

61-oji Lietuvos mokinių matematikos olimpiada

Utena, 2012 04 02

9–10 klasės

1. Kiek yra tokių sveikųjų skaičių, kuriuos galima išreikšti kaip

$$\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \frac{3}{a_3} + \cdots + \frac{99}{a_{99}} + \frac{100}{a_{100}},$$

kur $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{99}, a_{100}$ – natūralieji skaičiai?

2. Duotas trikampis ABC , kuriame $AC = 1$ ir $AB = BC$, o atkarpoje AB yra tokie taškai K ir L , kad $\angle KLC = \angle LCK = \frac{1}{2}\angle BCA$. Raskite atkarpos KL ilgį.
3. Lentoje užrašyti skaičiai $1, 2, \dots, 2011, 2012$. Vienu ėjimu galima bet kuriuos du iš jų, a ir b , nutrinti ir vietoje jų parašyti skaičių $a - b$ arba $b - a$. Šis veiksmas kartojamas 2011 kartų, kol lentoje lieka vienas skaičius.
- a) Ar gali lentoje likti skaičius 0?
b) Ar gali lentoje likti skaičius 1?
c) Koks didžiausias skaičius gali likti lentoje?
4. Natūralusis skaičius n yra vadinamas *mandagiu*, jeigu jį galima išreikšti kaip

$$n = s + (s + 1) + \cdots + (t - 1) + t,$$

kur $s < t$ – natūralieji skaičiai. Pavyzdžiui, skaičius 18 yra mandagus, nes $18 = 5 + 6 + 7$.

- a) Ar skaičius 2012 yra mandagus?
b) Ar skaičius 2048 yra mandagus?
c) Raskite visus mandagiuosius skaičius.

61-oji Lietuvos mokinių matematikos olimpiada

Utena, 2012 04 02

11–12 klasės

1. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x^3 + x(y - z)^2 = 2, \\ y^3 + y(z - x)^2 = 30, \\ z^3 + z(x - y)^2 = 16. \end{cases}$$

2. Duotas trikampis ABC , kuriame $\angle ACB = 90^\circ$ ir $\angle BAC = 30^\circ$. Taškas E yra įbrėžto į jį apskritimo centras, o taškas D – atkarpos BE ir to apskritimo susikirtimo taškas. Raskite kampą tarp tiesių AE ir CD .
3. Lentoje užrašytą sveikųjų skaičių seką $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$, kur $n \geq 2$, leidžiama nutrinti ir užrašyti naują seką

$$|a_1 - a_2|, |a_2 - a_3|, \dots, |a_{n-1} - a_n|, |a_n - a_1|.$$

Su gautąja seka vėl leidžiama atlikti tokią pačią operaciją. Skaičius n vadinamas *piktu*, jei iš bet kokios pradinės sekos $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ po baigtinio operacijų skaičiaus gaunama seka $0, 0, \dots, 0, 0$.

- a) Įrodykite, kad bet kuris nelyginis skaičius n , kur $n > 1$, nėra piktas.
b) Ar skaičius 4 yra piktas?
c) Ar skaičius 6 yra piktas?
4. Natūralusis skaičius n yra vadinamas *mandagiu*, jeigu jį galima išreikšti kaip

$$n = s + (s + 1) + \dots + (t - 1) + t,$$

kur $s < t$ – natūralieji skaičiai. Pavyzdžiui, skaičius 18 yra mandagus, nes $18 = 5 + 6 + 7$.

- a) Ar skaičius 2012 yra mandagus?
b) Ar skaičius 2048 yra mandagus?
c) Raskite visus mandagiuosius skaičius.