Organizuoja

VILNIAUS UNIVERSITETAS

Remia

ALMA LITTERA
AMŽIUS
BALTIC AMADEUS
LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA
NACIONALINIS EGZAMINŲ CENTRAS
INFO-TEC
TEV
TYTO ALBA

XVIII LIETUVOS KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA

Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas, 2003 09 27

Uždavinių sąlygos

1. Išspręskite lygtį
$$2^{1/2-2|x|} = |x+1/2| + |x-1/2|.$$

2. Išspręskite lygčių sistemą
$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 1/3, \\ x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 = xyz(x+y+z)^3. \end{cases}$$

3. Raskite visus natūraliąsias n reikšmes, su kuriomis reiškinys n^4+4^n yra pirminis skaičius.

4. Įrodykite, kad
$$x_1+x_2+\ldots+x_n - x_1x_2\ldots x_n \leqslant n-1,$$
kai $x_1, x_2, \ldots, x_n \geqslant 1$.

5. Įrodykite, kad
$$\frac{x_1}{1-x_1} + \frac{x_2}{1-x_2} + \ldots + \frac{x_n}{1-x_n} \geqslant \frac{n}{n-1},$$
kai $n \geqslant 2$, $0 \leqslant x_1, x_2, \ldots, x_n < 1$ ir $x_1+x_2+\ldots+x_n = 1$.

6. Įrodykite, kad
$$(1+1/2)(1+1/4)\ldots(1+1/2^n) < 3,$$
kai n – natūralusis skaičius.

7. Įrodykite, kad
$$3(x^4+y^4+z^4)+48 \geqslant 8(x^2y+y^2z+z^2x),$$
kai x, y, z – realieji skaičiai.

8. Raskite visas natūraliąsias n reikšmes, su kuriomis reiškinys $36^n+24^n-7^n-5^n$ dalijasi iš 899 be liekanos.

9. Įrodykite, kad egzistuoja be galo daug tokių natūraliųjų skaičių n, kad $2003^n - 1$ dalijasi iš n be liekanos.

10. Raskite visas natūraliąsias n reikšmes, su kuriomis $80^n - 1$ dalijasi iš $8^n - 1$ be liekanos.

11. Raskite visus tokius natūraliųjų skaičių šešetus $(a_1, \ldots, a_6)$, kad $a_6 = 144$ ir

$$a_{n+3} = a_{n+2}(a_{n+1} + a_n),$$

kai $n = 1, 2, 3$.

12. Raskite visus tokius natūraliųjų skaičių trejetus, kad bet kurių dviejų iš jų sandaugą dalijant iš trečiojo skaičiaus gaunama liekana yra lygi 1.

13. Ar egzistuoja dešimtojo laipsnio daugianaris $p(x) = x^{10} + a_9x^9 + \ldots + a_1x + a_0$ su natūraliaisiais koeficientais $a_0, a_1, \ldots, a_9$, turintis 10 realiųjų šaknų ir tenkinantis sąlygą $p(2003) < 10^{33}$?

14. Ar egzistuoja funkcija $f(x)$, apibrėžta su kiekvienu realiuoju x ir tenkinanti sąlygas

$$f(-x^3) \geqslant f(x^2)^2 + 1/4$$

kiekvienam realiajam x bei $f(y) \neq f(z)$ kiekvienai realiųjų skaičių porai (y, z), $y \neq z$?

15. Ar egzistuoja funkcija $f(x)$, apibrėžta su kiekvienu realiuoju x ir tenkinanti sąlygas $f(f(f(x))) = x$ bei $f(0) = 2003$?

16. Aplink apskritimą yra surašyti 2003 skaičiai, kiekvienas iš kurių yra lygus arba 1 arba 0. Pradžioje ne visi skaičiai yra vienodi. Su jais atliekama tokia operacija: tarp dviejų skirtingų greta esančių skaičių įrašomas 1, o tarp dviejų vienodų greta esančių – 0, tada pradiniai skaičiai nutrinami, ir vėl lieka 2003 skaičiai. Ar galima po kelių tokių operacijų gauti visus nulius?

17. Lygiagretainio kraštinės yra lygios a ir b, o įstrižainės c ir d. Raskite jo kampus, jei $a^4 + b^4 = (cd)^2$.

18. Vienetiniame apskritime yra pažymėta n taškų ($n \geqslant 2$), kurie sujungti atkarpomis. Įrodykite, kad yra ne daugiau kaip $n^2/3$ atkarpų, ilgesnių už $\sqrt{2}$.

19. Duota n ($n \geqslant 2$) taškų, iš kurių jokie trys nepriklauso vienai tiesei. Kiek mažiausiai reikia spalvų norint nuspalvinti visas taškus jungiančias atkarpas taip, kad jokios dvi atkarpos, turinčios bendrą viršūnę, nebūtų nuspalvintos viena spalva?

20. Taškas P yra trikampio ABC viduje ir tenkina sąlygas

$$\angle ABC + \angle ACB = 3\angle PBA = 3\angle PCA.$$

Įrodykite, kad

$$\frac{AC}{AB + PC} = \frac{AB}{AC + PB}.$$