

**64-oji Lietuvos mokinių matematikos olimpiada**  
**Vilnius, 2015 04 01**  
**9–10 klasės**

1. Turime lygčių sistemą

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -1, \\ x^2 - 4y^2 + 9z^2 = 1, \\ -x^3 + 8y^3 + 27z^3 = -1. \end{cases}$$

- a) Nurodykite bent vieną jos realųjį sprendinį  $(x, y, z)$ .  
b) Nurodykite bent du jos realiuosius sprendinius.  
c) Raskite visus jos realiuosius sprendinius.
2. Trikampio  $ABC$ , kuriame  $AB = BC$  ir  $\angle ABC = 40^\circ$ , kraštinėje  $AB$  pažymėtas taškas  $D$ . Tiesė  $\ell$  taške  $D$  liečia apie trikampį  $ADC$  apibrėžtą apskritimą ir kerta apie trikampį  $BDC$  apibrėžtą apskritimą taškuose  $D$  ir  $M$ . Raskite kampą  $MBA$ .
3. Į lentelės  $3 \times 3$  langelius įrašyti skaičiai nuo 1 iki 9 (kaip parodyta paveikslėlyje). Lentelėje leidžiama atlikti tokią operaciją: pasirenkamas  $2 \times 2$

1	2	3
4	5	6
7	8	9

kvadratas ir jo vienos kurios nors įstrižainės abu skaičiai vienetu padidinami, o kitos įstrižainės abu skaičiai vienetu sumažinami. Kelis kartus atlikus tokią operaciją, kai kurie skaičiai lentelėje tapo lygūs. Ar tokiu būdu galima gauti

- a) 9 lygius skaičius?  
b) 8 lygius skaičius?  
c) 7 lygius skaičius?  
d) 6 lygius skaičius?
4. Natūraliųjų skaičių trejetas  $a \leq b \leq c$  tenkina lygybę

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(1 + \frac{1}{b}\right) \left(1 + \frac{1}{c}\right) = 2.$$

- a) Nurodykite bent du tokius trejetus.  
b) Raskite visus tokius trejetus.

## 11–12 klasės

1. Turime lygčių sistemą

$$\begin{cases} x^3 - x^2 = 2y, \\ 8y^3 - 4y^2 = x. \end{cases}$$

- a) Nurodykite bent du jos realiuosius sprendinius  $(x, y)$ .
- b) Raskite visus jos realiuosius sprendinius.
2. Apie trikampį  $ABC$ , kuriame  $AB < AC$ , apibėžtas apskritimas  $\omega$ . Aukštinės, nuleistos iš viršūnės  $A$  į pagrindą  $BC$ , tęsinys apskritimą  $\omega$  kerta taške  $D$ . Kraštinėje  $AC$  pažymėtas toks taškas  $E$ , kad  $BE = EC$ . Atkarpos  $BE$  tęsinys apskritimą  $\omega$  kerta taške  $F$ . Įrodykite, kad  $DF$  yra apskritimo  $\omega$  skersmuo.
3. Balandžio 1 dieną prekybos centre „Ozas“ atsidariusioje „Starbucks“ kavinėje licėjaus pirmokė Hermina įsigijo nuolaidų kortelę, su kuria kasdien pirkdama bent po vieną puodelį kapučino kavos ir vaišindama kava klasės draugus, ji iki pat metų pabaigos (t. y. per 275 dienas) žada nusipirkti lygiai 420 puodelių kavos. Licėjaus ketvirtokė Akvilė tikina, kad tada būtinai atsiras keletas dienų iš eilės (galbūt viena diena), per kurias Hermina nusipirks lygiai 145 puodelius kavos, o mokytojas Benas tvirtina, jog būtinai atsiras keletas dienų iš eilės (galbūt viena diena), per kurias Hermina nusipirks lygiai 125 puodelius kavos.
- a) Ar teisi ketvirtokė Akvilė?
- b) Ar teišus mokytojas Benas?
4. Sveikasis skaičius  $n$  yra vadinamas *keistu*, jei skaičius  $n^4 + 2014$  dalijasi iš  $n^2 + 2014$ , o skaičius  $n^4 + 2015$  dalijasi iš  $n^2 + 2015$ .
- a) Nurodykite bent tris keistus skaičius  $n$ .
- b) Raskite visus keistus skaičius  $n$ .