PASVALIO KRAŠTO MOKSLEIVIŲ MATEMATIKOS TREČIOJI KOMANDINĖ OLIMPIADA PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO TAUREI LAIMĖTI

UŽDAVINIŲ SPRENDIMAI

Pasvalys, 2001 m. lapkričio mėn. 23 d.
Uždavinių sprendimo trukmė – 2 val.

1. Išspręskite lygčių sistemą:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_{2001} = 2001, \\ x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_{2001}^3 = x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_{2001}^4. \end{cases}$$

Sprendimas. Lygčių sistema turi pavidalą:

$$\sum_{i=1}^{2001}(x_i - 1) = 0, \quad \sum_{i=1}^{2001} x_i^3(x_i - 1) = 0,$$

todėl

$$0 = \sum_{i=1}^{2001} x_i^3(x_i - 1) - \sum_{i=1}^{2001}(x_i - 1) = \sum_{i=1}^{2001}(x_i - 1)(x_i^3 - 1) = \sum_{i=1}^{2001}(x_i - 1)^2(x_i^2 + x_i + 1).$$

Bet $(x_i - 1)^2 \geq 0$, $x_i^2 + x_i + 1 > 0$ su visais $x_i \in \mathrm{R}$. Taigi $x_i = 1$ $(i = 1, \ldots, 2001)$.

2. Duota $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_n = \frac{a_{n-1}}{2na_{n-1} + 1}$, $n > 1$. Raskite $a_1 + \ldots + a_{2001}$.

Sprendimas.

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{2na_{n-1} + 1} = \frac{1}{2n + \frac{1}{a_{n-1}}} \Rightarrow \frac{1}{a_n} = 2n + \frac{1}{a_{n-1}} = 2n + 2(n-1) + \ldots + 2 \cdot 2 + \frac{1}{a_1} =$$

$$= 2[n + (n-1) + \ldots + 2 + 1] = n(n+1) \Rightarrow a_n = \frac{1}{n(n+1)} \Rightarrow a_1 + \ldots + a_{2001} =$$

$$= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{2001 \cdot 2002} = 1 - \frac{1}{2002} = \frac{2001}{2002}.$$

3. Automobilio priekinės padangos visiškai nusidėvi, nuvažiavus n_1 km, o užpakalinės – nuvažiavus n_2 km, $n_2 < n_1$. Norint, kad visos padangos nusidėvėtų vienu metu, jos tam tikru momentu keičiamos vietomis. Kiek tada pailginama automobilio rida (naudojant vieną keturių padangų komplektą)?

Sprendimas. Visos padangos nusidėvi vienu metu, jei pusę kelio važiuos ant priekinio rato ir pusę kelio ant užpakalinio rato. Todėl, pravažiavus pusę kelio, reikia apkeisti vietomis priekines ir užpakalines padangas. Tarkime, kad puse kelio yra S km. Nuvažiavus S km, nusidėvi $\frac{S}{n_1}$ dalis priekinės padangos protektoriaus. Perkėlus ją ant užpakalinio rato, nusidėvi likusi $1-\frac{S}{n_1}$ dalis protektoriaus, kuri lygi $\frac{S}{n_2}$.

Taigi $1-\frac{S}{n_2}=\frac{S}{n_1} \Rightarrow S=\frac{n_1 n_2}{n_1+n_2}$. Nekeičiant padangų, nuvažiuotas kelias yra n_2 km, keičiant — $2\frac{n_1 n_2}{n_1+n_2}$. Skirtumas $2\frac{n_1 n_2}{n_1+n_2}-n_2=\frac{n_2(n_1-n_2)}{n_1+n_2}$.

4. Įrodykite, kad iš plytos negalima išpjauti mažesnės plytos, kurios tūris ir pilnasis paviršius būtų atitinkamai lygūs pusei duotosios plytos tūrio ir pilno paviršiaus.

Sprendimas. Turime plytas $a\times b\times c$ ir $x\times y\times z$, $x\le a$, $y\le b$, $z\le c$ ir bent viena nelygybė griežta. Tada

$$abc=2xyz \Rightarrow ab=\frac{2xyz}{c},\ bc=\frac{2xyz}{c},\ ac=\frac{2xyz}{c};$$

$$ab+bc+ac=2(xy+xz+yz) \Rightarrow 2xyz(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})=2xyz(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z};$$ tai prieštarauja sąlygai.

5. Mieste yra n pastatų, kurių amžių suma lygi T. Kada miestas bus jaunesnis: ar nugriovus seną pastatą, ar pastačius naują? Miesto amžiumi vadinamas jo pastatų amžių vidurkis.

Sprendimas. Vidutinis pastatų amžius $\frac{T}{n}$. Jei nuversto amžius t, tai nugriovus vidutinis amžius $\frac{T-t}{n-1}$. Pastačius vidutinis amžius $\frac{T}{n+1}$. Taigi $\frac{T-t}{n-1}<\frac{T}{n+1} \Leftrightarrow t>\frac{2T}{n+1}$.

Jei $t>\frac{2T}{n+1}$, tai nugriovus jaunesnis, negu pastačius naują.

Jei $t<\frac{2T}{n+1}$, tai pastačius naują jaunesnis, negu nugriovus seną.

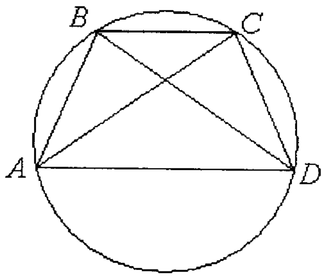
6. Nelyginiai natūralieji skaičiai jungiami į grupes. Pirmoje grupėje vienas skaičius (1), antroje du (3+5), trečioje trys (7+9+11) ir t.t. Įrodykite, kad n-osios grupės skaičių suma lygi n^3.

Sprendimas. Prieš n-ją grupę yra $1+2+\ldots+(n-1)=\frac{1}{2}n(n-1)$ narių. k-sis narys visų nelyginių skaičių eilutėje turi pavidalą $2k-1$, taigi $(\frac{1}{2}n(n-1)+1)$-as narys yra

$2(\frac{1}{2}n(n-1)+1)-1=n(n-1)+1$. n-sios grupės narių suma:

$$[n(n-1)+1]+[n(n-1)+3]+\ldots+[n(n-1)+(2n-1)]=$$
$$=n\cdot n(n-1)+\frac{1+2n-1}{2}n=n^2(n-1)+n^2=n^3.$$

7. Įrodyti, kad įbrėžtas į apskritimą keturkampis yra lygiašonė trapecija, kai jo įstrižainės yra lygios.



Sprendimas.
$AC = BD \Rightarrow \cup ABC = \cup BCD \Rightarrow \angle BAD = \angle ADC$.
Bet $\angle ABC = 180° - \angle ADC \Rightarrow \angle ABC = 180° - \angle BAD \Rightarrow$
$\Rightarrow AD \| BC$. Taigi keturkampis yra lygiašonė trapecija.

8. Tegu x ir y – stačiojo trikampio statinių, o z – įstrižainės ilgiai. Kas daugiau: a) $x^3 + y^3$ ar z^3? b) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ ar $\frac{1}{z}$?

Sprendimas. a) $x^2 + y^2 = z^2 \mid y$

Tarkime, kad $x \leq y < z$. $x^2y + y^3 = z^2y$, $x^2y + y^3 \geq x^3 + y^3$, $z^2y < z^3 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^3 + y^3 < z^3$.

b) $z > x \Rightarrow \frac{1}{z} < \frac{1}{x} < \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

9. Įrodykite, kad su visais natūraliaisiais n galioja nelygybė $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n^2} \not> 1$.

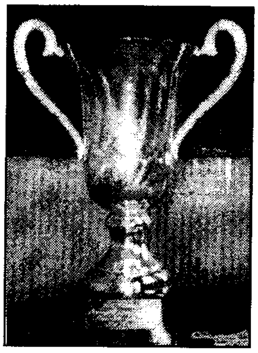
Sprendimas. Akivaizdu, kad $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n^2} \not> \frac{1}{n} + \frac{n^2 - n}{n^2} = 1$.

10. Išspręskite lygtį

$$|x^2 - 5x + 6| + |x^2 - 2x| = 0.$$

Sprendimas. $x^2 - 5x + 6 = 0$ ir $x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 2$ arba $x = 3$ ir $x = 0$ arba $x = 2 \Rightarrow x = 2$.

Vyresniųjų klasių grupė



PASVALIO KRAŠTO MOKSLEIVIŲ MATEMATIKOS TREČIOJI KOMANDINĖ OLIMPIADA PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO TAUREI LAIMĖTI

UŽDAVINIŲ SPRENDIMAI

Pasvalys, 2001 m. lapkričio mėn. 23 d.
Uždavinių sprendimo trukmė – 2 val.

1. Sveikųjų skaičių aibės Z poaibio A elementai turi savybę: jei $x, y \in A$, tai $x - y \in A$. Žinoma, kad $2001 \in A$ ir intervale $[-100, 100]$ yra nemažiau 10 ir nedaugiau 67 aibės A elementų. Kiek aibės A elementų yra intervale $[-2001; 2001]$?

Sprendimas. Jei $1 \in A$, tai $0 = 1 - 1 \in A$, $-1 = 0 - 1 \in A$, $2 = 1 - (-1) \in A$, $-2 = 0 - 2 \in A, \ldots$, t.y. $A = \mathrm{Z}$.

Jei $1 \notin A$, $2 \in A$, tai $A = \{2k, k \in \mathrm{Z}\}$.

Jei $1, \ldots, (n-1) \notin A$, $n \in A$, tai $A = \{nk, k \in \mathrm{Z}\}$.

Kadangi $2001 = 3 \cdot 23 \cdot 29 \in A$, tai A gali būti

$$\{3k\}, \{23k\}, \{29k\}, \{3 \cdot 23k\}, \{3 \cdot 29k\}, \{23 \cdot 29k\}, \{3 \cdot 23 \cdot 29k\}, k \in \mathrm{Z}.$$

Intervale $[-100; 100]$ yra $2 \cdot 33 + 1 = 67$ aibės $\{3k, k \in \mathrm{Z}\}$ elementai $9 = 4 \cdot 2 + 1$ aibės $\{23k,\ k \in \mathrm{Z}\}$ elementai ir dar mažiau kitų galimų aibių elementų. Taigi, $A = \{3k, k \in \mathrm{Z}\}$. Intervale $[-2001; 2001]$ yra $2 \cdot 667 + 1 = 1335$ aibės A elementai.

2. Duota skaičių seka $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$. Žinoma, kad $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = n^2 a_n$, $n \in \mathrm{N}$. Su kokiomis a_1 reikšmėmis a_{2001} yra sveikasis skaičius?

Sprendimas. $a_1 + \ldots + a_{n-1} = (n-1)^2 a_{n-1} \Rightarrow a_n = n^2 a_n - (n-1)^2 a_{n-1} \Rightarrow$

$$a_n = \frac{n-1}{n+1} a_{n-1} = \frac{n-1}{n+1} \frac{n-2}{n} \ldots \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} a_1 = \frac{2}{(n+1) \cdot n} a_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{2001} = \frac{2}{2002 \cdot 2001} a_1 = k \in \mathrm{Z}, \text{ jei } a_1 = 1001 \cdot 2001k,\ k \in \mathrm{Z}.$$

3. Raskite skaičiaus $2^{2n}(2^{2n+1} - 1)$ ($n \in \mathrm{N}$, n nelyginis) paskutinį skaitmenį.

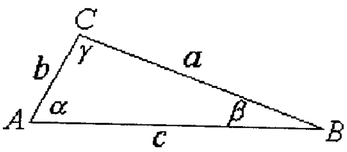
Sprendimas. $A_n = 2^{2n}(2^{2n+1} - 1),\ n \in \mathrm{N} \Rightarrow A_1 = 4 \cdot 7 = 28,\ A_3 = 8078$ baigiasi 8. Tarkime, kad A_{2m+1} baigiasi 8. Reikia įrodyti, kad A_{2m+3} irgi baigiasi 8 (matematinės indukcijos metodas). Nagrinėkime skirtumą:

$$A_{2m+3} - A_{2m+1} = 2^{8m+13} - 2^{4m+6} - 2^{8m+5} + 2^{4m+2} =$$
$$= 2^{8m+5}(2^8 - 1) - 2^{4m+2}(2^4 - 1) = (2^4 - 1)\,[2^{8m+5}(2^4 + 1) - 2^{4m+2}].$$

Bet $2^4 - 1 = 15$ dalijas iš 5. Be to, $A_{2m+3} - A_{2m+1}$ lyginis skaičius, todėl $A_{2m+3} - A_{2m+1}$ dalijasi iš 10. Taigi paskutinis A_{2m+3} skaitmuo irgi yra 8.

4. Duotas trikampis ABC, kuriame $\angle BAC = 3\angle ABC$.

Įrodykite, kad $(a+b)(a-b)^2 = bc^2$.



Sprendimas.

$$\alpha = 3\beta \Rightarrow \gamma = \pi - 4\beta \Rightarrow \frac{a}{\sin 3\beta} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin 4\beta} = k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a+b)(a-b)^2 = k^3(\sin 3\beta + \sin\beta)(\sin 3\beta - \sin\beta)^2 =$$

$$= k^3 2\sin 2\beta\cos\beta(2\cos 2\beta\sin\beta)^2 = 8k^3\sin 2\beta\cos^2 2\beta\sin^2\beta\cos\beta =$$

$$= 8k^3\sin\beta\sin^2 2\beta\cos^2 2\beta = k^3\sin\beta\sin^2 4\beta = bc^2.$$

5. Automobilio priekinės padangos visiškai nusidėvi, nuvažiavus n_1 km, o užpakalinės – nuvažiavus n_2 km, $n_2 < n_1$. Norint, kad visos padangos nusidėvėtų vienu metu, jos tam tikru momentu keičiamos vietomis. Kiek tada pailginama automobilio rida (naudojant vieną keturių padangų komplektą)?

Sprendimas. Visos padangos nusidėvi vienu metu, jei pusę kelio važiuos ant priekinio rato ir pusę kelio ant užpakalinio rato. Todėl, pravažiavus pusę kelio, reikia apkeisti vietomis priekines ir užpakalines padangas. Tarkime, kad pusė kelio yra S km. Nuvažiavus S km, nusidėvi $\frac{S}{n_1}$ dalis priekinės padangos protektoriaus. Perkėlus ją ant užpakalinio rato, nusidėvi likusi $1-\frac{S}{n_1}$ dalis protektoriaus, kuri lygi $\frac{S}{n_2}$.

Taigi $1-\frac{S}{n_2} = \frac{S}{n_1} \Rightarrow \quad S = \frac{n_1 n_2}{n_1+n_2}$. Nekeičiant padangų, nuvažiuotas kelias yra n_2 km, keičiant — $2\frac{n_1 n_2}{n_1+n_2}$. Skirtumas $2\frac{n_1 n_2}{n_1+n_2} - n_2 = \frac{n_2(n_1-n_2)}{n_1+n_2}$.

6. 100 apskritimo taškų pažymimi skaičiais 1, 2, … , 100 (nebūtinai eilės tvarka). Skaičiuojamos visos gretimų skaičių trejetų sumos. Įrodykite, kad egzistuoja du trejetai, kurių sumų skirtumas didesnis už du.

Sprendimas. Tarkime, kad visos sumos skiriasi viena nuo kitos ne daugiau kaip per du, o kurių nors gretimų trijų skaičių suma lygi k. Tada

$k-2 \le a_1 + a_2 + a_3 \le k+2$,

$k-2 \le a_2 + a_3 + a_4 \le k+2$,

$k-2 \le a_3 + a_4 + a_5 \le k+2$,

……………………………………

$k-2 \le a_{99} + a_{100} + a_1 \le k+2$,

$k-2 \le a_{100} + a_1 + a_2 \le k+2$.

Sudedame atitinkamas nelygybių puses:

$100k - 200 \le 3(1+\ldots+100) \le 100k + 200$,

$100k - 200 \le 3\cdot 50\cdot 101 \le 100k + 200$,

$2k - 4 \le 303 \le 2k + 4$,

$149{,}5 \le k \le 153{,}5 \quad \Rightarrow 150 \le k \le 153$.

Taigi sumos patenka į intervalą [148, 155]. Iš sąlygos išplaukia, kad

$$-2 \le (a_1 + a_2 + a_3) - (a_2 + a_3 + a_4) \le 2.$$

Todėl $-2 \le a_4 - a_1 \le 2$. Analogiškai:

$-2 \le a_5 - a_2 \le 2$

....

$-2 \le a_1 - a_{98} \le 2$

$-2 \le a_2 - a_{99} \le 2$

$-2 \le a_3 - a_{100} \le 2$

Tarkime, kad $a_1 = 1$. Tada $a_4, a_{98} = 2$ arba 3, nes $|a_1 - a_4| \le 2$, $|a_1 - a_{98}| \le 2$. Analogiškai $a_7, a_{95} = 4$ arba 5, a_{10}, $a_{92} = 6$ arba 7 ir t.t.

a_{3k+1}, $a_{102-(3k+1)} = 2k$ arba $2k+1$.

Taigi $a_{100} = a_{3 \cdot 33+1}$, $a_2 = a_{102-100} = 66$ arba 67. Turime $a_{100} = 66$ arba 67, $a_1 = 1$, $a_2 = 67$ arba 66. $a_{100} + a_1 + a_2 = 134 \notin [148; 155]$. Prieštaravimas. Taigi yra du trejetai, kurių sumų skirtumas didesnis už du.

7. Išspręskite lygtį $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4} = 0$.

Sprendimas. $y = x+2$: $\frac{1}{y-2} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{y+2} = 0$

$\frac{1}{y} = z$, $z \ne 0$

$$\frac{1}{\frac{1}{z}-2} + \frac{1}{\frac{1}{z}-1} + z + \frac{1}{\frac{1}{z}+1} + \frac{1}{\frac{1}{z}+2} = 0 \sim \frac{1}{1-2z} + \frac{1}{1-z} + 1 + \frac{1}{1+z} + \frac{1}{1+2z} \sim$$

$$\frac{2}{1-4z^2} + \frac{2}{1-z^2} + 1 = 0$$

$z^2 = v$

$$\frac{2}{1-4v} + \frac{2}{1-v} + 1 = 0 \sim 4v^2 - 15v + 5 = 0$$

$$v = \frac{15 \pm \sqrt{145}}{8}, \quad z_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{15+\sqrt{145}}{2}}, \quad z_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{15+\sqrt{145}}{2}},$$

$$z_3 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{15-\sqrt{145}}{2}}, \quad z_4 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{15-\sqrt{145}}{2}}.$$

$$y_1 = \frac{2}{\sqrt{\frac{15-\sqrt{145}}{2}}} = \frac{2\sqrt{\frac{15+\sqrt{145}}{2}}}{\frac{1}{2}\sqrt{80}} = \sqrt{\frac{15+\sqrt{145}}{10}}$$

$$y_2 = -\sqrt{\frac{15+\sqrt{145}}{10}}, \quad y_3 = \sqrt{\frac{15-\sqrt{145}}{10}}, \quad y_4 = -\sqrt{\frac{15-\sqrt{145}}{10}}.$$

$$x_1 = \sqrt{\frac{15+\sqrt{145}}{10}} - 2, x_2 = -\sqrt{\frac{15+\sqrt{145}}{10}} - 2, x_3 = \sqrt{\frac{15-\sqrt{145}}{10}} - 2, x_4 = -\sqrt{\frac{15-\sqrt{145}}{10}} - 2.$$

8. Įrodykite, kad

$$\underbrace{2\,2\ldots2}_{n\text{ kartų}}+(\underbrace{3\ldots3}_{n\text{ kartų}})^2=\underbrace{1\,1\ldots1}_{2n\text{ kartų}}.$$

Sprendimas. Tegu $a_n=\underbrace{2\,2\ldots2}_{n\text{ kartų}}$, $b_n=\underbrace{3\,3\ldots3}_{n\text{ kartų}}$, $c_n=\underbrace{1\,1\ldots1}_{2n\text{ kartų}}$. Akivaizdu, kad lygybė

$$a_n+b_n^2=c_n \qquad (*)$$

teisinga, kai $n=1$, nes $a_1=2$, $b_1=3$ ir $c_1=11$. Lygybę (*) įrodysime indukcijos būdu. Kadangi $a_{n+1}=10a_n+2$, $b_{n+1}=10b_n+3$, $c_{n+1}=100c_n+11$ ir $3a_n=2b_n$, tai, pasinaudoję (*), randame, kad

$$a_{n+1}+b_{n+1}^2=10a_n+2+(10b_n+3)^2=10a_n+100b_n^2+60b_n+11=100c_n+11-90a_n+60b_n=c_{n+1}.$$

9. Urnoje yra M baltų ir N juodų rutulių. Atsitiktinai ištraukiami vienas po kito du rutuliai grąžinant juos į urną. Raskite tikimybę, kad abu ištraukti rutuliai yra tos pačios spalvos ir įrodykite, kad ji yra nemažesnė už 1/2.

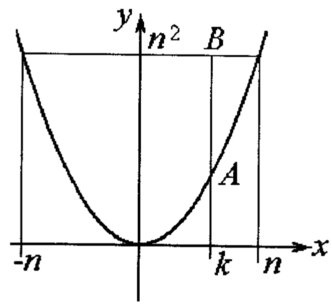
Sprendimas. Akivaizdu, kad ieškomoji tikimybė yra

$$\frac{M^2}{(M+N)^2}+\frac{N^2}{(M+N)^2}=\frac{M^2+2MN+N^2-2MN}{(M+N)^2}=1-2\frac{M}{M+N}\cdot\frac{N}{M+N}=$$

$$=1-2\frac{M}{M+N}\left(1-\frac{M}{M+N}\right)\ge\frac{1}{2},$$ nes su visais $0\le p\le1$, $p(1-p)\le\frac{1}{4}$. Mes pasinaudojome pastarąja nelygybe su $p=\dfrac{M}{M+N}$.

10. Raskite taškų su sveikomis koordinatėmis, esančių tarp parabolės $y=x^2$ ir tiesės $y=n^2$ (n – fiksuotas natūralusis skaičius) skaičių, patikrinus, kad $\sum\limits_{k=1}^{n}k^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Sprendimas. Tegu k yra sveikas skaičius $-n<k<n$. Atkarpoje AB taškų su sveikomis koordinatėmis, esančių tarp parabolės $y=x^2$ ir tiesės $y=n^2$ yra n^2-1-k^2, nes taško A koordinatės yra $(k;k^2)$, o taško B – (k,n^2). Tokiu būdu ieškomų taškų skaičius yra



$$n^2-1+2\sum_{k=1}^{n-1}(n^2-1-k^2)=n^2-1+2(n-1)(n^2-1)-2\sum_{k=1}^{n-1}k^2=$$

$$=\frac{(n-1)(2n-1)(2n+3)}{3},$$

nes $\sum\limits_{k=1}^{n-1}k^2=\dfrac{(n-1)\,n\,(2n-1)}{3}$. Pastarąją lygybę lengva patikrinti indukcijos būdu.