PASVALIO KRAŠTO MOKSLEIVIŲ MATEMATIKOS KETVIRTOJI KOMANDINĖ OLIMPIADA PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO TAUREI LAIMĖTI

U Ž D A V I N I Ų S P R E N D I M A S

(Jaunesniųjų klasių grupė)

Pasvalys, 2002 m. lapkričio mėn. 29 d.
Uždavinių sprendimo trukmė – 2 val.

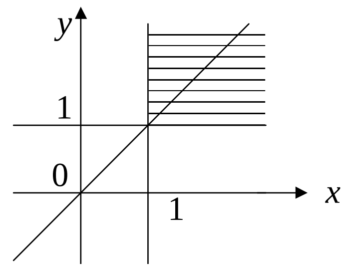
1. Pavaizduokite plokštumoje geometrinę vietą taškų (x; y), tenkinančių nelygybę

$$\min(x, y) \geq 1; \text{ čia } \min(x, y) = \begin{cases} x, & \text{jei } x \leq y, \\ y, & \text{jei } y < x. \end{cases}$$

Sprendimas. Duotąją nelygybę tenkina plokštumos taškai (x; y):

$$x \geq 1,\ x \leq y \text{ bei } y \geq 1,\ y < x.$$

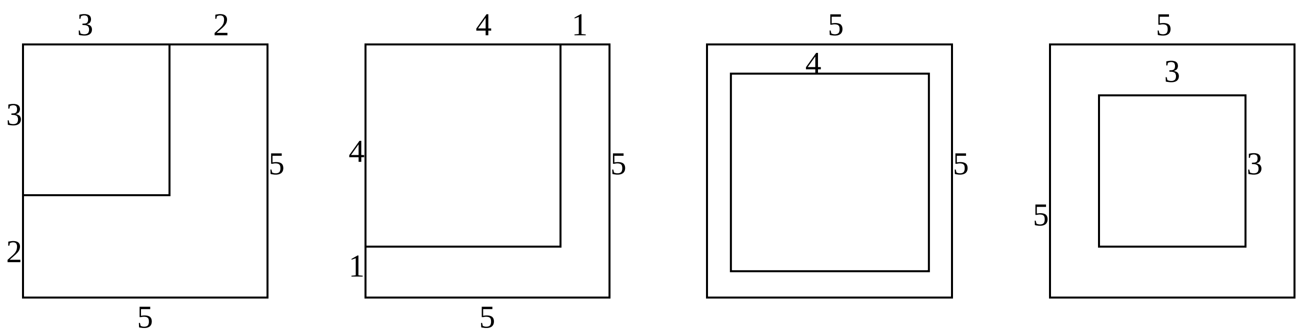
Taigi turime kampą $x \geq 1,\ y \geq 1$.



1 pav.

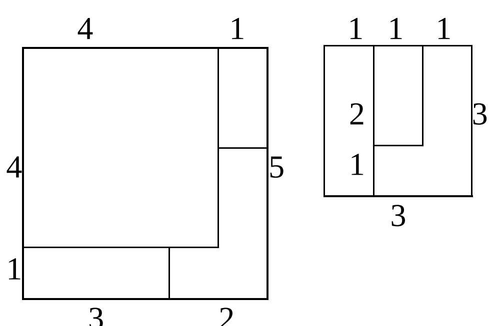
2. Iš lygybės $3^2 + 4^2 = 5^2$ išplaukia, kad 5×5 kvadratą galima supjaustyti į baigtinį skaičių dalių, iš kurių galima sudaryti 4×4 ir 3×3 kvadratus. Raskite minimalų tokių dalių skaičių.

Sprendimas. Į tris dalis supjaustyti neužteks: viena dalis turi būti 3×3 (arba 4×4) kvadratas. Bet išpjovus 3×3 (arba 4×4) kvadratą (žr. 2 pav.), likusios dalies negalima supjaustyti į dvi dalis, iš kurių galima sudėti kvadratą.



2 pav.

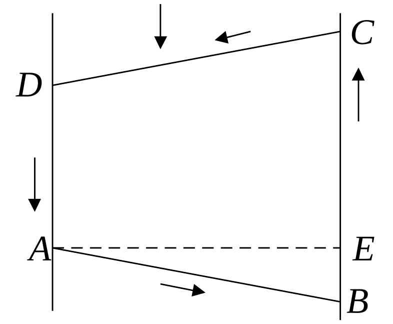
Į keturias dalis supjaustyti galima (žr. 3 pav.).



3 pav.

Taigi minimalus dalių skaičius lygus 4.

3. Irkluodamas statmenai upės srovei, sportininkas nuplaukė į kitą krantą per 10 min. Po to jis 50 min. irklavo išilgai kranto prieš srovę, vėl perplaukė upę (irkluodamas statmenai upės srovei) ir 20 min. irkluodamas išilgai kranto grįžo į pradinę vietą. Koks irkluotojo greičio ramiame vandenyje ir upės greičio santykis?



4 pav.

Sprendimas. Pažymėkime v irkluotojo greitį stovinčiame vandenyje ir w – upės srovės greitį (m/min).

Per 10 min. srovė nuneša irkluotoją pasroviui atstumą $EB = 10w$ m. Iš kitos pusės, $EB = \frac{BC - AD}{2}$, $BC = 50(v-w)$, $AD = 20(v+w)$. Todėl

$$50(v-w) - 20(v+w) = 20w \Rightarrow 50\left(\frac{v}{w} - 1\right) - 20\left(\frac{v}{w} + 1\right) = 20 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 30\frac{v}{w} = 90 \Rightarrow \frac{v}{w} = 3.$$

4. Tegu skaičius $a + \frac{1}{a}$ yra natūralusis. Įrodykite, kad $a^3 + \frac{1}{a^3}$ yra taip pat natūralusis.

Įrodymas. $\left(a + \frac{1}{a}\right)^3 = a^3 + 3\left(a + \frac{1}{a}\right) + \frac{1}{a^3} \Rightarrow a^3 + \frac{1}{a^3} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^3 - 3\left(a + \frac{1}{a}\right).$

5. Jonas ir Agnė kalbasi:
Agnė: *Kokio amžiaus tavo vaikai?*
Jonas: *Visų trijų vaikų metų sandauga lygi 36.*
Agnė: *Man dar ne viskas aišku.*
Jonas: *Jų amžių suma tokia pat kaip tavo namo numeris.*
Agnė: *Vis tiek dar trūksta informacijos.*
Jonas: *Turinčio daugiausiai metų plaukai rudi.*
Agnė: *O! Dabar jau žinau.*
Nustatykite, kiek metų turi Jono vaikai.

Sprendimas. Trijų vaikų amžių sandauga $36 = x \cdot y \cdot z$, kur x, y ir z yra atitinkamai jų amžius. Galimi variantai

$x\,y\,z$	$x+y+z$
$36\cdot1\cdot1$	38
$18\cdot2\cdot1$	21
$12\cdot3\cdot1$	16
$9\cdot4\cdot1$	14
$9\cdot2\cdot2$	13
$6\cdot6\cdot1$	13
$6\cdot3\cdot2$	11
$4\cdot3\cdot3$	10

Jei žinant sumą (namo numeris) nežinomas kiekvieno vaiko amžius, tai tinka tik $9\cdot2\cdot2$ ir $6\cdot6\cdot1$. Bet jei vyriausiasis turi daugiausiai metų, tai tinka tik 9, 2 ir 2.

6. Įrodykite, kad su visais natūraliaisiais skaičiais k ir m, skaičius k^2+m^2 dalijasi iš 7 tada ir tik tada, kai k ir m dalijasi iš 7.

Įrodymas. Tegu $k=7l+d$, $d=0,1,2,\ldots,6$. Kadangi $k^2=49l^2+14ld+d^2$, tai liekana dalijant iš 7 gali būti 0, 1, 4, 2, 2, 4, 1, t.y. 0, 1, 2 ir 4. Vadinasi, k^2+m^2 liekana dalijant iš 7 lygi 0 tada ir tiktai tada, kai k^2 ir m^2 liekanos dalijant iš 7 yra 0 ir 0.

7. Įrodykite, kad $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}=9$.

Įrodymas. $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\left(\sqrt{1}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right)}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}+\ldots+\frac{\sqrt{100}-\sqrt{99}}{\left(\sqrt{99}+\sqrt{100}\right)\left(\sqrt{100}-\sqrt{99}\right)}=$
$=\left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\ldots\left(\sqrt{100}-\sqrt{99}\right)=9$

8. Visi skaičiai nuo 1 iki milijono surašyti į vieną eilę. Kiek skaitmenų yra toje eilėje?

Sprendimas. Yra 9 skaičiai iš vieno skaitmens, 90 iš dviejų skaitmenų, 900 iš trijų skaitmenų ir t.t., 900000 iš 6 skaitmenų ir vienas iš 7 skaitmenų. Taigi duotasis skaičius turi

$$9\cdot 1+90\cdot 2+900\cdot 3+9000\cdot 4+90000\cdot 5+900000\cdot 6+7=5888896 \text{ skaitmenis.}$$

9. Įrodykite, kad yra sveikųjų skaičių pora $(x;y)$, tenkinanti lygtį $x^2-y^2=a^3$, kurioje a yra natūralusis skaičius.

Įrodymas. Imkime x_1 ir y_1 tokius, kad

$$x_1-y_1=a,$$
$$x_1+y_1=a^2.$$

Tada $x_1=\frac{a(a+1)}{2}$, $y_1=\frac{a(a-1)}{2}$. Abu skaičiai yra sveiki.

10. Įrodykite, kad $a+b+c\ge\sqrt{bc}+\sqrt{ca}+\sqrt{ab}$, kai $a\ge 0$, $b\ge 0$, $c\ge 0$.

Įrodymas. $a+b=\left(\sqrt{a}\right)^2+\left(\sqrt{b}\right)^2\ge 2\sqrt{ab}$,
$a+c\ge 2\sqrt{ac}$,
$b+c\ge 2\sqrt{bc}$.

Sudėję kaires ir dešines nelygybių puses, turėsime

$$2(a+b+c)\ge 2\left(\sqrt{bc}+\sqrt{ca}+\sqrt{ab}\right).$$

PASVALIO KRAŠTO MOKSLEIVIŲ MATEMATIKOS KETVIRTOJI KOMANDINĖ OLIMPIADA PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO TAUREI LAIMĖTI

UŽDAVINIŲ SPRENDIMAS

(Vyresniųjų klasių grupė)

Pasvalys, 2002 m. lapkričio mėn. 29 d.
Uždavinių sprendimo trukmė – 2 val.

1. Tegu $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_{k+2} = x_k + x_{k+1}$, $k \geq 1$, yra Fibonačio skaičiai. Įrodykite, kad su visais $n \geq 1$ skaičius x_{5n} dalijasi iš 5.

Įrodymas. $x_5 = 5$. Tarkime, kad x_{5n} dalijasi iš 5. Tada

$$x_{5(n+1)} = x_{5n+4} + x_{5n+3} = 2x_{5n+3} + x_{5n+2} = 3x_{5n+2} + 2x_{5n+1} = 5x_{5n+1} + 3x_{5n}$$

irgi dalijasi iš 5. Pagal matematinės indukcijos metodą x_{5n} dalijasi iš 5 su visais $n \geq 1$.

2. Du apskritimai kertasi taškuose K ir L, o tiesės, išvestos per tuos taškus, kerta vieną apskritimą taškuose A ir C, o kitą – taškuose B ir D (1 pav.). Įrodykite, kad tiesės, išvestos per taškus A ir C bei B ir D, yra lygiagrečios.

Įrodymas. Užtenka įrodyti, kad $\angle CAB + \angle ABD = 180^\circ$. Turime

$$\angle CAB + \angle CKL = 180^\circ, \qquad (1)$$

nes stačiakampis $ALKC$ įbrėžtas į apskritimą. Analogiškai

$$\angle ABD + \angle DKL = 180^\circ. \qquad (2)$$

Sudėję (1) ir (2) lygybes, turėsime

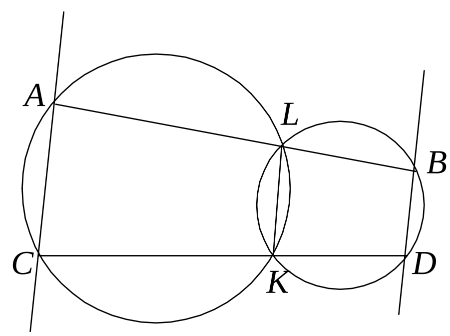
$$\angle CAB + \angle ABD + \angle CKL + \angle DKL = 360^\circ.$$

Bet akivaizdžiai

$$\angle CKL + \angle DKL = 180^\circ,$$

todėl

$$\angle CAB + \angle ABD = 180^\circ.$$



1 pav.

3. Keli draugai sėdi už apskrito stalo. Kiekvienas iš jų turi tam tikrą skaičių litų. Pirmasis turi vienu litu daugiau, negu antrasis, šis vienu daugiau už trečiąjį ir t.t. Pirmasis duoda litą antrajam, po to antrasis du litus trečiajam ir t.t. Taigi kiekvienas duoda vienu litu daugiau negu gavo ir procesas tęsiamas tol, kol kuris nors nebeturės ko pridėti. Pasibaigus dalyboms, buvo du kaimynai, kurių vienas turėjo 4 kartus daugiau litų negu kitas. Kiek žmonių sėdėjo už stalo ir kiek litų pradžioje turėjo pats neturtingiausias žmogus?

Sprendimas. Pažymėkime m žmonių skaičių, k – neturtingiausiojo litų skaičių pradžioje. Po pirmojo rato (paskutiniajam gavus litus) m litų keliauja pas pirmąjį ir kiekvienas turi 1 litu mažiau. Po antrojo rato $2m$ litų keliauja pirmajam ir kiekvienas turi 2 litais mažiau. Po k ratų km litų keliauja pas pirmąjį ir kiekvienas turi k litų mažiau, taigi paskutinis nebeturi pinigų. $(k+1)$ -jo rato gale jis nebeturės ko pridėti. Jis turės $km + m - 1$ litų. Pirmasis turės $(k + m - 1) - (k + 1) = m - 2$ litus, antrasis $m - 3$, … , $(m-1)$ -sis $m - m = 0$ litų. Taigi

$$km + m - 1 = 4(m-2) \text{ arba } m - 2 = 4(km + m - 1).$$

Iš pirmos lygties

$$mk = 3m - 7 \Rightarrow k = 3 - \frac{7}{m} \Rightarrow m = 7,\ k = 2.$$

Iš antros:

$$4mk = 2 - 3m \Rightarrow k = \frac{1}{2m} - \frac{3}{4} < 0, \text{ kai } m \geq 2.$$

k negali būti neigiamas. Taigi $m = 7$ žmonės, $k = 2$ litai.

4. Raskite mažiausią teigiamą sveiką skaičių, turintį tokią savybę: jo pirmasis skaitmuo lygus 1, o perkėlus 1 į galą, gaunamas tris kartus didesnis skaičius.

Sprendimas. Pradinis skaičius $\overline{1x} = 10^m + x$, kur *x* yra *m* skaitmenų skaičius. Perkėlus 1 į galą, gauname skaičių $\overline{x1} = 10x + 1$. Turime $10x + 1 = 3(10^m + x) \Leftrightarrow 7x + 1 = 3 \cdot 10^m$.

Dalijant $3 \cdot 10^m$ iš 7 liekana1. Su kokiu mažiausiu *m* tai bus? Daliname:

$$\begin{array}{l|l}
300000\ldots0 & 7 \\ \cline{2-2}
\underline{28} & 42857 \\
\ \ 20 & \\
\ \ \underline{14} & \\
\ \ \ \ 60 & \\
\ \ \ \ \underline{56} & \\
\ \ \ \ \ \ 40 & \\
\ \ \ \ \ \ \underline{35} & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ 50 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \underline{49} & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 1 &
\end{array}$$

Taigi $x = 42857$ ir ieškomas skaičius yra 142857.

5. Kritiniu namo aukštu pavadinkime aukštą, iš kurio išmetus vazą, ši sudūžta, o išmetus iš žemesnio aukšto, ji nedūžta. Yra dvi identiškos vazos ir žinoma, kad kritinis aukštas yra tarp 1 ir 36 (imtinai). Kokį minimalų skaičių kartų reikia mesti vazas, kad kritinio aukšto nustatymas būtų garantuotas?

Sprendimas. Metame iš 8 aukšto.

Jei metant iš 8 aukšto pirmoji vaza sudūžta, tai antrą vazą metame iš 1. Jai nesudužus – iš 2, vėl nesudužus – iš 3 ir t.t. Iš viso prireiks nedaugiau aštuonių metimų. Jei metant iš 8 aukšto pirmoji vaza nesudužo, tai ją metame iš 15 aukšto $(15 = 8 + 7)$.

Jei pirmoji vaza sudūžta metant iš 15 aukšto, tai antrąją metam iš 9; nesudužus – iš 10, ir t.t. Iš viso prireiks nedaugiau 8 metimų. Jei metant iš 15 aukšto pirmoji vaza nesudūžta, ją metame iš 21 aukšto $(21 = 15 + 6)$ ir t.t. Pirmajai vazai nesudužus, ji metama iš 26 aukšto $(26 = 21 + 5)$ iš 30 aukšto $(30 = 26 + 4)$, iš 33 aukšto $(33 = 30 + 3)$, iš 35 aukšto $(35 = 33 + 2)$ ir galiausiai iš 36 aukšto $(36 = 35 + 1)$.

Naudojant šį planą tikrai užteks 8 metimų.

7 metimų gali neužtekti. Jei norime nustatyti kritinį aukštą per 7 metimus, tai pirmą vazą turime išmesti iš neaukštesnio, kaip 7 aukšto. Kitaip, pirmai vazai iš karto sudužus, antrą vazą gali reikėti mesti >7 kartus (pradedant nuo 1 aukšto). Jei metam iš 7 aukšto ir vaza nesudūžta, antrą metimą būtina atlikti ne aukščiau kaip iš $7 + 6 = 13$ aukšto, trečią ne aukščiau kaip $13 + 5 = 18$ aukšto, ketvirtą $\leq 18 + 4 = 22$ aukšto, penktą – iš $\leq 22 + 3 = 25$, šeštą – iš $\leq 25 + 2 = 27$, septintą – iš $\leq 27 + 1 = 28$. Bet jei kritinis aukštas aukščiau, jo nenustatysime.

6. Įrodykite, kad $nx^{n+1}-(n+1)x^n+1$ dalijasi iš $(x-1)^2$ be liekanos.

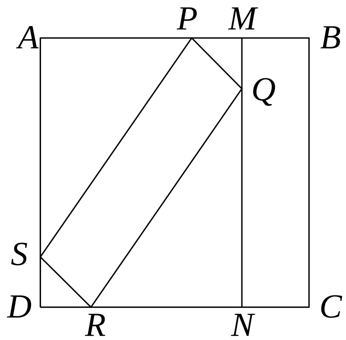
Įrodymas. $nx^{n+1}-nx^n-(x^n-1)=nx^n(x-1)-(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+...+x+1)=$

$=(x-1)[nx^n-x^{n-1}-x^{n-2}-...-x-1]=$

$=(x-1)[(x^n-x^{n-1})+(x^n-x^{n-2})+...+(x^n-x)+(x^n-1)]=(x-1)^2[x^{n-1}+x^{n-2}(x+1)+$

$+...+x(x^{n-2}+x^{n-3}+...+x+1)+(x^{n-1}+x^{n-2}+...+x+1]$.

7. Duotas vienetinis kvadratas *ABCD* ir žinoma, kad stačiakampis *MBCN* (žr. 2 pav.) lygus stačiakampiui *PQRS*. Raskite stačiakampio *MBCN* kraštines.



2 pav.

Sprendimas. Pažymėkime $\alpha=\angle ASP$. Aišku

$$\alpha=\angle QPM=\angle RQN=\angle SRD.$$

Turime:

$AS=\cos\alpha$,

$SD=1-\cos\alpha=SR\sin\alpha\Rightarrow SR=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$;

$NC=SR\Rightarrow 1-\cos\alpha=NC\sin\alpha=$

$=(1-DR-RN)\sin\alpha=(1-DR-\sin\alpha)\sin\alpha\Rightarrow$

$\Rightarrow DR\sin\alpha=(1-\sin\alpha)\sin\alpha-1+\cos\alpha\Rightarrow$

$\Rightarrow DR=\dfrac{\sin\alpha(1-\sin\alpha)-1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Bet $DR=SR\cos\alpha=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\cos\alpha$. Taigi

$\sin\alpha(1-\sin\alpha)-1+\cos\alpha=(1-\cos\alpha)\cos\alpha\Rightarrow 2\sin^2\alpha-\sin\alpha=0\Rightarrow\sin\alpha(2\sin\alpha-1)=0\Rightarrow$

$\Rightarrow\sin\alpha=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\alpha=30^\circ$.

Taigi $SR=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{1-\sqrt{3}/2}{1/2}=2-\sqrt{3}\Rightarrow NC=2-\sqrt{3}$; $BC=1$.

8. Koridoriuje yra 1024 sunumeruotos iš eilės dėžutės su durelėmis. Mokinys atidaro pirmąją dėžutę, praleidžia antrąją, atidaro trečiąją, praleidžia ketvirtąją ir t.t. Pasiekęs galą, apsisuka ir atidaro pirmą neatidarytą (t.y. 1024-ją) dėžutę ir eina atgal, vėl atidarinėdamas kas antrą iš neatidarytų dėžučių. Pasiekęs galą, vėl apsisuka ir viskas prasideda iš naujo. Jis vaikšto tol, kol atidaro visas dureles. Koks paskutinės atidarytos dėžutės numeris?

Sprendimas. $1024=2^{10}$. Tarkime, kad turint 2^n dėžučių, paskutinės atidarytos numeris m_n. Turint 2^{n+1} dėžutę, pradžioje atidaromos dėžutės su numeriais 1, 3, … , $2^{n+1}-1$ ir lieka du kartus mažiau, t.y. 2^n dėžučių. Lieka dėžutės su numeriais 2, 4, 6, … , 2^{n+1}, kuriuos galim užrašyti $2\cdot 1$, $2\cdot 2$, $2\cdot 3$, … , $2\cdot 2^n$. Tarp likusiųjų paskutinė bus atidaryta su numeriu

$$m_{n+1}=2(2^n-(m_n-1))=2(2^n-m_n+1).$$

Turime

$$m_{n+1}=2(2^n-2(2^{n-1}-m_{n-1}+1)+1=2(2m_{n-1}-1).$$

Kai $n=2$, turime $2^2=4$ dėžutes. Jos atidaromos tvarka 1, 3, 4, 2, t.y. $m_2=2$. Todėl $m_4=2(2m_2-1)=6$, $m_6=2(2m_4-1)=22$, $m_8=2(2m_6-1)=86$ ir $m_{10}=2(2m_8-1)=342$. Taigi paskutinė bus atidaryta dėžutė su numeriu 342.

9. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} 5[x]+2[y]=19, \\ 3x+4y=21; \end{cases}$$

čia $[x]$ yra skaičiaus x sveikoji dalis.

Sprendimas. $x=[x]+\{x\}$, kur $\{x\}$ yra skaičiaus x trupmeninė dalis, $0\le\{x\}<1$. Analogiškai $y=[y]+\{y\}$, $0\le\{y\}<1$. Todėl

$$3[x]+4[y]=21-3\{x\}-4\{y\},$$

iš kur išplaukia, kad

$$15\le 3[x]+4[y]\le 21.$$

Iš pirmosios lygties $2[y]=19-5[x]$, todėl turime

$$15\le 3[x]+38-10[x]\le 21,$$

kas ekvivalentu

$$\frac{17}{7}\le[x]\le\frac{23}{7},$$

iš kur $[x]=3$, $[y]=\dfrac{19-5[x]}{2}=2$. Taigi imame $x=3+u$, $0\le u<1$ ir $y=2+v$, $0\le v<1$. Įstatę į antrąją lygtį, turime: $3u+4v=4$, todėl $v=1-\dfrac{3}{4}u$.

Lygčių sistemos sprendiniai turi pavidalą $\left\{3+u, 3-\dfrac{3}{4}u\right\}$, $u\in[0,1[$.

10. Raskite funkciją $f(x)$, kuri su visais realiaisiais skaičiais x tenkina lygtį

$$2f(x)+f(1-x)=x^2.$$

Sprendimas. Pakeitę x ir $1-x$, turėsime, kad

$$2f(1-x)+f(x)=(1-x)^2.$$

Todėl

$$f(x)=\frac{2x^2-(1-x)^2}{3}.$$