2010m. MIF studentų Matematikos Olimpiados uždaviniai

2010m. vasario 13d.

1 Jaunesniųjų grupė (I-III semestras)

1. Matrica A turi savybę : yra natūralus skaičius n, kad matricos laipsnis $A^n = 4A^3 + 3A^2 + 2A + \mathbb{I}$ ($\mathbb{I}$-vienetinė matrica). Įrodykite, kad A yra neišsigimusi matrica.

2. Tegul a, b, c, d - teigiami realūs skaičiai, $a > b$. Įrodykite, kad funkcija $f(x) = ca^x - db^x$ bet kurią reikšmę $y \in \mathbb{R}$ įgyja ne daugiau kaip 2 kartus.

3. Skaičius $N = p_1 p_2 \dots p_n$ yra lygus pirmų $n \geq 2$ pirminių skaičių $p_j, 1 \leq j \leq n$ sandaugai. Įrodykite, kad nei $N + 1$, nei $N - 1$ nėra natūralaus skaičiaus kvadratas.

4. Seka a_n apibrėžta lygybe $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$, be to, pirmi nariai $a_2 > a_1$ yra natūralieji skaičiai. Įrodykite, kad $a_{2010} \geq 2^{2009}$.

5. Funkciją $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vadinsime *pakankamai baisia*, jeigu kiekviename taške $x \in \mathbb{R}$ ji įgyja baigtinę realią reikšmę $y = f(x)$, tačiau bet kuriame realių skaičių tiesės atvirame intervale funkcija įgyja neaprėžtai dideles reikšmes. Sukonstruokite pakankamai baisios funkcijos pavyzdį.

2 Vyresniųjų grupė (IV-VIII semestras)

1. Žavioji studentė Monika norėtų sužinoti, ar konverguoja eilutė

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}.$$

   Ar kas nors galėtų padėti studentei Monikai?

2. Matricos A ir B yra panašios, jei egzistuoja neišsigimusi matrica T, tokia kad $B = TAT^{-1}$. Nustatykite, ar matricos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

   yra panašios.

3. Raskite visas natūralių skaičių poras (m, n), kurios tenkina nelygybę

$$\left| \sqrt{2} - \frac{m}{n} \right| < \frac{1}{n^3}.$$

4. Funkciją $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vadinsime *pakankamai baisia*, jeigu kiekviename taške $x \in \mathbb{R}$ ji įgyja baigtinę realią reikšmę $y = f(x)$, tačiau bet kuriame realių skaičių tiesės atvirame intervale funkcija įgyja neaprėžtai dideles reikšmes. Sukonstruokite pakankamai baisios funkcijos pavyzdį.

5. Legendinis katinas super-matematikas Micius aibių rinkinį

$$A_1, A_2, \ldots, A_n$$

   vadina *mielu širdžiai*, jei kiekviena iš tų aibių turi po 3 elementus ir bet kurios dvi iš jų, sakykim, A_i ir A_j, $i \neq j$ turi lygiai vieną bendrą elementą.

   a) Raskite tokį rinkinį iš $n = 7$ aibių, kuriame $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_7 = \varnothing$.

   b) Micius mano, kad visuose mieluose širdžiai rinkiniuose iš $n \geq 8$ aibių visada egzistuoja elementas, kuris priklauso visoms aibėms $A_k, 1 \leq k \leq n$. Ar Micius teisus? Įrodykite.