Aivaras Novikas
Vilniaus miesto mokinių matematikos olimpiada
Sprendimai

2007 m.

IX klasė

1. Ant lentos užrašyta 10 pliusų ir 15 minusų. Leidžiama nutrinti bet kuriuos du ženklus ir vietoj jų parašyti pliusą, jei tie ženklai sutampa, arba minusą, jei jie skirtingi. Koks ženklas galiausiai liks lentoje (po 24 operacijų)?

Sprendimas. Uždavinį patogu performuluoti, pliusus pakeičiant skaičiumi 1, o minusus skaičiumi -1. Tada nutrinant du vienodus skaičius, jie pakeičiami šių skaičių sandauga $1 = 1 \cdot 1 = (-1) \cdot (-1)$. Nutrinant du skirtingus skaičius, jie ir vėl pakeičiami sandauga $-1 = 1 \cdot (-1) = (-1) \cdot 1$. Abiem atvejais skaičiai x_1 ir x_2 pakeičiami skaičiumi $x_1 x_2$ ir visų skaičių sandauga $x_1 x_2 \ldots$ nepakinta. Taigi po bet kokio skaičiaus operacijų ji lygi pradinei sandaugai $1^{10} \cdot (-1)^{15} = 1 \cdot (-1) = -1$.

Skaičių lentoje mažėja po vieną, todėl po 23 operacijų ant lentos liks 2 iš 25 skaičių. Jie paskutine 24-ąja operacija pakeičiami sandauga -1. Tai ir bus paskutinis skaičius, kurį atitinka ženklas minusas.

Ats.: minusas.

2. Apskaičiuokite reiškinio reikšmę:

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{400}\right).$$

Sprendimas. Pasinaudokime tuo, kad vardikliuose įrašyti tikslūs kvadratai:

$$1-\frac{1}{m^2}=\frac{m^2-1}{m^2}=\frac{(m-1)(m+1)}{m^2}.$$

Todėl

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{400}\right)=\frac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3^2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4^2}\cdot\ldots\cdot\frac{19\cdot 21}{20^2}=$$

$$=\frac{(1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 19)\cdot(3\cdot 4\cdot 5\cdot\ldots\cdot 21)}{(2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot 20)^2}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 19}{2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot 20}\cdot\frac{3\cdot 4\cdot 5\cdot\ldots\cdot 21}{2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot 20}=$$

$$=\frac{1}{20}\cdot\frac{21}{2}=\frac{21}{40}.$$

Ats.: $21/40$.

3. Raskite visas sveikųjų skaičių poras (x, y), tenkinančias lygtį

$$(x+y^2)\cdot(x^2+y)=(x+y)^3.$$

Sprendimas. Pastebėkime, kad $(x+0^2)\cdot(x^2+0)=x^3=(x+0)^3$. Todėl $(x,0)$ yra sprendinys su bet kuria sveikąja x reikšme. Sprendinys yra ir $(0,y)$ su bet kuria sveikąja y reikšme. Toliau laikykime, kad $x, y \neq 0$.

Atskliauskime ir prastinkime:

$$x^3+xy+x^2y^2+y^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3, \qquad x^2y^2+xy=3x^2y+3xy^2,$$

$$xy(xy+1)=xy(3x+3y), \qquad (x,y\neq 0) \quad xy+1=3x+3y,$$

$$x(y-3)-3y+1=0, \qquad x(y-3)-3(y-3)-8=0,$$

$$(x-3)(y-3)=8.$$

Skaičius $x-3$ yra skaičiaus 8 daliklis, taigi $x-3=-8,-4,-2,-1,1,2,4$ arba 8. Atitinkamai $y-3=-1,-2,-4,-8,8,4,2$ arba 1. Taip gauname sprendinius

$$(x,y)=(-5,2),(-1,1),(1,-1),(2,-5),(4,11),(5,7),(7,5),(11,4).$$

Visi šie sprendiniai tenkina pradinę lygtį.

Ats.: $(-5,2),(-1,1),(1,-1),(2,-5),(4,11),(5,7),(7,5),(11,4)$;
$(x,0), x\in\mathbb{Z}; (0,y), y\in\mathbb{Z}$.

4. Ar 81-ženklis skaičius $\underbrace{111\ldots1}_{81\text{ skaitmuo}}$, kurio visi skaitmenys yra vienetai, dalijasi iš 81?

Sprendimas. Skaičius dalijasi iš 9, kai jo skaitmenų suma dalijasi iš 9. Deja, tokio dalumo iš 81 požymio nėra. Nepaisant to, skaitmenys ir jų sumos mums bus svarbios.

Skaičių sudarančius skaitmenis galima suskirstyti į 9 grupes po 9 skaitmenis. Pastebėkime, kad, pvz., $1111 = 11\cdot 101, 111111111 = 111000000+111000+111 = 111\cdot(1000000+1000+1)=111\cdot 1001001$ ir t. t. Taip pat ir

$$\underbrace{111\ldots1}_{81\text{ skaitmuo}}=111111111\cdot\underbrace{1000000001000000001 0\ldots1}_{9\text{ vienetai}}.$$

Abiejų dauginamųjų skaitmenų sumos lygios 9, todėl kiekvienas iš šių skaičių dalijasi iš 9. Tada jų sandauga dalijasi iš $9\cdot 9=81$.

Ats.: taip.

2007 m., X klasė

1. Žr. IX klasės 1 uždavinį.

2. Pažymėkime A_n aibę, kurią sudaro iš eilės einantys natūralieji skaičiai nuo n iki n^2, t. y.

$$A_n = \{n, n+1, n+2, \ldots, n^2\}.$$

Aibė A_n vadinama *tvarkinga*, jeigu joje yra keturi skirtingi skaičiai a, b, c ir d, kuriems galioja lygybė $ad = bc$.

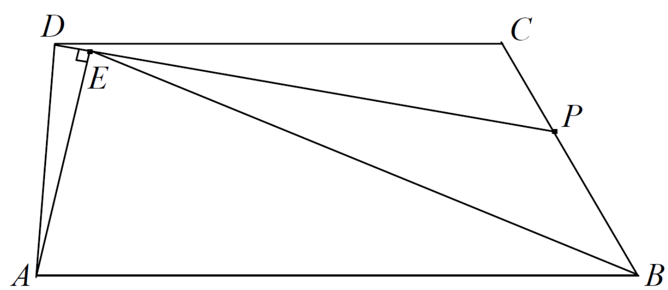
a) Ar A_{10} yra tvarkinga aibė?
b) Ar A_{2007} yra tvarkinga aibė?
c) Su kuriais natūraliaisiais n aibė A_n yra tvarkinga?

Sprendimas. Iš karto spręskime c) dalį. Kai $n = 1$ arba $n = 2$, aibėje A_n tėra vienas arba trys skaičiai, todėl A_n nėra tvarkinga aibė.

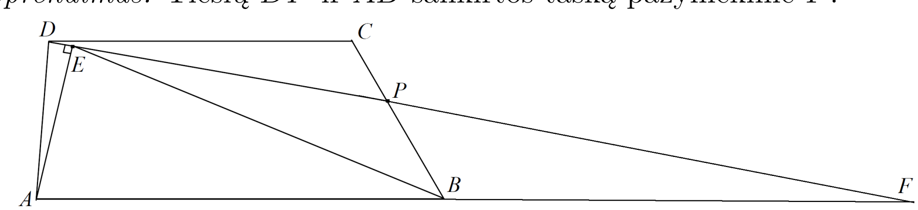
Kai $n \geqslant 3$, tai $(n-1)^2 \geqslant (3-1)^2 > 3$, todėl $n^2 - 2n + 1 > 3$ ir $n^2 > 2n + 2$. Taigi $n < n+1 < 2n < 2n+2 < n^2$. Aibei A_n priklauso skirtingi skaičiai n, $n+1$, $2n$, $2n+2$, tenkinantys lygybę $n \cdot (2n+2) = (n+1) \cdot 2n$. Vadinasi, aibė A_n tvarkinga.

Ats.: a), b) taip; c) kai $n \geqslant 3$.

3. Trapecijoje $ABCD$ kraštinė AB lygiagreti su kraštine CD. Taškas P pažymėtas kraštinėje BC taip, kad $\dfrac{AB}{DC} = \dfrac{BP}{CP}$. Iš taško A nuleistas statmuo į atkarpą DP (taškas E yra statmens pagrindas). Įrodykite, kad $AB = BE$.



Sprendimas. Tiesių DP ir AB sankirtos tašką pažymėkime F.

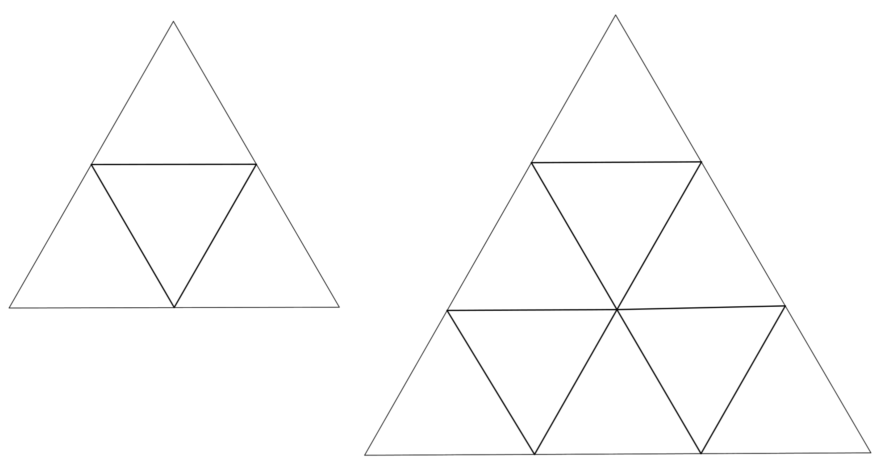


Trikampiai PCD ir PBF turi tuos pačius kampus: $\angle CPD = \angle BPF$ kaip kryžminiai, $AB || CD$, todėl $\angle PDC = \angle PFB$, $\angle PCD = \angle PBF$ kaip priešiniai. Taigi šie trikampiai panašūs ir panašumo koeficientas lygus $\frac{FB}{DC} = \frac{BP}{CP} = \frac{AB}{DC}$. Taigi $FB = AB$.

Dabar nagrinėkime trikampį AEF. Kadangi AE yra statmuo, tai šis trikampis statusis ir jo įžambinė AF yra apibrėžtinio apskritimo skersmuo (į ją remiasi statusis kampas). $AB = BF$, todėl skersmens AF vidurio taškas B yra apibrėžtinio apskritimo centras, o BA, BF, BE yra apskritimo spinduliai. Tada $AB = BE$, ką ir reikėjo įrodyti.

4. Ar lygiakraštį trikampį galima padalyti į 2007 lygiakraščius trikampius?

Sprendimas. Lygiakraščio trikampio vidurio linijos dalija jį į 4 lygiakraščius trikampius. Iš vieno trikampio gavome keturis, t. y. trikampių padidėjo trimis. Jei vieną iš gautųjų trikampių vėl taip pat padalysime į 4 trikampius, tai gausime dar 3 trikampiais daugiau, t. y. iš viso $1 + 3 + 3 = 7$ trikampius. Tęsdami šį procesą, gausime $1 + 3 + 3 + \ldots + 3 = 1 + 3n$ trikampių, kai $n = 1, 2, 3, \ldots$. Tačiau skaičiaus 2007, kuris dalijasi iš 3 be liekanos, taip negausime.



Gali atrodyti, kad kitų galimybių nėra, bet neskubėkime. Keturis trikampėlius galime įsivaizduoti sudėtus dviem eilėmis: viršutinėje eilėje vienas, o apatinėje trys trikampėliai. Sudėję dar vieną tokių pačių trikampėlių eilę apačioje, gausime lygiakraštį trikampį, padalytą į $1+3+5 = 9$ trikampėlius (žr. pav.). Žinoma, taip galima padalyti bet kurį lygiakraštį trikampį (atkarpomis, lygiagrečiomis kraštinėms ir dalijančiomis jas į lygias dalis). Bet kurį jau turimą trikampėlį galima vėl dalyti į 4 arba 9 mažesnius, taip pridedant po 3 ar 8 trikampėlius.

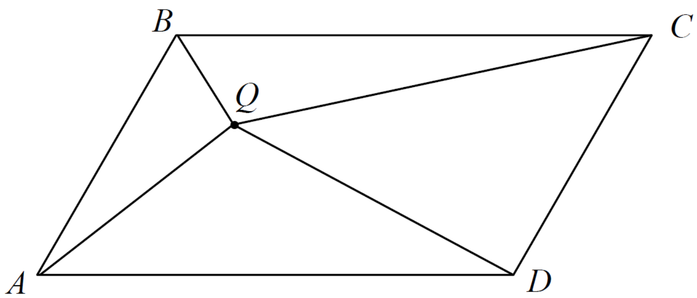
Pradžioje padalydami į 9 trikampius, o tada vis dalydami į 4 trikampius, galime gauti $9 + 3 + 3 + \ldots + 3 = 3n$ trikampėlių, kai $n = 3, 4, 5, \ldots$. Vadinasi, lygiakraštį trikampį galima padalyti ir į $2007 = 3 \cdot 669$ lygiakraščius trikampius.

Skaitytojui siūlome pačiam pamėginti įrodyti, kad atsakymas nepasikeis, skaičių 2007 sąlygoje pakeitus bet kokiu natūraliuoju skaičiumi, išskyrus 2, 3 ir 5.

Ats.: galima.

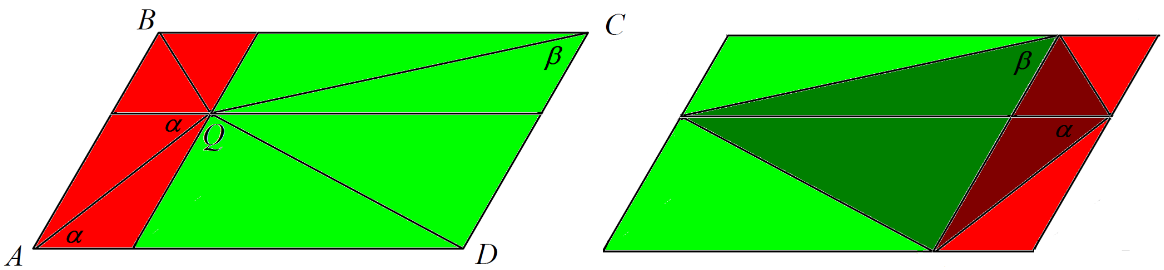
2007 m., XI klasė

1. Lygiagretainio $ABCD$ viduje pažymėtas taškas Q, kuris sujungtas su lygiagretainio viršūnėmis atkarpomis QA, QB, QC ir QD. Kampų AQB ir DQC suma lygi $180°$, o kampas QAD lygus $50°$. Raskite kampą QCD.



Sprendimas. Pažymėkime $\alpha = \angle QAD = 50°$ ir $\beta = \angle QCD$. Reikia rasti β.

Per tašką Q nubrėžkime atkarpas, lygiagrečias su lygiagretainio kraštinėmis. Kairiajame paveikslėlyje pasviroji atkarpa dalija lygiagretainį į du lygiagretainius – raudoną ir žalią, o horizontalioji atkarpa lygiagreti su kraštine AD, todėl sudaro su atkarpa AQ tokį patį kampą α.



Raudonąjį lygiagretainį lygiagrečiai pastumkime į dešinę nuo žaliojo, kaip parodyta dešiniajame paveikslėlyje. Atkarpos AB ir CD sutampa, o per Q einančios horizontalios atkarpos dalys lieka horizontalios, taigi vėl sudaro atkarpą.

Trikampiai AQB ir CQD sudaro patamsintą keturkampį. Jo priešingų kampų suma lygi $\angle AQB + \angle CQD = 180°$, todėl apie šį keturkampį galima apibrėžti apskritimą. Du pažymėti kampai lygūs, nes remiasi į tą patį apibrėžtinio apskritimo lanką: $\beta = \alpha = 50°$.

Ats.: $50°$.

2. Žr. X klasės 4 uždavinį.

3. Raskite visus natūraliųjų skaičių rinkinius (a, b, c, d), tenkinančius lygčių sistemą

$$\begin{cases} ab + cd = 34, \\ ac - bd = 19. \end{cases}$$

Sprendimas. Kai uždavinį reikia išspręsti sveikaisiais skaičiais, dažnai praverčia skaičių dalumas.

Pvz., jei antroji lygtis būtų $ac + bd = 19$, sudėję lygtis gautume, kad

$$53 = 34+19 = ab+cd+ac+bd = (ab+ac)+(cd+bd) = a(b+c)+d(b+c) = (a+d)(b+c).$$

Tokiu atveju $a + d$ būtų pirminio skaičiaus 53 daliklis, t. y. 1 arba 53. Kadangi a ir d yra natūralieji skaičiai, tai $a + d > 1$, tad $a + d = 53$. Taip pat ir $b + c = 53$, bet tada $53 = 53^2$. Taigi pasinaudoję dalumu įsitikinome, kad sistema sprendinių neturi.

Tačiau duotajai sistemai nei lygčių suma, nei skirtumas tokio patogaus skaidinio kaip $ab + cd + ac + bd = (a + d)(b + c)$ neduoda. Visgi lygtys yra panašios, sutampa narių sandaugos: $ab \cdot cd = ac \cdot bd$. Jas gausime, jei abi lygtis pakelsime kvadratu:

$$\begin{cases} a^2b^2 + 2abcd + c^2d^2 = 34^2 = 1156, \\ a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2 = 19^2 = 361. \end{cases}$$

Dabar sudėjus lygtis dvigubų sandaugų neliks ir gausime rezultatą, panašų į tą, kurį gavome pakeitę sistemą:

$$1517 = 1156 + 361 = a^2b^2 + 2abcd + c^2d^2 + a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2 =$$

$$= (a^2b^2 + a^2c^2) + (c^2d^2 + b^2d^2) = (a^2 + d^2)(b^2 + c^2).$$

Taigi a^2+d^2 ir b^2+c^2 yra skaičiaus 1517 dalikliai. Raskime visus šio skaičiaus daliklius. Jis nesidalija iš pirminių skaičių 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31 (tai galima patikrinti, kad ir dalijant kampu). O iš 37 šis skaičius dalijasi: $1517 = 37 \cdot 41$. Skaičius 41 taip pat pirminis, todėl 1517 turi 4 daliklius 1, 37, 41, 1517. Kadangi abu skaičiai $a^2 + d^2$ ir b^2+c^2 didesni už 1, tai lieka dvi galimybės: $a^2+d^2 = 37$, $b^2+c^2 = 41$ arba $a^2+d^2 = 41$, $b^2 + c^2 = 37$.

Jei $a^2 + d^2 = 37$, tai $a < \sqrt{37} < 7$. Taigi a yra tarp 1 ir 6. Tinka tik $a = 1$, $d = 6$ ir $a = 6$, $d = 1$. Panašiai ir lygtis $b^2+c^2 = 41$ turi sprendinius $b = 4$, $c = 5$ ir $b = 5$, $c = 4$. Gauname 4 galimus sprendinius: $(1, 4, 5, 6)$, $(1, 5, 4, 6)$, $(6, 4, 5, 1)$, $(6, 5, 4, 1)$. Pradinę sistemą tenkina tik $(6, 5, 4, 1)$.

Atvejis $a^2 + d^2 = 41$, $b^2 + c^2 = 37$ nagrinėjamas analogiškai. Gauname 4 galimus sprendinius: $(4, 1, 6, 5)$, $(4, 6, 1, 5)$, $(5, 1, 6, 4)$, $(5, 6, 1, 4)$. Pradinę sistemą tenkina tik $(4, 1, 6, 5)$.

Ats.: $(6, 5, 4, 1)$ ir $(4, 1, 6, 5)$.

4. Apskaičiuokite reiškinio reikšmę:

$$\frac{\left(1^4 + \frac{1}{4}\right) \cdot \left(3^4 + \frac{1}{4}\right) \cdot \left(5^4 + \frac{1}{4}\right) \cdot \ldots \cdot \left(19^4 + \frac{1}{4}\right)}{\left(2^4 + \frac{1}{4}\right) \cdot \left(4^4 + \frac{1}{4}\right) \cdot \left(6^4 + \frac{1}{4}\right) \cdot \ldots \cdot \left(20^4 + \frac{1}{4}\right)}.$$

Sprendimas. Kiekvieną iš 10 dauginamųjų skaitiklyje ir 10 dauginamųjų vardiklyje padauginus iš 4, reiškinio reikšmė nepakis:

$$\frac{(4\cdot 1^4+1)\cdot(4\cdot 3^4+1)\cdot(4\cdot 5^4+1)\cdot\ldots\cdot(4\cdot 19^4+1)}{(4\cdot 2^4+1)\cdot(4\cdot 4^4+1)\cdot(4\cdot 6^4+1)\cdot\ldots\cdot(4\cdot 20^4+1)}.$$

Dabar kiekvienas iš dauginamųjų turi pavidalą $4a^4+1$. Abu dėmenys yra kvadratai: $4a^4=(2a^2)^2$, $1=1^2$. Kad gautume pilnąjį kvadratą, reikia pridėti dvigubą sandaugą $2\cdot 2a^2\cdot 1=4a^2=(2a)^2$. Taigi ji taip pat yra kvadratas. Dėl šios priežasties reiškinys $4a^4+1$ yra kvadratų skirtumas:

$$4a^4+1=4a^4+4a^2+1-4a^2=(2a^2+1)^2-4a^2.$$

Pritakykime kvadratų skirtumo formulę, o tada kiekviename iš dauginamųjų atpažinkime dviejų kvadratų sumą:

$$4a^4+1=(2a^2+1-2a)(2a^2+1+2a)=(a^2+a^2-2a+1)(a^2+a^2+2a+1)=$$
$$=((a-1)^2+a^2)(a^2+(a+1)^2).$$

Skaidykime skaičius pagal gautąją formulę:

$$4\cdot 1^4+1=(0^2+1^2)(1^2+2^2),$$
$$4\cdot 3^4+1=(2^2+3^2)(3^2+4^2),$$
$$4\cdot 5^4+1=(4^2+5^2)(5^2+6^2),$$
$$\ldots$$
$$4\cdot 19^4+1=(18^2+19^2)(19^2+20^2).$$

Taigi

$$(4\cdot 1^4+1)(4\cdot 3^4+1)(4\cdot 5^4+1)\ldots(4\cdot 19^4+1)=(0^2+1^2)(1^2+2^2)(2^2+3^2)\ldots(19^2+20^2).$$

Panašiai,

$$(4\cdot 2^4+1)(4\cdot 4^4+1)(4\cdot 6^4+1)\ldots(4\cdot 20^4+1)=(1^2+2^2)(2^2+3^2)(3^2+4^2)\ldots(20^2+21^2).$$

Tada ieškoma reikšmė lygi

$$\frac{(0^2+1^2)(1^2+2^2)(2^2+3^2)\ldots(19^2+20^2)}{(1^2+2^2)(2^2+3^2)(3^2+4^2)\ldots(20^2+21^2)}=$$
$$=\frac{0^2+1^2}{20^2+21^2}\cdot\frac{(1^2+2^2)(2^2+3^2)\ldots(19^2+20^2)}{(1^2+2^2)(2^2+3^2)\ldots(19^2+20^2)}=\frac{1}{841}\cdot 1=\frac{1}{841}.$$

Ats.: $\frac{1}{841}$.

2007 m., XII klasė

1. Tegu $\{a_1, a_2, \ldots, a_{201}\}$ yra aibė, sudaryta iš natūraliųjų skaičių, mažesnių už 300. Įrodykite, kad egzistuoja tokie aibės elementai a_i ir a_j, kad $\dfrac{a_i}{a_j} = 3^k$ su kokiu nors natūraliuoju k.

Sprendimas. Naudosime prieštaros metodą. Tarkime, kad uždavinio teiginys klaidingas ir yra tokia aibė $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{201}\}$, tenkinanti sąlygą, kurioje jokių dviejų skirtingų elementų santykis nėra trejeto laipsnis.

Tegu u yra bet koks natūralusis skaičius, nesidalijantis iš 3. Nagrinėkime seką $u = 3^0u$, $3u = 3^1u$, 3^2u, 3^3u, $\ldots$. Jei bent du sekos nariai 3^iu ir 3^ju, $i < j$, priklauso A, tai gauname prieštarą, nes $\dfrac{3^ju}{3^iu} = 3^{j-i}$ ir $k = j - i > 0$ yra natūralusis skaičius.

Nuo 1 iki 300 yra $300 : 3 = 100$ skaičių, kurie dalijasi iš 3, taigi $300 - 100 = 200$ skaičių, kurie nesidalija iš 3. Bet kuriam iš šių 200 skaičių u galime priskirti seką u, $3u$, 3^2u, 3^3u, $\ldots$, kurioje yra daugiausiai vienas narys, priklausantis aibei A. Taigi turime 200 sekų ir todėl daugiausiai 200 skaičių šiose sekose, priklausančių aibei A. Tačiau aibėje A yra 201 skaičius, tad bent vienas aibės A skaičius nepriklauso jokiai iš 200 sekų.

Pažymėkime šį skaičių $a < 300$. Tegu 3^m yra didžiausias trejeto laipsnis, iš kurio dalijasi a (jei a nesidalija iš 3, tai $m = 0$). Natūralusis skaičius $b = a : 3^m \leqslant a < 300$ jau nesidalija iš 3. Turime $a = 3^mb$, taigi a priklauso sekai b, $3b$, 3^2b, 3^3b, $\ldots$. Gavome prieštarą – juk tarėme, kad a jokiai tokiai sekai nepriklauso.

Vadinasi, uždavinio teiginys teisingas.

2. Žr. XI klasės 3 uždavinį.

3. Žr. XI klasės 4 uždavinį.

4. Tegu a, b, c yra bet kurio trikampio kraštinių ilgiai. Įrodykite nelygybę:

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geqslant 0.$$

Pirmas sprendimas. Nelygybėje vietoj skaičių a, b, c įrašius skaičius b, c, a arba c, a, b, ji nepakinta. Todėl nemažindami bendrumo galime laikyti, kad a yra didžiausias iš trijų skaičių. Jei taip nebūtų, galėtume pažymėti trikampio kraštinių ilgius kita tvarka. Taigi $a \geqslant b$ ir $a \geqslant c$. Nagrinėkime du atvejus.

Tarkime, kad $b \geqslant c$. Pažymėkime $a - b = x \geqslant 0$ ir $b - c = y \geqslant 0$. Tada $c - a = -(a - c) = -(a - b + b - c) = -(x + y)$ ir

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) =$$

$$= a^2bx + b^2cy - c^2a(x+y) = a \cdot abx + b \cdot bcy - c \cdot ca(x+y) =$$

$$= (c + x + y) \cdot abx + (a - x) \cdot bcy - (b - y) \cdot ca(x + y) =$$

$$= abcx + abx(x + y) + abcy - bcxy - abc(x + y) + acy(x + y) =$$

$$= abx(x + y) - bcxy + acy(x + y) \geqslant abx(x + y) - bcxy =$$

$$= bx(ax + ay - cy) \geqslant bx(ay - cy) = bxy(a - c) \geqslant 0.$$

Tarkime, kad $b < c$. Pažymėkime $a - c = x \geqslant 0$ ir $c - b = y > 0$. Tada $a - b = a - c + c - b = x + y$, pagal trikampio nelygybę $c + x = a < c + b$, taigi $x < b$ ir

$$a^2b(a - b) + b^2c(b - c) + c^2a(c - a) =$$

$$= a^2b(x + y) - b^2cy - c^2ax = a \cdot ab(x + y) - b \cdot bcy - c \cdot cax =$$

$$= (c + x) \cdot ab(x + y) - (a - (x + y)) \cdot bcy - (b + y) \cdot cax =$$

$$= abc(x + y) + abx(x + y) - abcy + bcy(x + y) - abcx - acxy =$$

$$= abx(x + y) + bcy(x + y) - acxy \geqslant abx(x + y) + xcy(x + y) - acxy =$$

$$= x(ab(x + y) + cy(x + y) - acy) = x(ab(x + y) + cy(x + y - a)) =$$

$$= x(ab(x + y) - bcy) \geqslant x(aby - bcy) = bxy(a - c) \geqslant 0.$$

Nelygybė galioja abiem atvejais.

Antras sprendimas. Pažymėkime $x = b + c - a$, $y = c + a - b$, $z = a + b - c$. Pagal trikampio nelygybę skaičiai x, y, z yra teigiami. Išreikškime a, b ir c: $a = (y + z)/2$, $b = (z + x)/2$, $c = (x + y)/2$. Įrašykime šias išraiškas į nelygybę ir pertvarkykime ją – atskliauskime, suprastinkime panašius narius, padauginkime ją iš 16, perkelkime dalį narių į kitą pusę. Gauname, kad teigiamiems skaičiams (nebūtinai trikampio kraštinėms!) reikia įrodyti naują nelygybę:

$$xy^3 + yz^3 + zx^3 \geqslant x^2yz + xy^2z + xyz^2.$$

Padalykime nelygybę iš teigiamo skaičiaus xyz:

$$\frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} + \frac{x^2}{y} \geqslant x + y + z.$$

Gautoji nelygybė išplaukia iš Koši nelygybės

$$(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2) \geqslant (x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n)^2.$$

Imkime $n = 3$, $x_1 = \sqrt{\frac{z^2}{x}}$, $x_2 = \sqrt{\frac{x^2}{y}}$, $x_3 = \sqrt{\frac{y^2}{z}}$, $y_1 = \sqrt{x}$, $y_2 = \sqrt{y}$, $y_3 = \sqrt{z}$:

$$\left(\frac{z^2}{x} + \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z}\right)(x + y + z) \geqslant (x + y + z)^2.$$

Belieka padalyti gautąją nelygybę iš teigiamo skaičiaus $x + y + z$.

Nežinant Koši nelygybės, gali pakakti Čebyševo nelygybės. Pateikiame dar vieną įrodymą, besireminatį vien aritmetinio ir geometrinio vidurkių nelygybe. Pagal ją

$$4\cdot\frac{y^2}{z}+2\cdot\frac{z^2}{x}+\frac{x^2}{y}=\frac{y^2}{z}+\frac{y^2}{z}+\frac{y^2}{z}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}+\frac{z^2}{x}+\frac{x^2}{y}\geqslant$$

$$\geqslant 7\sqrt[7]{\frac{y^2}{z}\cdot\frac{y^2}{z}\cdot\frac{y^2}{z}\cdot\frac{y^2}{z}\cdot\frac{z^2}{x}\cdot\frac{z^2}{x}\cdot\frac{x^2}{y}}=7\sqrt[7]{y^7}=7y.$$

Panašiai

$$4\cdot\frac{z^2}{x}+2\cdot\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}\geqslant 7z$$

ir

$$4\cdot\frac{x^2}{y}+2\cdot\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\geqslant 7x.$$

Tada

$$\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}+\frac{x^2}{y}=$$

$$=\frac{1}{7}\cdot\left(\left(4\cdot\frac{y^2}{z}+2\cdot\frac{z^2}{x}+\frac{x^2}{y}\right)+\left(4\cdot\frac{z^2}{x}+2\cdot\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}\right)+\left(4\cdot\frac{x^2}{y}+2\cdot\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\right)\right)\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{7}\cdot(7y+7z+7x)=x+y+z.$$

2008 m.

IX klasė

1. Ant stalo stovi 7 neuždegtos lempos, kiekviena su savo jungikliu, kuris nedegančią lempą uždega, o degančią užgesina.

a) Vienu ėjimu galima nuspausti bet kuriuos 4 jungiklius. Ar taip elgiantis galima pasiekti, kad visos lempos degtų vienu metu?

b) Vienu ėjimu galima nuspausti bet kuriuos 3 jungiklius. Ar taip elgiantis galima pasiekti, kad visos lempos degtų vienu metu?

Sprendimas. a) Priskirkime kiekvienai lempai skaičių: 0, jei ji nedega, ir 1, jei dega. Pradinė visų 7 skaičių suma lygi 0. Kiekvienu ėjimu mes pakeičiame 4 skaičius: x vienetų ($0\leqslant x\leqslant 4$) pakeičiame nuliais ir $4-x$ nulių pakeičiame vienetais. Suma sumažėja x vienetų ir padidėja $4-x$ vienetų. Taigi ji padidėja $(-x)+(4-x)=2(2-x)$ vienetų, t. y. lyginiu skaičiumi. Vadinasi, sumos lyginumas (dalumas ar nedalumas iš 2) nepakinta. Pradžioje suma lyginė (lygi 0), todėl ir liks lyginė, kiek ėjimų beatliktume.

Niekada negausime situacijos, kai visos lempos dega, nes šioje situacijoje visi skaičiai būtų vienetai ir jų suma 7 būtų nelyginė.

b) Sunumeruokime lempas skaičiais nuo 1 iki 7. Tada iš eilės pakeiskime šių lempų trejetų būsenas: (1, 2, 3), (2, 3, 4), (3, 4, 5), . . ., (6, 7, 1), (7, 1, 2). Kiekvienos lempos jungiklis nuspaudžiamas lygiai 3 kartus, taigi lempos būsena pakeičiama priešinga, t. y. visos lempos uždegamos.

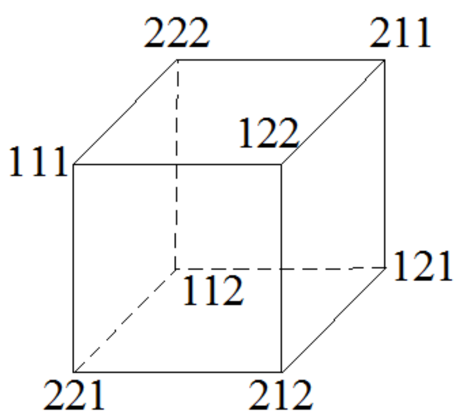
Ats.: a) negalima; b) galima.

2. Kiekvienoje kubo viršūnėje įrašome po triženklį skaičių, sudarytą tik iš skaitmenų 1 ir 2. Ar gali būti taip, kad bet kuriose dviejose kubo viršūnėse, kurias jungia to kubo briauna, įrašytų skaičių skaitmenys sutaptų daugiausiai vienoje pozicijoje? (Pavyzdžiui, skaičių 221 ir 122 skaitmenys sutampa lygiai vienoje pozicijoje – dešimčių.)

Pastaba. Užduotis tampa kiek įdomesnė, nei pasiūlyta olimpiadoje, jei reikalaujama, kad visi 8 skaičiai būtų skirtingi.

Sprendimas. Jei skaičiai kubo viršūnėse nebūtinai skirtingi, tai vienoje jo sienoje įrašykime skaičius 111, 222, 111, 222 ir tą patį padarykime su priešinga siena (vengdami situacijos, kai sienas jungiančioje briaunoje parašomi du lygūs skaičiai).

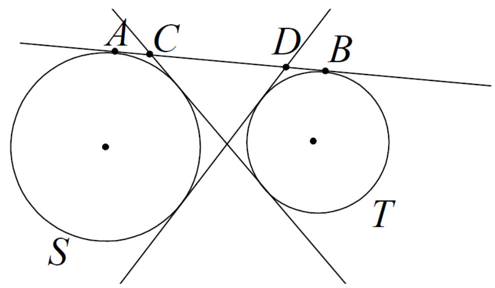
Skaičius galima reikiamu būdu įrašyti, net ir atsižvelgiant į pastabą (žr. pav.).



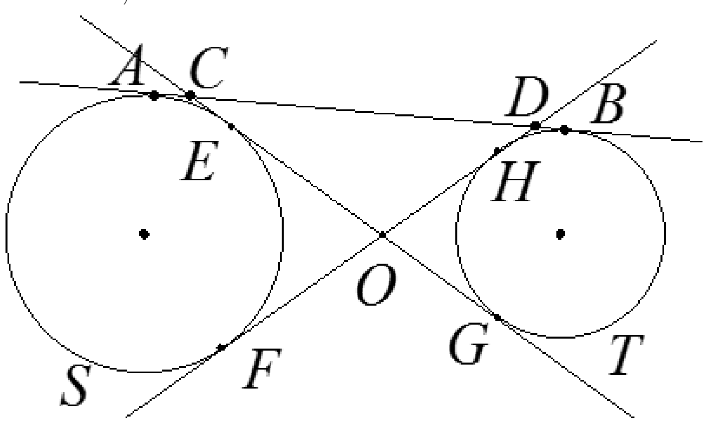
Skaičius galima rašyti taip. Pirmiausia įrašomas bet kuris skaičius bet kurioje viršūnėje, pvz., 111. Pasirinktą viršūnę kubo briaunos jungia su kitomis trimis viršūnėmis. Jose jau negali būti skaičių 111, 112, 121, 211. Lieka skaičiai 122, 212, 221, 222. Jei bet kokia tvarka tose trijose viršūnėse įrašysime skaičius, turinčius po vieną tokį patį skaitmenį, kaip pradinis skaičius (šiuo atveju tai skaičiai 122, 212 ir 221), kitose viršūnėse jau nebegalėsime nieko įrašyti. Tačiau panaudoję skaičių 222 ir bet kuriuos du iš skaičių 122, 212 ir 221 (paveikslėlyje tai 122 ir 221), likusiose viršūnėse reikiamus skaičius visada įrašysime (perrinkdami likusias galimybes).

Ats.: taip, gali.

3. Plokštumoje duoti du vienas kito išorėje esantys ir bendrų taškų neturintys apskritimai S ir T. Šiems apskritimams išvestos trys bendros liestinės bei pažymėti jų taškai, kaip parodyta paveikslėlyje (A ir B yra lietimosi taškai, C ir D yra liestinių susikirtimo taškai). Įrodykite, kad $AC = BD$.



Sprendimas. Tiesių ir apskritimų lietimosi taškus pažymėkime, kaip parodyta paveikslėlyje. Tiesės EG ir FH kertasi taške O. Šiame uždavinyje pakanka žinoti vieną geometrinį faktą: jei dvi apskritimo liestinės kertasi taške X, o apskritimą liečia taškuose Y ir Z, tai $XY = XZ$.



Todėl:

1) $CA = CE$ (tiesės kertasi taške C ir liečia apskritimą S);
2) $DB = DH$ (taškas D ir apskritimas T);
3) $OE = OF$ (taškas O ir apskritimas S);
4) $OH = OG$ (taškas O ir apskritimas T);
5) $DA = DF$ (taškas D ir apskritimas S);
6) $CB = CG$ (taškas C ir apskritimas T).

Belieka kombinuoti šias lygybes. Pasinaudokime 3) ir 4):

$$EG = OE + OG = OF + OH = HF.$$

Pasinaudokime 5) ir 6):

$$AD-BC = DF-CG = (DH+HF)-(CE+EG) = (DH-CE)+(HF-EG) = DH-CE.$$

Pasinaudokime 1) ir 2):

$$AD - BC = DH - CE = DB - CA.$$

Kita vertus, $AD - BC = (AC + CD) - (BD + CD) = AC - BD$. Todėl $BD - AC =$ $= AC - BD$, $2BD = 2AC$, $BD = AC$, ką ir reikėjo įrodyti.

4. Išspręskite lygtį:

$$\frac{x^4+4}{x^2-2}=5x.$$

Pirmas sprendimas. Natūralu padauginti abi puses iš vardiklio, bet tada gaunama ketvirto laipsnio lygtis $x^4-5x^3+10x+4=0$. To galima išvengti, kitaip pertvarkant pradinę lygtį. Pakeiskime skaitiklį, kad gautume reiškinį, besidalijantį iš vardiklio. Tam pastebėkime, kad x^4+4 ir $(x^2-2)^2=x^4-4x^2+4$ skiriasi per $4x^2$. Todėl

$$\frac{x^4+4}{x^2-2}=\frac{(x^4-4x^2+4)+4x^2}{x^2-2}=\frac{(x^2-2)^2}{x^2-2}+\frac{4x^2}{x^2-2}=x^2-2+\frac{4x^2}{x^2-2}=5x.$$

Dabar pastebėkime dar vieną dėsningumą: padaliję paskutinės lygybės abi puses iš x, du kartus gausime reiškinį $(x^2-2)/x$ (vieną kartą apverstą). Dalyti iš x galime, nes $x=0$ netenkina pradinės lygties:

$$\frac{x^2-2}{x}+\frac{4x}{x^2-2}=5.$$

Pažymėję $t=\frac{x^2-2}{x}$, gausime lygtį

$$t+\frac{4}{t}=5.$$

Padauginę ją iš t, gauname nebe ketvirto laipsnio, o nesudėtingą kvadratinę lygtį:

$$t^2-5t+4=0.$$

Taigi $\frac{x^2-2}{x}=t=1$ arba 4, tada $x^2-x-2=0$ arba $x^2-4x-2=0$. Šių lygčių šaknys yra $x_1=-1$, $x_2=2$, $x_{3,4}=2\pm\sqrt{6}$.

Visos šaknys tenkina pradinę lygtį. Pvz., $x_3^2=(2+\sqrt{6})^2=10+4\sqrt{6}$ ir

$$\frac{x_3^4+4}{x_3^2-2}=\frac{(10+4\sqrt{6})^2+4}{10+4\sqrt{6}-2}=\frac{200+80\sqrt{6}}{8+4\sqrt{6}}=\frac{50+20\sqrt{6}}{2+\sqrt{6}}=\frac{(50+20\sqrt{6})(2-\sqrt{6})}{(2+\sqrt{6})(2-\sqrt{6})}=$$

$$=\frac{-20-10\sqrt{6}}{4-6}=10+5\sqrt{6}=5x_3.$$

Antras sprendimas. Galima išspręsti ir ketvirto laipsnio lygtį $p(x)=0$, kur $p(x)=$ $=x^4-5x^3+10x+4$. Lengva atspėti daugianario $p(x)$ šaknis -1 ir 2 (tai yra ir pradinės lygties sprendiniai). Daugianaris su tokiomis šaknimis dalijasi iš $x-(-1)$ ir $x-2$, t. y. $p(x)=(x+1)(x-2)q(x)=(x^2-x-2)q(x)$. Čia $q(x)$ yra daugianaris, kurį galima rasti pertvarkant $p(x)$:

$$p(x)=x^2(x^2-x-2)-4x^3+2x^2+10x+4=x^2(x^2-x-2)-4x(x^2-x-2)-(2x^2-2x-4)=$$

$$=(x^2-x-2)(x^2-4x-2).$$

Taigi $p(x)=0$ reiškia, kad $x^2-x-2=0$ arba $x^2-4x-2=0$, kaip ir pirmame sprendime.

Ats.: $x=-1$, 2 arba $2\pm\sqrt{6}$.

2008 m., X klasė

1. Ant stalo stovi 13 neuždegtų lempų, kiekviena su savo jungikliu, kuris nedegančią lempą uždega, o degančią užgesina.

a) Vienu ėjimu galima nuspausti bet kuriuos 8 jungiklius. Ar taip elgiantis galima pasiekti, kad visos lempos degtų vienu metu?
b) Vienu ėjimu galima nuspausti bet kuriuos 7 jungiklius. Ar taip elgiantis galima pasiekti, kad visos lempos degtų vienu metu?

Sprendimas. Sprendimas analogiškas IX klasės 1 uždavinio sprendimui.

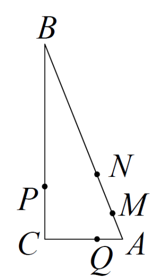
a) Priskirkime kiekvienai lempai skaičių: 0, jei ji nedega, ir 1, jei dega. Pradinė visų 13 skaičių suma lygi 0. Kiekvienu ėjimu mes pakeičiame 8 skaičius: x vienetų ($0 \leqslant x \leqslant 8$) pakeičiame nuliais ir $8 - x$ nulių pakeičiame vienetais. Suma sumažėja x vienetų ir padidėja $8 - x$ vienetų. Taigi ji padidėja $(-x) + (8 - x) = 2(4 - x)$ vienetų, t. y. lyginiu skaičiumi. Vadinasi, sumos lyginumas nepakinta. Pradžioje suma lyginė (lygi 0), todėl ir liks lyginė, kiek ėjimų beatliktume.

Niekada negausime situacijos, kai visos lempos dega, nes šioje situacijoje visi skaičiai būtų vienetai ir jų suma 13 būtų nelyginė.

b) Sustatykime lempas ratu ir iš eilės sunumeruokime lempas skaičiais nuo 1 iki 13. Tada apeidami pilną ratą pakeiskime šių lempų septynetų būsenas: (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7), (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8), …, (12, 13, 1, 2, 3, 4, 5), (13, 1, 2, 3, 4, 5, 6). Kiekviename iš 13 tokių septynetų lempos stovi greta. Kiekviena lempa priklauso 7 septynetams, todėl jos būsena pakeičiama 7 kartus. Taigi kiekvienos lempos būsena pakeičiama priešinga, t. y. visos lempos uždegamos.

Ats.: a) negalima; b) galima.

2. Stačiojo trikampio ABC įžambinėje AB taip pažymėti taškai M ir N, kad $AN = AC$ ir $BM = BC$ (žr. pav.). Tada statiniuose BC ir AC atitinkamai pažymėti tokie taškai P ir Q, kad $BP = BN$ ir $AQ = AM$. Įrodykite, kad taškai C, P, N, M ir Q priklauso vienam apskritimui.



Sprendimas. Trikampiai QAM ir CAN yra lygiašoniai ($AQ = AM$ ir $AC = AN$) ir turi bendrą kampą, esantį prieš pagrindą. Todėl ir jų kampai prie pagrindo yra visi lygūs tarpusavyje (jie lygūs $(180° - \angle A)/2$). Taigi $\angle CNM + \angle CQM = \angle CNM + (180° - \angle MQA) = 180°$. Kadangi priešingų keturkampio $CQMN$ kampų suma lygi 180°, tai jis įbrėžtinis, t. y. taškai C, Q, N, M priklauso vienam apskritimui. (Beje, galima pastebėti, kad $CQMN$ yra lygiašonė trapecija, o lygiašonė trapecija visada yra įbrėžtinis keturkampis.)

Analogiškai įrodoma, kad taškai C, P, N, M priklauso vienam apskritimui. Taigi taškai P ir Q priklauso vieninteliam apskritimui, einančiam per tris taškus C, N ir M (trikampio CNM apibrėžtiniam apskritimui). Tai ir reikėjo įrodyti.

3. Tegu x yra dešimties iš eilės einančių natūraliųjų skaičių suma, o y – tų pačių dešimties skaičių kubų suma. Įrodykite, kad $y^2 - x^2$ dalijasi iš 12.

Sprendimas. Mažiausią iš 10 natūraliųjų skaičių pažymėkime n. Tada

$$y - x = (n^3 + (n+1)^3 + \ldots + (n+9)^3) - (n + (n+1) + \ldots + (n+9)) =$$

$$= (n^3 - n) + ((n+1)^3 - (n+1)) + \ldots + ((n+9)^3 - (n+9)).$$

Kiekvieną iš 10 apskliaustų dėmenų galima užrašyti kitaip:

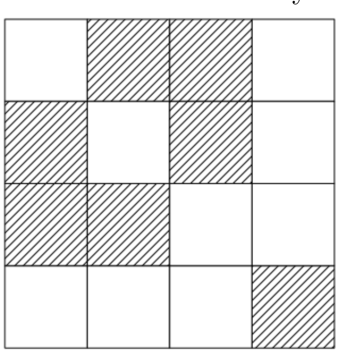
$$m^3 - m = m(m^2 - 1) = (m-1)m(m+1),$$

kai $m = n, n+1, \ldots, n+9$. Kiekvienas iš dėmenų yra trijų gretimų sveikųjų skaičių sandauga. Tarp trijų gretimų sveikųjų skaičių visada yra vienas, dalus iš 3, ir bent vienas, dalus iš 2. Taigi tiek visi dėmenys, tiek jų suma $x - y$ dalijasi iš $2 \cdot 3 = 6$.

Kadangi $x - y$ dalijasi iš 2, tai $x + y = (x - y) + 2y$ taip pat dalijasi iš 2. Vadinasi, $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$ dalijasi iš $6 \cdot 2 = 12$.

4. Duota kvadratinė lentelė, sudaryta iš 4×4 vienetinių langelių. Kai kurie langeliai nudažyti taip, kad vienu metu išbraukus bet kurias dvi eilutes ir bet kuriuos du stulpelius, gautoje 2×2 lentelėje lieka bent vienas nudažytas langelis. Kiek mažiausiai langelių nudažyta?

Sprendimas. Nudažykime 7 lentelės langelius, kaip parodyta paveikslėlyje. Kaip beišbrauktume du lentelės stulpelius, likusiuose stulpeliuose esantys nudažyti langeliai yra išsibarstę bent per tris eilutes. Todėl kaip beišbrauktume dar ir dvi eilutes, visada lieka neišbrauktas nudažytas langelis.



Įrodymas, kad mažiau 7 langelių negali būti nudažyta, pateiktas XII klasės 4 uždavinio sprendimo pirmoje dalyje ($n = 2$).

Ats.: 7.

2008 m., XI klasė

1. Skaičius x, y ir z sieja lygybės
$$x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{x}.$$
Įrodykite, kad $x = y = z$ arba $(xyz)^2 = 1$.

Sprendimas. Pertvarkykime lygybę $x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z}$:
$$x - y = \frac{1}{z} - \frac{1}{y} = \frac{y-z}{yz}.$$
Analogiškai gauname lygybę $y - z = \frac{z-x}{zx}$ ir (sulyginę pirmąjį ir trečiąjį sąlygoje duotus reiškinius) lygybę $z - x = \frac{x-y}{xy}$. Trijose gautose lygybėse kartojasi nežinomųjų skirtumai. Sudauginkime jas:
$$(x-y)(y-z)(z-x) = \frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{x^2y^2z^2}.$$
Jei $x = y$, tai $\frac{y-z}{yz} = x - y = 0$ ir $y = z$. Jei $y = z$ arba $z = x$, vėl taip pat gausime lygybes $x = y = z$.

Mums lieka atvejis $x \neq y \neq z \neq x$. Tada $(x-y)(y-z)(z-x) \neq 0$ ir iš šios sandaugos galime padalyti:
$$1 = \frac{1}{x^2y^2z^2}, \qquad x^2y^2z^2 = 1, \qquad (xyz)^2 = 1.$$

Įrodyta.

2. Piramidės pagrindas yra taisyklingasis n-kampis. Pagrindo viršūnėse pažymėti realieji skaičiai $x_1, x_2, \ldots, x_n$, o piramidės viršūnėje – skaičius x. Kiekvienos šoninės sienos viršūnių skaičių suma lygi 2007, o visų pagrindo viršūnių skaičių suma yra 2008. Su kokia mažiausia nelygine n reikšme skaičiai $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$ gali būti natūralieji? Raskite visus tokius skaičių rinkinius *(atitinkančius rastąją n reikšmę)*.

Sprendimas. Tarkime, kad skaičius x yra natūralusis, o natūralusis skaičius $n \geqslant 3$ (daugiakampis turi bent 3 kraštines) nelyginis. Galioja n lygybių
$$x_1 + x_2 + x = 2007,$$
$$x_2 + x_3 + x = 2007,$$
$$\ldots$$
$$x_{n-1} + x_n + x = 2007,$$
$$x_n + x_1 + x = 2007,$$
kurias visas sudėję gausime
$$(x_1+x_2+\ldots+x_n)+(x_2+x_3+\ldots+x_1)+(x+x+\ldots+x) = 2(x_1+x_2+\ldots+x_n)+nx = 2007n.$$

Duota, kad galioja lygybė $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 2008$, todėl

$$2 \cdot 2008 + nx = 2007n, \qquad n(2007 - x) = 2 \cdot 2008 = 2^4 \cdot 251.$$

Nelyginis skaičius n dalija $2^4 \cdot 251$, todėl ir skaičių 251. Skaičius 251 pirminis (norint tuo įsitikinti, pakanka patikrinti dalumą iš pirminių skaičių iki $\sqrt{251}<17$, t. y. iš skaičių 2, 3, 5, 7, 11 ir 13). Todėl 251 dalijasi tik iš 1 ir 251. Kadangi $n > 1$, tai $n = 251$. (Atkreipkime dėmesį, kad tai ne tik mažiausia, bet tiesiog vienintelė n reikšmė.)

Galime rasti $2007 - x = 2^4 \cdot 251/n = 16$ ir $x = 1991$. Tada

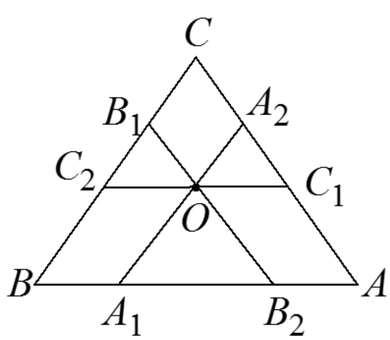
$$16 = 2007 - x = x_1 + x_2 = x_2 + x_3 = \ldots = x_{251} + x_1.$$

Taigi $x_1 = x_2 + x_3 - x_2 = x_3$, analogiškai $x_2 = x_4$, $x_3 = x_5$ ir t. t. Taigi $x_1 = x_3 = x_5 = \ldots = x_{251}$ ir $x_2 = x_4 = \ldots = x_{250}$. Pagaliau $x_1 + x_2 = x_{251} + x_1$ ir $x_{251} = x_2$, t. y. visi x_i tarpusavyje lygūs. $16 = 2x_1$, todėl $x_1 = x_2 = \ldots = x_{251} = 16 : 2 = 8$. Gavome vienintelį skaičių rinkinį, tenkinantį uždavinio sąlygą.

Ats.: $n = 251; x = 1991, x_1 = x_2 = \ldots = x_{251} = 8$.

3. Trikampio viduje pažymėtas taškas, o per jį išvestos trys tiesės, lygiagrečios su trikampio kraštinėmis. Šių tiesių dalys, esančios trikampio viduje, yra to paties ilgio x atkarpos. Raskite x, jei trikampio kraštinių ilgiai yra a, b ir c.

Sprendimas. Pažymėkime trikampio taškus, kaip parodyta paveikslėlyje:



Čia $BC = a, CA = b, AB = c, A_1A_2 = B_1B_2 = C_1C_2 = x$.

Trikampiai ABC ir AA_1A_2 panašūs (kampas A bendras, $A_1A_2 || BC$, todėl $\angle A_1A_2A = \angle BCA$, $\angle A_2A_1A = \angle CBA$ kaip atitinkamieji). Panašumo koeficientas lygus $A_1A_2/BC = x/a$, todėl

$$AA_1 = AB \cdot \frac{x}{a} = \frac{cx}{a}, \qquad BA_1 = AB - AA_1 = c - \frac{cx}{a}.$$

Analogiškai $AB_2 = c - cx/b$.

$A_1O || BC_2$ ir $BA_1 || C_2O$, todėl BA_1OC_2 yra lygiagretainis ir $C_2O = BA_1$. Analogiškai $C_1O = AB_2$. Taigi

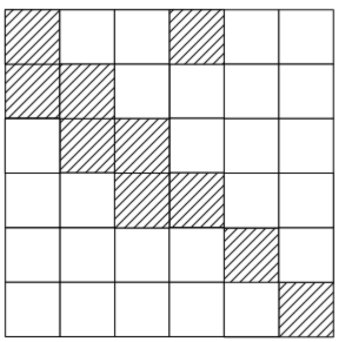
$$x = C_1C_2 = C_1O + C_2O = AB_2 + BA_1 = c - \frac{cx}{a} + c - \frac{cx}{b},$$

$$x+\frac{cx}{a}+\frac{cx}{b}=2c, \qquad \frac{x}{c}+\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=x\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=2, \qquad x=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}.$$

Ats.: $x=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$.

4. Duota kvadratinė lentelė, sudaryta iš 6×6 vienetinių langelių. Kai kurie langeliai nudažyti taip, kad vienu metu išbraukus bet kurias tris eilutes ir bet kuriuos tris stulpelius, gautoje 3×3 lentelėje lieka bent vienas nudažytas langelis. Kiek mažiausiai langelių nudažyta?

Sprendimas. Nudažykime 10 lentelės langelių, kaip parodyta paveikslėlyje. Kaip beišbrauktume tris lentelės stulpelius, likusiuose stulpeliuose esantys nudažyti langeliai yra išsibarstę bent per keturias eilutes. Todėl kaip beišbrauktume dar ir tris eilutes, visada lieka neišbrauktas nudažytas langelis.



Įrodymas, kad mažiau 10 langelių negali būti nudažyta, pateiktas XII klasės 4 uždavinio sprendimo pirmoje dalyje ($n=3$).

Ats.: 10.

2008 m., XII klasė

1. Trijų natūraliųjų skaičių suma lygi 2003. Daugiausiai keliais nuliais gali baigtis šių trijų skaičių sandauga?

Sprendimas. Reikia, kad sandauga dalytųsi iš kuo didesnių dvejeto ir penketo laipsnių. Kadangi $5^5=3125>2003$, tai bet kuris iš trijų skaičių dalijasi daugiausiai iš 5^4. Be to, 2003 nesidalija iš 5, todėl bent vienas iš trijų skaičių taip pat nesidalija net iš 5, nekalbant apie didesnius penketo laipsnius. Taigi didžiausias galimas penketo laipsnis, iš kurio gali dalytis trijų skaičių sandauga, yra $5^4\cdot 5^4\cdot 1=5^8$. Natūralusis skaičius, kuris baigiasi k nulių, dalijasi iš $10^k=5^k\cdot 2^k$. Taigi daugiau 8 nulių negausime.

Mėginkime gauti bent tuos 8 nulius. Tam du iš trijų skaičių turėtume rinktis besidalijančius iš 5^4. Tokie skaičiai yra $5^4=625$, $2\cdot 5^4=1250$, $3\cdot 5^4=1875$ (kitas skaičius jau per didelis). Mėgindami visaip sudėti šiuos skaičius, nesunkiai pastebėsime, kad $2003 = 1250 + 625 + 128 = 2 \cdot 5^4 + 5^4 + 2^7$ ir $2 \cdot 5^4 \cdot 5^4 \cdot 2^7 = 2^8 \cdot 5^8 = 10^8 = 100000000$.

Ats.: 8.

2. Žr. XI klasės 3 uždavinį.

3. Tegu x yra dešimties iš eilės einančių natūraliųjų skaičių suma, o y – tų pačių dešimties skaičių kubų suma. Įrodykite, kad $y^2 - x^2$ dalijasi iš 300.

Sprendimas. Reikia įrodyti, kad skaičius $y^2 - x^2$ dalijasi iš 12 ir iš 25 ($300 = 12 \cdot 25$ ir DBD(12, 25)=1). Kad jis dalijasi iš 12, įrodoma X klasės 3 uždavinio sprendime.

Mažiausią iš 10 natūraliųjų skaičių pažymėkime n. Skaičius $x = n + (n + 1) + \ldots + (n + 9) = 10n + 45 = 5(2n + 9)$ dalijasi iš 5. Ištirkime ir skaičiaus $y = n^3 + (n + 1)^3 + \ldots + (n + 9)^3$ dalumą iš 5.

Dalumą ir nedalumą iš 5 parodo paskutinis skaičiaus skaitmuo. Sumos ar sandaugos paskutinis skaitmuo priklauso tik nuo dėmenų ar dauginamųjų paskutinių skaitmenų. Todėl skaičiaus y išraiškoje kiekvieną iš skaičių $n, n + 1, \ldots, n + 9$ galime pakeisti jo paskutiniu skaitmeniu.

Iš eilės imant natūraliuosius skaičius, jų paskutinieji skaitmenys sudarys periodinę seką 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, 1, 2, 3, ... Skaičių $n, n + 1, \ldots, n + 9$ paskutiniai skaitmenys bus šios sekos fragmentas, t. y. gauname visus 10 skirtingų skaitmenų. Taigi y baigsis tuo pačiu skaitmeniu, kaip ir suma $0^3 + 1^3 + \ldots + 9^3$. Šios sumos dėmenis vėl galime pakeisti jų paskutiniais skaitmenimis, pvz., $3^3 = 27$ keičiame į 7. Gauname sumą $0 + 1 + 8 + 7 + 4 + 5 + 6 + 3 + 2 + 9 = 45$. Paskutinis skaitmuo 5 yra ir skaičiaus y paskutinis skaitmuo. Tai įrodo, kad y dalijasi iš 5.

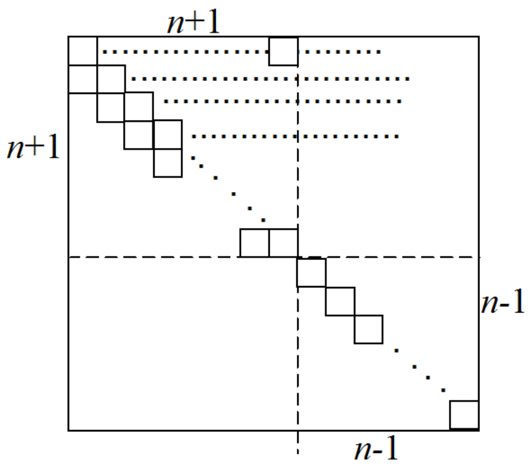
x ir y dalijasi iš 5, todėl x^2, y^2 ir $x^2 - y^2$ dalijasi iš $5^2 = 25$. Tai ir reikėjo įrodyti.

4. Duota kvadratinė lentelė, sudaryta iš $2n \times 2n$ vienetinių langelių. Kai kurie langeliai nudažyti taip, kad vienu metu išbraukus bet kurias n eilučių ir bet kuriuos n stulpelių, gautoje $n \times n$ lentelėje lieka bent vienas nudažytas langelis. Kiek mažiausiai langelių nudažyta?

Sprendimas. Tegu lentelė nudažyta tinkamai. Palikime bet kuriuos n jos stulpelių, išbraukdami likusius. Jei gautoje lentelėje bent n eilučių būtų tuščios (neturinčios nudažytų langelių), tai išbraukę kitas eilutes, gautume $n \times n$ lentelę, prieštaraujančią sąlygai. Taigi tuščių eilučių yra daugiausiai $n - 1$, o netuščių, bent po vieną nudažytą langelį turinčių – mažiausiai $n + 1$. Vadinasi, bet kuriuose n stulpelių yra mažiausiai $n + 1$ nudažytas langelis.

Pagal Dirichlė principą tarp bet kurių n stulpelių yra bent vienas su mažiausiai 2 nudažytais langeliais (priešingu atveju nudažytų langelių būtų daugiausiai $n \cdot 1 = n < n + 1$). Dabar stulpeliams su bent dviem nudažytais langeliais galime pritaikyti tokį samprotavimą, kokį ką tik taikėme netuščioms eilutėms. Jei stulpelių su daugiausiai vienu nudažytu langeliu būtų bent n, tai tarp jų nebūtų stulpelio su 2 nudažytais langeliais. Todėl stulpelių su daugiausiai vienu nudažytu langeliu yra daugiausiai $n-1$, o su bent 2 nudažytais langeliais yra mažiausiai $n+1$. Imkime n tokių stulpelių. Juose yra bent $n \cdot 2 = 2n$ nudažytų langelių, o likusiuose n stulpelių – bent $n+1$ nudažytas langelis. Iš viso turime mažiausiai $3n+1$ nudažytą langelį.

Tiek langelių nudažyti galima. Vienas iš būdų parodytas paveikslėlyje:



Nudažomi visi langeliai vienoje pagrindinėje įstrižainėje (jų yra $2n$), langeliai, esantys tiesiai po nudažyta $(n+1) \times (n+1)$ dalies įstrižaine (jų yra n), ir dešinysis viršutinis $(n+1) \times (n+1)$ dalies kampas.

Tarkime, kad išbraukus n šios lentelės eilučių ir n stulpelių, nudažytų langelių neliko. Eilės tvarka sunumeruokime eilutes iš viršaus į apačią ir stulpelius iš kairės į dešinę skaičiais nuo 1 iki $2n$. Tarkime, kad išbraukėme eilutes su numeriais $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ir stulpelius su numeriais $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Jei tarp šių $2n$ skaičių nėra kurio nors numerio k nuo 1 iki $2n$, tai atitinkamas nudažytas įstrižainės langelis (esantis eilutėje k ir stulpelyje k) neišbrauktas. Taigi skaičiai $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ yra visi skaičiai $1, 2, \ldots, 2n$.

Tada kiekvienas iš skaičių $1, 2, \ldots, n+1$ žymi arba išbrauktą eilutę, arba išbrauktą stulpelį. Jei šioje sekoje kuris nors skaičius $k \geqslant 1$ žymi eilutę, o $k+1 \leqslant n+1$ žymi stulpelį, tai eilutė $k+1$ ir stulpelis k neišbraukti. Todėl neišbrauktas nudažytas langelis, esantis po pagrindine įstrižaine eilutėje $k+1$ ir stulpelyje k. Taigi sekoje $1, 2, \ldots, n+1$ po eilutės numerio eina tik eilutės numeris, o prieš stulpelio numerį – tik stulpelio numeris. Jei 1 būtų išbrauktos eilutės numeris, tai visi skaičiai $1, 2, \ldots, n+1$ žymėtų išbrauktas eilutes, bet eilučių išbraukta tik n. Todėl eilutė 1 neišbraukta. Stulpelis $n+1$ taip pat neišbrauktas (įrodoma analogiškai). Bet tada neišbrauktas šių eilutės ir stulpelio sankirtoje esantis nudažytas langelis. Gavome prieštarą. Vadinasi, lentelė nudažyta tinkamai.

Ats.: $3n+1$.

2009 m.

IX klasė

1. Nustatykite, kiek yra natūraliųjų skaičių, užrašomų vien nuliais ir vienetais bei mažesnių už 1001001.

Pirmas sprendimas. Vienženklių skaičių, tenkinančių uždavinio sąlygą, yra 1. Dviženklių yra 2 (10 ir 11), triženklių yra 4 (100, 101, 110, 111). Keturženklių yra 8: pirmas skaitmuo yra 1, kiekvienam iš likusių 3 skaitmenų yra po 2 galimybes (skaitmuo yra 0 arba 1), taigi turime $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$ galimybes. Panašiai penkiaženklių skaičių yra $2^4 = 16$, šešiaženklių yra $2^5 = 32$. Jei septynženklis skaičius yra mažesnis už 1001001, tai jis prasideda skaitmenimis 100.... Jei kitas skaitmuo yra 0, tai kiekvienam iš likusių 3 skaitmenų yra po dvi galimybes, taigi turime dar $2^3 = 8$ skaičius. O jei kitas skaitmuo yra 1, tai turime vienintelę galimybę 1001000.

Iš viso gauname $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^3 + 1 = 72$ skaičius.

Antras sprendimas. Atsakymą rasime greičiau, jei įsivaizduosime, kad bet kurį mums rūpintį skaičių galime padaryti septynženkliu, prireikus parašę prieš skaičių vieną ar kelis nulius. Pvz., $1101 = 0001101$. Tada turime tokias galimybes.

Pirmas skaitmuo yra 0. Tada likusius 6 skaitmenis galime rinktis laisvai ir turime 2^6 galimybių, iš kurių vieną – skaičių $0 = 0000000$ – reikia atmesti. Taigi randame $2^6 - 1 = 63$ skaičius.

Pirmas skaitmuo yra 1. Tada, kaip ir pirmame sprendime, randame dar $2^3 + 1 = 9$ skaičius.

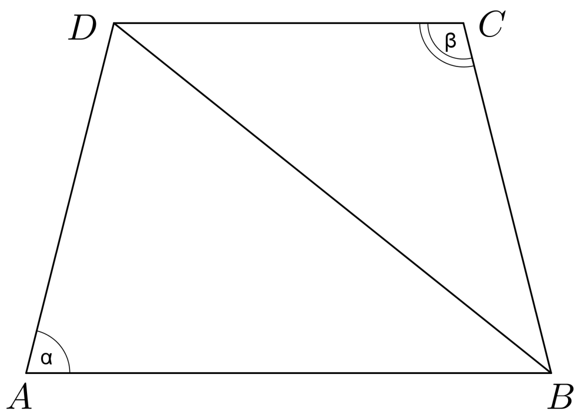
Iš viso gauname $63 + 9 = 72$ skaičius.

Trečias sprendimas. Uždavinys iš esmės nepakinta, jei duotąjį skaičių perskaitysime ne dešimtainėje, bet dvejetainėje skaičiavimo sistemoje. Joje visi skaičiai užrašomi tik nuliais ir vienetais. Taigi tereikia nustatyti, kiek natūraliųjų skaičių yra mažesni už $1001001_{(2)} = 2^6 + 2^3 + 1 = 73$. Žinoma, tokių skaičių yra $73 - 1 = 72$.

Ats.: 72.

2. Lygiašonės trapecijos įstrižainė dalija ją į du lygiašonius trikampius. Raskite šios trapecijos kampus.

Sprendimas. Trapecijos viršūnes galima pažymėti taip, kad ilgesnysis trapecijos pagrindas būtų AB, trumpesnysis – CD, o įstrižainė, dalijanti trapeciją į trikampius, būtų BD (žr. pav.). Kampus A ir C atitinkamai pažymėkime α ir β. Kiti du lygiašonės trapecijos kampai yra tokie patys: $\angle ABC = \alpha$, $\angle ADC = \beta$. Dviejų kampų suma lygi $\alpha + \beta = 180°$.



Trikampiai ABD ir BCD yra lygiašoniai. Tačiau kurie jų kampai lygūs? Lygiašonės trapecijos kampas prie trumpesniojo pagrindo yra bukasis, todėl lygiašoniame trikampyje BCD kampas C bukasis. Taigi $\angle CBD = \angle CDB$ ir $CB = CD$. Tada $AD = CB = CD < AB$, todėl trikampyje ABD turime $\angle ABD < \angle ADB$. Trapecijos kampai A ir B lygūs, todėl $\angle ABD < \angle ABC = \angle BAD$. Taigi trikampyje ABD tik didesnieji kampai BAD ir ADB gali būti lygūs.

Belieka pasinaudoti turimais lygiais kampais:

$$\angle ADB = \angle BAD = \alpha,$$

$$\angle BDC = \angle ADC - \angle ADB = \beta - \angle ADB = \beta - \alpha = \beta - (180^\circ - \beta) = 2\beta - 180^\circ,$$

$$\angle CBD = \angle BDC = 2\beta - 180^\circ.$$

Užrašykime trikampio BCD kampų sumą:

$$180^\circ = \beta + (2\beta - 180^\circ) + (2\beta - 180^\circ) = 5\beta - 360^\circ,$$

$$5\beta = 540^\circ,$$

$$\beta = 108^\circ,$$

$$\alpha = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ.$$

Taigi trapecijos kampai lygūs 72°, 72°, 108°, 108°.

Ats.: 72°, 72°, 108°, 108°.

3. Duota lygtis

$$\frac{x+6}{y} + \frac{13}{xy} = \frac{4-y}{x}.$$

a) Raskite bent vieną realųjį šios lygties sprendinį (x, y).

b) Raskite visus realiuosius šios lygties sprendinius.

Sprendimas. Iš karto spręskime b) dalį. Padauginkime abi lygties puses iš xy ir pertvarkykime lygtį, išskirdami pilnuosius kvadratus:

$$(x+6)x+13=(4-y)y, \qquad x^2+6x+y^2-4y+13=0,$$

$$(x^2+6x+9)+(y^2-4y+4)=0,$$

$$(x+3)^2+(y-2)^2=0.$$

Dviejų kvadratų (t. y. neneigiamų skaičių) suma lygi 0 tik tada, kai jie abu lygūs 0. Taigi $(x+3)^2=0$ ir $(y-2)^2=0$. Gavome vienintelį sprendinį $(-3,2)$. Lengva patikrinti, kad jis tenkina pradinę lygtį.

Ats.: a) ir b) $(-3,2)$.

4.

a) Raskite bent vieną tokį natūralųjį skaičių, kuris turėtų lygiai keturis natūraliuosius daliklius, o tų daliklių aritmetinis vidurkis būtų lygus 10.

b) Raskite visus tokius natūraliuosius skaičius, kurie turėtų lygiai keturis natūraliuosius daliklius, o tų daliklių aritmetinis vidurkis būtų lygus 10.

Sprendimas. a) Tinka skaičius 27, turintis daliklius 1, 3, 9, 27.

b) Įrodysime, kad daugiau skaičių, tenkinančių uždavinio sąlygą, nėra. Tarkime, kad natūralusis skaičius n tenkina uždavinio sąlygą. Skaičius $n=1$ netinka. Nagrinėkime du atvejus.

Tarkime, natūralusis skaičius n turi bent du skirtingus pirminius daliklius p_1 ir p_2. Tada jis dalijasi iš 1, p_1, p_2 ir p_1p_2. Daugiau daliklių jis turėti negali. Taigi

$$\frac{1+p_1+p_2+p_1p_2}{4}=10,$$

$$1+p_1+p_2+p_1p_2=40,$$

$$(p_1+1)(p_2+1)=40.$$

Kai p_1 (arba p_2) lygus 2, 3 arba 5, tai p_2 (arba p_1) nėra natūralusis pirminis skaičius. O jei $p_1 \geqslant 7$ ir $p_2 \geqslant 7$, tai $(p_1+1)(p_2+1) \geqslant 64 > 40$. Gautoji lygtis pirminių sprendinių neturi.

Tarkime, natūralusis skaičius n turi vienintelį pirminį daliklį p. Tada n yra skaičiaus p natūralusis laipsnis: $n=p^k$. Skaičius n dalijasi iš 1, p, p^2, …, p^k, taigi turi $k+1$ daliklį. Tada $k+1=4$ ir $n=p^3$. Gauname lygtį

$$\frac{1+p+p^2+p^3}{4}=10.$$

Kairioji pusė didėja, kai p didėja, todėl gautoji lygtis turi vienintelį sprendinį. Jį jau atspėjome a) dalyje: $n=3^3$ ir $p=3$.

Ats.: a) ir b) 27.

2009 m., X klasė

1. Nustatykite, kiek yra natūraliųjų skaičių, užrašomų vien nuliais ir vienetais bei mažesnių už 1001001001.

Pirmas sprendimas. Kaip ir IX klasės 1 uždavinio sprendime skaičiuokime tinkamus vienženklius, dviženklius, triženklius ir t. t. skaičius. Jų bus atitinkamai 1, 2, 2^2, 2^3 ir t. t. Devynženklių skaičių randame 2^8, o dešimtženklių skaičių jau bus mažiau.

Dešimtženklis skaičius turi prasidėti $100\ldots$. Jei ketvirtas skaitmuo yra 0, tai likę 6 skaitmenys parenkami laisvai ir turime 2^6 tokių skaičių. Jei ketvirtas skaitmuo yra 1, tai skaičius prasideda $100100\ldots$. Jei septintas skaitmuo yra 0, tai likusiems 3 skaitmenims turime 2^3 galimybių. Jei septintas skaitmuo yra 1, tai turime vienintelę galimybę 1001001000.

Iš viso gauname $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^6 + 2^3 + 1 = 584$ skaičius.

Antras sprendimas. Atsakymą rasime greičiau, jei įsivaizduosime, kad bet kurį mums rūpintį skaičių galime padaryti dešimtženkliu, prireikus parašę prieš skaičių vieną ar kelis nulius. Pvz., $101101 = 0000101101$. Tada turime tokias galimybes.

Pirmas skaitmuo yra 0. Tada likusius 9 skaitmenis galime rinktis laisvai ir turime 2^9 galimybių, iš kurių vieną – skaičių $0 = 0000000000$ – reikia atmesti, taigi randame $2^9 - 1 = 511$ skaičių.

Pirmas skaitmuo yra 1. Tada, kaip ir pirmame sprendime, randame dar $2^6 + 2^3 + 1 =$ $= 73$ skaičius.

Iš viso gauname $511 + 73 = 584$ skaičius.

Trečias sprendimas. Uždavinys iš esmės nepakinta, jei duotąjį skaičių perskaitysime ne dešimtainėje, bet dvejetainėje skaičiavimo sistemoje. Joje visi skaičiai užrašomi tik nuliais ir vienetais. Taigi tereikia nustatyti, kiek natūraliųjų skaičių yra mažesni už $1001001001_{(2)} = 2^9 + 2^6 + 2^3 + 1 = 585$. Žinoma, tokių skaičių yra $585 - 1 = 584$.

Ats.: 584.

2. Ant lentos užrašytas reiškinys

$$*3^5 * 3^4 * 3^3 * 3^2 * 3 * 1.$$

Vienu ėjimu leidžiama pakeisti vieną iš žvaigždučių ženklu „+” arba ženklu „–”. Marytė ir Onutė ėjimus atlieka pakaitomis. Jei Marytė daro ėjimą pirmoji, ar visada pavyks Onutei pasiekti, kad gautojo reiškinio reikšmė dalytųsi iš 7?

Sprendimas. Raskime, su kokiomis liekanomis dalijasi iš 7 užrašyti skaičiai: 1, 3, $3^2 = 7+2$, $3^3 = 3\cdot 7+6$, $3^4 = 81 = 11\cdot 7+4$, $3^5 = 3\cdot 81 = 243 = 34\cdot 7+5$. Dabar lengva pastebėti, kad $1+3^3$, $3+3^4$ ir 3^2+3^5 dalijasi iš 7. Pvz., $3^2+3^5=7+2+34\cdot 7+5=$ $=7+34\cdot 7+(2+5)=7+34\cdot 7+7$. Viskas priklauso tik nuo liekanų 2 ir 5, kurių suma dalijasi iš 7.

Šį faktą galima pastebėti kitaip: $1+3^3=28$ dalijasi iš 7, o tada iš 7 dalijasi ir $3+3^4=3\cdot(1+3^3)$, ir $3^2+3^5=3^2\cdot(1+3^3)$.

Onutė gali taikyti tokią pergalės strategiją. Užrašyti skaičiai suskirstomi poromis $(1,3^3)$, $(3,3^4)$, $(3^2,3^5)$. Kai Marytė parašo ženklą prieš vieną poros skaičių, kitu ėjimu Onutė parašo tokį patį ženklą prieš kitą skaičių iš tos pačios poros. Tada po Onutės ėjimo reiškinyje atsiranda vienas iš skaičių $\pm(1+3^3)$, $\pm(3+3^4)$, $\pm(3^2+3^5)$, o po visų trijų ėjimų reiškinio reikšmė bus lygi

$$\pm(1+3^3)\pm(3+3^4)\pm(3^2+3^5).$$

Skaičiai skliaustuose dalijasi iš 7, todėl ir viso reiškinio reikšmė dalijasi iš 7, nepriklausomai nuo trijose vietose esančių nežinomų ženklų.

Ats.: taip, Onutei visada pavyks.

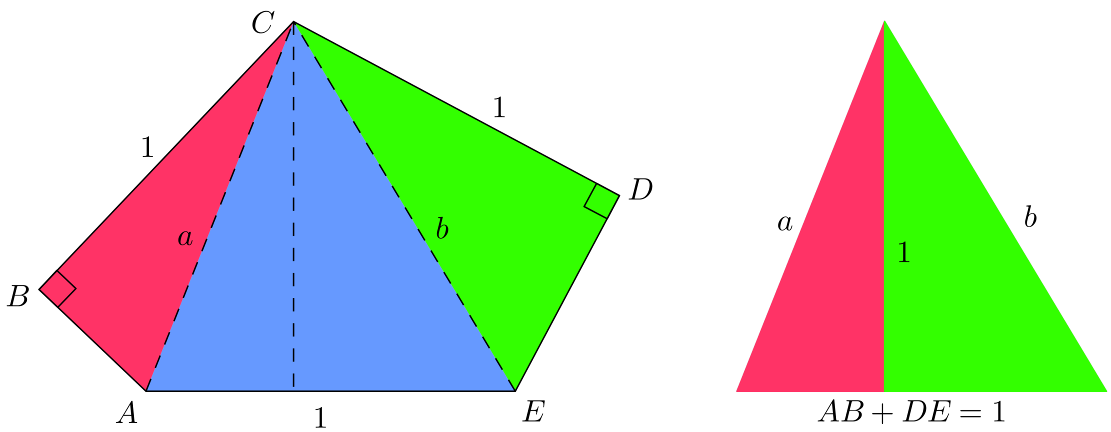
3. Iškilojo penkiakampio $ABCDE$ kraštinės tenkina sąlygą

$$BC=CD=AE=AB+DE=1,$$

o jo kampai B ir D yra statieji. Raskite penkiakampio $ABCDE$ plotą.

Sprendimas. Uždavinį gana lengva išspręsti, jei įsivaizduosime, kad penkiakampis turi simetrijos ašį, einančią per C ir statmeną AE. Tačiau tai tėra atskiras atvejis, o plotą turime rasti visais galimais atvejais.

Pažymėkime $CA=a$, $CE=b$. Įstrižainės CA ir CE dalija penkiakampį į tris trikampius. Stačiuosius trikampius ABC ir CDE, turinčius po lygų statinį, galima suglausti ir gauti naują trikampį (žr. pav.).



Trikampio pagrindas ir į jį nuleista aukštinė yra ilgio 1, todėl jo plotas (bendras ABC ir CDE plotas) lygus $\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{2}$.

Belieka rasti trikampio ACE plotą. Jo kraštinių ilgiai yra a, b, 1, taigi tokie patys, kaip ir trikampio, kurio plotą ką tik radome. Du trikampiai yra lygūs ir jų plotai lygūs. Vadinasi, trikampio ACE plotas taip pat yra $\frac{1}{2}$.

Visas penkiakampio plotas lygus $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

Ats.: 1.

4. Tegu a – bet kuris realusis skaičius. Didžiausias sveikasis skaičius, ne didesnis nei a, yra vadinamas skaičiaus a sveikąja dalimi ir žymimas $[a]$. Dydis $a - [a]$ yra vadinamas skaičiaus a trupmenine dalimi ir žymimas $\{a\}$.

Išspręskite lygčių sistemą:

$$\begin{cases} x + [y] + \{z\} = 100{,}9, \\ \{x\} + y + [z] = 125{,}3, \\ [x] + \{y\} + z = 200{,}9. \end{cases}$$

Sprendimas. Sudėkime tris lygtis ir pasinaudokime lygybe $[a] + \{a\} = a$:

$$x + y + z + ([x] + \{x\}) + ([y] + \{y\}) + ([z] + \{z\}) = 100{,}9 + 125{,}3 + 200{,}9 = 427{,}1,$$

$$x + y + z + x + y + z = 2(x + y + z) = 427{,}1,$$

$$x + y + z = 213{,}55.$$

Iš gautosios lygybės atimkime pirmąją lygtį:

$$(x+y+z) - (x+[y]+\{z\}) = (y-[y]) + (z-\{z\}) = \{y\} + [z] = 213{,}55 - 100{,}9 = 112{,}65.$$

Taigi $[z] + \{y\} = 112{,}65$ ir $\{y\} = 112{,}65 - [z]$. Iš 112,65 turime atimti sveikąjį skaičių $[z]$, kad liktų trupmeninė dalis $\{y\}$, neišvengiamai priklausanti intervalui $[0; 1)$. Taigi $[z] = 112$ (113 jau būtų per daug, o 111 per mažai) ir $\{y\} = 0{,}65$.

Iš lygybės $x + y + z = 213{,}55$ atskirai atėmę antrąją ir trečiąją lygtis, analogiškai gauname $\{z\} = 88{,}25 - [x]$, $[x] = 88$, $\{z\} = 0{,}25$ bei $\{x\} = 12{,}65 - [y]$, $[y] = 12$, $\{x\} = 0{,}65$.

Pagaliau randame $x = [x] + \{x\} = 88 + 0{,}65 = 88{,}65$, $y = 12{,}65$, $z = 112{,}25$.

Ats.: $(x, y, z) = (88{,}65, 12{,}65, 112{,}25)$.

2009 m., XI klasė

1. Močiutė nusipirko ir apelsinų, ir obuolių. Grįžusi namo ji išdalino juos savo anūkams. Visi anūkai gavo po lygiai vaisių. Vienas iš anūkų, Petriukas, gavo penktadalį visų obuolių ir septintadalį visų apelsinų. Kiek anūkų turi močiutė?

Sprendimas. Tarkime, kad Petriukas gavo x obuolių ir y apelsinų. Tada iš viso buvo $5x$ obuolių ir $7y$ apelsinų, o visi anūkai gavo po $x+y$ vaisių, kaip ir Petriukas.

Ieškomą anūkų skaičių pažymėkime n. Tada anūkai gavo iš viso $n(x+y)$ vaisių. Močiutės nupirktų vaisių skaičius lygus $n(x+y)=5x+7y$.

Jei $n\geqslant 7$, tai $5x+7y=n(x+y)\geqslant 7(x+y)=7x+7y$. Tada $x\leqslant 0$, bet taip negali būti, nes močiutė nupirko $5x>0$ obuolių.

Panašiai jei $n\leqslant 5$, tai $5x+7y=n(x+y)\leqslant 5(x+y)=5x+5y$. Tada $y\leqslant 0$, bet taip negali būti, nes močiutė nupirko $7y>0$ apelsinų.

Taigi lieka vienitelė galimybė $n=6$. Pastebėsime, kad uždavinio situacija įmanoma: močiutė galėjo nupirkti 5 obuolius ir 7 apelsinus, Petriukui jų duoti po vieną, o likusiems 5 anūkams išdalinti po 2 vaisius.

Ats.: močiutė turi 6 anūkus.

2. p_1, p_2, p_3, p_4 yra keturi skirtingi pirminiai skaičiai, tenkinantys lygybes

$$2p_1+3p_2+5p_3+7p_4=162,$$
$$11p_1+7p_2+5p_3+4p_4=162.$$

Raskite visas įmanomas sandaugos $p_1p_2p_3p_4$ reikšmes.

Sprendimas. Atimkime vieną lygtį iš kitos:

$$9p_1+4p_2-3p_4=0,$$

$$4p_2=3p_4-9p_1=3(p_4-3p_1).$$

Matome, kad $4p_2$ dalijasi iš 3, todėl p_2 dalijasi iš 3. Pirminis skaičius dalijasi tik iš 1 ir iš savęs paties, todėl vienintelis pirminis skaičius, besidalijantis iš 3, yra $p_2=3$.

Jei jau pravertė dalumas iš 3, bandykime tirti, kaip yra su nežinomųjų dalumu iš 2. Pastebėkime, kad vienintelis lyginis, t. y. dalus iš 2, pirminis skaičius yra 2.

Imkime pirmąją lygtį ir į dešiniąją pusę perkelkime reiškinį, kurio lyginumas aiškus:

$$p_3+p_4=162-2p_1-3p_2-4p_3-6p_4=153-2(p_1+2p_3+3p_4).$$

Matome, kad p_3+p_4 yra nelyginis skaičius. Jei abu dėmenys būtų nelyginiai, tai gautume lyginį skaičių. Todėl vienas iš dėmenų lyginis: $p_3=2$ arba $p_4=2$.

Analogiškai išnagrinėkime antrąją lygtį:

$$p_1+p_3=162-10p_1-7p_2-4p_3-4p_4=141-2(5p_1+2p_3+2p_4).$$

p_1+p_3 yra nelyginis skaičius, todėl vienas iš dėmenų lyginis: $p_1=2$ arba $p_3=2$.

Kadangi skaičiai p_1, p_3, p_4 yra skirtingi, tai tik vienas iš jų lygus 2. Jei $p_1=2$, tai nei $p_3=2$, nei $p_4=2$. Jei $p_4=2$, tai nei $p_1=2$, nei $p_3=2$. Taigi $p_3=2$.

Į pradines lygtis įrašę rastas p_2 ir p_3 reikšmes, gauname tiesinių lygčių sistemą su dviem nežinomaisiais:

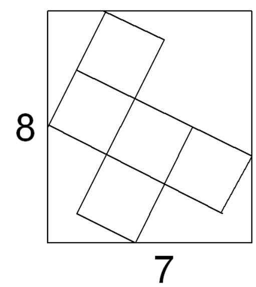
$$2p_1 + 7p_4 = (162 - 3p_2 - 5p_3 =)143,$$
$$11p_1 + 4p_4 = (162 - 7p_2 - 5p_3 =)131.$$

Ją išsprendę (bet kuriuo mokykliniu metodu), gauname $p_1 = 5$, $p_4 = 19$.

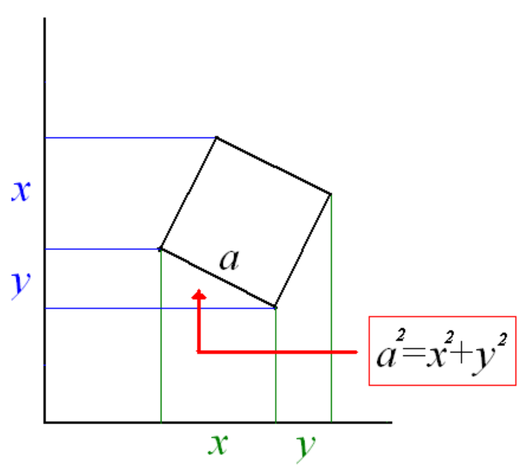
Radome vienintelį sprendinį $(p_1, p_2, p_3, p_4) = (5, 3, 2, 19)$, tenkinantį pradinę sistemą. Tada $p_1p_2p_3p_4 = 570$.

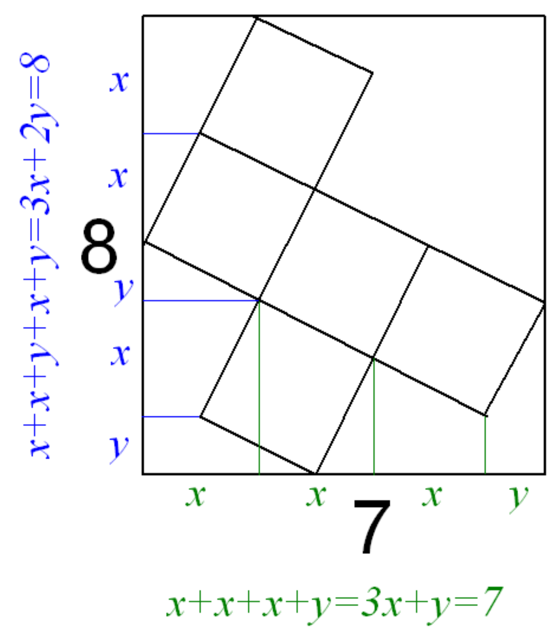
Ats.: 570.

3. Figūra, sudaryta iš penkių vienodų kvadratų, patalpinta 7×8 dydžio stačiakampyje, kaip parodyta paveikslėlyje. Raskite figūrą sudarančių kvadratų kraštinės ilgį.



Sprendimas. Nagrinėkime kvadratų kraštinių projekcijas į stačiakampio kraštines. Vienos bet kurios kraštinės dviejų projekcijų ilgius pažymėkime x ir y. Kad gautume gretimą to paties kvadrato kraštinę, pirmąją turime pasukti 90° kampu. Tiesės, į kurias projektuojame, taip pat sudaro 90° kampą, taigi galime įsivaizduoti, kad sukame ir jas. Tada pasisuka ir projekcijos, jų ilgiams nekintant (kairysis paveikslėlis).





Kadangi visų kvadratų kraštinės lygios ir pasvirusios tuo pačiu kampu, kaip jau išnagrinėtoji, tai jų projekcijos bus to paties ilgumo. Kelios projekcijos sudaro stačiakampio kraštines (dešinysis paveikslėlis). Taip gauname sistemą

$$\begin{cases} 3x + 2y = 8, \\ 3x + y = 7. \end{cases}$$

Randame projekcijų ilgius $x = 2$, $y = 1$. Pagal Pitagoro teoremą (kairysis paveikslėlis) ieškomas kraštinės ilgis lygus $a = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{5}$.

Ats.: $\sqrt{5}$.

4. Žr. X klasės 4 uždavinį.

2009 m., XII klasė

1. Nustatykite, kiek yra natūraliųjų skaičių, užrašomų vien nuliais, vienetais ir dvejetais bei mažesnių už 1002002001.

Pirmas sprendimas. Kaip ir IX klasės 1 uždavinio sprendime skaičiuokime tinkamus vienženklius, dviženklius, triženklius ir t. t. skaičius. Jų bus atitinkamai 2, $2 \cdot 3$, $2 \cdot 3^2$, $2 \cdot 3^3$ ir t. t. Devynženklių skaičių randame $2 \cdot 3^8$, o dešimtženklių skaičių jau bus mažiau.

Dešimtženklis skaičius turi prasidėti $100\ldots$. Jei ketvirtas skaitmuo yra 0 arba 1, tai likę 6 skaitmenys parenkami laisvai ir turime $2 \cdot 3^6$ tokių skaičių. Jei ketvirtas skaitmuo yra 2, tai skaičius prasideda $100200\ldots$. Jei septintas skaitmuo yra 0 arba 1, tai šiam bei likusiems 3 skaitmenims turime $2 \cdot 3^3$ galimybių. Jei septintas skaitmuo yra 2, tai turime vienintelę galimybę 1002002000.

Iš viso gauname $2+2\cdot3+2\cdot3^2+2\cdot3^3+2\cdot3^4+2\cdot3^5+2\cdot3^6+2\cdot3^7+2\cdot3^8+2\cdot3^6+2\cdot3^3+1 =$ $= 2 \cdot \frac{3^9-1}{3-1} + 1458 + 54 + 1 = 3^9 - 1 + 1458 + 54 + 1 = 19683 + 1512 = 21195$ skaičius.

Antras sprendimas. Atsakymą rasime greičiau, jei įsivaizduosime, kad bet kurį mums rūpintį skaičių galime padaryti dešimtženkliu, prireikus parašę prieš skaičių vieną ar kelis nulius. Pvz., 2122101 = 0002122101. Tada turime tokias galimybes.

Pirmas skaitmuo yra 0. Tada likusius 9 skaitmenis galime rinktis laisvai ir turime 3^9 galimybių, iš kurių vieną – skaičių 0 = 0000000000 – reikia atmesti, taigi randame $3^9 - 1 = 19682$ skaičius.

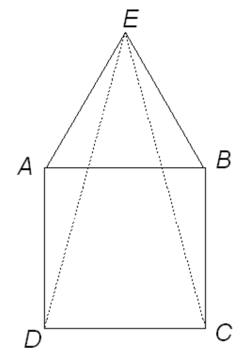
Pirmas skaitmuo yra 1. Tada, kaip ir pirmame sprendime, randame dar $2 \cdot 3^6 + 2 \times$ $\times 3^3 + 1 = 1513$ skaičius.

Iš viso gauname $19682 + 1513 = 21195$ skaičius.

Trečias sprendimas. Uždavinys iš esmės nepakinta, jei duotąjį skaičių perskaitysime ne dešimtainėje, bet trejetainėje skaičiavimo sistemoje. Joje visi skaičiai užrašomi tik nuliais, vienetais ir dvejetais. Taigi tereikia nustatyti, kiek natūraliųjų skaičių yra mažesni už $1002002001_{(3)} = 3^9 + 2 \cdot 3^6 + 2 \cdot 3^3 + 1 = 21196$. Žinoma, tokių skaičių yra $21196 - 1 = 21195$.

Ats.: 21195.

2. Žr. XI klasės 2 uždavinį.



3. $ABCD$ yra kvadratas, o ABE – lygiakraštis trikampis, esantis kvadrato išorėje ir turintis su juo bendrą kraštinę AB. Kam lygus trikampio CDE apibrėžtinio apskritimo spindulys, jei kvadrato $ABCD$ kraštinė lygi 1?

Pirmas sprendimas. Ieškomą spindulį pažymėkime R. Pastebėkime, kad $AB = BC = CD = DA = AE = BE = 1$. Trikampiai ADE ir BCE yra lygiašoniai. Galime rasti jų kampus: $\angle DAE = \angle BAD + \angle BAE = 90° + 60° = 150°$. Kiti du trikampio ADE kampai lygūs, todėl pagal trikampio kampų sumą $2\angle ADE = \angle ADE + \angle AED = 180° - \angle DAE = 180° - 150° = 30°$. Taigi $\angle ADE = \angle AED = 30° : 2 = 15°$. Panašiai $\angle CBE = 150°$, $\angle BCE = \angle BEC = 15°$.

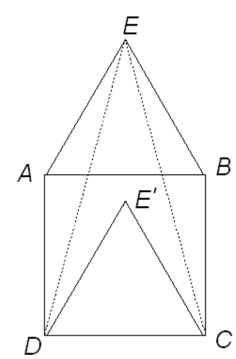
Tada $\angle CED = \angle AEB - \angle AED - \angle BEC = 60° - 15° - 15° = 30°$.

Apibrėžtinio apskritimo skersmuo lygus trikampio kraštinės ir prieš ją esančio kampo sinuso santykiui:

$$2R = \frac{CD}{\sin \angle CED} = \frac{1}{\sin 30°} = 2.$$

Taigi $R = 1$.

Antras sprendimas. Nesukdami trikampio ABE, pastumkime jį žemyn per 1. Tada kraštinė AB sutaps su atkarpa CD, o taškas E pereis į tašką E' (žr. pav.). Atkarpos AE ir DE' lygios ir lygiagrečios, todėl $ADE'E$ yra lygiagretainis. Jo kitos dvi kraštinės taip pat lygios: $EE' = AD = 1$. Taigi $E'C = E'D = E'E = 1$, t. y. apskritimas su centru E' ir spinduliu 1 eina per trikampio CDE viršūnes. Vadinasi, šis apskritimas ir yra apibrėžtinis, jo spindulys $R = 1$.



Ats.: 1.

4. Raskite visus tokius natūraliųjų skaičių trejetus (a, b, c), kad a, b ir c būtų stačiojo trikampio, kurio plotas lygus $a + b + c$, kraštinių ilgiai.

Sprendimas. Pastebėkime, kad jei turime tinkamą trejetą (a, b, c), tai tinka ir trejetai (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a). Tarkime, kad c yra įžambinės ilgis ir $a \leqslant b$ (jei taip nebūtų, galėtume sukeisti nežinomuosius vietomis).

Pagal uždavinio sąlygą $a + b + c = \frac{1}{2}ab$ ir $c = \frac{1}{2}ab - (a + b)$. Pagal Pitagoro teoremą

$$a^2 + b^2 = c^2 = \left(\frac{1}{2}ab - (a + b)\right)^2 = \frac{1}{4}a^2b^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}ab(a + b) + (a + b)^2,$$

$$a^2 + b^2 = \frac{1}{4}a^2b^2 - ab(a + b) + a^2 + 2ab + b^2,$$

$$\frac{1}{4}a^2b^2 - ab(a + b) + 2ab = 0.$$

Padalykime lygybę iš $ab \neq 0$ ir padauginkime iš 4:

$$\frac{1}{4}ab - (a + b) + 2 = 0,$$

$$ab - 4a - 4b + 8 = 0.$$

Pastebėkime, kad kairioji pusė primena atskliaustą reiškinį $(a-4)(b-4)$ – nuo jo skiriasi tik per konstantą:

$$(a - 4)(b - 4) - 8 = ab - 4a - 4b + 8 = 0,$$

$$(a - 4)(b - 4) = 8.$$

Kadangi $a-4$ dalija skaičių 8, tai belieka patikrinti galimybes $a-4 = -8$, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8. Pvz., jei $a-4 = 2$, tai $a = 6$, $b-4 = 8/(a-4) = 4$, $b = 8$ ir $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 10$. Skaičius a turi būti teigiamas ir ne didesnis už b. Tinka dvi galimybės: kai $a - 4 = 2$, tai $(a, b, c) = (6, 8, 10)$, ir panašiai, kai $a - 4 = 1$, tai $(a, b, c) = (5, 12, 13)$.

Be jau rastų trejetų tinka tik tie, kurie gaunami sukeičiant koordinates vietomis.

Ats.: $(6, 8, 10)$, $(6, 10, 8)$, $(8, 6, 10)$, $(8, 10, 6)$, $(10, 6, 8)$, $(10, 8, 6)$, $(5, 12, 13)$, $(5, 13, 12)$, $(12, 5, 13)$, $(12, 13, 5)$, $(13, 5, 12)$, $(13, 12, 5)$.