Organizuoja

VILNIAUS UNIVERSITETAS

Remia

ALMA LITTERA
AMŽIUS
BALTIC AMADEUS
NACIONALINIS EGZAMINŲ CENTRAS
INFO-TEC
TEV
TYTO ALBA

XVII LIETUVOS KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA

Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas, 2002 09 28

Uždavinių sąlygos

1. Išspręskite lygtį

$$x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1 = 0.$$

2. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ x^3 + y^3 = 2. \end{cases}$$

3. Raskite visus teigiamųjų skaičių ketvertus (x, y, z, t), tenkinančius lygčių sistemą

$$\begin{cases} x + y - zt = 0, \\ xy - z - t = 0, \\ xyzt = 16. \end{cases}$$

4. Realieji skaičiai x, y, z, t tenkina nelygybes $x+y+z+t < 0$, $xy+xz+xt+yz+yt+zt > 0$, $xyz + xyt + xzt + yzt < 0$ ir $xyzt > 0$. Įrodykite, kad $x, y, z, t < 0$.

5. Įrodykite, kad bent vienas iš skaičių $x-xy$, $y-yz$, $z-xz$ neviršija $1/4$, kai $x, y, z \geqslant 0$.

6. Realiojo skaičiaus $x \neq 0$ atvirkštiniu yra vadinamas skaičius $1/x$. Yra žinoma, kad keturių nenulinių skaičių ir jų atvirkštinių sumos abi yra lygios nuliui. Įrodykite, kad tarp tų keturių skaičių atsiras du, kurių suma yra lygi nuliui.

7. Raskite mažiausiąją funkcijos $f(x) = -2\sqrt{3}\cos(3x)\sin(6x)$ įgyjamą reikšmę, kai x – realusis skaičius.

8. Įrodykite, kad $10^n + 45n - 1$ dalijasi iš 27, kai n – natūralusis skaičius.

9. Įrodykite, kad egzistuoja natūralusis skaičius n, toks kad skaičiaus 2^n dešimtainėje išraiškoje yra ne mažiau kaip 2002 iš eilės einantys nuliai.

10. Raskite mažiausią natūralųjį skaičių, kurio pusė yra sveikojo skaičiaus kvadratas, trečdalis yra sveikojo skaičiaus kubas, o penktadalis yra sveikojo skaičiaus penktasis laipsnis.

11. Tegul $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_{n+1} = (a_n a_{n-1} + 1)/a_{n-1}$, $n = 2, 3, \ldots$. Įrodykite, kad $a_n > \sqrt{2n}$, kai $n \geqslant 3$.

12. Ar egzistuoja sveikieji skaičiai a ir b, tokie kad skaičiai

$$(a + 1/2)^n + (b + 1/2)^n$$

taip pat būtų sveikieji su kiekvienu natūraliuoju n?

13. Ar egzistuoja 100 laipsnio daugianaris $p(x)$ su realiaisiais koeficientais, toks kad

$$p(0) > |p(1)| + |p(2)| + \ldots + |p(2001)| + |p(2002)|?$$

14. Raskite visas funkcijas $f(x)$, apibrėžtas su kiekvienu realiuoju x, tenkinančias sąlygas

$$f(f(x)) = x, \quad f(1 + f(x)) = 1 - x.$$

15. Raskite visas funkcijas $f(x)$, apibrėžtas realiųjų skaičių aibėje, tenkinančias sąlygą

$$f(x^2 + y^2 - 2xy) = f(x)^2 + y^2 - 2xf(y).$$

16. Per metus mokyklos bibliotekoje apsilankė 410 mokinių. Jie visi kartu paėmė 5081 knygą. Ar galima tvirtinti, kad atsiras 18 mokinių, kurie visi kartu paėmė ne mažiau kaip 224 knygas?

17. Šachmatų lentoje 8×8 karalius gali eiti tik per vieną langelį į kairę, per vieną langelį į apačią arba per vieną langelį įstrižaine aukštyn–dešinėn. Ar jis gali 64 ėjimais apeiti visą lentą taip, kad kiekviename langelyje apsilankytų po vieną kartą?

18. Kokią didžiausią reikšmę gali įgyti į vienetinį apskritimą įbrėžto keturkampio kraštinių sandauga?

19. Į smailųjį trikampį ABC įbrėžto kvadrato, kurio dvi viršūnės priklauso kraštinei BC, o kitos dvi priklauso AB ir AC, kraštinė yra lygi a. Analogiškai, tegul b ir c yra kraštinės dar dviejų kvadratų, kurių po dvi viršūnes priklauso atitinkamai AC ir AB, o kitos dvi – atitinkamai AB, BC ir AC, BC. Įrodykite, kad

$$\frac{BC}{a} + \frac{AC}{b} + \frac{AB}{c} > 5 + \sqrt{2}.$$

20. Yra žinoma, kad bet kokie keturi iš penkių plokštumoje nubrėžtų apskritimų turi bent vieną bendrą tašką. Ar visada tie penki apskritimai turi bent vieną bendrą tašką?