VILNIAUS UNIVERSITETAS

Artūras Dubickas

XIX LIETUVOS KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA

Vilnius 2005

Apsvarstė ir rekomendavo spausdinti Vilniaus universiteto
Matematikos ir informatikos fakulteto taryba

Recenzavo: dr. Romualdas Kašuba

A. Dubickas. XIX Lietuvos komandinės matematikos olimpiada.
Metodinė priemonė. – Vilnius, 2005.

Knygelėje pateiktos 2004 m. Lietuvos komandinės matematikos olimpiados uždavinių sąlygos, jų sprendimai ir atsakymai. Išsamus kiekvieno uždavinio sprendimas buvo vertinamas 5 balais. Be to, uždavinį teisingai išsprendus tik vienai komandai jai buvo pridedami 3 balai, dviem komandoms – po 2 balus, trim komandoms – po 1 balą.

Knygelė skirta moksleiviams, matematikos mokytojams ir studentams matematikams.

2005 05 02. Apimtis 0.9 leidyb. apsk. l.
Vilniaus universitetas
Tikimybių teorijos ir skaičių teorijos katedra
Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius
Rinko ir maketavo autorius
Tiražas 100 egz.

Turinys

XIX LIETUVOS KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA

Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas,
2004 10 02

Olimpiados rėmėjai: INFO–TEC, BALTIC AMADEUS, NACIONALINIS EGZAMINŲ CENTRAS, leidyklos ALMA LITTERA, AMŽIUS, TEV, TYTO ALBA.

Vertinimo komisija: A. Ambrazevičius, A. Bastys, A. Birštunas, A. Choliavkinas, Ž. Darbėnas, A. Domarkas, A. Dubickas (vertinimo komisijos pirmininkas), R. Garunkštis, R. Grigutis, J. Jankauskas, M. Juodis, A. Kačėnas, M. Kanaporis, K. Karčiauskas, R. Kašuba (organizacinės komisijos pirmininkas), V. Kazakevičius, D. Kulvičius, R. Leipus, V. Mackevičius, J. Mačys, H. Markšaitis, E. Mazėtis, R. Morkvėnas, G. Murauskas, A. Posochovas, Š. Repšys, A. Stankevičius, J. Šiaulys, M. Šileikis, V. Vitkauskas, R. Zovė, S. Zubė.

REZULTATAI

Pirmoji vieta – **Vilniaus tiksliųjų, gamtos ir technikos mokslų licėjaus pirmajai komandai**.

Komanda	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	$\sum$	Vt.
MIF FUX	5	5	5	4	3	5	1	5	5	5	7	8	0	5	0	0	2	5	5	4	79	–
Vilniaus lic. I	5	5	5	0	0	5	3	5	5	5	3	0	0	5	0	8	4	5	2	8	73	1
Minskas	5	0	5	0	0	5	1	4	5	5	7	0	0	5	0	0	8	5	5	4	64	2
KTU gimn. I	5	5	5	0	1	5	2	5	5	5	0	0	6	5	0	0	0	5	5	3	62	3
Visaginas	5	5	5	0	0	3	0	5	5	1	2	0	6	5	0	0	0	5	5	4	56	4
Šiauliai	5	0	5	0	0	4	1	3	5	0	2	0	6	5	0	0	0	5	5	4	50	5
Vilniaus lic. II	5	0	5	0	0	0	0	5	5	5	0	1	1	5	0	2	0	5	2	4	45	6
KTU gimn. II	5	0	5	0	0	5	1	1	5	1	0	0	0	5	0	0	0	5	5	4	42	7
Vilnius	5	2	4	0	0	5	1	0	0	0	0	0	0	5	0	0	4	5	5	4	40	8
Panevėžys	5	0	5	0	0	2	1	0	0	0	2	0	0	5	0	0	0	5	5	4	34	9
Kretinga	5	0	3	0	0	0	1	0	5	1	0	0	0	5	0	0	0	5	4	4	33	10
Klaipėda	5	0	4	0	0	0	1	0	0	0	2	0	0	5	0	0	0	5	5	4	31	11
Mažeikiai	5	0	4	0	0	0	1	1	0	1	2	0	0	5	0	0	4	0	2	4	29	12
Rokiškis	5	0	4	0	0	1	0	0	5	0	0	0	0	0	0	0	0	5	2	4	26	13
Pasvalys	5	1	4	0	0	0	0	0	0	0	2	1	0	5	0	0	0	5	0	0	23	14
Kaunas	5	0	0	0	0	0	0	1	5	0	2	0	0	0	0	0	0	0	2	4	19	15

Vilniaus universiteto MIF pirmakursių komanda dalyvavo be konkurso.

Uždavinių sąlygos

1. Dvylika skaičių - keturi vienetai, keturi penketai ir keturi šešetai - yra kažkaip surašyti ratu aplink apskritimą. Ar būtinai atsiras toks iš trijų greta stovinčių skaitmenų sudarytas triženklis skaičius (jo skaitmenys gali būti imami prieš arba pagal laikrodžio rodyklę), kuris dalijasi iš 3?

2. Išspręskite lygtį

$$2\cos(2\pi x) + \cos(3\pi x) = 0.$$

3. Išspręskite lygtį

$$3x^{[x]} = 13.$$

(Čia $[x]$ yra skaičiaus x sveikoji dalis.)

4. Įrodykite nelygybę

$$\frac{a}{\sqrt{2b^2+5}} + \frac{b}{\sqrt{2a^2+5}} \leqslant \frac{2}{\sqrt{7}},$$

kai $0 \leqslant a, b \leqslant 1$.

5. Kokias reikšmes gali įgyti reiškinys

$$\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2-c^2}{b^2+c^2} + \frac{c^2-a^2}{c^2+a^2},$$

kai a, b, c – realieji nenuliniai skaičiai?

6. Raskite visas realiųjų skaičių poras (x, y), su kuriomis

$$\begin{cases} x^6 = y^4 + 18, \\ y^6 = x^4 + 18. \end{cases}$$

7. Raskite visus tokius natūraliųjų skaičių trejetus (m, n, r), kad

$$2001^m + 4003^n = 2002^r.$$

8. Tegul m ir n yra natūralieji skaičiai. Įrodykite, kad jei $mn - 23$ dalijasi iš 24 be liekanos, tai $m^3 + n^3$ dalijasi iš 72 be liekanos.

9. Ar gali su kokia nors realiąja a reikšme skaičiai $(1 - 2a\sqrt{35})/a^2$ ir $a + \sqrt{35}$ abu būti sveikieji?

10. Įrodykite, kad tarp šešių iš eilės einančių natūraliųjų skaičių visada atsiras toks skaičius, kuris yra reliatyviai pirminis su kitų penkių skaičių sandauga.

11. Kokią didžiausią reikšmę gali įgyti natūraliųjų skaičių sandauga, jei jų suma yra lygi 2004?

12. Natūralieji skaičiai a, b, c, u, v, w tenkina lygčių sistemą

$$\begin{cases} a + u = 21, \\ b + v = 31, \\ c + w = 667. \end{cases}$$

Ar gali būti teisinga lygybė $abc = uvw$?

13. Realusis skaičius u yra lygties $x^3 - 3x^2 + 5x - 17 = 0$ šaknis, o realusis skaičius v – lygties $x^3 - 3x^2 + 5x + 11 = 0$ šaknis. Raskite $u + v$.

14. Ar galima kvadratinės lentos 100×100 langeliuose surašyti visus natūraliuosius skaičius nuo 1 iki 10000 taip, kad kiekviename langelyje esantis skaičius būtų arba mažesnis arba didesnis už visus skaičius, kurie surašyti visuose bendrą kraštinę su tuo langeliu turinčiuose langeliuose?

15. Ar egzistuoja toks daugianaris su sveikaisiais koeficientais $P(x)$, kad su visomis x reikšmėmis intervale $[4/10, 9/10]$ būtų teisinga nelygybė $|P(x) - 2/3| < 10^{-10}$?

16. Ar egzistuoja toks teigiamas skaičius a_0, kad visi begalinės sekos $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots,$ apibrėžtos rekurentine formule $a_n = \sqrt{a_{n-1} + 1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), nariai būtų racionalieji skaičiai?

17. Tegul a, b, c yra trikampio kraštinių ilgiai, o x, y, z tokie realieji skaičiai, kad $x+y+z = 0$. Įrodykite, kad

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy \leqslant 0.$$

18. Taškai M ir N priklauso trikampio ABC kraštinėms, atitinkamai, AB ir BC. Be to,

$$\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} = 2 \quad \text{ir} \quad \angle ACB = 2\angle MNB.$$

Įrodykite, kad trikampis ABC – lygiašonis.

19. Trapeciją dvi jos įstrižainės dalija į keturis trikampius. Trijų iš jų plotai yra lygūs $1, 2$ ir 4 . Kokias reikšmes gali įgyti ketvirtojo trikampio plotas?

20. Rombo įstrižainių santykis yra $a : b$. Raskite to rombo ir į jį įbrėžto skritulio plotų santykį.

Komentarai, nurodymai, sprendimai, atsakymai

1. Ne. Pavyzdžiui, kai ratu užrašyta 566161151556. Nesunku patikrinti, kad ši tvarka tinka, nes skaičius dalijasi iš 3 tada ir tik tada, kai jo skaitmenų suma dalijasi iš 3.

Atsakymas: nebūtinai.

2. Pažymėkime $\cos(\pi x) = y$. Tada $\cos(2\pi x) = 2y^2 - 1$, $\cos(3\pi x) = 4y^3 - 3y$, todėl

$$2(2y^2 - 1) + 4y^3 - 3y = 4y^3 + 4y^2 - 3y - 2 = (2y + 1)(2y^2 + y - 2) = 0.$$

Vadinasi, $y = -1/2$ arba $y = (-1 \pm \sqrt{17})/4$. Kadangi $y = \cos(\pi x) \in [-1, 1]$, tai $\cos(\pi x) = -1/2$ ir $\cos(\pi x) = (-1 + \sqrt{17})/4$. Iš pirmosios lygties gauname, kad $\pi x = \pm 2\pi/3 + 2\pi k$, kur $k \in \mathbf{Z}$, t. y. $x = \pm 2/3 + 2k$. Atitinkamai, iš antrosios lygties gauname, kad

$$x = \pm(1/\pi) \arccos((\sqrt{17} - 1)/4) + 2k.$$

Atsakymas: $x \in \{\pm 2/3 + 2k, \pm(1/\pi) \arccos((\sqrt{17} - 1)/4) + 2k\}$, kur $k \in \mathbf{Z}$.

3. Pastebėkime, kad su visais $x < 0$ $[x]$ turi būti lyginis skaičius, t. y. $x \in [-2k, -2k + 1)$, kur k - natūralusis skaičius, nes kitaip kairioji lygties pusė bus neigiama. Tačiau tada $x^{[x]} = |x|^{-2k} < (2k - 1)^{-2k} \leqslant 1 < 13/3$. Vadinasi, sprendinių gali būti tik su neneigiamais x. Aišku, kad $x^{[x]} < 13/3$, kai $x < 2$, bei $x^{[x]} > 13/3$, kai $x \geqslant 3$. Todėl $x \in [2, 3)$. Tada $[x] = 2$ ir iš lygties $x^2 = 13/3$ gauname vienintelį spendinį $x = \sqrt{13/3}$. Nesunku įsitikinti, kad šis sprendinys tenkina lygtį.

Atsakymas: $x = \sqrt{13/3}$.

4. Galima laikyti, kad $a \leqslant b$. Tada $a/\sqrt{2b^2 + 5} \leqslant a/\sqrt{2a^2 + 5}$. Be to, $b \leqslant 1$, todėl $b/\sqrt{2a^2 + 5} \leqslant 1/\sqrt{2a^2 + 5}$. Vadinasi, $a/\sqrt{2b^2 + 5} + b/\sqrt{2a^2 + 5} \leqslant (a + 1)/\sqrt{2a^2 + 5}$. Pakanka įrodyti, kad $7(a+1)^2 \leqslant 4(2a^2+5)$, t. y. $a^2 - 14a + 13 = (a-1)(a-13) \geqslant 0$. Akivaizdu, kad pastaroji nelygybė yra teisinga su visais $a \in [0, 1]$.

5. Pastebėkime, kad sukeitę a ir b vietomis mes pakeičiame reiškinį

$$R = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} + \frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2} + \frac{c^2 - a^2}{c^2 + a^2}$$

į $-R$, taigi pakanka nustatyti neneigiamų R įgyjamų reikšmių aibę. Be to, aišku, kad $u/v < (u + c)/(v + c)$, kai u – bet koks realusis, v, c – teigiamieji skaičiai ir $v > u$. Taigi, jei $a^2 + b^2 + c^2 = s$, tai $(a^2 - b^2)/(a^2 + b^2) < (a^2 - b^2 + c^2)/s$, $(b^2 - c^2)/(b^2 + c^2) < (b^2 - c^2 + a^2)/s$, $(c^2 - a^2)/(c^2 + a^2) < (c^2 - a^2 + b^2)/s$. Sudėję šias nelygybes gauname, kad $R < (a^2+b^2+c^2)/s = 1$. Be to, kai $a = \sqrt{t}$, $b = 1$, $c = \sqrt{r}$, kur $0 < r < 1$, tai

$$R = (t-1)\Big(\frac{1}{t+1} - \frac{2r}{(1+r)(t+r)}\Big) = \frac{(t-1)(t-r)(1-r)}{(t+1)(1+r)(t+r)}$$

įgyja visas reikšmes intervale $[0,1)$, kai t kinta nuo 1 iki ∞ . Vadinasi, R įgyja visas reikšmes intervale $(-1,1)$ ir tik jas.

Atsakymas: $(-1,1)$.

6. Kadangi $x^6 - y^6 = y^4 - x^4$, tai $(x^2-y^2)(x^4+x^2y^2+y^4+x^2+y^2) = 0$. Bet $(x,y) \neq (0,0)$, todėl $x^2 = y^2$, t.y. $x = \pm y$. Iš lygties $x^6 - x^4 - 18 = (x^2-3)(x^4+2x^2+6) = 0$, kur $x^4 + 2x^2 + 6 > 0$, gauname, kad $x = \pm\sqrt{3}$. Taigi x ir y įgyja reikšmes $\pm\sqrt{3}$.

Atsakymas: $(x,y) = (\sqrt{3},\sqrt{3}), (\sqrt{3},-\sqrt{3}), (-\sqrt{3},\sqrt{3}), (-\sqrt{3},-\sqrt{3})$.

7. Pastebėkime, kad $2002 = 8k+2$ su natūraliuoju k ir perrašykime lygtį $(8k+1)^m + (16k+3)^n = (8k+2)^r$. Jei $r \geqslant 3$, tai dešinioji pusė dalijasi iš 8 , o kairioji dalijant iš 8 visada duoda liekaną 2 arba 4 , nes $(16k+3)^n$ duoda liekaną 1 arba 3 . Taigi $r = 2$ arba $r = 1$. Tačiau kai $r = 1$, tai dešinioji pusė yra mažesnė. Vadinasi, $r = 2$. Tada $n \leqslant 1$, t. y. $n = 1$. Iš lygybės $(8k+1)^m = (8k+2)^2 - (16k+3) = (8k+1)^2$ gauname, kad $m = 2$.

Atsakymas: $(m,n,r) = (2,1,2)$.

8. Įrodykime, kad jei k yra natūralusis skaičius, nesidalijantis nei iš 2 , nei iš 3 , tai $k^2 - 1$ dalijasi iš 24 . Tikrai, tada $k = 6u \pm 1$, kur u - sveikasis skaičius, todėl $k^2 - 1 = 36u^2 \pm 12u = 12u(3u \pm 1)$ dalijasi iš 24 , nes $u(3u \pm 1)$ yra lyginis skaičius. Jei $mn - 23$ dalijasi iš 24 be liekanos, tai m ir n nesidalija nei iš 2 , nei iš 3 . Taigi $m^2 - 1$ ir $n^2 - 1$ dalijasi iš 24 . Be to, $mn + 1 = (mn - 23) + 24$ dalijasi iš 24 . Vadinasi,

$$(m+n)^2 = (mn+1)^2 - (m^2-1)(n^2-1)$$

dalijasi iš 24^2 , taigi $m+n$ dalijasi iš 24 . Iš lygybės

$$m^3 + n^3 = (m+n)((m+n)^2 - 3mn)$$

matome, kad pirmasis dauginamasis dalijasi iš 24 , o antrasis - iš 3 , taigi abi lygybės pusės dalijasi iš $24 \cdot 3 = 72$, ką ir reikėjo įrodyti.

9. Taip. Pavyzdžiui, jei $a = 6 - \sqrt{35}$, tai $a + \sqrt{35} = 6$, o

$$(1 - 2a\sqrt{35})/a^2 = (6+\sqrt{35})^2(1 - 2(6-\sqrt{35})\sqrt{35}) = 71^2 - 12^2 \cdot 35 = 1.$$

Atsakymas: taip.

10. Tegul tie skaičiai yra $n, n+1, \ldots, n+5$. Įrodysime, kad reikiamas skaičius yra $n+1, n+2, n+3$ arba $n+4$. Tarkime, kad tarp jų nėra reikamo skaičiaus. Pažymėkime $m = n+2$. Jei skaičius m ir kitų penkių skaičių sandauga nėra reliatyviai pirminiai, tai egzistuoja toks $g > 1$, kad $g|m$ ir

$$g|(m-2)(m-1)(m+1)(m+2)(m+3) = mk + 12,$$

kur $k \in \mathbf{Z}$. Todėl skaičiai $n+2$ ir 12 nėra reliatyviai pirminiai. Vadinasi, $n+2$ dalijasi iš 2 arba iš 3. Analogiškai, $n+3$ dalijasi iš 2 arba iš 3.
Pažymėkime $q = n+1$. Jei skaičius q ir kitų penkių skaičių sandauga nėra reliatyviai pirminiai, tai egzistuoja toks $t > 1$, kad $t|q$ ir

$$t|(q-1)(q+1)(q+2)(q+3)(q+4) = qk' - 24,$$

kur $k' \in \mathbf{Z}$. Todėl skaičiai $n+1$ ir 24 nėra reliatyviai pirminiai. Vadinasi, $n+1$ dalijasi iš 2 arba iš 3. Analogiškai, $n+4$ dalijasi iš 2 arba iš 3. Taigi kiekvienas iš skaičių $n+1, n+2, n+3, n+4$ dalijasi iš 2 arba iš 3. Tačiau lygiai du iš šių keturių skaičių dalijasi iš 2, todėl du likusieji turi dalintis iš 3. Aišku, kad tai neįmanoma, nes jų skirtumas yra lygus 2. Prieštara.

11. Jei tarp skaičių yra bent vienas lygus 1, tai sandauga tikrai nėra didžiausia, nes, pakeitę 1 ir bet kurį kitą skaičių į jų sumą, sandaugą tik padidinsime: $1 + a > 1 \cdot a$. Jei tarp skaičių yra bent vienas didesnis už 5, tai sandauga irgi nėra didžiausia, nes, pakeitę a į 3 ir $a-3$, sandaugą padidinsime, nes $3(a-3) > a$, kai $a \geqslant 5$. Be to, jei tarp skaičių yra bent vienas lygus 4, tai jį galima pakeisti į du dvejetus: kadangi $2 \cdot 2 = 4 = 2 + 2$, tai nei sandauga, nei suma nepasikeis. Vadinasi, galima laikyti, kad tarp skaičių yra tik dvejetai ir trejetai. Tačiau dvejetų gali būti ne daugiau kaip du, nes jei yra bent trys, tai pakeitę juos į du trejetus gautume didesnę sandaugą $3 \cdot 3 > 2 \cdot 2 \cdot 2$. Kadangi 2004 dalijasi iš 3 be liekanos, tai vieno arba dviejų dvejetų būti negali. (Nei 2002, nei 2000 iš 3 nesidalija.) Vadinasi, didžiausią sandaugą sudarantys skaičiai yra vieni trejetai; jų yra 668, kadangi $2004 = 3 \cdot 668$. Taigi didžiausia sandauga yra 3^{668}.

Atsakymas: 3^{668}.

12. Gali. Pavyzdžiui, sprendinys $a = 14$, $b = 27$, $c = 46$, $u = 7$, $v = 4$, $w = 621$, tenkina lygčių sistemą, o $abc = 17388 = uvw$.

Atsakymas: taip.

13. Pažymėkime $z = u - 1$, $y = v - 1$. Tada $z^3 + 2z - 14 = 0$ ir $y^3 + 2y + 14 = 0$. Sudėję abi lygybes gauname, kad

$$z^3 + y^3 + 2(z+y) = (z+y)(z^2 - zy + y^2 + 2) = 0.$$

Aišku, kad $z^2 - zy + y^2 + 2 = (z - y/2)^2 + 3y^2/4 + 2 > 0$, todėl $z + y = 0$ ir $u + v = z + y + 2 = 2$.

Atsakymas: 2.

14. Taip surašyti skaičius galima. Pavyzdžiui, įsivaizduokime, kad lenta nudažyta balta ir juoda spalva (kaip šachmatų lenta). Jei visuose baltuose langeliuose bet kaip surašysime skaičius nuo 1 iki 5000, o visuose juoduose langeliuose bet kaip nuo 5001 iki 10000, tai kiekviename baltame langelyje įrašytas skaičius bus mažesnis už visus kaimyninius skaičius, o juodame – didesnis.

Atsakymas: taip.

15. Taip, pavyzdžiui, tinka $P(x) = ((3x - 2)^n + 2)/3$, kai n yra pakankamai didelis lyginis skaičius. Aišku, kad tokio daugianario koeficientai yra sveikieji, nes $(-2)^n + 2$ dalijasi iš 3, kai n – lyginis. Be to, $|P(x) - 2/3| = |(3x - 2)^n|/3 < (4/5)^n$, kai $x \in [4/10, 9/10]$. O jei n yra pakankamai didelis, tai $(4/5)^n < 10^{-10}$.

Atsakymas: taip.

16. Tarkime, kad toks a_0 egzistuoja. Pažymėkime $a_n = u_n/v_n$, kur u_n ir v_n yra reliatyviai pirminiai natūralieji skaičiai. Įrodysime, kad $v_n = 1$ su kiekvienu natūraliuoju n, t. y. visi a_n, $n = 1, 2, \ldots,$ yra natūralieji skaičiai. Tikrai, iš lygybės $u_n^2/v_n^2 = u_{n-1}/v_{n-1} + 1 = (u_{n-1} + v_{n-1})/v_{n-1}$ išplaukia, kad $v_{n-1} = v_n^2$, t. y. $v_n = v_0^{1/2^n}$ yra natūralusis skaičius su kiekvienu natūraliuoju n. Tačiau tai įmanoma tik kai $v_0 = 1$. Tada $v_n = 1$ su kiekvienu $n \in \mathbf{N}$.
Kadangi visi a_n yra natūralieji ir $a_n > 1$, kai $n > 0$, tai $a_n \geqslant 2$. Tačiau jei $a_{n-1} \geqslant 3$, tai $a_n = \sqrt{a_{n-1} + 1} \leqslant a_{n-1} - 1$. Jei $a_n \geqslant 3$, analogiškai gauname, kad $a_{n+1} \leqslant a_n - 1 \leqslant a_{n-1} - 2$. Pritaikę dar keletą tokių žingsnių a_n vis sumažiname bent vienetu, todėl anksčiau ar vėliau gausime, kad $a_{n+m} < 3$. Vadinasi, $a_{n+m} = 2$, o $a_{n+m+1} = \sqrt{3}$ jau nėra natūralusis skaičius. Prieštara.

Atsakymas: ne.

17. Pakeiskime z į $-x-y$. Gauname ekvivalenčią nelygybę $-(x+y)(a^2y+b^2x)+c^2xy \leqslant 0$, t. y.

$$x^2b^2 + xy(a^2 + b^2 - c^2) + a^2y^2 \geqslant 0.$$

Jei $y = 0$, tai nelygybė akivaizdi. Jei $y \neq 0$, tai pakanka įrodyti nelygybę $t^2b^2 + t(a^2 + b^2 - c^2) + a^2 \geqslant 0$, kur $t = x/y$. Kvadratinio trinario diskriminantas yra lygus

$$(a^2 + b^2 - c^2)^2 - (2ab)^2 = (a - b - c)(a - b + c)(a + b - c)(a + b + c).$$

Jis yra neigiamas, nes pirmasis dauginamasis yra neigiamas, o kiti trys yra teigiami. Vadinasi, nelygybė yra teisinga su visais realiaisias t.

18. Tegul CP – kampo C pusiaukampinė. Tada atkarpos CP ir MN yra lygiagrečios (1 pav.), nes $\angle MNB = \angle PCB$.

1 pav.

Aišku, kad trikampiai PCB ir MBN panašūs, todėl

$$\frac{BP}{MB} = \frac{BC}{BN} = \frac{BN + NC}{BN} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Vadinasi,

$$\frac{BP}{AB} = \frac{BP}{MB} \cdot \frac{MB}{AM + MB} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2},$$

taigi CP yra ne tik kampo C pusiaukampinė, bet ir trikampio ABC pusiaukraštinė. Todėl $AC = BC$.

19. Pažymėkime trikampių ABM, BMC, CMD, AMD plotus, atitinkamai, x, y, z, w (2 pav.). Aišku, kad $x + y = y + z$, todėl $x = z$. Vadinasi, ketvirtojo trikampio plotas gali būti $1, 2$ arba 4. Be to, $y/z = (x + y)/(w + z)$, todėl $xz = x^2 = yw$.

2 pav.

Taigi ketvirtojo trikampio plotas gali būti tik 2. Belieka įrodyti, kad tokia trapecija egzistuoja. Tokia bus, pavyzdžiui, lygiašonė trapecija, kurios pagrindai BC ir AD yra lygūs, atitinkamai, 1 ir 2, o aukštinė lygi 6. Tada trikampio ABD plotas yra lygus $2 \cdot 6/2 = 6 = x + w$, o trikampio ABC plotas lygus $1 \cdot 6/2 = 3 = x + y$.

Kadangi $x^2 = yw$ ir $x = z$, tai $x = z = 2$, $y = 1$, $w = 4$ yra vienintelis ketvertas, tenkinantis šią lygčių sistemą.

Atsakymas: 2 .

20. Galime laikyti, kad pusė vienos rombo įstrižainės yra lygi a, o pusė kitos – b. Tada ketvirtis rombo yra statusis trikampis BCA. Trikampio BCA (3 pav.) plotą galime suskaičiuoti dviem būdais: kaip $\frac{1}{2}AC \cdot CB = \frac{1}{2}ab$ ir kaip $\frac{1}{2}AB \cdot CM$, kur CM – trikampio aukštinė.

3 pav.

Ji yra ir į rombą įbrėžto apskritimo spindulys. Kadangi $AB = \sqrt{a^2 + b^2}$, tai ji yra lygi $r = ab/\sqrt{a^2 + b^2}$. Taigi rombo ploto, $2ab$, ir į jį įbrėžto skritulio ploto, πr^2, santykis yra $2(a^2 + b^2)/\pi ab$. Šis dydis, išreikštas a ir b santykiu, užrašomas taip: $2((a/b)^2 + 1)/\pi(a/b)$.

Atsakymas: $2((a/b)^2 + 1)/\pi(a/b)$.