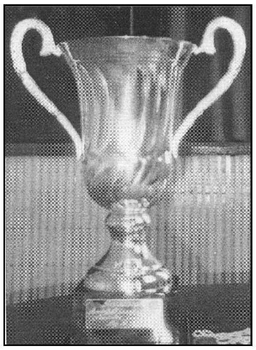


PASVALIO KRAŠTO MOKSLEIVIŲ AŠTUNTOJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO TAUREI LAIMĖTI

Pasvalys, 2006 m. lapkričio mėn. 24 d.
Uždavinių sprendimo trukmė – 2 val.

U Ž D A V I N I Ų S P R E N D I M A S
(Jaunesniųjų klasių grupė)

1. Sraigė plokštumoje iš taško A šliaužia pastoviu greičiu tiesės atkarpomis, kas 15 minučių $90°$ kampu keisdama judėjimo kryptį. Įrodykite, kad sraigė gali sugrįžti į pradinį tašką tik per sveiką valandų skaičių.

Sprendimas. Sąlygiškai galima teigti, kad sraigė juda į kairę, į dešinę, į viršų arba į apačią. Kad sraigė grįžtų į pradžios tašką, būtina, kad perėjimo intervalų į kairę ir į dešinę skaičiai būtų lygūs; perėjimo intervalų į viršų ir į apačią skaičiai irgi turi būti lygūs. Kadangi po kiekvieno perėjimo į kairę arba į dešinę sraigė būtinai pereina į viršų arba į apačią, tai perėjimo intervalų iki sugrįžimo bendras skaičius yra dalus iš keturių. Vadinasi, sugrįžimo laikas sudarys sveiką valandų skaičių.

2. Nesinaudodami skaičiuokliu nustatykite, kuris skaičius didesnis:

$$\sqrt{2005}+\sqrt{2007} \quad \text{ar} \quad 2\sqrt{2006}.$$

Sprendimas. Akivaizdu, kad $2006^2-1<2006^2$. Iš čia

$$2005\cdot 2007<2006^2 \Rightarrow \sqrt{2005}\cdot\sqrt{2007}<2006.$$

Todėl $\left(\sqrt{2005}+\sqrt{2007}\right)^2=2\cdot 2006+2\sqrt{2005}\cdot\sqrt{2007}<4\cdot 2006$. Vadinasi, $\sqrt{2005}+\sqrt{2007}<2\sqrt{2006}$.

Ats.: $\sqrt{2005}+\sqrt{2007}<2\sqrt{2006}$.

3. Apskaičiuokite sumą

$$\frac{1}{2^{-100}+1}+\frac{1}{2^{-99}+1}+\ldots+\frac{1}{2^{0}+1}+\ldots+\frac{1}{2^{99}+1}+\frac{1}{2^{100}+1}.$$

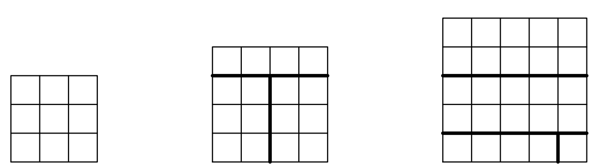
Sprendimas. $\frac{1}{\frac{1}{x}+1}+\frac{1}{x+1}=\frac{x}{1+x}+\frac{1}{x+1}=1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^{-100}+1}+\frac{1}{2^{100}+1}=\frac{1}{2^{-99}+1}+\frac{1}{2^{99}+1}=\cdots=\frac{1}{2^{-1}+1}+\frac{1}{2+1}=1$$

Taigi suma lygi 100,5.
Ats.: 100,5.

4. Tris kvadratinius šokoladukus 3×3, 4×4 ir 5×5 reikia po lygiai padalyti penkiems žmonėms. Raskite minimalų perlaužimų skaičių. Šokoladas laužiamas tik per linijas.

Sprendimas. Penki perlaužimai
Viso 50 kvadratėlių. Kiekvienam reikia po 10.



Keturių perlaužimų neužteks. Po 4 perlaužimų bus 7 gabaliukai. Bent trims reikia duoti po 1 gabaliuką, nes jei dviems duosime po 1 gabaliuką, likusiems trims liks 5 gabaliukai, taigi iš jų bent vienam reikia duoti 1 gabaliuką. Taigi reikia 3 ploto 10 gabaliukų. Iš pirmo ir antro tokių gabaliukų negalime atlaužti, o iš trečio tik du.

5. Sveikieji skaičiai a, b, c ir d tenkina lygybę

$$\frac{a-b}{c-d}=\frac{a+b}{c+d}.$$

Ar jų sandauga $abcd$ gali būti lygi 1000?

Sprendimas. Turime $ac+ad-bc-bd=ac-ad+bc-bd$.

Tada $ad=bc \;\Rightarrow\; abcd=(ad)^2$ – kvadratas. Taigi negali.

Ats.: negali.

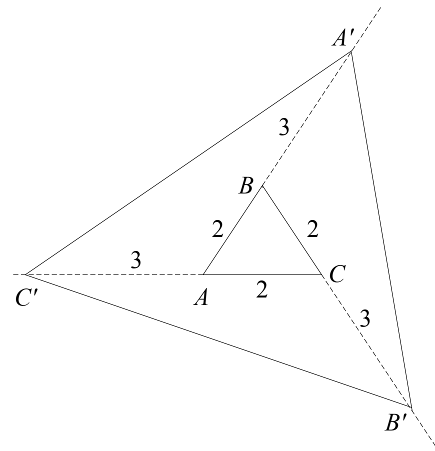
6. Ar galima iš trijų trikampių su kraštinėmis 3, 5 ir 7 ir vieno trikampio su kraštinėmis 2, 2, 2 sudaryti lygiakraštį trikampį?

Sprendimas. Pratęskime ΔABC su kraštinėmis 2, 2, 2 kraštinę AB už taško B, kraštinę BC už taško C, o kraštinę CA – už taško A ir atidėkime atkarpas $BA'=CB'=AC'=3$ (žr. 1 pav.) Gauname tris lygius trikampius – $\Delta\, A'AC'$, $\Delta\, B'BA'$ ir $\Delta\, C'CB'$. Pagal kosinusų teoremą

$$(A'C')^2=(B'A')^2=(C'B')^2=9+25-2\cdot 3\cdot 5\cdot\cos 120^\circ=$$
$$=9+25+15=49;$$

vadinasi, trikampis $A'B'C'$ yra lygiakraštis ($A'C'=B'A'=C'B'=7$).

Ats.: galima.



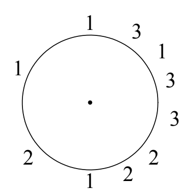
1 pav.

7. Trys kalbininkai užsirašė po 100 žodžių, o paskui savo užrašus lygino tarpusavyje. Sutapus žodžiui nors dviejų kalbininkų sąrašuose, tą žodį išbraukdavo. Ar galėjo atsitikti taip, kad pirmojo kalbininko sąraše liko 54, antrojo – 75, o trečiojo – 80 neišbrauktų žodžių?

Sprendimas. Ne, taip būti negalėjo. Jei pirmasis kalbininkas būtų išbraukęs 46 žodžius, antrasis 25, trečiasis 20, tai būtų $46>25+20$. Taigi ne visi pirmojo kalbininko išbraukti žodžiai būtų buvę kitų dviejų kalbininkų sąrašuose.

8. Ar galima ratu surašyti keturis vienetus, tris dvejetus ir tris trejetus taip, kad bet kurių trijų iš eilės einančių skaičių suma nesidalytų iš 3?

Ats.: Galima, pavyzdžiui taip:



9. Natūralųjį skaičių galima dauginti iš 2 arba sukeisti jo skaitmenis vietomis (negalima tik rašyti nulio pirmoje pozicijoje). Ar šiais veiksmais galima iš 1 gauti 811?

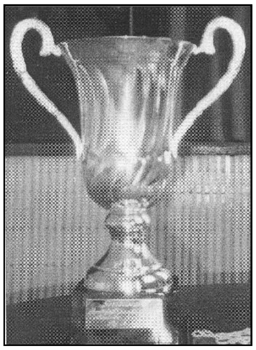
Sprendimas. Skaičių 811 galima gauti iš 181 arba 118. Šiuos du galima gauti vieną iš kito arba iš $\frac{118}{2}=59$. Skaičių 59 galima gauti tik iš 95, o pastarąjį – tik iš 59. Taigi iki vieneto jokiu būdu nenukeliausime. Todėl neįmanoma ir nuo vieneto nukeliauti iki 811.

Ats.: negalima.

10. Įrodykite, kad $\dfrac{a}{b+1}+\dfrac{b}{a+1}\ge 1$, jei $a,b>0$ ir $ab=1$.

Įrodymas. Gauname $b=\dfrac{1}{a}$ ir $\dfrac{a}{b+1}+\dfrac{b}{a+1}=\dfrac{a}{\frac{1}{a}+1}+\dfrac{\frac{1}{a}}{a+1}=\dfrac{a^2}{a+1}+\dfrac{1}{a\,(a+1)}=\dfrac{a^3+1}{a(a+1)}=$

$$=\frac{a^2-a+1}{a}=a+\frac{1}{a}-1=\left(\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2+2-1\ge 1.$$



PASVALIO KRAŠTO MOKSLEIVIŲ AŠTUNTOJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO TAUREI LAIMĖTI

Pasvalys, 2006 m. lapkričio mėn. 24 d.
Uždavinių sprendimo trukmė – 2 val.

UŽDAVINIŲ SPRENDIMAS
(vyresniųjų klasių grupė)

1. Raskite formulę sumai $3+33+333+\ldots+\underbrace{333\ldots3}_{n\text{ trejetukų}}$ skaičiuoti.

Sprendimas. Turime $3+33+333+\ldots+\underbrace{333\ldots3}_{n\text{ trejetukų}}=\frac{1}{3}(9+99+999+\ldots+\underbrace{999\ldots9}_{n\text{ trejetukų}})=$

$$=\frac{1}{3}[(10-1)+(10^2-1)+(10^3-1)+\ldots+(10^n-1)]=\frac{1}{3}\left(\frac{10^{n+1}-10}{9}-n\right).$$

Ats.: $\frac{1}{3}\left(\frac{10^{n+1}-10}{9}-n\right)$.

2. Išspręskite lygtį

$$\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x}=a.$$

Sprendimas. Pakėlę abi lygties puses kubu, gauname

$$1+x+3\sqrt[3]{(1+x)^2(1-x)}+3\sqrt{(1-x)^2(1+x)}+1-x=a^3.$$

Iš čia $3\sqrt[3]{1-x^2}\left(\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x}\right)=a^3-2$. Vadinasi $\sqrt[3]{1-x^2}=\frac{a^3-2}{3a}$.

Ats.: $x_{1,2}=\pm\sqrt{1-\left(\frac{a^3-2}{3a}\right)^3}$, kai $\left(\frac{a^3-2}{3a}\right)^3\le 1$, $a\ne 0$.

3. Duotas 19° kampas. Skriestuvo ir liniuotės pagalba nubrėžti 1° kampą.

Sprendimas. Brėžiame apskritimą su centru duotojo kampo viršūnėje ir skriestuvo pagalba lanką, atitinkantį duotąjį kampą, atidedame ant apskritimo 19 kartų. Gausime lanką $19\cdot 19^\circ=361^\circ$. Taip gauname reikiamą 1° kampą.

4. Teigiami skaičiai x ir y tenkina nelygybę

$$y^3+y\le x-x^3.$$

Įrodykite, kad a) $y<x<1$ ir b) $x^2+y^2<1$.

Įrodymas. a) ($x>0$, $y>0$, $y^3+y\le x-x^3$) $\Rightarrow$ $0<y<x-x^3<x$ $\Rightarrow$ $x-x^3>0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $x(1-x^2)>0$ $\Rightarrow$ $0<x<1$; taigi $0<y<x<1$.

b) $x^3+y^3\le x-y$ $\Rightarrow$ $x^2-xy+y^2\le\frac{x-y}{x+y}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $x^2+y^2\le\frac{x-y}{x+y}+xy=\frac{x-y+xy(x+y)}{x+y}<\frac{x-y+2y}{x+y}=1$ (pastaroji nelygybė galioja, nes $x(x+y)<2\Rightarrow xy(x+y)<2y$).

5. Lentoje užrašyti skaičiai 1, 2, 3, ..., 2006. Leidžiama nutrinti du skaičius ir vietoje šių skaičių parašyti jų skirtumą. Įrodykite, kad jeigu atlikus tam tikrą skaičių kartų šią procedūra lieka tik nulis, tai skaičiavimuose padaryta klaida.

Sprendimas. Kiekvienu veiksmu visų skaičių sumos lyginumas nesikeičia ($a+b$ ir $a-b$ vienodo lyginumo: $a+b+a-b=2a$). Bet $1+2+3+...+2006=1003\cdot 2007$ nelyginis skaičius, o nulis yra lyginis skaičius.

6. Ar galima iš trijų trikampių su kraštinėmis 3, 5 ir 7 ir vieno trikampio su kraštinėmis 2, 2, 2 sudaryti lygiakraštį trikampį?

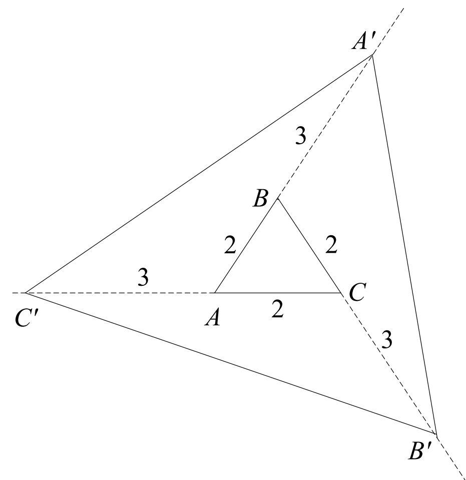
Sprendimas. Pratęskime ΔABC su kraštinėmis 2, 2, 2 kraštinę *AB* už taško *B*, kraštinę *BC* už taško *C*, o kraštinę *CA* – už taško *A* ir atidėkime atkarpas $BA'=CB'=AC'=3$ (žr. 1 pav.) Gauname tris lygius trikampius – $\Delta A'AC'$, $\Delta B'BA'$ ir $\Delta C'CB'$. Pagal kosinusų teoremą

$$(A'C')^2=(B'A')^2=(C'B')^2=9+25-2\cdot 35\cdot\cos 120^\circ=$$
$$=9+25+15=49;$$

vadinasi, trikampis $A'B'C'$ yra lygiakraštis

$$A'C'=B'A'=C'B'=7.$$

Ats.: galima.



1 pav.

7. Raskite natūraliųjų skaičių *x*, tenkinančių lygtį

$$\left[\frac{x}{99}\right]=\left[\frac{x}{101}\right], \qquad (1)$$

skaičių; čia $[a]$ yra skaičiaus *a* sveikoji dalis.

Sprendimas. Su bet kuriuo neneigiamu sveikuoju *n*

$$\left[\frac{x}{99}\right]=n\text{, jei } x\in[99n;99n+98]\text{, o } \left[\frac{x}{101}\right]=n\text{, jei } x\in[101n;101n+100].$$

Lygybė $\left[\frac{x}{99}\right]=\left[\frac{x}{101}\right]=n$ galioja, jei $101n\le x\le 99n+98$; todėl $101n\le 99n+98 \Rightarrow n\le 49$.

Kai $1\le n\le 49$, tai (1) lygties sprendinių skaičius yra $99n+98-(101n-1)=99-2n$.

Kai $n=0$, netinka tik $x=0$; todėl gauname dar 98 sprendinius.

Taigi (1) lygtis turi $98+49\cdot 99-2(1+2+...+49)=98+49\cdot 99-49\cdot 50=98+49\cdot 49=2499$ sprendinius.

Ats.: 2 499.

8. Įrodykite tokį teiginį: jei realieji skaičiai *a*, *b* ir *c* tenkina nelygybes

$$|a-b|\ge|c|,\ |b-c|\ge|a|,\ |c-a|\ge|b|,$$

tai nors vienas iš jų yra kitų dviejų suma.

Sprendimas. $|a-b|\ge|c| \Rightarrow (a-b)^2\ge c^2 \Rightarrow (a-b-c)(a-b+c)\ge 0$.

Analogiškai $(b-c-a)(b-c+a)\ge 0$, $(c-a-b)(c-a+b)\ge 0$.

Sudauginę gausime nelygybę

$$-(a+b-c)^2(b+c-a)^2(c+a-b)^2\ge 0,$$

iš kurios išplaukia, kad bent vienas daugiklis lygus nuliui. Vadinasi, arba $a+b=c$, arba $b+c=a$, arba $c+a=b$.

9. Trys dviženkliai skaičiai pasižymi tokia savybę: bet kurių dviejų suma yra lygi trečiajam, tik su sukeistais skaitmenimis. Kokia galėtų būti šių trijų skaičių suma?

Sprendimas. Ieškomus skaičius pažymėkime $\overline{ax}, \overline{by}, \overline{cz}$; čia $a, b, c, x, y, z \in \{1; ...; 9\}$. Pagal uždavinio sąlygą gauname:

$$\begin{cases} \overline{ax} + \overline{by} = \overline{zc}, \\ \overline{by} + \overline{cz} = \overline{xa}, \\ \overline{cz} + \overline{ax} = \overline{yb} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10(a+b) + (x+y) = 10z + c, \\ 10(b+c) + (y+z) = 10x + a, \\ 10(c+a) + (z+x) = 10y + b. \end{cases}$$

Sudėję visas 3 lygybes, gauname: $20(a+b+c) + 2(x+y+z) = 10(x+y+z) + (a+b+c)$, $19(a+b+c) = 8(x+y+z)$. Taigi skaičius $(x+y+z)$ turi dalytis iš 19; todėl $(x+y+z) = 19$, nes $x+y+z \le 9+9+9 = 27$. Bet tada $a+b+c = 8$. Vadinasi,

$$\overline{ax} + \overline{by} + \overline{cz} = 10(a+b+c) + (x+y+z) = 80 + 19 = 99.$$

Ats.: 99.

10. Sporto turnyras vyksta olimpine sistema: dalyviai varžosi vienas prieš vieną, pralaimėjęs iškrenta, o nugalėtojas patenka į kitą etapą. Kiekvienas iš 512 sportininkų turi individualų numerį (nuo 1 iki 512). Ar gali nutikti taip, kad visose varžovų porose jų numerių skirtumas neviršija 30?

Sprendimas. Pradėkime nuo sportininko, kurio numeris yra 1. Pirmajame etape jis turėtų susitikti su varžovu, kurio numeris nedidesnis už $30+1=31$. Jei šis laimėtų, tai antrame etape turėtų susitikti su varžovu, kurio numeris nedidesnis už $31+30=61$. Imdami didžiausius numerius, gautume tokią numerių seką per visus devynis turnyro etapus:

1, 31, 61, 91, 121, 151, 181, 211, 241, 271.

Taigi turnyro nugalėtojo numeris negalėtų būti didesnis už 271.

Pradėję nuo sportininko, kurio numeris yra 512, analogiškai gautume tokią numerių seką:

512, 482, 452, 422, 392, 362, 332, 302, 272.

Taigi turnyro nugalėtojo numeris negalėtų būti mažesnis už 272.

Gautoji prieštara rodo, kad nors vienos varžovų poros numerių skirtumas turi būti didesnis už 30.

Ats.: negali.