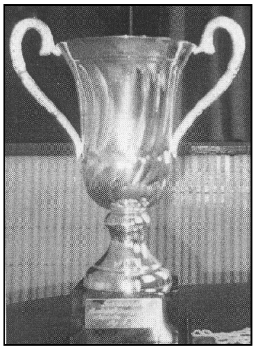


PASVALIO KRAŠTO MOKSLEIVIŲ DEVINTOJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO TAUREI LAIMĖTI

Pasvalys, 2007 m. lapkričio mėn. 23 d.
Uždavinių sprendimo trukmė – 2 val.

U Ž D A V I N I Ų   S P R E N D I M A S

9–10 klasė

4	12	8
13	24	14
7	5	23

1. Lentelėse 3×3 langeliuose yra įrašyti natūralieji skaičiai (žr. pav.). Du mokiniai, Jonas ir Petras, išbraukė po keturis skaičius. Jono išbrauktų skaičių suma yra tris kartus didesnė už Petro išbrauktų skaičių sumą. Nustatykite, koks skaičius liko lentelėje.

Sprendimas. Tegu Petro išbrauktų skaičių suma yra x; tada Jono išbrauktų skaičių suma yra $3x$. Vadinasi, lentelėje liko skaičius (pažymėkime jį m), kurį galima užrašyti formule

$$m = 110 - 4x = 4(27 - x) + 2\,.$$

Kitaip sakant skaičiaus m dalybos iš 4 liekana turi būti lygi 2. Šią savybę turi tik vienas lentelės skaičius – 14; taigi $m = 14$.

Pastaba. Uždavinys yra korektiškas, nes yra du skaičių rinkiniai po keturis skaičius, kurie tenkina uždavinio sąlygą ($x = 4 + 8 + 7 + 5;\ 3x = 12 + 13 + 24 + 23$).

Ats.: 14.

2. Padalijus triženklį skaičių a iš 9, gaunamas skaičius b, kurio skaitmenų suma yra devyniais mažesnė už skaičiaus a skaitmenų sumą. Raskite visus triženklius skaičius a, turinčius šią savybę.

Sprendimas. Skaičius a dalijasi iš 9, todėl jo skaitmenų suma dalijasi iš 9; ją galima užrašyti formule $9m$. Skaičiaus b skaitmenų suma yra $9m - 9 = 9(m-1)$. Ji dalijasi iš 9, todėl skaičius b dalijasi iš 9. Vadinasi, skaičius a dalijasi iš 81.

Tarp triženklių skaičių yra 11 tokių, kurie dalijasi iš 81:

$162 = 81 \cdot 2,$ $\quad 648 = 81 \cdot 8,$

$243 = 81 \cdot 3,$ $\quad 729 = 81 \cdot 9,$

$324 = 81 \cdot 4,$ $\quad 810 = 81 \cdot 10,$

$405 = 81 \cdot 5,$ $\quad 891 = 81 \cdot 11,$

$486 = 81 \cdot 6,$ $\quad 972 = 81 \cdot 12.$

$567 = 81 \cdot 7,$

Uždavinio sąlygas tenkina tik 5 iš jų: 486, 567, 648, 729, 972.

Ats.: 486, 567, 648, 729, 972.

3. Kokiu laipsniu reikia pakelti skaičių 4^4, kad gautume skaičių 8^8?

Sprendimas. $8^8 = 2^8 \cdot 4^8 = 4^4 \cdot (4^4)^2 = (4^4)^3$.

Ats.: trečiuoju laipsniu.

4. Išspręskite lygtį

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}=x\,.$$

Sprendimas. Pertvarkome kairiąją lygties pusę: $\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}=\frac{1}{1+\frac{x}{x+1}}=\frac{x+1}{2x+1}$; sprendžiame lygtį $\frac{x+1}{2x+1}=x$ ir gauname: $x+1=2x^2+x\Rightarrow x^2=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ats.: $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

5. Į vieną eilę surašyti skaičiai 1, 2, 3, ..., 2006, 2007. Nubraukiami pirmi 2006 skaitmenys. Koks likusio skaičiaus pirmasis skaitmuo.

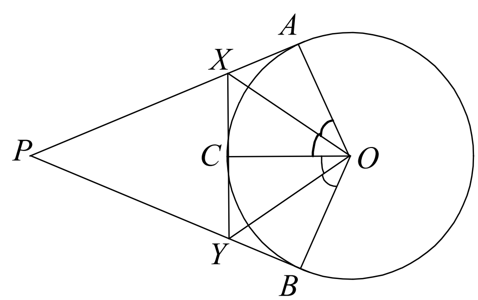
Sprendimas. Vienaženkliai 1, 2, ..., 9 užima 9 pozicijas, dviženkliai 10, 11, ..., 99 užima $90\cdot 2=180$ pozicijų. Dar nubraukti $2006-189=1817$ skaitmenys, sudaryti iš triženklių skaičių skaitmenų. Kadangi $1817=3\cdot 605+2$, tai nubraukiami skaičiai 100, 101, ..., 704 ir du skaičiaus 705 skaitmenys. Taigi ieškomas skaitmuo yra 5.

Ats.: 5.

6. Tegu *a* ir *b* yra sveikieji skaičiai. Nustatykite, ar b^2 dalijasi iš $a+b$, jei a^2 dalijasi iš $a+b$.

Įrodymas. $a^2=(a+b)m$, $m\in Z$, $b^2=a^2-(a+b)(a-b)=(a+b)(m-a+b)\Rightarrow b^2$ dalijasi iš $a+b$.

7. Tegu PA ir PB yra apskritimo su centru O liestinės taškuose A ir B. Trečia to apskritimo liestinė, kerta atkarpas PA ir PB taškuose X ir Y. Įrodykite, kad kampas XOY nepriklauso nuo trečiosios liestinės pasirinkimo.



Įrodymas. Tegu C yra trečiasis lietimosi taškas. Akivaizdu, kad $\Delta OAX=\Delta OXC$ ir $\Delta OBY=\Delta OYC$. Iš atitinkamų kampų lygybės turime, kad $\angle XOY=\frac{1}{2}\angle AOB$.

8. Įrodykite, kad

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}<\frac{1}{10}\,. \qquad (**)$$

Įrodymas. Akivaizdu, kad $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}<\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{98}{99}$.

Todėl $\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}\right)^2<\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}\right)\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{98}{99}\right)=\frac{1}{100}$.

Iš čia gaunama nelygybė (**).

9. Raskite mažiausią natūralųjį skaičių, kurį dalijant iš 4 gaunama liekana 3, dalijant iš 5 gaunama liekana 4, o dalijant iš 6 gaunama liekana 5.

Sprendimas. Tegu x yra ieškomasis skaičius. Tada $x+1$ yra dalus iš 4, 5 ir 6. Toks mažiausias skaičius yra 60. Vadinasi, $x = 59$.

Ats.: 59.

10. Languotos kvadratinės lentelės, kurios matmenys 10×10, langeliuose išdėliotos šachmatų figūros. Kiekvienoje lentelės eilutėje stovi skirtingas figūrų skaičius (gali būti ir 0). Visiškai taip pat nėra jokių dviejų stulpelių, kuriuose būtų po lygiai šachmatų figūrų (vienas stulpelis gali būti tuščias). Kiek iš viso šachmatų figūrų yra ant lentelės? Raskite visus galimus atsakymus ir pagrįskite juos.

Sprendimas. Jeigu kurioje nors eilutėje stovi 10 šachmatų figūrų, tai kiekvienam stulpelyje stovi bent viena figūra. Tai reiškia, kad stulpeliuose yra $1, 2, ..., 10$ figūrų, taigi iš viso $1+2+...+10=55$ (žr. 1 pav.).

Jeigu nė vienoje eilutėje nėra 10 figūrų, tai eilutėse turi būti 0, 1, 2, ..., 9 figūros; vadinasi, iš viso 45 (žr. 2 pav.).

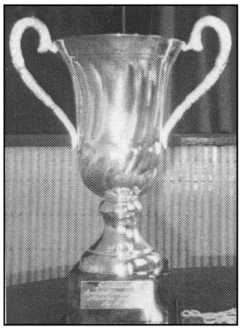
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	
•	•	•	•	•	•	•	•		
•	•	•	•	•	•	•			
•	•	•	•	•	•				
•	•	•	•	•					
•	•	•	•						
•	•	•							
•	•								
•									

1 pav.

•	•	•	•	•	•	•	•	•	
•	•	•	•	•	•	•	•		
•	•	•	•	•	•	•			
•	•	•	•	•	•				
•	•	•	•	•					
•	•	•	•						
•	•	•							
•	•								
•									

2 pav.

Ats.: 45 arba 55 figūros.



PASVALIO KRAŠTO MOKSLEIVIŲ DEVINTOJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO TAUREI LAIMĖTI

Pasvalys, 2007 m. lapkričio mėn. 23 d.
Uždavinių sprendimo trukmė – 2 val.

UŽDAVINIŲ SPRENDIMAS

11–12 klasė

1. Kiekvienas šachmatų turnyro dalyvis lygiai pusę savo taškų surinko prieš žaidėjus iš blogiausiai pasirodžiusių dešimtuko. Kiek žaidėjų dalyvavo turnyre?

Pastaba. Visi turnyro dalyviai žaidė po vieną partiją su kiekvienu varžovu. Pergalė – 1 t., lygiosios – 0,5 t., pralaimėjimas – 0 t.

Sprendimas. Tarkime, kad turnyre žaidė $n+10$ žaidėjų. Dešimt blogiausių žaidėjų tarpusavyje sužaidė $1+2+3+..+9=45$ partijas, todėl iš viso surinko 90 taškų. Kiti n žaidėjai surinko $\frac{n(n-1)}{2}$ taškų žaisdami tarpusavyje; taigi iš viso $n(n-1)$ taškų. Visi turnyro žaidėjai surinko $90+n(n-1)$ taškų. Kita vertus, turnyro dalyvių skaičius lygus $n+10$, todėl bendras surinktų taškų skaičius yra $\frac{(n+9)(n+10)}{2}$. Taigi sprendžiame lygtį

$$90+n(n-1)=\frac{(n+9)(n+10)}{2}$$

ir gauname $n=6$ arba $n=15$. Geriausi n žaidėjai surinko vidutiniškai po $\frac{n(n-1)}{n}=n-1$ tašką, o blogiausi 10 žaidėjų – po 9 taškus. Bet $n-1\geq 9$; todėl $n=15$ ir $n+10=25$.

Ats.: 25.

2. Tušti kvadrato langeliai užpildomi natūraliaisiais skaičiais taip, kad eilučių ir stulpelių skaičiai sudarytų aritmetines progresijas. Kam lygus skaičius x?

			x	
	74			
				186
		103		
0				

Sprendimas. Apatinėje eilutėje šalia nulio įrašykime skaičių a. Tada ši eilutė yra 0, a, $2a$, $3a$, $4a$. Kitoje eilutėje įrašykime skaičius b, c ir d (žr. pav.). Pagal aritmetinės progresijos apibrėžimą gauname:

			x	
	74			
				186
	c	103	d	b
0	a	$2a$	$3a$	$4a$

$$\frac{186+4a}{2}=b\Rightarrow b=93+2a.$$

$b-c=3(103-c)\Rightarrow 2c=309-b=216-2a\Rightarrow c=108-a$;

$a-74=3(a-c)=3(2a-108)\Rightarrow 5a=250\Rightarrow a=50\Rightarrow b=193,\ c=58$;

$b-103=2(b-d)\Rightarrow 2d=b+103=193+103=296\Rightarrow d=148$;

$x-3a=4(d-3a)\Rightarrow x=4d-9a=592-450=142$

Ats.: 142.

3. Funkcija f apibrėžta formule

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Raskite $\underbrace{f(f(f(\ldots f}_{2007\text{ kartus}}(x)\ldots)))$.

Sprendimas. Pagal sudėtinės funkcijos apibrėžimą gauname

$$f(f(x)) = \frac{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\dfrac{x^2}{1+x^2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}.$$

Tarkime, kad po (k–1) žingsnių gausime $\dfrac{x}{\sqrt{1+kx^2}}$. Tada skaičiuodami k-ąjį kartą, gausime

$$f\left(\frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}\right) = \frac{\dfrac{x}{\sqrt{1+kx^2}}}{\sqrt{1+\dfrac{x^2}{1+kx^2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}}.$$

Vadinasi, galutinis rezultatas yra $\dfrac{x}{\sqrt{1+2007x^2}}$.

Ats.: $\dfrac{x}{\sqrt{1+2007x^2}}$.

4. Su kokiu didžiausiu natūraliuoju skaičiumi n skaičius $n!$ ($n! = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$) yra $(n-3)$ gretimų natūraliųjų skaičių sandauga? *Tokio skaičiaus pavyzd*ys $6! = 8\cdot 9\cdot 10$.

Sprendimas. Negalima pradėti dauginti nuo 1, 2, 3 ir 4, nes

$$(n-3)! < n!;$$
$$2\cdot\ldots\cdot(n-2) = (n-2)! < n!;$$
$$3\cdot\ldots\cdot(n-1) = \frac{(n-1)!}{2} < n!;$$
$$4\cdot\ldots\cdot n = \frac{n!}{6!} < n!.$$

Pradėję skaičiumi 5, gautume

$$5\cdot\ldots\cdot(n+1) = \frac{n!(n+1)}{24} = n!, \text{ kai } n = 23.$$

Pradėję skaičiumi k, $k \geq 6$, imkime tik $n > 23$ (nes ieškome didžiausio n); gausime

$$k(k+1)\ldots(k+n-4) \geq 6\cdot 7\cdot\ldots\cdot(n+2) = \frac{n!(n+1)(n+2)}{120} \geq \frac{n!\,24\cdot 25}{120} > n!.$$

Taigi $n = 23$.

Ats.: $n = 23$.

5. Įrodykite, kad suma $x+\frac{1}{x}$ nėra sveikasis skaičius nė su vienu racionaliuoju $x \neq \pm 1$.

Įrodymas. Tegu $x=\frac{p}{q}$ yra nesuprastinama trupmena. Tada $x+\frac{1}{x}=\frac{p}{q}+\frac{q}{p}$. Jeigu $\frac{p}{q}+\frac{q}{p}=n$, n sveikasis skaičius, gauname $p^2+q^2=npq$. Iš čia išplaukia, kad p^2 dalijasi iš q. Bet $\frac{p}{q}$ yra nesuprastinama trupmena; vadinasi, $q=\pm 1$. Analogiškai nustatome, kad $p=\pm 1$.

Ats.: $\left(x+\frac{1}{x}\right)$ nėra sveikasis skaičius, kai $x \neq \pm 1$.

6. Su kokiu natūraliuoju k dydis

$$a_k=\frac{k^2}{(1{,}001)^k}$$

įgyja didžiausią reikšmę?

Įrodymas. Ieškoma k reikšmė bus mažiausias natūralusis skaičius k, su kuriuo galioja nelygybė

$$\frac{a_{k+1}}{a_k}<1, \qquad (*)$$

nes

$$\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{(k+1)^2}{k^2 1{,}001}=\left(1+\frac{1}{k}\right)^2\frac{1}{1{,}001}.$$

Įrašę į (*) gauname:

$$k^2+2k+1<1{,}001k^2 \Rightarrow 2000k+1000<k^2.$$

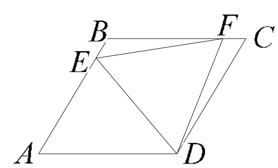
Ats.: $k=2001$.

7. Įrodykite, kad skaičius m^4+4, $m \in N$, yra pirminis tik tuo atveju, kai $m=1$.

Įrodymas. Kai $m>1$,

$$m^4+4=m^4+4m^2+4-4m^2=(m^2+2)^2-4m^2=(m^2+2+2m)(m^2+2-2m)=.$$
$$=((m+1)^2+1)\cdot((m-1)^2+1).$$

8. Rombo $ABCD$ kraštinėse AB ir BC pažymėti taškai E ir F, tokie kad $AE=5BE$, $BF=5CF$. Be to, yra žinoma, kad ΔDEF – lygiakraštis. Raskite $\angle BAD$.



Sprendimas. Pažymėkime $BE=CF=a$, $EF=DF=b$, $\angle BAD=\alpha$. Tada $BF=AE=5a$, $DB=CD=6a$, $\angle ABC=180^\circ-\alpha$, $\angle BCD=\alpha$. Pritaikome kosinusų teoremą:

ΔEBF: $b^2=a^2+(5a)^2-2a\cdot 5a\cdot\cos(180^\circ-\alpha)=26a^2+10a^2\cos\alpha.$

ΔCDF: $b^2=a^2+(6a)^2-2a\cdot 6a\cdot\cos\alpha=37a^2-12a^2\cos\alpha.$

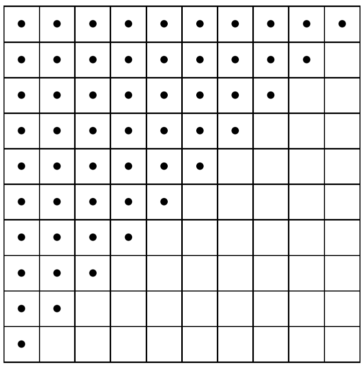
Sulyginę b^2 išraiškas ir padaliję iš a^2,turime $26+10\cos\alpha=37-12\cos\alpha$ arba $22\cos\alpha=11$, $\cos\alpha=\frac{1}{2}$. Taigi $\alpha=60^\circ$.

Ats.: 60°.

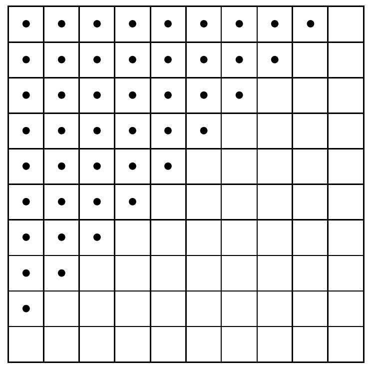
9. Languotos kvadratinės lentelės, kurios matmenys 10×10, langeliuose išdėliotos šachmatų figūros. Kiekvienoje lentelės eilutėje stovi skirtingas figūrų skaičius (gali būti ir 0). Visiškai taip pat nėra jokių dviejų stulpelių, kuriuose būtų po lygiai šachmatų figūrų (vienas stulpelis gali būti tuščias). Kiek iš viso šachmatų figūrų yra ant lentelės? Raskite visus galimus atsakymus ir pagrįskite juos.

Sprendimas. Jeigu kurioje nors eilutėje stovi 10 šachmatų figūrų, tai kiekvienam stulpelyje stovi bent viena figūra. Tai reiškia, kad stulpeliuose yra 1, 2, ..., 10 figūrų, taigi iš viso $1+2+...+10=55$ (žr. 1 pav.).

Jeigu nė vienoje eilutėje nėra 10 figūrų, tai eilutėse turi būti 0, 1, 2, ..., 9 figūros; vadinasi, iš viso 45 (žr. 2 pav.).



1 pav.



2 pav.

Ats.: 45 arba 55 figūros.

10. UAB „Trigalvis slibinas“ yra valdoma dešimties akcininkų. Yra žinoma, kad bet kurie 6 iš jų kartu sudėjus turi ne mažiau kaip pusę visų akcijų. Kiek daugiausia akcijų (procentais) gali turėti didžiausias akcininkas?

Sprendimas. Akcininkų turimas akcijų dalis pažymėkime $x_1, x_2, ..., x_{10}$. Visi šie skaičiai teigiami, o jų suma $x_1 + x_2 + ... + x_{10} = 1$. Galima laikyti, kad

$$x_1 \le x_2 \le ... \le x_9 \le x_{10}.$$

Pirmiausia parodysime, kad šešių mažiausių akcininkų dalis yra ne didesnė už $\frac{2}{3}(1-x_{10})$.

Iš tiesų: $x_1 + x_2 + ... + x_6 = \frac{1}{9}(9(x_1 + x_2 + ... + x_6)) \le$

$$\le \frac{1}{9}((x_1 + x_2 + ... + x_6) + (x_2 + x_3 + ... + x_6 + x_7)) + ... + (x_9 + x_1 + ... + x_4 + x_5) =$$

$$= \frac{1}{9} \cdot 6(x_1 + x_2 + ... + x_9) = \frac{2}{3}(1 - x_{10}).$$

Taigi $\frac{1}{2} \le x_1 + x_2 + ... + x_6 \le \frac{2}{3}(1-x_{10})$. Iš čia $\frac{2}{3}(1-x_{10}) \ge \frac{1}{2}$ ir $x_{10} \le \frac{1}{4}$. Vadinasi, didžiausias turi ne daugiau kaip 25 % akcijų. Tokia situacija yra visiškai galima, pavyzdžiui, didžiausias akcininkas turi $\frac{1}{4}$ visų akcijų, visi likę – po $\frac{1}{12}$.

Ats.: 25 %.