, \ldots, 50$,

galioja tik tada, kai su visais $i = 1, 2, \ldots, 50$ skirtumai $x - a_i$ ir $a_{101-i} - x$ yra vienodų ženklų, tai $a_{50} \le x \le a_{51}$.

Vadinasi, mažiausią reikšmę, lygią skaičiui

$$(a_{100}-a_1) + (a_{99}-a_2) + \ldots + (a_{51}-a_{50}),$$

Funkcija $f(x)$ įgyja intervalo $[a_{50}; a_{51}]$ taškuose.

7. Tegu $a_1 < a_2 < \ldots < a_{44}$ yra realieji skaičiai, ne didesni už 125. Įrodykite, kad tarp skirtumų $d_i = a_{i+1} - a_i$, $i = 1, 2, \ldots, 43$, reikšmių yra tokia, kuri įgyjama ne mažiau kaip 10 kartų.

Sprendimas. Pagal apibrėžimą

$$d_1 + d_2 + \ldots + d_{43} = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \ldots + (a_{44} - a_{43}) = a_{44} - a_1 \le 124.$$

Tarus, kad nėra tokios $d_i, i = 1, 2, \ldots, 43$, reikšmės, kuri įgyjama ne mažiau kaip 10 kartų, galimai mažiausia sumos $d_1 + d_2 + \ldots + d_{43}$ reikšmė būtų $9\cdot1 + 9\cdot2 + 9\cdot3 + 9\cdot4 + 7\cdot5 = 125$. Ji didesnė už 124, todėl prielaidą reikia atmesti.

8. Yra skaičių seka, kurios nariai apibrėžiami taip:

$$x_1 = x_2 = 1,$$
$$x_{n+1} = 2011x_n + 2012x_{n-1}, \quad n \geq 2.$$

Raskite liekaną, gaunamą dalijant x_{2011} iš 3.

Sprendimas. Kadangi $2011 = 3 \cdot 670 + 1$ ir $2012 = 3 \cdot 670 + 2$, tai

$$x_{n+1} = 3 \cdot 670(x_n + x_{n-1}) + x_n + 2x_{n-1}.$$

Skaičiaus x_{n-1} dalybos iš 3 liekaną pažymėkime a, o skaičiaus x_n dalybos iš 3 liekaną pažymėkime b. Tada skaičiaus x_{n+1} dalybos iš 3 liekaną galėsime užrašyti formule $b + 2a - 3k$, kurioje k įgyjamos reikšmės yra 0, 1, arba 2.

Dalijant sekos narius iš 3, gaunamos tokios liekanos:

Sekos narys	Liekana
x_1	1
x_2	1
x_3	$(1+2)-3=0$
x_4	$0+2=2$
x_5	$2+0=2$
x_6	$(2+4)-6=0$
x_7	1
x_8	1
...	...

Matome, kad sekos narių x_k ir x_{k+6l}, $l = 1, 2, \ldots,$ dalybos iš 3 liekanos sutampa.

Kadangi $2011 = 6 \cdot 335 + 1$, tai sekos nario $x_{2011} = x_{1+6\cdot 335}$ dalybos iš 3 liekana sutampa su sekos nario x_1 dalybos iš 3 liekana; ji lygi 1.

Ats.: 1.

9. Raskite skaičių natūraliųjų skaičių a, kuriems esant yra toks sveikasis skaičius b, $0 \leq b \leq 2011$, kad abi lygtys

$$x^2 + ax + b = 0 \text{ ir } x^2 + ax + b + 1 = 0$$

turi sveikų sprendinių.

Sprendimas. Jei kvadratinės lygtys $x^2 + ax + b = 0$ ir $x^2 + ax + b + 1 = 0$ turi sveikųjų sprendinių (nors po vieną), tai jų diskriminantai $a^2 - 4b$ ir $a^2 - 4b - 4$ yra sveikųjų skaičių kvadratai.

Tegu $a^2 - 4b = k^2$ ir $a^2 - 4b - 4 = l^2$. Tada

$$k^2 - l^2 = 4 \Rightarrow (k-l)(k+l) = 4.$$

Kadangi dauginamųjų $k - l$ ir $k + l$ suma yra lyginis skaičius, tai yra tik dvi galimybės: $k - l = -2$ ir $k + l = -2$ arba $k - l = 2$ ir $k + l = 2$. Abiem atvejais $l = 0$. Tada

$$k^2 = 4 \Rightarrow a^2 - 4b = 4 \Rightarrow a^2 = 4(b+1) \Rightarrow a = 2\sqrt{b+1}.$$

Taigi $b + 1$ turi būti sveikojo skaičiaus kvadratas.

Kadangi $44^2 = 1936 < 2011$, $45^2 = 2025 > 2011$, tai galimos $b + 1$ reikšmės yra $1^2, 2^2, 3^2, \ldots, 44^2$. Gauname 44 parametro a reikšmes, tenkinančias uždavinio sąlygas.

Ats.: 44.

10. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} \dfrac{5xy}{x+y} = 6, \\ \dfrac{4xz}{x+z} = 3, \\ \dfrac{3yz}{y+z} = 2. \end{cases}$$

Sprendimas. Aišku, kad $x \neq 0$, $y \neq 0$ ir $z \neq 0$. Todėl

$$\begin{cases} \dfrac{5xy}{x+y} = 6, \\ \dfrac{4xz}{x+z} = 3, \\ \dfrac{3yz}{y+z} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x+y}{xy} = \dfrac{5}{6}, \\ \dfrac{x+z}{xz} = \dfrac{4}{3}, \\ \dfrac{y+z}{yz} = \dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{5}{6}, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{4}{3}, \\ \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

Pažymėję $t = \dfrac{1}{x}$, $u = \dfrac{1}{y}$, $v = \dfrac{1}{z}$, gauname:

$$\begin{cases} u + t = \dfrac{5}{6}, \\ t + v = \dfrac{4}{3}, \\ v + u = \dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \dfrac{5}{6} - t, \\ v = \dfrac{4}{3} - t, \\ \left(\dfrac{4}{3} - t\right) + \left(\dfrac{5}{6} - t\right) = \dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow t = \dfrac{1}{3},\ u = \dfrac{1}{2},\ v = 1 \Rightarrow x = 3, y = 2, z = 1.$$

Ats.: (3; 2; 1).