

XX LIETUVOS KOMANDINĖ MOKSLEIVIŲ MATEMATIKOS OLIMPIADA PROF. JONO KUBILIAUS TAUREI LAIMĖTI

Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas, 2005 10 01

Uždavinių sąlygos

1. Raskite visus sveikųjų skaičių trejetus (x, y, z) , su kuriais

$$\begin{cases} x + yz = 2005 \\ y + xz = 2006 \end{cases}$$

2. Teigiamųjų realiųjų skaičių a, b ir c sandauga $abc = 1$. Įrodykite, kad

$$1 + \frac{3}{a+b+c} \geq \frac{6}{ab+bc+ca}.$$

3. Teigiamieji skaičiai a, b, c ir d yra tokie, kad $a > c > d > b > 1$ ir $ab > cd$. Įrodykite, kad funkcija $f: [0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, apibrėžta lygybe

$$f(x) = a^x + b^x - c^x - d^x,$$

yra griežtai didėjanti.

4. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 10, \\ x^2 - y^2 - z^2 = 476 \\ 2^{\lg|y| - \lg z} = 1. \end{cases}$$

5. n yra teigiamas sveikasis skaičius. Ar egzistuoja tokie teigiami sveikieji skaičiai x ir y , kad

$$\sqrt{n} + \sqrt{n+1} < \sqrt{x} + \sqrt{y} < \sqrt{4n+2}?$$

6. Raskite visus realiuosius x , tenkinančius sąlygą

$$\frac{x}{x+4} = \frac{5[x]-7}{7[x]-5},$$

kur $[x]$ yra didžiausias sveikasis skaičius, ne didesnis už x .

7. n ir m yra sveiki teigiami skaičiai. Įrodykite, kad $5^n + 5^m$ yra užrašomas dviejų sveikųjų teigiamų skaičių kvadratų suma tada ir tik tada, kai $n-m$ yra lyginis skaičius.

8. Sveiką teigiamą skaičių vadiname *tripletiniu*, jeigu visi jo dalikliai gali būti suskirstyti į 3 nesikertančius poaibius su vienoda kiekvieno poaibio skaičių suma.

A. Raskite bent vieną tripletinį skaičių;

B. Raskite du tripletinius skaičius;

C. Ar egzistuoja 2005 tripletiniai skaičiai?

9. Kiek yra 5-ženklų palindromų, kurie dalijasi iš 37, skaičių. (Palindromu vadiname skaičių, kuris yra toks pat skaitant iš dešinės į kairę ir iš kairės į dešinę. Kairiausias ir dešiniausias skaitmenys nelygūs 0.)
10. Ar be galo daug yra teigiamųjų racionaliųjų skaičių x ir y , $x \neq y$, tokių porų $(x; y)$, kad ir $\sqrt{x^2 + y^3}$, ir $\sqrt{x^3 + y^2}$ yra racionalieji skaičiai?
11. Kvadratinėje lentelėje 9×9 paženklinta 40 langelių. Eilutė arba stulpelis yra laikomas *geru*, jei yra paženklinta daugiau negu pusė tos eilutės ar stulpelio langelių. Kiek daugiausiai gerų eilučių ir gerų stulpelių kartu gali būti tokioje lentelėje?
12. Finaliniame futbolo čempionate visos komandos buvo suskirstytos į pogrupius po 4 komandas kiekviename pogrupyje. Kiekviena komanda žaidė vienerias rungtynes su kiekviena kita savo pogrupio komanda. Už laimėtas rungtynes komanda pelnė 3 taškus, už sužaistas lygiosiomis – 1 tašką, už pralaimėtas – 0 taškų. Iš kiekvieno pogrupio po 2 komandas pateko į tolesnį etapą, ir kiekviena į tolesnį etapą patekusi komanda surinko ne mažiau taškų, nei bet kuri nepatekusi į tolesnį etapą komanda.
- A. Kiek mažiausiai taškų galėjo surinkti į tolesnį etapą patekusi komanda?
 B. Kiek daugiausiai taškų galėjo surinkti į tolesnį etapą nepatekusi komanda?
13. Visi $n \times n$ lentelės langeliai yra nudažyti baltai arba juodai taip, kad imant bet kurias dvi eilutes ir bet kuriuos du stulpelius 4 langeliai, esantys tų eilučių ir stulpelių sankirtose, nėra visi nudažyti viena ir ta pačia spalva. Raskite didžiausią galimą n reikšmę.
14. Tarptautinės moksleivių stovyklos 9 dalyviai vyko autobusu į ekskursiją. Paaiškėjo, kad kiekvienas iš jų kalba daugiausia trimis kalbomis, o tarp bet kurių trijų moksleivių bent du gali kalbėti ta pačia kalba. Įrodykite, kad bent trys moksleiviai gali kalbėti ta pačia kalba.
15. Kiekvienas iš teniso turnyro dalyvių sužaidė po vieną kartą su kiekvienu kitu turnyro dalyviu (lygiųjų tenise nėra). Įrodykite arba paneikite, jog jeigu kiekvienas turnyro dalyvis laimėjo nors vieną kartą, tai visada atsiras tokia trijų dalyvių A, B ir C grupė, kad A laimėjo prieš B , B laimėjo prieš C , o C laimėjo prieš A .
16. Keturkampyje $ABCD$ $AB = BC = CD = 1$, $\angle ABC = 80^\circ$, o $\angle BCD = 160^\circ$. Nustatykite kitų dviejų keturkampio $ABCD$ kampų didumus.
17. Keturkampis $ABCD$ yra lygiagretainis. Tiesė, einanti per tašką D , kerta atkarpą AC taške G , atkarpą BC – taške F ir tiesę AB – taške E . Trikampių BEF ir CGF plotai yra lygūs. Kam lygus santykis $AG:GC$?
18. Trikampyje ABC $\angle B = 75^\circ$, $\angle C = 45^\circ$. Kraštinėje BC pažymėtas toks taškas P , kad $BP = 2PC$. Raskite $\angle BPA$.
19. Raskite rombo $ABCD$ plokštumos taškų M geometrinę vietą, jei
- $$MA \cdot MC + MB \cdot MD = AB^2.$$
20. Dvi trikampio pusiauakraštinės yra 3 cm ir 6 cm. Koks gali būti didžiausias to trikampio plotas?