Remia
UAB „AFFECTO LIETUVA“
LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA
NACIONALINIS EGZAMINŲ CENTRAS
Kęstutis Naujokaitis
Leidykla TYTO ALBA
LIETUVOS MATEMATIKŲ DRAUGIJA

Organizuoja
VILNIAUS UNIVERSITETAS

XXIX LIETUVOS KOMANDINĖ MOKINIŲ MATEMATIKOS OLIMPIADA PROF. JONO KUBILIAUS TAUREI LAIMĖTI

Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas
2014-09-27

1. Išspręskite lygtį
$$2\sqrt{x} + \sqrt{1-4x} = 1.$$

2. Išspręskite lygčių sistemą
$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 4, \\ 2xy - 2x = -5. \end{cases}$$

3. Išspręskite lygtį
$$\frac{8}{x-8} + \frac{10}{x-6} + \frac{12}{x-4} + \frac{14}{x-2} = 4.$$

4. Realiųjų skaičių ir nenulinių realiųjų skaičių aibes atitinkamai pažymėkime $\mathbb{R}$ ir $\mathbb{R}^*$. Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, su bet kokiais $x, y \in \mathbb{R}^*$ tenkinančias lygybę
$$xf(xy) + f(-y) = xf(x).$$

5. Įrodykite, kad bet kokiems teigiamiems skaičiams a, b, c, d galioja nelygybė
$$\frac{a^4}{a^3 + a^2b + ab^2 + b^3} + \frac{b^4}{b^3 + b^2c + bc^2 + c^3} + \frac{c^4}{c^3 + c^2d + cd^2 + d^3} + \frac{d^4}{d^3 + d^2a + da^2 + a^3} \geq \frac{a+b+c+d}{4}.$$

6. Vienas iš keturženklio natūraliojo skaičiaus skaitmenų yra 2. Visų keturių skaitmenų suma lygi 22. Be to, pats keturženklis skaičius dalijasi iš 11. Kiek yra tokių keturženklių skaičių?

7. Raskite sveikuosius šios lygčių sistemos sprendinius:
$$\begin{cases} xy + z = 27, \\ x + yz = 22. \end{cases}$$

8. Raskite visus natūraliuosius skaičius n, su kuriais skaičius $3^{2n+1} - 4^{n+1} + 6^n$ yra pirminis.

9. Natūralųjį skaičių vadinkime neprilygstamu, jei jis turi lygiai du skirtingus pirminius daliklius. Pvz., neprilygstamas skaičius 100 turi du pirminius daliklius 2 ir 5. Įrodykite, kad 18 iš eilės einančių natūraliųjų skaičių negali būti visi neprilygstami.

10. Kuris skaičius didesnis: $(100!)!$ ar $(99!)^{100!} \cdot (100!)^{99!}$? (Čia $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ žymi faktorialą.)

11. Vienas dvejetukininkas per matematikos pamokas tegauna 4 pažymius: 2, 3, 4 arba 5. Jo 17 įvertinimų vidurkis yra sveikasis skaičius. Įrodykite, kad vieną iš 4 pažymių dvejetukininkas gavo ne daugiau nei du kartus.

12. Į kiekvieną lentelės langelį įrašyta po skaičių. Visose eilutėse skaičių sumos lygios ir visuose stulpeliuose skaičių sumos taip pat lygios. Ar tokiu būdu įmanoma:

    a) surašyti visus natūraliuosius skaičius nuo 1 iki 15 į 3×5 lentelę?

    b) surašyti visus natūraliuosius skaičius nuo 1 iki 20 į 4×5 lentelę?

13. Įrodykite, kad 7×7 lentelėje juodai nudažius bet kuriuos 29 iš 49 langelių, joje atsiras 2×2 kvadratas su mažiausiai 3 juodais langeliais.

14. Į seminarą atėjo 6 matematikai. Paaiškėjo, kad tarp bet kurių 3 matematikų yra du, kurie vienas kito nepažįsta. Matematikai suskaičiavo, kiek jų tarpe yra vienas kitą pažįstančių matematikų porų. Ar tų porų gali būti a) lygiai 9; b) lygiai 10?

15. Kairiajame viršutiniame stačiakampės $n \times 2014$ lentelės ($n > 1$) kampe padėta šaškė. Du žaidėjai pakaitomis atlieka ėjimus. Vienu ėjimu žaidėjas pastumia šaškę į dešinę arba žemyn per bet kiek langelių. Žaidėjas, negalintis atlikti ėjimo, pralaimi. Nustatykite, su kuriomis n reikšmėmis žaidimą pradedantis žaidėjas turi pergalės strategiją, t. y. gali žaisti taip, kad laimėtų nepriklausomai nuo to, kiek sumaniai žais kitas žaidėjas.

16. Trikampio ABC pusiaukraštinės AD ir BE statmenos. Be to, $AD = 18$ ir $BE = 13{,}5$. Raskite trečiosios pusiaukraštinės CF ilgį.

17. Aukštinė ir pusiaukampinė, išvestos iš stačiojo trikampio stataus kampo viršūnės, yra atitinkamai lygios 3 ir 4. Raskite trikampio plotą.

18. Keturkampio $ABCD$ kraštinės BC ir AD lygiagrečios, o jo įstrižainės kertasi taške O. Įstrižainė CA kampą BCD dalija pusiau. Be to, $CD = AO$ ir $BC = OD$. Raskite kampą ABC.

19. Į trikampį ABC įbrėžtas apskritimas su centru O liečia trikampio kraštines AB ir BC atitinkamai taškuose D ir E. Tiesės AO ir DE kertasi taške F. Įrodykite, kad atkarpos AF ir CF statmenos.

20. Smailiojo trikampio ABC ($AB > BC$) kraštinę AC taškas M dalija pusiau. Apie šį trikampį apibrėžto apskritimo Ω liestinės, išvestos per taškus A ir C, kertasi taške P. Atkarpos BP ir AC kertasi taške S, o AD yra trikampio ABP aukštinė. Apskritimas ω, apibrėžtas apie trikampį CSD, ir Ω kertasi taške $K \neq C$. Įrodykite, kad kampas CKM yra statusis.