

**63-ioji Lietuvos mokinių matematikos olimpiada**  
**Vilnius, 2014 04 14**  
**9–10 klasės**

1. Raskite visus natūraliuosius lygčių sistemos

$$\begin{cases} x + y - z = 12, \\ x^2 + y^2 - z^2 = 12 \end{cases}$$

sprendinius.

2. Trikampio  $ABC$  pusiaukampinės  $AD$  ir  $BE$  kertasi taške  $G$ , o kampas  $C$  lygus  $60^\circ$ . Įrodykite, kad  $GD = GE$ .
3. Skaičiai  $1, 2, 3, \dots, n$  bet kaip surašomi vienas po kito. Imami visi greitimų dviejų skaičių skirtumai (iš didesnio skaičiaus atimamas mažesnis) ir iš visų tų skirtumų (kurių yra  $n - 1$ ) išrenkamas mažiausias skirtumas  $d$ .
- a) Kokia didžiausia  $d$  reikšmė, jei  $n = 99$ ?
- b) Kokia didžiausia  $d$  reikšmė, jei  $n = 2014$ ?
4. Raskite visas sveikųjų skaičių poras  $(m, n)$ , su kuriomis teisinga lygybė

$$(n + 101)(n + 102)(n + 103)(n + 104) = (m + 1)(m + 2).$$

## 11–12 klasės

1. Dalia nubrėžė lentoje trikampį. Loreta išmatavo jo kraštines  $a, b, c$ , įsitikino, kad visos jos yra natūralieji skaičiai, ir apskaičiavo sumą

$$S = \frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c}.$$

- a) Ar gali skaičius  $S$  būti lygus 4?  
b) Ar gali skaičius  $S$  būti lygus 2,99?  
c) Ar gali skaičius  $S$  būti lygus 3,05?
2. Per apskritimo išorėje esantį tašką  $A$  nubrėžtos dvi kirstinės. Viena kirstinė kerta apskritimą tokiuose taškuose  $B$  ir  $C$ , kad  $AB = 6$ ,  $AC = 10$ , kita kirstinė – taškuose  $D$  ir  $E$  ( $D$  yra tarp taškų  $A$  ir  $E$ ). Per tašką  $D$  nubrėžta tiesė, lygiagreti tiesei  $AC$ , kerta apskritimą taške  $F$  (čia  $F \neq D$ ). Tiesė  $FA$  apskritimą kerta taške  $G$  (čia  $G \neq F$ ), o tiesės  $EG$  ir  $AC$  kertasi taške  $M$ . Raskite atkarpos  $AM$  ilgį.
3. Futbolo turnyre dalyvavo 18 komandų. Kiekviena iš jų su kiekviena kita sužaidė po dvi rungtynes, vienas savo aikštėje, o kitas – svečiuose. Už pergalę buvo skiriami 3 taškai, už lygiąsias 1 taškas, už pralaimėjimą 0 taškų. Pasibaigus turnyrui visos komandos surinko po lygiai taškų. Įrodykite, kad bent dvi komandos, žaisdamos svetimose aikštėse, pasiekė po vienodą skaičių pergalių (galbūt nė vienos).
4. Natūralieji skaičiai  $a, b, c, d$  tenkina lygtį

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 7 \cdot 4^{2014}.$$

- a) Raskite bent vieną šios lygties sprendinį  $(a, b, c, d)$ .  
b) Raskite visus šios lygties sprendinius  $(a, b, c, d)$ , tenkinančius sąlygą  $a \leq b \leq c \leq d$ .