Vilniaus universitetas

Artūras Dubickas

XI LIETUVOS KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA

Vilnius, 1996 10 05

Vilniaus universiteto leidykla
1997

Turinys

XI LIETUVOS KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA

Vilniaus universiteto Matematikos fakultetas, 1996 10 05

Olimpiados rėmėjas: **INFO–TEC** – direktorius Kęstutis Naujokaitis

Organizacinis komitetas: R. Kašuba (pirmininkas), A. Dubickas.

Vertinimo komisija: A. Dubickas (pirmininkas), A. Kačėnas, R. Kašuba, R. Lapinskas, K. Liubinskas, H. Markšaitis, A. Plikusas, G. Puriuškis, V. Stakėnas, S. Zubė.

REZULTATAI

Pirmoji vieta ir profesoriaus Jono Kubiliaus pereinamasis prizas – **Panevėžio J.Balčikonio gimnazijos komandai (mokytojas B. Budvytis)**.

Antroji vieta – **Kauno Technikos universiteto gimnazijos komandai**.

Trečioji vieta – **Kauno „Saulės" gimnazijos komandai**.

Komanda	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	$\sum$	Vt.
VU Maf	3	8	-	3	4	5	5	-	5	5	6	5	4	5	5	4	8	5	1	8	89	–
Panevėžys	7	-	8	4	-	5	5	8	5	3	6	-	8	5	5	0	3	5	5	0	82	1
Kauno TU	2	1	4	8	0	5	5	-	0	5	1	5	1	5	5	1	0	5	5	2	60	2
VU FuX	7	-	-	-	0	5	5	-	5	5	6	5	3	5	5	0	3	5	-	-	59	–
„Saulė"	1	0	-	2	-	0	5	-	0	5	0	5	4	-	5	2	3	5	5	1	43	3
Vilniaus Lic.	2	-	-	0	-	-	3	1	5	-	2	5	3	-	5	2	3	5	5	1	42	4
Palanga	1	-	-	1	-	-	5	0	5	0	-	5	4	-	5	4	0	5	-	1	36	5
Klaipėda	2	0	-	-	-	5	5	0	-	-	-	5	1	-	5	-	1	5	5	1	35	6-7
Vilniaus Rink.	2	0	0	1	-	0	5	2	0	5	2	5	1	-	5	2	0	5	0	-	35	6-7
Kaišiadorys	2	2	0	-	-	-	5	0	5	5	-	0	1	-	5	0	-	5	-	1	31	8
Šiauliai	-	-	0	2	-	-	5	-	1	-	-	-	4	-	5	0	3	5	1	0	26	9
Jonava	0	-	-	-	-	0	3	-	-	-	-	-	1	-	5	1	0	5	-	-	15	10

Vilniaus universiteto Matematikos fakulteto pirmakursių ir VU FuX (Fizikos ir Teisės fakulteto pirmakursių) komandos dalyvavo be konkurencijos.

Pilnas kiekvieno uždavinio sprendimas buvo vertinamas 5 balais. Be to, uždavinį teisingai išsprendus tik vienai komandai jai buvo pridedami 3 balai, dviem komandoms – po 2 balus, trim komandoms – po 1 balą.

XI LIETUVOS KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA

Vilniaus universiteto Matematikos fakultetas, 1996 10 05

Uždavinių sąlygos

1. Raskite visus tokius a, su kuriais nelygybė $3 - |x-a| > x^2$ turi nors vieną neigiamą sprendinį.

2. Jeigu n prabėga natūraliųjų skaičių aibę, tai įrodykite, kad skaičių $[\sqrt{5} \cdot 2^n]$ aibėje yra be galo daug sudėtinių (nepirminių) skaičių (Simboliu $[x]$ žymime skaičiaus sveikąją dalį).

3. Įrodykite, jog kiekvienam natūraliajam skaičiui m galime surasti tokį natūralųjį skaičių n, jog skaičiaus $n \cdot 5^m$ dešimtainėje (įprastinėje) išraiškoje nėra nė vieno nulio.

4. Raskite natūraliuosius lygties

$$\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \ldots + \sqrt{x}}}} = z$$

sprendinius x, y ir z (kairėje pusėje yra y radikalų).

5. Duota didėjanti natūraliųjų skaičių seka $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n < \ldots$. Simboliu S pažymėkime aibę, kurios kiekvienas elementas yra tos sekos narių (nebūtinai skirtingų) suma. Įrodykite, jog įmanoma surasti tokį baigtinį sekos narių skaičių, kad visus S elementus galime išreikšti to posekio narių (nebūtinai skirtingų) suma.

6. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} ad - bc = 1, \\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + cd = 1 \,. \end{cases}$$

7. Išspręskite lygtį

$$(\mathrm{tg} x + \mathrm{ctg} x)\,(2 + \sin y) = 2.$$

8. Įrodykite, jog kaip beimtume 51 skaičių iš skaičių $1, 2, 3, \ldots, 100$ aibės, joje visada surasime du vienas iš kito besidalijančius skaičius.

9. Trapecijos $ABCD$ šoninė kraštinė AB yra statmena abiems pagrindams, o įstrižainė BD yra statmena įstrižainei AC. Raskite $\frac{BD}{AC}$, jeigu žinome, kad $\frac{AD}{BC} = \sqrt{2}$.

10. Duotas taškas D, esantis trikampio ABC kraštinėje AB. Raskite atstumą tarp apskritimų, apibrėžtų apie trikampius DBC ir ADC, centrų, jeigu žinome, kad $AB = 4$, $AC = \sqrt{17}$, $BC = 5$ ir $AD = 1$.

11. Raskite visas tokias realiųjų skaičių a ir b poras, jog kad ir koks bebūtų x, yra teisinga lygybė

$$a \cos x + b^2 = \cos(ax + b^2) - 1 + a.$$

12. Du žaidėjai paeiliui ant stačiakampio 1×2 metrų matmenų stačiakampio stalo deda 1 cm skersmens monetas (dėti vieną monetą ant kitos negalima). Pralaimėjusiu laikomas nebegalintis padėti naujos monetos žaidėjas. Įrodykite, jog pirmąją monetą padedantis žaidėjas visada gali laimėti, kad ir kaip bežaistų kitas žaidėjas.

13. Su kokiais natūraliaisiais n reiškinyje

$$*1 * 2 * \ldots * n = n + 1$$

žvaigždutes galime taip pakeisti $+$ arba $-$ ženklais, kad gautume tikrą lygybę.

14. Realiųjų skaičių aibėje apibrėžta ir realiąsias reikšmes įgyjanti funkcija su kiekvienu x tenkina lygybę

$$f(x+1) + f(x-1) = \sqrt{2} f(x).$$

Įrodykite, kad $f(x)$ yra periodinė funkcija.

15. Albinas, Bronius ir Česlovas turi nudažyti 56 kambarių viešbutį. Albinas moka dažyti lubas arba grindis, o Bronius su Česlovu – tik sienas. Per dieną kiekvienas spėja nudažyti tik vienas lubas arba grindis, arba vieną kurio nors kambario sieną. Per kiek dienų greičiausiai jie spėtų išdažyti visus viešbučio kambarius, jeigu vienu metu atskirame kambaryje teleidžiama dirbti tik vienam žmogui.

16. Raskite mažiausiąją reiškinio

$$|\cos x| + |\cos 2x|$$

įgyjamą reikšmę.

17. Ar atsiras toks trikampis, kurio

a) visos aukštinės trumpesnės už 1, o plotas didesnis už 3?

b) dvi aukštinės ilgesnės už 2, o plotas mažesnis už 1?

18. Kokiems natūraliesiems skaičiams n esant $1996 \times n$ matmenų stačiakampį įmanoma supjaustyti į 1×3 matmenų stačiakampius?

19. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x + x|y - x| - |x| = 0, \\ |2x - y| + |x + y - 1| + |x - y| + y - 1 = 0 \ . \end{cases}$$

20. Raskite pačią didžiausią neneigiamų skaičių $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sandaugų sumos

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n$$

įgyjamą reikšmę, jeigu

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1996.$$

Komentarai, nurodymai, sprendimai, atsakymai

1. Kadangi
$$|x-a|<3-x^2 \iff x^2-3<x-a<3-x^2,$$
tai reikia rasti tokius a, su kuriais nelygybių sistema
$$\begin{cases} x^2-x-3+a<0, \\ x^2+x-3-a<0, \\ x<0 \end{cases}$$
turi sprendinį. Taigi lygčių $x^2-x-3+a=0$ ir $x^2+x-3-a=0$ diskriminantai turi būti teigiami (t.y. $13-4a>0$, $13+4a>0$), o jų mažesniosios šaknys neigiamos
$$\left(\text{t.y. } \frac{1-\sqrt{13-4a}}{2}<0, \quad \frac{-1-\sqrt{13+4a}}{2}<0\right).$$
Iš pirmosios sąlygos gauname $-13/4<a<13/4$, o tada iš antrosios $1<13-4a$, t.y. $a<3$.

Atsakymas: $-13/4<a<3$.

2. Kaip matome iš pateiktos rezultatų lentelės, šis uždavinys buvo vienas iš sunkesnių. Įrodysime, kad sekoje $[\alpha\, 2^n]$, kur $\alpha>0$ (tame tarpe ir $\alpha=\sqrt{5}$), yra be galo daug lyginių skaičių.

1 būdas. Užrašykime skaičiaus α trupmeninę dalį $\{\alpha\}$ dvejetainėje skaičiavimo sistemoje, t.y.
$$\{\alpha\}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{2^k},$$
kur skaičiai $a_1,a_2,a_3,\ldots$ lygūs 0 arba 1 ir nėra tokio k_0, kad $a_{k_0}=a_{k_0+1}=a_{k_0+2}=\ldots=1$. Tada
$$\begin{aligned}[\alpha\, 2^n] &= \Big[[\alpha]\cdot 2^n+\{\alpha\}\cdot 2^n\Big]=[\alpha]\cdot 2^n+\Big[\{\alpha\}\cdot 2^n\Big]= \\ &=[\alpha]\cdot 2^n+a_1\cdot 2^{n-1}+a_2\cdot 2^{n-2}+\ldots+a_{n-1}\cdot 2+a_n.\end{aligned}$$
Šis skaičius yra nelyginis tada ir tik tada, kai $a_n=1$. Taigi jeigu sekoje $[\alpha 2^n]$ visi nariai, pradedant nuo tam tikro k_1, yra nelyginiai skaičiai, tai $a_{k_1}=a_{k_1+1}=\ldots=1$. Prieštara.

2 būdas. Pažymėkime $x_n=[\alpha\, 2^n]$, $y_n=\{\alpha\, 2^n\}$ ir tegul k yra mažiausias natūrinis skaičius, tenkinantis nelygybę
$$y_n<1-\frac{1}{2^k}.$$
Įrodysime, jog tada, koks bebūtų n, skaičius x_{n+k} yra lyginis. Iš tiesų, jei $k=1$, tai $y_n<1/2$ ir
$$x_{n+1}+y_{n+1}=\alpha\, 2^{n+1}=2(x_n+y_n)=2x_n+2y_n.$$
Taigi $x_{n+1}=2x_n$, t.y. x_{n+1} – lyginis. Bendru atveju turime
$$1-\frac{1}{2^{k-1}}\leqslant y_n<1-\frac{1}{2^k}.$$
Perrašome šią sąlygą taip:
$$0\leqslant 2-2^k(1-y_n)<1.$$
Iš lygybės
$$\begin{aligned}x_{n+k}+y_{n+k}&=\alpha\, 2^{n+k}=2^k(x_n+y_n)= \\ &=2^kx_n+2^k-2+2-2^k(1-y_n)\end{aligned}$$
gauname $x_{n+k}=2^kx_n+2^k-2$, t.y. skaičius x_{n+k} – lyginis.

3. Užrašykime skaičių 5^m dešimtaine išraiška

$$5^m = \overline{a_r a_{r-1} \dots a_1 a_0}.$$

Tegul $a_0 \neq 0, a_1 \neq 0, \dots, a_{k-1} \neq 0$, o $a_k = 0$ (jeigu tokio a_k nėra, tai skaičiaus $1 \cdot 5^m$ dešimtainėje išraiškoje nėra nė vieno nulio). Nesunku pastebėti, kad skaičiaus $5^m(10^{k-1}+1)$ paskutiniai k skaitmenų nelygūs nuliui. Taigi pirmasis iš dešinės skaičiaus 5^m nulis, dauginant šį skaičių iš $10^{k-1}-1$, „pasistumia" kairėn. Lygiai taip pat pirmąjį iš dešinės skaičiaus $5^m(10^{k-1}+1)$ nulį galima „pastumti" kairėn. Tęsiame procesą tol, kol gausime skaičių $5^m \cdot t$, kurio dešimtainėje išraiškoje nėra nulių arba jo paskutiniai 5^m skaitmenų ne nuliai. Šiuo atveju, atmesdami likusius skaičiaus $5^m \cdot t$ skaitmenis, gausime skaičių

$$u = 5^m \cdot t - 10^{5^m} v.$$

Kadangi $10^{5^m} = (2 \cdot 5)^{5^m}$ dalijasi iš 5^m, tai skaičius u turi pavidalą $n \cdot 5^m$ ir jo dešimtainėje išraiškoje nėra nė vieno nulio.

4. Jeigu $y = 1$, tai $\sqrt{x} = z$, $x = z^2$ ir gauname sprendinį $(x, y, z) = (n^2, 1, n)$, $n \in \mathbb{N}$. Tarkime, kad $y = 2$. Tada

$$x + \sqrt{x} = z^2 \Longrightarrow x = u^2,\ u \in \mathbb{N}.$$

Gauname $u = z^2 - u^2$. Taigi $z \geqslant u + 1$ ir iš nelygybės

$$u = z^2 - u^2 \geqslant (u+1)^2 - u^2 = 2u + 1 > u$$

gauname prieštarą. Jeigu $y > 2$, tai, keliant abi lygties puses kvadratu ir perkeliant x į dešinę pusę, gausime

$$\sqrt{x + \sqrt{x + \ldots + \sqrt{x}}} = z^2 - x = v,$$

kur kairėje pusėje $y - 1$ radikalas. Tęsiame šį procesą tol, kol liks tik du radikalai ir gausime lygtį $\sqrt{x + \sqrt{x}} = \omega$, t.y. $x + \sqrt{x} = \omega^2$, kuri, kaip jau įrodėme, natūraliųjų sprendinių neturi.

Atsakymas: $(x, y, z) = (n^2, 1, n),\ n \in \mathbb{N}$.

5. Šis uždavinys pasirodė sunkiausiai įveikiamas olimpiados dalyviams. Pateiksime du sprendimo būdus.

1 būdas. Simboliu A_k, $k = 0, 1, 2, \dots, a_1 - 1$, žymėkime aibę sekos $a_1, a_2, a_3, \dots$ elementų, kurių liekana dalijant iš a_1 lygi k. Taip, pvz. $a_1 \in A_0$. Pažymėkime mažiausią aibės A_k elementą (jeigu ji netuščia) simboliu b_k. Taip, pvz. $b_0 = a_1$. Jeigu $s \in S$, tai $s = \sum a_j$. Kiekvienas šios baigtinės sumos narys a_j patenka į kažkurią aibę A_{i_j}. Keisdami šioje sumoje a_j atitinkamu b_{i_j}, sudarome sumą $s_1 = \sum b_{i_j}$. Tačiau visiems j $a_j - b_{i_j}$ dalijasi iš $a_1 = b_0$, todėl $s - s_1$ dalijasi iš b_0. Kadangi $s \geqslant s_1$, tai skaičių s galima užrašyti

$$s = s_1 + r\, b_0 = \sum b_{i_j} + r\, b_0,$$

kur r sveikasis neneigiamas skaičius. Aibėje $\{b_k\}$ yra ne daugiau kaip a_1 elementas, todėl uždavinio teiginys įrodytas.

2 būdas. Teiginį įrodysime indukcija pagal a_1. Jeigu $a_1 = 1$, tai teiginys akivaizdus: į ieškomą baigtinę aibę pakanka paimti a_1. Tarkime, kad teiginys teisingas visoms sekoms, kurių pirmasis narys yra mažesnis už a_1. Įrodysime teiginį sekai, kurios pirmasis narys lygus a_1. Sakykime, kad

$$a_1 = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r},$$

kur p_i – pirminiai skaičiai, o α_i – natūralieji skaičiai. Jeigu visi sekos a_n, $n = 1, 2, 3 \dots$, nariai dalijasi iš p_1, tai galime pritaikyti indukcijos prielaidą sekai a_n/p_1, $n = 1, 2, 3 \dots$. Jei ne, tai tegul a_1' bus sekos a_n elementas, nesidalijantis iš p_1. Analogiškai, tegul $a_2', a_3', \dots, a_r'$ bus sekos a_n

elementai, nesidalijantys atitinkamai iš $p_2, p_3, \dots, p_r$. Įrodysime, kad kiekvieną pakankamai didelį natūralųjį skaičių galima išreikšti elementų $a_1, a_1', a_2', a_3', \dots, a_r'$ suma. Pažymėkime

$$\begin{aligned} b &= a_1' p_2 p_3 \dots p_r + p_1 a_2' p_3 \dots p_r + p_1 p_2 a_3' p_4 \dots p_r + \dots + \\ &+ p_1 p_2 \dots p_{r-1} a_r'. \end{aligned}$$

Kadangi nei vienas iš skaičiaus a_1 pirminių daliklių $p_1, p_2, \dots, p_r$ nedalija skaičiaus b, tai a_1 ir b yra tarpusavyje pirminiai. Todėl egzistuoja tokie sveikieji x ir y, kad

$$a_1 x - by = 1.$$

Pažymėkime $N = \big(|x| + |y|\big)(a_1 + b)^2$. Matome, kad N išreiškiamas elementų $a_1, a_1', \dots a_r'$ suma (kadangi b išreiškiamas $a_1', a_2', \dots, a_r'$ suma). Įrodysime, kad $N + v$, $v \geqslant 1$, taip pat išreiškiamas šių elementų suma. Dalijame v iš $a_1 + b$ su liekana: $v = u(a_1 + b) + w$, $0 \leqslant w < a_1 + b$. Turime

$$\begin{aligned} N + v &= \big(|x| + |y|\big)(a_1 + b)^2 + u(a_1 + b) + w(a_1 x - by) = \\ &= a_1 \Big(\big(|x| + |y|\big)(a_1 + b) + u + wx \Big) + \\ &+ b \Big(\big(|x| + |y|\big)(a_1 + b) + u - wy \Big). \end{aligned}$$

Teiginys įrodytas, kadangi

$$\big(|x| + |y|\big)(a_1 + b) + u + wx > |x|(a_1 + b) - w|x| > 0$$

ir

$$\big(|x| + |y|\big)(a_1 + b) + u - wy > |y|(a_1 + b) - w|y| > 0.$$

Taigi į mūsų ieškomąją baigtinę aibę pakanka paimti $a_1, a_2', \dots, a_r'$ (jų sumomis išreiškiami visi natūriniai skaičiai ne mažesni už N) ir, pavyzdžiui, sekos a_n elementus, neviršijančius N ($a_n < N$), kurių taip pat yra baigtinis skaičius.

6. Padauginę abi lygtis iš 2 ir atėmę pirmąją iš antrosios, gausime

$$\begin{aligned} &2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2d^2 + 2ab + 2cd - 2ad + 2bc = \\ &= (a + b)^2 + (c + d)^2 + (a - d)^2 + (b + c)^2 = 0. \end{aligned}$$

Todėl $a + b = 0$, $c + d = 0$, $a - d = 0$ ir $b + c = 0$. Išsprendę šią sistemą, nesunkiai gauname $a = b = c = d = 0$. Šis sprendinys mūsų sistemos netenkina.

Atsakymas: $\emptyset$

7. Pažymėkime $z = \mathrm{tg} x$. Tada $\mathrm{ctg} x = 1/z$. Jeigu $z < 0$, tai kairė lygties pusė neigiama, kadangi $2 + \sin y \geqslant 2 - 1 = 1$. Taigi $z > 0$ ir

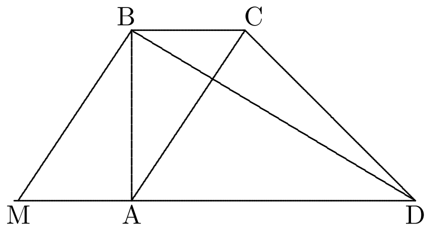
$$2 = (2 + \sin y)(z + 1/z) \geqslant z + 1/z \geqslant 2\sqrt{z \cdot \frac{1}{z}} = 2.$$

Lygybė bus tik tada, kai $\sin y = -1$ ir $z = 1$.

Atsakymas: $x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$,
$y = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

8. Natūralųjį skaičių n, $1 \leqslant n \leqslant 100$, vieninteliu būdu galima užrašyti $n = 2^k m$, kur k ir m sveikieji neneigiami skaičiai, m – nelyginis ir $1 \leqslant m \leqslant 99$. Tokių m yra 50, o paimtas 51 skaičius. Taigi atsiras du n su vienodu m: $n_1 = 2^{k_1} m$, $n_2 = 2^{k_2} m$. Aišku, kad vienas iš jų dalinsis iš kito. Lygiai taip pat įrodomas bendresnis teiginys: kaip beimtume $n+1$ skaičių iš aibės $\{1, 2, \ldots, 2n\}$, tarp jų visada atsiras tokie du skaičiai, jog vienas iš jų dalijasi iš kito.

9. Tiesėje AD pažymėkime tašką M tokį, kad $MA = BC$. Trikampis DBM



statusis.Iš panašių trikampių DBM ir DAB gauname

$$\frac{BD}{MD} = \frac{AD}{BD} \Longrightarrow BD^2 = AD \cdot MD.$$

Analogiškai $BM^2 = MA \cdot MD$. Todėl

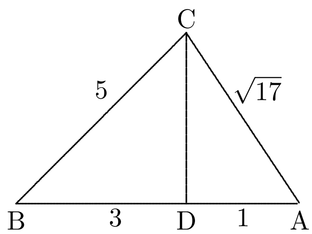
$$\frac{BD}{AC} = \frac{BD}{BM} = \sqrt{\frac{AD}{MA}} = \sqrt{\frac{AD}{BC}} = \sqrt[4]{2}.$$

Atsakymas: $\sqrt[4]{2}$.

10. Aišku, kad $BD = AB - AD = 3$. Pastebėkime, kad

$$AC^2 - AD^2 = 17 - 1 = 16 = 5^2 - 3^2 = BC^2 - BD^2.$$

Taigi CD yra trikampio ABC aukštinė. Todėl apskritimų, apibrėžtų apie trikam-



pius DBC ir ADC , centrai yra atkarpų BC ir AC vidurio taškai. Atstumas tarp jų lygus $\frac{1}{2}AB = 2$.

Atsakymas: 2

11. Imkime mūsų lygybėje $x = 0$. Gausime

$$a + b^2 = \cos(b^2) - 1 + a \Longleftrightarrow \cos(b^2) = 1 + b^2.$$

Kadangi $\cos(b^2) \leqslant 1$, o $1 + b^2 \geqslant 1$, tai vienintelis lygties $\cos(b^2) = 1 + b^2$ sprendinys yra $b = 0$. Taigi, jeigu bent viena ieškomoji pora $(a; b)$ egzistuoja, tai joje būtinai $b = 0$. Turime lygybę

$$a\ \cos x = \cos(ax) - 1 + a.$$

Imkime joje $x = 2\pi$. Gausime $\cos(2\pi a) = 1$, t.y. a – sveikasis skaičius. Imdami $x = \pi$, gausime

$$- a = \cos(\pi a) - 1 + a,$$
$$\cos(\pi a) = 1 - 2a,$$

t.y. $-1 \leqslant 1 - 2a \leqslant 1$. Kadangi a – sveikasis skaičius, tai iš šios nelygybės seka, kad $a = 0$ arba $a = 1$. Nesunku įsitikinti, kad abi poros $a = 0$, $b = 0$ ir $a = 1$, $b = 0$ tenkina uždavinio sąlygą, t.y. lygybė teisinga visiems realiesiems x .

Atsakymas: $(a; b) = (0; 0)$ ir $(1; 0)$.

12. Pirmąją monetą pirmasis žaidėjas deda ant stalo centro, o vėliau, kur bepadėtų monetą antrasis, pirmasis žaidėjas deda monetą simetriškai stalo centro atžvilgiu. Taigi po kiekvieno pirmojo žaidėjo ėjimo „laisvas plotas" ant stalo yra simetriškas stalo centro atžvilgiu, ir pirmasis visada gali padėti monetą, jeigu tai gali padaryti antrasis. Aišku, kad šis sprendimas tinka bet kokių matmenų simetriškam stalui ir bet kokio dydžio monetai.

13. Visų pirma pastebėkime, kad keičiant ženklą $-$ į ženklą $+$, reiškinio $*1 * 2 * \ldots * n$ lyginumas nesikeičia. Todėl skaičius

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = n(n + 1)/2$$

yra lyginis arba nelyginis vienu metu su skaičiumi $n + 1$. Jeigu $n = 4k$ $(k \in \mathbb{N})$, tai $n(n + 1)/2 = 2k(4k + 1)$ – lyginis skaičius, o $n + 1 = 4k + 1$ – nelyginis. Jeigu $n = 4k + 1$, tai $n(n + 1)/2 = (4k + 1)(2k + 1)$ – nelyginis, o $n + 1 = 4k + 2$ – lyginis. Tai reiškia, jog tais atvejais, kai $n = 4k$ arba $n = 4k+1$, keičiant žvaigždutes $+$ arba $-$ ženklais, tikros lygybės gauti negalima. Įrodysime, kad abiem likusiais atvejais, t.y. $n = 4k + 2$ ir $n = 4k + 3$, lygybę gauti galima. Pirmuoju atveju ($n = 4k + 2$) žvaigždutes keičiame taip:

$$+ + - - + + - - + + \ \ldots \ + + - - + +.$$

Pirmasis ir paskutinis $+$ duoda $1 + 4k + 2 = 4k + 3 = n + 1$. Kiti $+$ ir $-$, suskirstyti į ketvertus $+ - -+$, duoda 0 , kadangi $u - (u + 1) - (u + 2) + (u + 3) = 0$. Antruoju atveju ($n = 4k + 3$) žvaigždutes į $+$ ir $-$ galime pakeisti, pavyzdžiui, taip:

$$- + + - - + + - - \ \ldots \ + + - - + +.$$

Tada pirmieji du $-$ $+$ ir paskutinis $+$ duoda $-1 + 2 + 4k + 3 = 4k + 4 = n + 1$, o kiti, suskirstyti į ketvertus $+ - -+$, duoda 0 .

Atsakymas: $n = 4k + 2$, $n = 4k + 3$,
kur k – sveikasis neneigiamas skaičius.

14. Imdami $x + 1$ vietoj x gauname

$$f(x + 2) + f(x) = \sqrt{2}\, f(x + 1) = \sqrt{2}\left(\sqrt{2}\, f(x) - f(x - 1)\right) =$$
$$2\, f(x) - \sqrt{2}\, f(x - 1),$$

$$f(x + 2) = f(x) - \sqrt{2}\, f(x - 1).$$

Dabar imkime $x + 2$ vietoj x

$$f(x + 4) = f(x + 2) - \sqrt{2}\, f(x + 1) = f(x) - \sqrt{2}\, f(x - 1) - \sqrt{2}\, f(x + 1) =$$

$$f(x) - \sqrt{2}\left(f(x - 1) + f(x + 1)\right) = f(x) - 2f(x) = -f(x).$$

Taigi

$$f(x+8) = -f(x+4) = f(x),$$

t.y. 8 yra funkcijos $f(x)$ periodas. Beje, funkcijos, tenkinančios duotąją lygybę, egzistuoja. Tokia yra, pavyzdžiui, funkcija $f(x) = \sin(\pi x/4)$.

15. Iš viso viešbutyje $6{\cdot}56$ sienų, lubų ir grindų. Per dieną dažant 3 plokštumas iš aibės $\{$visossienos, visoslubos, visosgrind prireiks ne mažiau kaip $\frac{6\cdot 56}{3} = 112$ dienų. Iš kitos pusės tiek dienų pakanka. Iš tikrųjų, tegul pirmąją dieną Albinas dirba pirmame, Bronius antrame, o Česlovas trečiame kambaryje. Po to kiekvieną dieną kiekvienas iš jų iš kambario, pažymėto numeriu n, pereina į $n+1$ kambarį (laikome, kad už 56 vėl eina pirmasis kambarys). Per 112 dienų kiekvienas iš jų kiekviename kambaryje pabuvos 2 kartus. Jeigu Albinas pirmas 56 dienas dažys grindis, o likusias 56 dienas lubas, viešbutis bus pilnai nudažytas. Lygiai taip pat įrodoma, jog n kambarių viešbučiui nudažyti, kur $n \geqslant 3$, prireiks $2n$ dienų.

Atsakymas: 112.

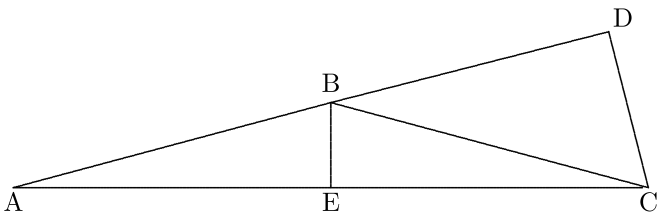
16. Keista, tačiau nebuvo nei vieno pilno šio „standartinio" uždavinio sprendimo.
Pažymėkime $t = |\cos x|$. Tada $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2|\cos x|^2 - 1 = 2t^2 - 1$ ir mums belieka rasti mažiausiąją reiškinio $f(t) = t + |2t^2 - 1|$ reikšmę intervale $[0;1]$. Turime

$$f(t) = \begin{cases} -2t^2 + t + 1, & \text{kai} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1/\sqrt{2}, \\ \ \ 2t^2 + t - 1, & \text{kai} \quad 1/\sqrt{2} < t \leqslant 1. \end{cases}$$

Kadangi $(-2t^2+t+1)' = -4t+1$, tai funkcija $f(t)$ intervale $[0;1/4]$ didėja, o intervale $[1/4;1/\sqrt{2}]$ – mažėja. Kita vertus, $(2t^2+t-1)' = 4t+1$, todėl intervale $[1/\sqrt{2};1]$ funkcija $f(t)$ didėja. Taigi mažiausioji $f(t)$ reikšmė intervale $[0;1]$ yra lygi $f(0)$ arba $f(1/\sqrt{2})$. Belieka paskaičiuoti: $f(0) = 1$, $f(1/\sqrt{2}) = 1/\sqrt{2}$. Taigi mažiausia įgyjama reikšmė lygi $1/\sqrt{2}$.

Atsakymas: $1/\sqrt{2}$.

17. a.) Įrodysime, kad tokio trikampio plotas gali viršyti ne tik 3, bet ir bet kokį teigiamą skaičių a. Imkime „suplotą" lygiašonį trikampį ABC,

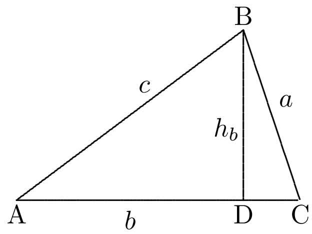


kurio aukštinė $BE = 1/2$, o pagrindas $AC = 4a$. Tada jo plotas lygus $\frac{1}{2}AC \cdot BE = a$. Tegul CD – trikampio ABC aukštinė, nuleista iš taško C. Iš panašių trikampių ACD ir ABE turime lygybę

$$\frac{CD}{AC} = \frac{BE}{AB} \Longrightarrow CD = \frac{AC \cdot BE}{AB} = \frac{2a}{\sqrt{AE^2 + BE^2}} = \frac{2a}{\sqrt{4a^2 + 1/4}} < 1.$$

Kitos dvi trikampio ABC aukštinės (viena iš kurių lygi CD, o kita $BE = 1/2$) taip pat mažesnės už 1.

b.) Sakykime, kad a, b, c – trikampio kraštinių ilgiai, h_a, h_b, h_c – atitinkamų



aukštinių ilgiai, o $S<1$ trikampio plotas. Laikykime, kad $h_a>2$ ir $h_b=BD>2$. Turime

$$2a < a\,h_a = 2S < 2 \Longrightarrow a<1.$$

Tačiau $BD>2$, t.y. stataus trikampio BDC aukštinė BD didesnė už įžambinę BC. Prieštara. Vėl gi įrodėme bendresnį teiginį: toks trikampis, kurio viena aukštinė ilgesnė už 2, kita ilgesnė už 1, o plotas mažesnis už 1, neegzistuoja.

Atsakymas: a.) taip, b.) ne.

18. Jeigu n dalijasi iš 3, tai stačiakampį $1996\times n$ galima padalinti į 1996×3 stačiakampius, o kiekvieną iš jų į 1×3 stačiakampius. Tarkime, kad n nesidalija iš 3, o stačiakampį $1996\times n$ galima supjaustyti į m 1×3 stačiakampių. Skaičiuodami didžiojo stačiakampio plotą dviem būdais, gauname

$$1996\,n = 3m.$$

Čia dešinė pusė dalijasi iš 3, o kairė ne. Prieštara.

Atsakymas: $n=3k$, $k\in\mathbb{N}$.

19. Nagrinėsime tris atvejus: $x<0$, $x=0$, $x>0$. Pirmuoju atveju $|x|=-x$ ir iš pirmosios lygties gauname

$$2x+x|y-x| = x(2+|y-x|)=0 \Longrightarrow |y-x|=-2.$$

Taigi šiuo atveju sistema sprendinių neturi. Antruoju atveju iš antrosios lygties gauname

$$2|y|+|y-1|+y-1=0.$$

Kadangi $|y|\geqslant 0$ ir $|y-1|+(y-1)\geqslant 0$, tai lygybė čia galima tik tada, kai abi šios nelygybės tampa lygybėmis, t.y. $y=0$. Sprendinys $x=0$, $y=0$ tenkina mūsų sistemą. Trečiuoju atveju $|x|=x$ ir iš pirmosios lygties gauname $x|y-x|=0$, t.y. $x=y$. Imdami antrojoje lygtyje $y=x$, gauname

$$|x|+|2x-1|+x-1 = |2x-1|+2x-1=0,$$

t.y. $2x-1\leqslant 0$, $x\leqslant 1/2$.

Atsakymas: $(x,y)=(t,t)$, kur $0\leqslant t\leqslant 1/2$.

20. Sakykime, kad x_k didžiausias skaičius iš $x_1,x_2,\ldots,x_n$ (jeigu yra keli didžiausi, tai tegul x_k – bet kuris iš jų). Tada

$$\begin{aligned}
&x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_{k-1}x_k+x_kx_{k+1}+\ldots+x_{n-1}x_n \leqslant\\
&\leqslant x_1x_k+x_2x_k+\ldots+x_{k-1}x_k+x_kx_{k+1}+x_kx_{k+2}+\ldots+x_kx_n=\\
&=x_k(x_1+x_2+\ldots+x_{k-1}+x_{k+1}+\ldots+x_n)=\\
&=x_k(1996-x_k)=998^2-(998-x_k)^2\leqslant 998^2=996004.
\end{aligned}$$

Taigi, kokie bebūtų $x_1,x_2,\ldots,x_n$, sandaugų suma neviršija 996004. Ši reikšmė pasiekiama, kai pvz., $x_1=x_2=998$, o $x_3=x_4=\ldots=x_n=0$.

Atsakymas: 996004.

„Baltijos kelio" olimpiada

1996 m. lapkričio mėnesį XI Lietuvos komandinės matematikos olimpiados nugalėtojai (trys iš Panevėžio J. Balčikonio gimnazijos – V. Gasiūnas, M. Juodis, T. Reingardas ir du iš Kauno Technikos universiteto gimnazijos – V. Šileika, R. Zubrickas) atstovavo Lietuvos komandai „Baltijos kelio" olimpiadoje Suomijoje. Šios olimpiados rezultatų lentelė tokia:

1. Lenkija – 89	6. Suomija – 63
2. Latvija – 82	7. Vengrija – 61
3. Švedija – 81	8. Lietuva – 56
4. Danija – 70	9. Estija – 50
5. Sankt–Peterburgas – 66	10. Islandija – 43.

Pateiksime kai kurių įdomesnių uždavinių sąlygas ir sprendimus:

1. Per bet kurias dvi nelygiagrečias taisyklingo 1996–kampio įstrižaines išveskime tieses. Tegu α ir β yra šių tiesių sankirtos kampai. Įrodykite, kad α/β yra racionalusis skaičius.

2. Tegu a, b, c, d yra sveikieji teigiami skaičiai, $ab = cd$. Įrodykite, kad skaičius $a + b + c + d$ yra sudėtinis.

3. Sveikųjų skaičių seka $a_1, a_2, \ldots$ sudaroma pagal tokią taisyklę: $a_1 = 1, a_2 = 2,$ o jei $n \geqslant 3,$ tai

$$a_n = \begin{cases} 5a_{n-1} - 3a_{n-2}, & \text{kai } a_{n-2}a_{n-1} \text{ yra lyginis skaičius,} \\ a_{n-1} - a_{n-2}, & \text{kai } a_{n-2}a_{n-1} \text{ yra nelyginis skaičius.} \end{cases}$$

Įrodykite, kad $a_n \neq 0$ visiems natūraliesiems n.

4. Skirtingų natūraliojo skaičiaus n daliklių skaičių (įskaitant 1 ir n) žymėkime $d(n)$. Tegu $a > 1$ ir $n > 0$ yra tokie sveikieji skaičiai, kad $a^n + 1$ yra pirminis. Įrodykite, kad

$$d(a^n - 1) \geqslant n.$$

5. Tegu $x_1, x_2, \ldots, x_{1996}$ yra tokie realieji skaičiai, kad su bet kokiu antrojo laipsnio polinomu $W(x)$ bent trys iš skaičių

$$W(x_1), W(x_2), \ldots, W(x_{1996})$$

yra lygūs. Įrodykite, kad tada bent trys iš skaičių $x_1, x_2, \ldots, x_{1996}$ irgi yra lygūs.

6. Tegu S yra sveikųjų skaičių aibė, $0 \in S, 1996 \in S$. Tarkime, bet kurio nenulinio daugianario su koeficientais iš S sveikoji šaknis (jei jis ją turi) irgi priklauso S. Įrodykite, kad tada $-2 \in S$.

7. Raskite visas lygines ir visas nelygines funkcijas, apibrėžtas sveikųjų skaičių aibėje ir su bet kokiu sveikuoju x tenkinančias sąlygą

$$f(x) = f(x^2 + x + 1).$$

8. Funkcijos

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1x + a_0, \quad n > 1,$$

grafikas kerta tiesę $y = b$ taškuose $B_1, B_2, \ldots, B_n,$ o tiesę $y = c$ ($c \neq b$) taškuose $C_1, C_2, \ldots, C_n$ (taškai numeruojami iš kairės į dešinę). Tegu P yra dešiniau taško C_n esantis tiesės $y = c$ taškas. Raskite sumą

$$\mathrm{ctg}(\angle B_1C_1P) + \mathrm{ctg}(\angle B_2C_2P) + \ldots + \mathrm{ctg}(\angle B_nC_nP).$$

9. Su kokiomis realiosiomis teigiamomis a ir b reikšmėmis nelygybė

$$x_1x_2 + \ldots + x_{n-1}x_n + x_nx_1 \geqslant x_1^a x_2^b x_3^a + x_2^a x_3^b x_4^a + \ldots + x_n^a x_1^b x_2^a$$

yra teisinga su visais sveikaisiais $n > 2$ ir su visais teigiamais realiaisiais skaičiais $x_1, x_2, \ldots, x_n$?

10. Du žaidėjai paeiliui ženklina begalinės šachmatų lentos langelius. Vienas rašo ženklą $\times$, kitas – $\circ$. Laimi tas žaidėjas, kuris savo ženklu sugeba pažymėti 2×2 dydžio kvadratą. Ar pradedantis žaidėjas visada gali laimėti?

Sprendimai ir atsakymai:

1. Įrodysime teiginį taisyklingam n–kampiui $A_1A_2\ldots A_n$, $n \geqslant 3$. Tegu O yra to taisyklingojo n–kampio centras, t.y. įbrėžto arba apibrėžto apskritimo centras. Sujunkime tašką O su taškais $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ir su atkarpų $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_nA_1$ vidurio taškais. Gautųjų tiesių aibę žymėkime $\mathcal{L}$. Nesunku pastebėti, kad kiekviena iš tiesių A_iA_j yra statmena kažkuriai tiesei iš aibės $\mathcal{L}$. Taigi tiesių A_iA_j ir A_uA_v sankirtos kampai yra lygūs tiesių l_1 ir l_2 $(l_1, l_2 \in \mathcal{L})$ sankirtos kampams. Tačiau tiesių l_1 ir l_2 sankirtos kampai lygūs $\pi k/n$ $(k \in N, k \leqslant n/2)$ ir $\pi - \pi k/n = \pi(1 - k/n)$. Jų santykis

$$\frac{\pi k}{n\,\pi\,(1 - k/n)} = \frac{k}{n - k}$$

racionalus skaičius.

2. Užrašykime $a/c = d/b = m/n$, kur natūralieji m ir n – tarpusavyje pirminiai. Taigi, egzistuoja natūralieji u ir v tokie, kad $a = um$, $c = un$, $d = vm$, $b = vn$. Tada

$$a + b + c + d = um + vn + un + vm = (u + v)(m + n),$$

todėl skaičius $a + b + c + d$ yra sudėtinis.

3. Pažymėkime b_n , $0 \leqslant b_n \leqslant 3$, skaičiaus a_n liekaną dalijant jį iš 4. Skaičius b_n yra lyginis tada ir tik tada, kai skaičius a_n yra lyginis. Taigi skaičiai $a_{n-2}a_{n-1}$ ir $b_{n-2}b_{n-1}$ yra vienodo lyginumo. Kadangi $5a_{n-1} - 3a_{n-2} = 4(a_{n-1} - a_{n-2}) + a_{n-1} + a_{n-2}$, tai $b_1 = 1$, $b_2 = 2$, o jei $n > 2$, tai

$$b_n = \begin{cases} (b_{n-1} + b_{n-2}) \bmod 4, & \text{kai} \quad b_{n-2}b_{n-1} - \text{lyginis}, \\ (b_{n-1} - b_{n-2}) \bmod 4, & \text{kai} \quad b_{n-2}b_{n-1} - \text{nelyginis}. \end{cases}$$

Taigi $b_3 = b_2 + b_1 = 3$, $b_4 = (b_3 + b_2) \bmod 4 = 1$, $b_5 = (b_4 - b_3) \bmod 4 = 2$ ir t.t.
Gauname periodinę seką 1,2,3,1,2,3,1,2,3,... . Vadinasi, $b_n \neq 0$, todėl a_n nesidalija iš 4 ir $a_n \neq 0$.

4. Kadangi $a^n + 1$ – pirminis ir $a > 1$, tai a – lyginis. Jeigu n turi bent vieną nelyginį daliklį m , $m > 1$, tai $a^n + 1$ dalijasi iš $a^m + 1$ ir skaičius $a^n + 1$ nėra pirminis. Vadinasi, $n = 2^k$, $k \geqslant 0$. Užrašome tapatybę

$$a^{2^k} - 1 = (a-1)\prod_{j=0}^{k-1}(a^{2^j} + 1).$$

Nesunku įrodyti, kad skaičiai $a^{2^u} + 1$ ir $a^{2^v} + 1$ yra tarpusavyje pirminiai. Iš tiesų, jei $u > v$ ir d dalija abu šiuos skaičius, tai pažymėję $b = a^{2^v}$ gauname, kad d dalija skaičių

$$b^{2^{u-v}} - 1 = a^{2^{v+u-v}} - 1 = a^{2^u} - 1 = a^{2^u} + 1 - 2.$$

Vadinasi, d dalija 2 ir, kadangi d – nelyginis, $d = 1$. Tegu p_j – pirminis skaičius $(p_j > 2)$, kuris dalija skaičių $a^{2^j} + 1$. Iš įrodyto teiginio išplaukia, kad visi aibės $\{p_0, p_1, \ldots, p_{k-1}\}$ elementai yra skirtingi. Šioje aibėje yra k elementų, todėl ji turi 2^k poaibių. Kiekvienam poaibiui priklausančių elementų sandaugą žymėkime s_t , $t = 1, 2, \ldots, 2^k$. Visi skaičiai s_t , $t = 1, 2, \ldots, 2^k$, yra skirtingi ir visi jie yra skaičiaus $a^{2^k} - 1 = a^n - 1$ dalikliai. Taigi

$$d(a^n - 1) \geqslant 2^k = n.$$

5. Sakykime, kad skaičius a tenkina sąlygą

$$a > 2 \max_{1 \leqslant j \leqslant 1996} |x_j|.$$

Nagrinėkime polinomą $W(x) = x^2 - ax$. Jeigu $W(x_i) = W(x_j)$, tai

$$W(x_i) - W(x_j) = x_i^2 - ax_i - x_j^2 + ax_j = (x_i - x_j)(x_i + x_j - a) = 0.$$

Kadangi $x_i + x_j - a < 0$, tai $x_i = x_j$. Taigi įrodytas teiginys: jeigu $x_1 \ldots, x_n$ yra tokie realieji skaičiai, kad su bet kokiu antrojo laipsnio polinomu $W(x)$ bent k $(2 \leqslant k \leqslant n)$ iš skaičių $W(x_1), \ldots W(x_n)$ yra lygūs, tai bent k iš skaičių $x_1, x_2, \ldots, x_n$ irgi yra lygūs.

6. Panašiai kaip ir 2–ojo Lietuvos olimpiados uždavinio sprendime čia pravers dvejetainė skaičiaus 1996 išraiška: $1996 = 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^3 + 2^2$. Imdami daugianarį $1996x + 1996$ gauname, kad $-1 \in S$. Dabar imame daugianarį $-x^{10} - x^9 - x^8 - x^7 - x^6 + 0 \cdot x^5 + 0 \cdot x^4 - x^3 - x^2 + 0 \cdot x + 1996$. Jo sveikoji šaknis $2 \in S$. Belieka paimti daugianarį $-x^2 - x + 2$, kad įsitikintume, jog $-2 \in S$.

7. Šis uždavinys, lyginant su 14–uoju Lietuvos olimpiados uždaviniu, labai paprastas. Imdami $-x-1$ vietoj x gauname

$$f(-x-1) = f\big((-x-1)^2 - x - 1 + 1\big) = f(x^2 + 2x + 1 - x) = f(x^2 + x + 1) = f(x).$$

Taigi, jeigu funkcija $f(x)$ – lyginė, tai $f(x) = f(-x-1) = f(x+1) \Rightarrow f(x) = f(x+k), k \in \mathbb{N} \Rightarrow$ visiems sveikiesiems x turime $f(x) = c$, kur c – konstanta. Jeigu $f(x)$ – nelyginė, tai $f(x) = f(-x-1) = -f(x+1) \Rightarrow f(x) = f(x+2) \Rightarrow f(x) = f(x+2k), k \in \mathbb{N}$. Imdami šioje lygybėje $x = -k$, gauname $f(-k) = f(k)$. Kadangi $f(x)$ – nelyginė, tai $f(k) = f(-k) = -f(k) \Rightarrow f(k) = 0$.

Atsakymas: lyginės funkcijos – $f(x) = c$, kur c – konstanta, ir nulinė funkcija $f(x) = 0$, kuri yra vienu metu ir lyginė ir nelyginė.

8. Laikykime, kad $b < c$ (jei $b > c$, tai sprendimas analogiškas). Tegu taškų $B_1, B_2, \ldots, B_n$ koordinatės atitinkamai yra $(b_1, b), (b_2, b), \ldots, (b_n, b)$, o taškų $C_1, C_2, \ldots, C_n$ koordinatės atitinkamai yra $(c_1, c), (c_2, c), \ldots, (c_n, c)$. Pažymėkime $\angle B_i C_i P = \varphi_i$. Tegu D_i – statmens, nuleisto iš taško C_i į tiesę $y = b$, susikirtimo taškas su ta tiese. Aišku, kad $b_i \neq c_i$. Jei $b_i < c_i$, tai iš stataus trikampio $B_i D_i C_i$ turime

$$c - b = (c_i - b_i)\mathrm{ctg}(\varphi_i - 90^0) \Rightarrow \mathrm{ctg}\varphi_i = -\frac{c_i - b_i}{c - b}.$$

Jei $b_i > c_i$, tai analogiškai gauname

$$b_i - c_i = (c - b)\mathrm{ctg}\varphi_i \Rightarrow \mathrm{ctg}\varphi_i = -\frac{c_i - b_i}{c - b}.$$

Taigi

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{ctg}\varphi_i = \frac{1}{c - b}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i - \sum_{i=1}^{n} c_i\right).$$

Tačiau $f(b_i) = b$, todėl b_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ yra n–tojo laipsnio polinomo $f(x) - b$ nuliai. Jų suma lygi $-a_{n-1}$, todėl $\sum_{i=1}^{n} b_i = -a_{n-1}$. Analogiškai, $\sum_{i=1}^{n} c_i = -a_{n-1}$. Vadinasi, ieškomoji kotangentų suma lygi 0.

Atsakymas: 0.

9. Šio uždavinio sprendimas yra analogiškas 11–ojo Lietuvos olimpiados uždavinio sprendimui. Imkime $x_i = x$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Gausime $nx^2 \geqslant nx^{2a+b}$, t.y. nelygybė $x^{2-2a-b} \geqslant 1$ yra teisinga su visais teigiamais realiaisiais x. Imdami $x > 1$ ir $x < 1$ gauname, kad $2 - 2a - b \geqslant 0$ ir $2 - 2a - b \leqslant 0$, t.y. $b = 2 - 2a$. Tegu $n = 4$. Imdami kiek norima mažą x_4 $(x_4 \to 0)$ gausime nelygybę

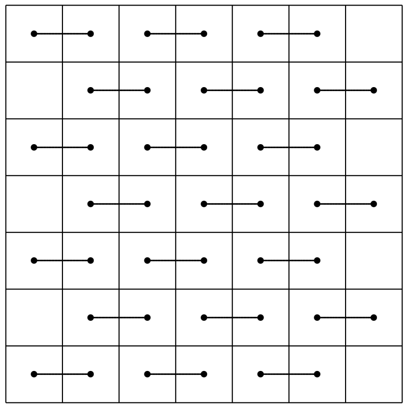
$$x_1x_2 + x_2x_3 \geqslant x_1^a x_2^{2-2a} x_3^a,$$
$$x_2^{2a-1} \geqslant x_1^a x_3^a/(x_1 + x_3).$$

Jei $a > 1/2$, tai imdami $x_2 \to 0$ ir $x_1 = x_3 = 1$ gausime $0 \geqslant 1/2$. Prieštara. Jei $a < 1/2$, tai analogišką prieštarą gausime imdami kiek norimą didelį x_2 $(x_2 \to \infty)$ ir $x_1 = x_3 = 1$. Taigi $a = 1/2$, $b = 2 - 2a = 1$. Nesunku įrodyti, kad gautoji pora tenkina uždavinio sąlygą. Patikriname remdamiesi nelygybe $\sqrt{ab} \leqslant \frac{1}{2}(a + b)$:

$$\begin{aligned}
&x_2\sqrt{x_1x_3} + x_3\sqrt{x_2x_4} + \ldots + x_n\sqrt{x_{n-1}x_1} + x_1\sqrt{x_nx_2} \leqslant \\
&\leqslant \frac{1}{2}x_2(x_1 + x_3) + \frac{1}{2}x_3(x_2 + x_4) + \ldots + \frac{1}{2}x_n(x_{n-1} + x_1) + \frac{1}{2}x_1(x_n + x_2) = \\
&x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n + x_nx_1.
\end{aligned}$$

Atsakymas: $a = 1/2$, $b = 1$.

10. Suskirstykime begalinės lentos langelius į poras taip, kaip pavaizduota paveikslėlyje:



Laikome, kad du langeliai priklauso vienai porai, jeigu jų centrai sujungti atkarpa. Po kiekvieno pirmojo žaidėjo ėjimo antrasis visada gali pažymėti tą langelį, kuris yra poroje ką tik pažymėtajam. Tokiu būdu pirmajam žaidėjui niekada nepavyks pažymėti dviejų langelių iš vienos poros. Kadangi kiekviename kvadrate 2×2 yra du langeliai iš vienos poros (žr. pav.), tai ir kvadrato pažymėti savo ženklais pirmasis žaidėjas negalės.

Atsakymas: ne