

58-oji Lietuvos mokinių matematikos olimpiada

Druskininkai, 2009 04 07

9–10 klasės

1. Natūralieji skaičiai a, b ir c tenkina lygybę

$$28a + 30b + 31c = 365.$$

- a) Kelias reikšmes gali įgyti suma $a + b + c$?
- b) Raskite visus šios lygties natūraliuosius sprendinius (a, b, c) .
2. Keturkampio $ABCD$ kraštinės AD ir CD lygios, $\angle BCD = 60^\circ$, $\angle BAC = 30^\circ$. Įrodykite, kad kraštinės BC ir CD taip pat lygios.
3. Kabineto forma yra taisyklingasis šešiakampis, kurio kraštinė lygi 3 metrams. Kiekvienoje šešiakampio viršūnėje yra prietaisas, kuris rodo, kiek mokinių, nutolusių nuo jo ne didesniu kaip 3 metrų atstumu, miega. Kiek mokinių miega, jei visų šešių prietaisų parodymų suma yra lygi 7?
4. Skaičius $1, 2, 3, \dots, 4n$ reikia suskirstyti į n grupių po keturis skaičius taip, kad kiekvienoje grupėje vienas iš skaičių būtų lygus likusių trijų tos grupės skaičių aritmetiniam vidurkiui. Kuriems natūraliesiems n tai įmanoma?

58-oji Lietuvos mokinių matematikos olimpiada

Druskininkai, 2009 04 07

11–12 klasės

1. Duoti trys skirtingi teigiami skaičiai a, b ir c . Įrodykite, kad kvadratinė lygtis

$$(a + b + c)x^2 + 2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)x + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$$

turi dvi skirtingas realias šaknis.

2. E ir F atitinkamai yra kvadrato $ABCD$ kraštinių BC ir CD vidiniai taškai. Iš taško F tiesei AE išvestas statmuo ją kerta kvadrato įstrižainės BD taške G . Atkarpos FG vidinis taškas K yra toks, kad $AK = EF$. Raskite kampą $\angle EKF$.

3. Kabineto forma yra taisyklingasis šešiakampis, kurio kraštinė lygi 3 metrams. Kiekvienoje šešiakampio viršūnėje yra prietaisas, kuris rodo, kiek mokinių, nutolusių nuo jo ne didesniu kaip 3 metrų atstumu, miega. Kiek mokinių miega, jei visų šešių prietaisų parodymų suma yra lygi 7?

4. Natūralųjį skaičių m vadinkime *paslankiuoju*, jeigu jį galima užrašyti kelių (nebūtinai skirtingų) natūraliųjų skaičių suma taip, kad visų dėmenims atvirkštinių skaičių suma būtų lygi 1. Pavyzdžiui, 11 yra paslankusis skaičius, nes

$$11 = 2 + 3 + 6$$

ir

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}.$$

- a) Įrodykite, kad 28 yra paslankusis skaičius.
b) Ar 58 yra paslankusis skaičius?
c) Ar 65 yra paslankusis skaičius?
d) Ar 2009 yra paslankusis skaičius?