# IX LIETUVOS KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA

*Vilniaus universiteto Matematikos fakultetas, 1994 10 22*

**Olimpiados rėmėjas** (direktorius Kęstutis Naujokaitis)

**Organizacinis komitetas:** A. Zabulionis (pirmininkas), V. Mackevičius.

**Vertinimo komisija:** V. Mackevičius (pirmininkas), V. Bagdonavičius, G. Bakštys, V. Čekanavičius, A. Dubickas, K. Liubinskas, R. Kašuba, R. Krasauskas, K. Kiškis, J. Mačys, A. Mačiulis, E. Markšaitis, R. Leipus, K. Karčiauskas, R. Krasauskas, G. Stepanauskas, A. Zabulionis.

## REZULTATAI

Pirmoji vieta ir prof. Jono Kubiliaus pereinamasis prizas – **Vilniaus tiksliųjų, gamtos, ir technikos mokslų licėjaus pirmajai komandai.**

Antroji vieta – **KTU gimnazijos komandai.**

Trečioji vieta – **Kauno „Saulės“ gimnazijos komandai.**

| Komanda | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | Σ | Vt. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| VU MaF | 1 | 6 | 4 | 2 | 5 | 5 | 5 | 5 | 0 | 1 | 5 | 7 | 7 | 0 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | – | 78 | - |
| **Vilnius L1*** | 1 | – | 1 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 2 | – | 3 | 7 | 7 | 0 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 76 | **1** |
| **KTU gimn.** | – | – | 8 | 5 | 5 | – | 5 | 5 | – | – | 5 | – | 1 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | – | 64 | **2** |
| **„Saulė“** | 1 | 2 | 2 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | – | 0 | 3 | 0 | 0 | 5 | 2 | 5 | – | 5 | 5 | 5 | 60 | **3** |
| Šiauliai | 1 | 1 | 1 | – | 5 | 5 | 5 | 5 | – | 0 | 5 | 0 | – | 5 | 4 | 5 | 1 | 5 | 3 | – | 51 | 4 |
| Vilnius | 1 | – | 2 | 5 | 5 | 1 | 5 | 5 | 1 | – | 2 | – | 1 | 5 | – | – | 5 | – | 5 | 5 | 48 | 5 |
| Vilnius L2* | – | – | 3 | – | 5 | 5 | 2 | 5 | – | – | 5 | – | – | 0 | 1 | – | – | – | 5 | 5 | 36 | 6 |
| Elektrėnai | – | – | 0 | – | 1 | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 1 | – | – | 5 | 5 | – | 12 | 7 |

*Vilniaus tiksliųjų, gamtos ir technikos mokslų licėjus (1-oji ir 2-oji komandos).

## IX LIETUVOS KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA

*Vilniaus universiteto Matematikos fakultetas, 1994 10 22*

### Uždaviniai

**1.** Kiek realiųjų šaknų turi lygtis

$$\sqrt[7]{x} - \sqrt[5]{x} = \sqrt[3]{x} - \sqrt{x}?$$

**2.** Porą $(x; y)$ vadinsime įdomia, jei $x$ ir $y$ yra natūralieji tarpusavyje pirminiai skaičiai ir $x < y$. Įrodykite, kad su kiekvienu natūraliuoju $n$ lygtis $x^2 + y^2 = 5^n$ turi:

a) įdomųjį sprendinį;

b) lygiai vieną įdomųjį sprendinį.

**3.** Lygiakraščio trikampio viduje raskite tašką, kurio atstumų iki visų trijų viršūnių suma būtų mažiausia.

**4.** Iškilasis keturkampis $ADBC$ yra toks, kad trikampio $ABC$ visi kampai mažesni už $120°$, o trikampis $ABD$ – lygiakraštis. Apie trikampį $ABD$ apibrėžtas apskritimas. Tiesė $CD$ kerta apskritimą taške $O$. Įrodykite, kad kampai $AOB$, $BOC$, $COA$ lygūs $120°$.

**5.** Sveikieji skaičiai $a$, $b$, $c$, $d$ tenkina nelygybę

$$0 \le a < b < c < d < 10,$$

o skaičiai $a + b$, $a + c$, $a + d$, $b + c$, $b + d$, $c + d$, $a + b + c$, $a + b + d$, $a + c + d$, $b + c + d$, $a + b + c + d$ visi skirtingi ir vienas iš jų lygus 25. Raskite $a$, $b$, $c$, $d$.

**6.** Raskite skaičiaus

$$N = \left(1^{1994} + 1\right)\left(2^{1994} + 1\right)\cdots\left(1994^{1994} + 1\right)$$

dalijimo iš 3 liekaną.

**7.** Į kiekvieną kvadratinės $n \times n$ lentelės langelį įrašomas vienas iš skaičių $-1$, 0, 1. Ar galima lentelę užpildyti taip, kad visos skaičių sumos eilutėse, stulpeliuose ir pagrindinėse įstrižainėse būtų skirtingos?

**8.** Kvadratinės $5 \times 5$ lentelės langeliuose įrašyti skaičiai 0 arba 1. Visos skaičių sumos eilutėse, stulpeliuose ir pagrindinėse įstrižainėse lygios $a$. Raskite visas galimas $a$ reikšmės.

**9.** Turime skaičius $1, 2, \ldots, N$. Vienu „ėjimu“ leidžiama skaičių 1 sukeisti vietomis su bet kuriuo kitu. Ar galima tokiu būdu gauti visas skaičių perstatas (iš viso $N!$), nė vienos nepakartojant?

**10.** Išspręskite lygtį

$$x = 1 - 1994(1 - 1994x^2)^2.$$

**11.** Įrodykite, kad nėra sveikųjų skaičių $d$, $a$, $t$ ir $e$, tenkinančių lygtis

$$\begin{cases} date - d = 1994, \\ date - a = \ \ 994, \\ date - t = \ \ \ \ 94, \\ date - e = \ \ \ \ \ \ 4. \end{cases}$$

**12.** Sveikųjų skaičių sekos $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ tenkina lygybes

$$a_n + b_n\sqrt{m} = (k + \sqrt{m})^n;$$

čia: $k, m \in \mathbb{N}$, $m$ – pirminis skaičius. Įrodykite, kad

$$a_n^2 - mb_n^2 = (k^2 - m)^n$$

su visais $n \in \mathbb{N}$.

**13.** Raskite ir pavaizduokite aibę visų plokštumos taškų $(a, b)$, su kuriais kvadratinė lygtis $x^2 + ax + b = 0$ turi dvi realias šaknis intervale $[-1, 1]$.

**14.** Skaičiai $p$, $q$, $r$ – pirminiai. Ar gali lygtis

$$px^2 + qx + r = 0$$

turėti sveikųjų sprendinių?

**15.** Supjaustykite kvadratą į tris nelygius, tačiau panašius stačiakampius.

**16.** Įrodykite, kad

$$xy + yz + zx \geq \sqrt{3xyz(x + y + z)}$$

su visais teigiamais $x$, $y$, $z$.

**17.** Ar egzistuoja toks daugianaris $P(x)$, kad

$$P\big(P(x)\big) \equiv x^4 + x^3 + x^2 + x + 1?$$

**18.** Išreikškite trupmeną $\frac{19}{94}$ suma $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ ($m$ ir $n$ – natūralieji skaičiai).

**19.** Įrodykite, kad taisyklingojo aštuonkampio plotas lygus jos trumpiausios ir ilgiausios įstrižainių sandaugai.

**20.** Ar gali natūraliojo skaičiaus kvadrato skaitmenų suma būti lygi 1994?

## Nurodymai, sprendimai, atsakymai

**1.** Kadangi $x \geq 0$, tai pakeitę $x = y^{210}$, $y \geq 0$, gauname lygtį

$$y^{105} - y^{70} - y^{42} + y^{30} = 0,$$

arba

$$y^{30}(y^{75} - y^{40} - y^{12} + 1) = 0,$$

$$y^{30}(y-1)\big[y^{40}(y^{34} + \cdots + y + 1) - (y^{11} + y^{10} + \cdots + y + 1)\big] = 0.$$

Daugianarį laužtiniuose skliaustuose pažymėkime $p(y)$. Kadangi $p(0) = -1 < 0$, $p(1) = 23 > 0$, tai šis daugianaris turi bent vieną šaknį intervale $(0, 1)$. Lygtis $p(y) = 0$ ekvivalenti lygčiai

$$y^{34} + \cdots + y + 1 = y^{-29} + y^{-28} + \cdots + y^{-39} + y^{-40}.$$

Lygties kairėje esanti funkcija didėja intervale $(0, 1)$, o dešinėje – mažėja. Todėl lygties šaknis tame intervale yra vienintelė.

Taigi lygtis turi 3 šaknis: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ ir $x_3 \in (0, 1)$.

*Atsakymas:* 3.

**2.** Kai $n = 1$, turime 12 sveikųjų sprendinių $(0, \pm 5)$, $(\pm 5, 0)$, $(\pm 1, \pm 2)$, $(\pm 2, \pm 1)$. Bendrų daliklių neturi 8 paskutiniai sprendiniai, ir iš jų tik vienas įdomus: $(1, 2)$. Kai $n = 2$, įdomus tik vienas sprendinys: $(3, 4)$. Parodysime, kaip, turint lygties $x^2 + y^2 = 5^n$ įdomųjį sprendinį $(x, y)$, galima gauti lygties $u^2 + v^2 = 5^{n+1}$ sprendinį. Lengva patikrinti, jei $(x, y)$ yra lygties $x^2 + y^2 = 5^n$ sprendinys, tai $(x + 2y, 2x - y)$ ir $(x - 2y, 2x + y)$ yra lygties su $5^{n+1}$ sprendiniai ir tik vienas iš jų nesidalija iš 5. Iš tikrųjų $(x + 2y)(x - 2y) = x^2 + y^2 - 5y^2 = 5^n - 5y^2$. Kadangi $y$ nesidalija iš 5 (kitaip ir $x^2 = 5^n - y^2$ dalytųsi iš 5), tai tik vienas iš skaičių $x + 2y$ ir $x - 2y$ dalijasi iš 5. Beje, tų sprendinių komponentės kitų bendrų daliklių $d \neq 5$ neturi. Pavyzdžiui, jei $x + 2y = md$, $2x - y = nd$, tai $5x = (m - 2n)d$, $5y = (2m - n)d$, o tai reikštų, kad tiek $x$, tiek $y$ dalytųsi iš $d$. Įrodėme, kad tik vienas iš aštuonių sprendinių $\big(\pm(x + 2y), \pm(2x - y)\big)$ ir $\big(\pm(x - 2y, \pm(2x + y)\big)$ yra įdomus. Taigi uždavinio a) dalis ir įrodyta.

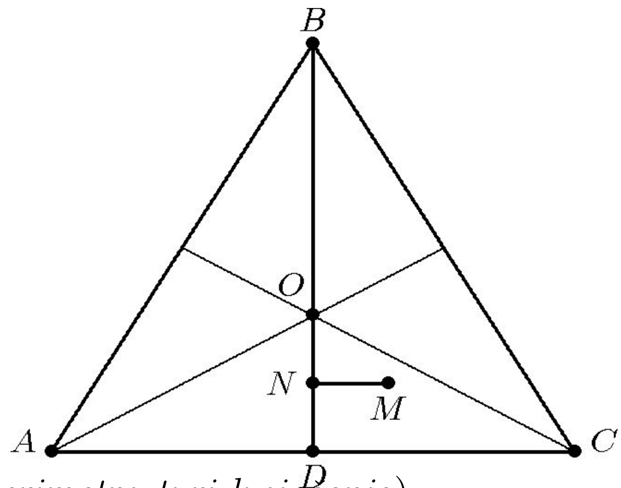
Dabar įrodysime, kad lygties $u^2 + v^2 = 5^{n+1}$ įdomusis sprendinys atitinka tik vieną lygties $x^2 + y^2 = 5^n$ įdomųjį sprendinį. Išsprendę sistemą

$$\begin{cases} u = x + 2y, \\ v = 2x - y, \end{cases}$$

gauname sprendinį $x = \dfrac{u+2v}{5}$, $y = \dfrac{2u-v}{5}$, o iš jo – 16 sprendinių $\left(\pm\dfrac{u\pm 2v}{5}, \pm\dfrac{2u\mp v}{5}\right)$, $\left(\pm\dfrac{2u\mp v}{5}, \pm\dfrac{u\pm 2v}{5}\right)$. Kadangi, kaip jau įrodėme, iš skaičių $u + 2v$ ir $u - 2v$ tik vienas dalijasi iš 5, tai pusė šių sprendinių atkrenta kaip nesveiki. (Beje, jei pirmoji komponentė sveika, tai ir antroji sveika. Pavyzdžiui, jei $u + 2v \,\vdots\, 5$, tai ir $2u - v = 2(u+2v) - 5v \,\vdots\, 5$.) Lieka aštuoni sprendiniai, iš kurių tik vienas įdomus. Jo komponentė nesidalija iš 5: jei $x$ dalytųsi iš 5, tai ir $y$ dalytųsi iš 5; tada, pavyzdžiui, $u + 2v \,\vdots\, 25$, $2u - v \,\vdots\, 25 \Longrightarrow 5u \,\vdots\, 25$, $u \,\vdots\, 5$ – prieštara, nes $(u, v)$ – įdomusis sprendinys.

Kadangi lygties $x^2 + y^2 = 5^n$ įdomusis sprendinys „gimdo“ vieną lygties $x^2 + y^2 = 5^{n+1}$ įdomųjį sprendinį ir atvirkščiai, tai remiantis indukcija visos tos lygtys turi tik po vieną įdomųjį sprendinį.

**3.** Iš pradžių nagrinėkime tašką $M$, kuris nėra aukštinėje. Nuleiskime statmenį $MN$ į aukštinę $BD$. Pažymėję $AC = a$, $ND = h$, $NM = x$, įrodysime, kad taškas $N$ „geresnis“ – jo atstumų suma mažesnė. Iš tikrųjų $NB < MB$ kaip statmuo ir pasviroji. Įsitikinsime, kad $AN + NC < AM + MC$ (beje, tai beveik akivaizdi lema: *iš visų trikampių, turinčių tą patį pagrindą ir vienodą aukštinę, mažiausią perimetrą turi lygiašonis*):




$$\begin{aligned} 2AN &< AM + MC \\ &\Longleftrightarrow 2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2} < \sqrt{\left(\frac{a}{2} + x\right)^2 + h^2} \\ &\qquad + \sqrt{\left(\frac{a}{2} - x\right)^2 + h^2} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\iff a^2 + 4h^2 < \frac{a^2}{2} + 2x^2 + 2h^2 \\
&\qquad\qquad\qquad + 2\sqrt{\Big[\Big(\frac{a}{2}\Big)^2 + x^2 + h^2\Big]^2 - a^2x^2} \\
&\iff \frac{a^2}{4} + h^2 - x^2 < \sqrt{\Big(\frac{a^2}{4} + x^2 + h^2\Big)^2 - a^2x^2} \\
&\iff \Big(\frac{a^2}{4} + h^2 - x^2\Big)^2 < \Big(\frac{a^2}{4} + h^2 + x^2\Big)^2 - a^2x^2 \\
&\iff a^2x^2 < \Big(\frac{a^2}{2} + 2h^2\Big) \cdot 2x^2 \\
&\iff 0 < 4x^2h^2.
\end{aligned}
$$

Dabar įrodysime, kad aukštinės taškas $N$ „blogesnis“ už centrą $O$ – jo atstumų suma didesnė:

$$
\begin{aligned}
&AN + NC + NB > 3AO \iff 2AN + NO > 2AO \\
&\iff 2\sqrt{\big(\frac{a}{2}\big)^2 + h^2} + \frac{a}{2\sqrt{3}} - h > \frac{2a}{\sqrt{3}} \iff \sqrt{a^2 + 4h^2} > \frac{3a}{2\sqrt{3}} + h \\
&\iff a^2 + 4h^2 > \frac{3a^2}{4} + h^2 + \frac{3ah}{\sqrt{3}} \iff \frac{a^2}{4} + 3h^2 > ah\sqrt{3} \\
&\iff \Big(\frac{a}{2} - h\sqrt{3}\Big)^2 > 0.
\end{aligned}
$$

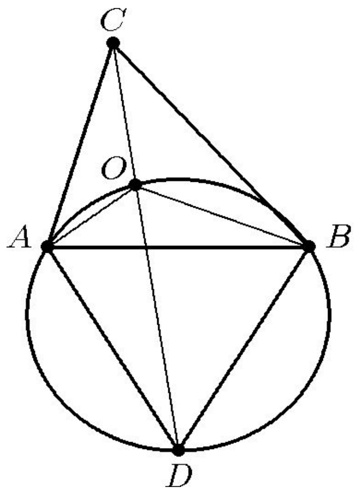
Įrodėme, kad bet kuris taškas „blogesnis“ už centrą $O$.

*Pastaba.* Antrą teiginį galima įrodyti trigonometriškai. Jei $\angle NAD = \alpha$, tai

$$
\begin{aligned}
&2AN + NO > 2AO \iff 2\frac{a}{2\cos\alpha} + \frac{a}{2\sqrt{3}} - \frac{a}{2}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} > \frac{a}{\sqrt{3}} \\
&\iff \frac{a}{\cos\alpha} > \frac{a}{2\sqrt{3}} + \frac{a}{2}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \iff \frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha < 1 \\
&\iff \sin\big(\alpha + 30^\circ\big) < 1.
\end{aligned}
$$

**4.** $\angle AOD = \angle ABD = 60° \Longrightarrow \angle AOC = 120°$, $\angle BOD = \angle BAD = 60° \Longrightarrow \angle BOC = 120°$.

*Pastaba.* 3-ą ir 4-ą uždavinius vienija bendra idėja. Taškas $O$, iš kurio trikampio $ABC$ kraštinės matomos vienodais (120°) kampais, vadinamas trikampio $ABC$ Šteinerio (Steiner) tašku. Jis ypatingas tuo, kad jo atstumų iki trikampio viršūnių suma yra mažiausia. Tai nėra lengva įrodyti, ir 2-ame uždavinyje pateiktas paprasčiausias atvejis.




**5.** Kadangi $a + b \neq a + c + d$, tai $b \neq c + d$. Panašiai įsitikiname, kad nė vienas iš skaičių $a$, $b$, $c$, $d$ nėra lygus kitų dviejų sumai. Kadangi $b + c + d \leq 7 + 8 + 9 = 24$, tai $a + b + c + d = 25$. Toliau – paprasta perranka:

$$a = 0 \Longrightarrow b + c + d = 25 \ \ \text{(netinka)};$$
$$a = 1 \Longrightarrow a + b + c + d = 1 + 7 + 8 + 9 \ \ \text{(netinka, nes } 1 + 7 = 8\text{)};$$
$$a = 2 \Longrightarrow b + c + d = 23 \Longrightarrow b = 6, c = 8, d = 9 \ \ \text{(netinka: } 2 + 6 = 8\text{)};$$
$$a = 3 \Longrightarrow b + c + d = 22 = 5 + 8 + 9 \ \text{ arba } \ 6 + 7 + 9 \ \ \text{(netinka)};$$
$$a = 4 \Longrightarrow b + c + d = 5 + 7 + 9 \text{ (netinka) arba } \ 6 + 7 + 8 \ (\textbf{tinka!});$$
$$a = 5 \Longrightarrow a + b + c + d \geq 5 + +6 + 7 + 8 = 26 > 25 \text{ (netinka)}.$$

*Atsakymas:* $a = 4$, $b = 6$, $c = 7$, $d = 8$.

**6.** Dalijant iš 3, skaičių $(3m \pm 1)^{1994} + 1$ ir $(3m)^{1994} + 1$ liekanos yra atitinkamai lygios 2 ir 1. Todėl skaičiaus $N$ liekana, dalijant iš 3, sutampa su skaičiaus $2^{1330} \cdot 1^{664} = (3 - 1)^{1330}$ liekana, lygia 1.

*Atsakymas:* 1.

**7.** Iš skaičių $-1$, 0, 1 galima sudaryti $2n + 1$ skirtingą sumą, o reikia $2n + 2$.

*Atsakymas:* negalima.

**8.** Galimos visos sveikos reikšmės nuo 0 iki 5. Atvejai $a = 0$ ir $a = 5$ akivaizdūs. Atvejus $a = 1$ ir $a = 2$ matome lentelėse (tuščiuose langeliuose – nuliai). Atvejai $a = 3$ ir $a = 4$ gaunami sukeitus nulius ir vienetus vietomis. *Atsakymas:* $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | | | |
| 1 | | | | |
| | | 1 | | |
| | | | | 1 |
| | | | 1 | |

$a = 1$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | |
| | | 1 | 1 | |
| 1 | | | | 1 |
| | 1 | 1 | | |
| | | | 1 | 1 |

$a = 2$

**9.** Pabandysime matematinės indukcijos metodu (pagal $N$) įrodyti, kad galima nurodytu būdu gauti visas perstatas. Tai akivaizdžiai teisinga, kai $N = 2$ ($12 \to 21$). Sakykime, kad teiginys teisingas su kokiu nors $N$, ir surašykime skaičius $1, 2, \ldots, N, N + 1$ didėjančia tvarka. Neliesdami skaičiaus $N + 1$ ir remdamiesi indukcijos prielaida, galime leistinu būdu gauti visas skaičių $1, 2, \ldots, N$ perstatas (iš viso $N!$). Sukeiskime skaičius 1 ir $N + 1$ vietomis. Vėl, neliesdami skaičiaus $N + 1$, atsidūrusio naujoje vietoje, galime leistinu būdu gauti likusių skaičių visas perstatas. Tai, kad dabar jie surašyti nebūtinai didėjančia tvarka, neturi reikšmės. Pavyzdžiui, pakartoję ta pačia tvarka visus ankstesniu žingsniu padarytus sukeitimus, vėl gausime pilną skaičių $1, 2, \ldots, N$ skirtingų perstatų „komplektą“. Vėl sukeiskime skaičius 1 ir $N+1$ vietomis ir vėl pakartokime skaičių $1, 2, \ldots, N$ visas perstata ir t.t. Taip skaičius $N+1$ „prabėgs“ visas savo galimas pozicijas $(N+1)$, ir kiekvieną kartą skaičiai $1, 2, \ldots, N$ „prabėgs“ visas galimas perstatas – tad iš viso turėsime $(N + 1)N! = (N + 1)!$ skirtingų perstatų. Stop! O kodėl galime būti garantuoti, kad kiekvienu žingsniu skaičius $N + 1$ atsidurs *naujoje*, dar „neaplankytoje“ pozicijoje?

Štai čia ir yra silpnoji šių samprotavimų vieta. Klaidingą įrodymą pateikėme dėl dviejų priežasčių. Pirma, būtent taip, iš pirmo žvilgsnio – teisingai, uždavinį „išsprendė“ kai kurios komandos, olimpiados dalyvės. Antra, – ir tai svarbiausia – supratus klaidos esmę, nėra labai sunku įrodymą pataisyti. Norėdami jame garantuoti po kiekvieno žingsnio skaičiui $N + 1$ naują poziciją, įrodysime bendresnį teiginį:

*bet kaip išdėsčius skaičius* $1, 2 \ldots, N$*, sukeičiant skaičių* 1 *su bet kuriuo kitu vietomis, galima gauti visas* $N!$ *perstatų, nė vienos nepakartojant, taip, kad pabaigoje skaičius* 1 *būtų viena pozicija kairiau, negu buvo iš pradžių* (*o iš pirmos pozicijos atsidurtų paskutinėje*).

Kai $N = 2$, teiginys vėl akivaizdžiai teisingas ($12 \to 21$ arba $21 \to 12$). Sakykime, jis teisingas, kai turime $N$ skaičių $1, 2, \ldots, N$. *Pavyzdžiui*, tarkime, kad iš pradžių skaičius 1 yra sąrašo pradžioje:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $1$ | | $\cdots$ | | | $N+1$ |

(čia nurodome tik skaičių 1 ir $N+1$ pradinę padėtį, nes įrodymui kitų skaičių išsidėstymas nesvarbus). Neliesdami skaičiaus $N+1$ bei pasinaudoję indukcijos prielaida, gauname visas skaičių $1, 2, \ldots, N$ perstatas ir atsiduriame tokioje padėtyje:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $\cdots$ | | $1$ | $N+1$ |

Sukeičiame skaičius 1 ir $N+1$ vietomis:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $\cdots$ | | $N+1$ | $1$ |

Vėl neliesdami skaičiaus $N+1$, gauname visas skaičių $1, 2, \ldots, N$ perstatas ir skaičių 1 – viena pozicija kairiau:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $\cdots$ | $1$ | $N+1$ | |

Vėl sukeičiame skaičius 1 ir $N+1$ vietomis:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $\cdots$ | $N+1$ | $1$ | |

Kartojant šią procedūrą, pora $N+1, 1$ slenka į kairę, kol atsiduria kraštinėje kairėje padėtyje:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $N+1$ | $1$ | $\cdots$ | | | |

Paskutinį kartą atlikę visas skaičių $1, 2, \ldots, N$ perstatas, gauname:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $N+1$ | | $\cdots$ | | | $1$ |

Taip kiekvienai iš $N+1$ skaičiaus $N+1$ padėčių gauname po $N!$ skaičių $1, 2, \ldots, N$ skirtingų perstatų – iš viso $(N+1)N! = (N+1)!$. Be to, skaičius 1 atsiduria gale (t.y. viena pozicija kairiau). Nesunku suvokti, kad pradinė skaičiaus 1 padėtis neturi principinės reikšmės – samprotavimai praktiškai nepasikeistų, jei 1 slinktų (kartu su $N+1$) į kairę iš bet kurios kitos pradinės padėties. *Atsakymas:* galima.

**10.** Pažymėkime $y = 1 - 1994x^2$. Gauname sistemą

$$\begin{cases} y = 1 - 1994x^2, \\ x = 1 - 1994y^2. \end{cases}$$

Iš pirmosios lygties atėmę antrąją, gauname

$$y - x = 1994y^2 - 1994x^2$$

arba

$$(y - x)\big(1 - 1994(x + y)\big) = 0.$$

Taigi $y = x$ arba $y = 1994^{-1} - x$. Pirmuoju atveju turime lygtį

$$x = 1 - 1994x^2,$$

antruoju –

$$1994^{-1} - x = 1 - 1994x^2.$$

*Atsakymas:* $x_{1,2} = (-1 \pm \sqrt{7977})/3988$, $x_{3,4} = (1 \pm \sqrt{7973})/3988$.

**11.** Sudauginę lygybes

$$-d = 1994 - date,$$
$$-a = 994 - date,$$
$$-t = 94 - date,$$
$$-e = 4 - date$$

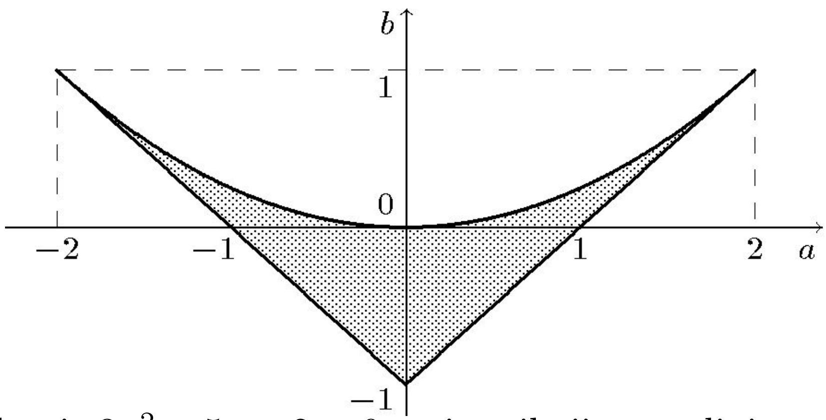
ir pažymėję $x = date$, gausime

$$x = (1994 - x)(994 - x)(94 - x)(4 - x).$$

Įsitikinsime, kad ši lygtis neturi sveikų sprendinių. Akivaizdu, kad tik teigiamas skaičius gali būti jos sprendinys. Natūralusis sprendinys $x$ turi dalintis iš $|x - 4|$. Jei $x = |x - 4|$, tai $x = 2$ – netinka. Jei $x \geq 2|x - 4|$, tai $x^2 \geq 4(x - 4)^2$, iš kur $(x - 8)(3x - 8) \leq 0$. Todėl pakanka patikrinti reikšmes $x = 3, 4, 5, 6, 7, 8$ ir įsitikinti, kad nė viena netinka.

**12.** $a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{m} = (a_n + b_n\sqrt{m})(k + \sqrt{m}) = (a_n + b_n k)\sqrt{m} + a_n k + m b_n$, t.y. $a_{n+1} - k a_n - m b_n = (a_n + k b_n - b_{n+1})\sqrt{m}$. Kadangi $\sqrt{m}$ – iracionalus skaičius, tai $a_{n+1} - k a_n - m b_n = 0$, $a_n + k b_n - b_{n+1} = 0$. Taigi $a_{n+1} = k a_n + m b_n = 0$, $b_{n+1} = a_n + k b_n$. Iš čia $a_{n+1} - b_{n+1}\sqrt{m} = (k - \sqrt{m})(a_n - \sqrt{m} b_n) \Longrightarrow a_{n+1} - b_{n+1}\sqrt{m} = (k - \sqrt{m})^n (a_1 - \sqrt{m} b_1)$. Kadangi $a_1 = k$, $b_1 = 1$, tai $a_n - b_n\sqrt{m} = (k - \sqrt{m})^n$. Sudauginę šią lygybę su lygybe $a_n + b_n\sqrt{m} = (k + \sqrt{m})^n$, gauname $a_n^2 - mb_n^2 = (k^2 - m)^n$.

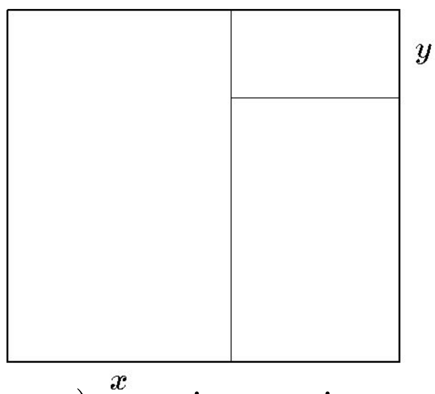
**13.** *Atsakymas:* $\{(a, b) : 1 - |a| \le b \le \frac{a^2}{4},\ a \in [-2, 2]\}$.




**14.** Pavyzdys: lygtis $3x^2 + 5x + 2 = 0$ turi sveikąjį sprendinį $x = -1$.

*Atsakymas:* gali.

**15.** Vienetinį kvadratą pabandykime supjaustyti taip, kaip parodyta brėžinyje. Trys stačiakampiai yra panašūs, jei




$$\frac{x}{1} = \frac{1-x}{1-y} = \frac{y}{1-x},$$

t.y., kai $f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0$. Kadangi $f(0) = -1 < 0$, $f(1) = 1 > 0$, tai intervale $(0, 1)$ lygtis $f(x) = 0$ turi bent vieną šaknį $x_0$. Taigi paėmę brėžinyje $x = x_0$, $y = x_0(1 - x_0)$, gausime norimą rezultatą.

**16.** Pasinaudosime gerai žinoma nelygybe $a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + bc + ca$ (gaunama atlikus veiksmus nelygybėje $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \ge 0$):

$$\begin{aligned} xy + yz + zx &= \sqrt{x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 2(x^2yz + y^2zx + z^2xy)} \\ &\ge \sqrt{3xyz(x + y + z)}. \end{aligned}$$

**17.** Aišku, kad toks daugianaris turi pavidalą $P(x) = x^2 + ax + b$. Kadangi

$$\begin{aligned} P(P(x)) &= (x^2 + ax + b)^2 + a(x^2 + ax + b) + b \\ &= x^4 + 2ax^3 + (a^2 + 2b + a)x^2 + (2ab + a^2)x + b^2 + ab + b, \end{aligned}$$

gauname lygčių sistemą

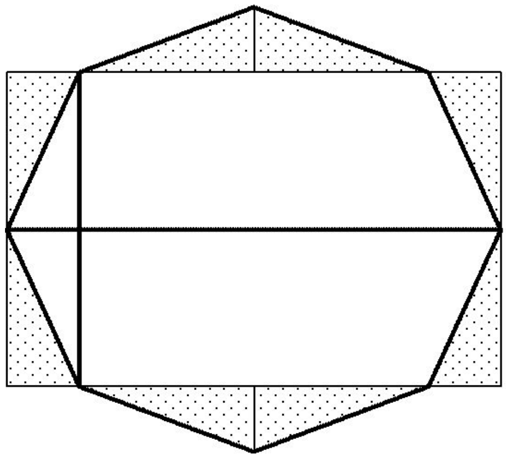
$$\begin{aligned} 2a &= 1, \\ a^2 + 2b + a &= 1, \\ 2ab + a^2 &= 1, \\ b^2 + ab + b &= 1, \end{aligned}$$

kuri, kaip nesunku patikrinti, neturi sprendinių.

*Atsakymas:* neegzistuoja.

**18.** $\frac{19}{94} = \frac{95}{5 \cdot 94} = \frac{94+1}{5 \cdot 94} = \frac{1}{5} + \frac{1}{750}$.

**19.** Teiginys nesunkiai įrodomas tiesioginiais skaičiavimais. Dar lengviau įsitikinti jo teisingumu, žvilgterėjus į brėžinį, kuriame pažymėti aštuoni lygūs trikampiai.



**20.** Uždavinys sutampa su 1993 metų komandinės olimpiados 4-uoju uždaviniu, tik metai, aišku, jau kiti. 1994 metų uždavinys kur kas lengvesnis, nes šįkart atsakymas neigiamas ir nereikia pateikti pavyzdžio. Pasižiūrėkime, kokios gali būti natūraliojo skaičiaus kvadrato skaitmenų sumos liekanos dalijant iš 3. Jos sutampa su paties skaičiaus kvadrato liekanomis dalijant iš 3. Kadangi $(3k+l)^2 = 3(3k^2+2kl)+l^2 = 3m+l^2$, tai, norint rasti galimas liekanas, pakanka peržiūrėti skaičius $l^2$, $l = 0, 1, 2$. Tai 0 ir 1. Taigi natūraliojo skaičiaus kvadrato skaitmenų sumos liekanos dalijant iš 3 gali būti tik 0 ir 1. Gi $1994 = 3 \cdot 664 + 2$. *Atsakymas:* negali.

# X LIETUVOS KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA

*Vilniaus universiteto Matematikos fakultetas, 1995 10 07*

**Olimpiados rėmėjas** (direktorius Kęstutis Naujokaitis)

**Organizacinis komitetas.** R. Kašuba, V. Mackevičius, V. Paulauskas.

**Vertinimo komisija.** V. Mackevičius (pirmininkas), V. Bagdonavičius, A. Dubickas, Ž. Gimbutas, R. Kašuba, K. Karčiauskas, R. Krasauskas, J. Mačys, A. Mačiulis, R. Lapinskas, R. Leipus, A. Plikusas, V. Stakėnas.

## REZULTATAI

Pirmoji vieta ir prof. Jono Kubiliaus pereinamasis prizas – **KTU gimnazijos komandai.**

Antroji vieta – **Panevėžio J. Balčikonio gimnazijos komandai.**

Trečioji vieta – **Kauno „Saulės“ gimnazijos komandai.**

| Komanda | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | Σ | Vt. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **KTU gimn.** | 1 | 8 | 5 | 2 | 5 | 5 | 5 | 5 | 4 | 1 | 6 | – | 8 | – | 5 | – | 2 | 5 | 0 | – | 67 | **1** |
| **Panevėžys** | 1 | 2 | 5 | 2 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 3 | 6 | 0 | 0 | – | 2 | 2 | – | 5 | 1 | 8 | 62 | **2** |
| VU MaF[1] | 1 | 1 | 5 | 2 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 3 | 0 | – | 0 | – | 5 | 7 | – | 5 | 5 | – | 59 | — |
| **„Saulė“** | 1 | – | – | 2 | 5 | 5 | 5 | 5 | – | 3 | 6 | 8 | 0 | – | 5 | 7 | 1 | 0 | 5 | – | 58 | **3** |
| VU FuX[2] | 1 | - | 5 | 2 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 3 | 0 | 0 | 1 | – | 3 | 1 | 1 | 5 | 5 | – | 52 | — |
| Vilniaus RG[3] | 1 | 2 | 0 | 0 | 5 | 5 | 0 | 5 | – | 3 | 0 | 0 | 2 | – | 5 | 0 | – | 5 | 0 | – | 33 | 4 |
| Vilnius | – | – | – | – | 0 | 5 | 5 | 5 | 5 | 1 | – | – | – | – | 5 | 0 | – | 5 | – | – | 31 | 5 |
| Marijampolė | – | 2 | 0 | – | 0 | 5 | – | 5 | – | 1 | – | – | – | – | 5 | – | 7 | 5 | – | – | 30 | 6 |
| Šiauliai | 1 | – | 0 | – | 5 | 5 | 5 | – | 0 | 3 | – | – | – | – | 2 | 0 | – | 0 | 5 | – | 26 | 7 |
| Jonava | – | – | 0 | – | 5 | 3 | 5 | 5 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | – | 0 | 0 | – | – | – | – | 20 | 8 |
| Kėdainiai | 1 | – | – | – | 0 | 5 | – | 5 | 0 | 1 | – | – | 0 | – | – | – | 0 | – | 0 | – | 12 | 9 |
| Alytus | 1 | – | – | – | 0 | – | – | – | 1 | 3 | – | – | 2 | – | 0 | – | – | – | – | – | 7 | 10 |
| Varėna | 1 | – | – | – | 0 | – | – | – | – | 1 | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 2 | 11 |
| Trakai | – | – | – | – | – | – | – | – | 0 | 1 | 0 | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 1 | 12 |

[1] VU Matematikos fakulteto pirmakursiai (be konkurencijos).

[2] VU pirmakursiai (be konkurencijos).

[3] Vilniaus realinė gimnazija.

# X LIETUVOS KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA

*Vilniaus universiteteto Matematikos fakultetas, 1995 10 07*

## Uždaviniai

**1.** Kiek realiųjų šaknų turi lygtis

$$\sqrt[7]{x} - \sqrt[5]{x} = \sqrt[3]{x} - \sqrt{x}?$$

**2.** Sakykime, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, – teigiami skaičiai, o $y_1, y_2, \ldots, y_n$, – tie patys skaičiai, tik surikiuoti kita tvarka. Įrodykite, kad

$$\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + \cdots + \frac{x_n^2}{y_n} \geq x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

**3.** Įrodykite, kad su visais natūraliaisiais $n \geq 2$

$$\left(1 + \frac{1}{4}\right)\left(1 + \frac{1}{8}\right) \ldots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) < 2.$$

**4.** Raskite visas funkcijas $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tenkinančias lygybę

$$f\big((x-y)^2\big) = \big(f(x)\big)^2 - 2xf(y) + y^2, \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

**5.** Išspręskite natūraliaisiais skaičiais lygtį

$$x^y = (3-x)^y + 7.$$

**6.** Natūralieji skaičiai $m$ ir $n$ tenkina lygtį

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot n - 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot m = 1995.$$

Kokia mažiausia galima sumos $m + n$ reikšmė?

**7.** Kuris skaičius didesnis –

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\ddots+\cfrac{1}{1995}}}}}+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\ddots+\cfrac{1}{1995}}}}}}$$

ar 1?

**8.** Trys žaidėjai žaidžia tenisą po vieną geimą taip, kad pralošusysis užleidžia vietą nežaidžiusiajam. Po žaidimo paaiškėjo, kad pirmasis žaidėjas žaidė 10, antrasis – 15, o trečiasis – 17 kartų. Kas pralošė antrąjį geimą?

**9.** Trikampio $ABC$ pusiaukraštinės $BM$ vidaus taškas $K$ yra toks, kad kampai $BAK$ ir $BCK$ yra lygūs. Įrodykite, kad trikampis $ABC$ yra lygiašonis.

**10.** Taupyklėje po 1 ct yra 81 Lt 91 ct. Kaip supakuoti šias monetas į 13 paketų, kad jų neardant būtų galima sumokėti už bet kurį pirkinį, kainuojantį ne daugiau kaip 81 Lt ir 91 ct? Keliais būdais tai galima padaryti?

**11.** Raskite sistemos

$$\begin{cases} x^2+y^2=9, \\ z^2+t^2=16, \\ xt+yz\geq 12 \end{cases}$$

sprendinį, su kuriuo suma $x+z$ yra didžiausia.

**12.** Ar lygtis

$$x_0+x_1^2+x_2^3+\cdots+x_{1995}^{1996}=x_0x_1^2x_2^3\ldots x_{1995}^{1996}$$

turi natūraliųjų sprendinių?

**13.** Tetraedre $ABCD$ raskite tašką, kurio atstumų iki sienų suma yra minimali.

**14.** Seka $\{a_n\}$ apibrėžiama lygybėmis

$$a_1 = 9, \qquad a_{k+1} = 3a_k^4 + 4a_k^3, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Įrodykite, kad dešimtainiame $a_5$ užraše yra per 15 devynetų.

**15.** Ar galima tarp skaičių $1, 2, 3, \ldots, 1001$ $+$ ir $-$ ženklus sudėlioti taip, kad gautoji suma būtų 1994, 1995, 1996?

**16.** Iš trikampio išpjaukite du lygius didžiausio spindulio skritulius.

**17.** Sakykime, $x_1$, $x_2$, $x_3$ tenkina lygčių sistemą

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 2, \\ x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 3. \end{cases}$$

Raskite $x_1^5 + x_2^5 + x_3^5$.

**18.** Įrodykite, kad $3^{n+2}$ dalo skaičių $10^{3^n} - 1$ su visais natūraliaisiais $n$.

**19.** Raskite visus skaičiaus 30 kartotinius, turinčius lygiai 30 daliklių.

**20.** Kampu tarp susikertančių apskritimų vadinsime kampą tarp jų liestinių sankirtos taške. Sakykime, du apskritimai kertasi taškuose $A$ ir $B$. Viename apskritime atidėtas taškas $C$, kitame – taškas $D$. Įrodykite, kad kampas tarp šių apskritimų yra lygus kampui tarp apskritimų, nubrėžtų per taškus $A$, $C$, $D$ ir $B$, $C$, $D$.

## Nurodymai, sprendimai, atsakymai

**1.** Žiūrėkite IX olimpiados pirmąjį uždavinį.

**2.** Pakanka susumuoti $n$ nelygybių

$$\frac{x_i^2}{y_i} + y_i \geq 2x_i$$

ir atsižvelgti, kad $\sum x_i = \sum y_i$.

**3.** *1 būdas.* Nesunku indukcija įrodyti, kad

$$\Big(1+\frac{1}{4}\Big)\dots\Big(1+\frac{1}{2^n}\Big) < 2 - \frac{1}{2^{n-3}}, \qquad (n \geq 5).$$

*2 būdas.* Kadangi $1 + x < e^x$ $(x > 0)$, tai

$$\Big(1+\frac{1}{4}\Big)\dots\Big(1+\frac{1}{2^n}\Big) < e^{\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots+\frac{1}{2^n}} < e^{\frac{1}{2}} < 2.$$

*3 būdas.* Įrodomoji nelygybė ekvivalenti

$$\Big(1-\frac{1}{16}\Big)\Big(1-\frac{1}{6}\Big)\dots\Big(1-\frac{1}{2^{n+1}}\Big) < 2\Big(1-\frac{1}{4}\Big)\Big(1-\frac{1}{8}\Big)\dots\Big(1-\frac{1}{2^n}\Big).$$

Pakanka įrodyti, kad

$$1 < 2\Big(1-\frac{1}{4}\Big)\Big(1-\frac{1}{8}\Big)\dots\Big(1-\frac{1}{2^n}\Big).$$

Bet

$$\begin{aligned}
&\Big(1-\frac{1}{4}\Big)\Big(1-\frac{1}{8}\Big) > 1-\frac{1}{4}-\frac{1}{8},\\
&\Big(1-\frac{1}{4}\Big)\Big(1-\frac{1}{8}\Big)\Big(1-\frac{1}{16}\Big) > 1-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-\frac{1}{16},\dots,\\
&\Big(1-\frac{1}{4}\Big)\Big(1-\frac{1}{8}\Big)\dots\Big(1-\frac{1}{2^n}\Big) > 1-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-\frac{1}{16}-\dots-\frac{1}{2^n} > \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

o tai ir reikėjo įrodyti.

**4.** Imkime $x = y = 0$. Tada $f(0) = f^2(0)$, ir todėl $f(0) = 0$ arba $f(0) = 1$. Jeigu $f(0) = 0$, tai, imdami $x = y$, gauname:

$$f^2(x) - 2xf(x) + x^2 = 0 \iff \big(f(x) - x\big)^2 = 0 \iff f(x) = x.$$

Jeigu $f(0) = 1$, tai, imdami $x = y$, gauname

$$\big(f(x) - x\big)^2 = 1 \iff f(x) = x + 1 \text{ arba } f(x) = x - 1.$$

Įsitikinsime, kad antrasis atvejis nėra galimas. Tarkime, kad su kokiu nors skaičiumi $z$ yra teisinga lygybė $f(z) = z - 1$. Tada, imdami $x = z$, $y = 0$, gauname $f(z^2) = (z-1)^2 - 2z \cdot 1 + 0^2 = z^2 - 4z + 1$. Imdami $x = 0$, $y = z$, gauname $f(z^2) = 1^2 - 2 \cdot 0 \cdot (z-1) + z^2 = z^2 + 1$. Sulygynę gautąsias dvi $f(z^2)$ išraiškas, matome, kad $z = 0$ ir todėl $f(z) = f(0) = -1$, o tai prieštarauja lygybei $f(0) = 1$. Taigi $f(x) = x + 1$ su visais realiaisiais $x$. Lieka įstatyti abi gautąsias funkcijas į lygtį ir įsitikinti, kad abi tinka. *Atsakymas:* $f(x) = x$ ir $f(x) = x + 1$.

*Pastaba.* Daugumos sprendusiųjų tipiška klaida – iš lygybės

$$\big(f(x) - x\big)^2 = 1$$

daroma išvada, kad arba $f(x) = x + 1$ *su visais* $x$, arba $f(x) = x - 1$ *su visais* $x$. Iš tikrųjų tegalime daryti išvadą, kad su kiekvienu $x$ yra teisinga $f(x) = x + 1$ arba $f(x) = x - 1$, t.y. *tai pačiai funkcijai* $f$ su kai kuriais $x$ gali būti teisinga pirmoji lygybė, o su likusiais – antroji!

**5.** Perrašę lygtį

$$x^y - (3 - x)^y = 7,$$

matome, kad jos kairė pusė dalijasi iš $x - (3 - x) = 2x - 3$. Todėl 7 taip pat dalijasi iš $2x - 3$. Iš čia galimos $x$ reikšmės yra 1, 2, 5. Įstatę jas į lygtį, lengvai gauname du sprendinius – $(2, 3)$ ir $(5, 1)$.

*Atsakymas:* $(2, 3)$; $(5, 1)$.

**6.** Kadangi $1995 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19$, tai $n$ dalijasi iš 19, o $m$ – iš $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$. Sakykime, $n = 19\widetilde{n}$, $m = 105\widetilde{m}$. Gauname lygtį $2\widetilde{n} - 11 \cdot 13\widetilde{m} = 1$. Mažiausia galima $\widetilde{m}$ reikšmė yra 1, o atitinkama $\widetilde{n}$ reikšmė yra $(11{\cdot}13{\cdot}17{+}1)/2 = 1216$. Didesnes galimas $\widetilde{m}$ reikšmes atitinka didesnės $\widetilde{n}$ reikšmės, taigi didesnes ir $m$ bei $n$ reikšmės. Todėl mažiausia galima $m+n$ reikšmė yra $19 \cdot 1216 + 105 \cdot 1 = 23209$. *Atsakymas:* 23209.

**7.** Tereikia pastebėti, kad „baisųjį" skaičių galima išreikšti

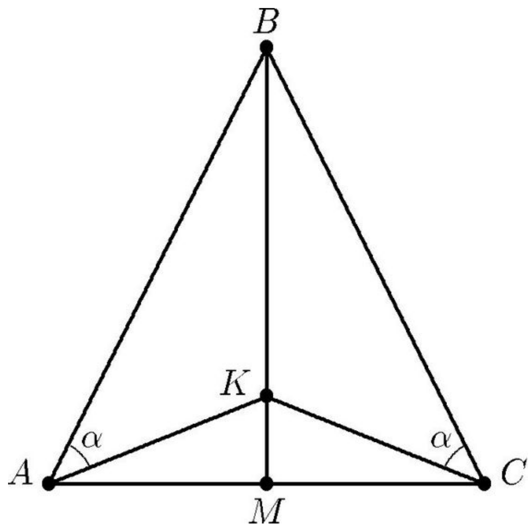
$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+\frac{1}{a}} = \frac{1}{1+a} + \frac{a}{a+1} = 1 \qquad (a > 0).$$

*Atsakymas:* skaičiai lygūs.

**8.** Iš viso buvo sužaistas $(10 + 15 + 17)/2 = 21$ geimas. Pirmasis žaidėjas žaidė 10 geimų ir todėl praleido 11 geimų. Taip galėjo atsitikti tik tuo atveju, jei jis pradėjo žaisti nuo antrojo geimo ir, žaisdamas kas antrąjį, visus geimus (iš jų – ir antrąjį) pralošė.

*Atsakymas:* pirmasis žaidėjas.

**9.** Pažymėkime $\alpha = \angle BCK = \angle BAK$. Trikampiai $KMA$ ir $KMC$ yra lygiapločiai – turi lygius pagrindus ir tą pačią aukštinę; trikampiai $BMA$ ir $BMC$ yra lygiapločiai dėl tos pačios priežasties. Todėl




$$S_{\Delta BKA} = S_{\Delta BKC} = \frac{1}{2} CK \cdot CB \cdot \sin\alpha$$
$$= \frac{1}{2} AK \cdot AB \cdot \sin\alpha$$

Todėl $CK \cdot CB = AK \cdot AB$. Remdamiesi kosinusų teorema, gauname, kad

$$BK^2 = AB^2 + AK^2 - 2AB \cdot AK \cos\alpha$$
$$= CB^2 + CK^2 - 2CB \cdot CK \cos\alpha,$$

t.y. $AB^2 + AK^2 = CB^2 + CK^2$. Iš pastarosios ir lygybės $AB \cdot AK = CB \cdot CK$ gauname $AB + AK = CB + CK$. Iš sandaugų ir sumų lygybės, atsižvelgiant į nelygybes $AB > AK$, $CB > CK$, išplaukia ir lygybės $AB = CB$, $AK = CK$.

**10.** Visų pirma pastebėkime, kad $8191 = 2^{13} - 1 = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{12}$. Kiekvieną natūralųjį skaičių $k \leq 8191$ galima išreikšti suma

$$k = a_{12}2^{12} + a_{11}2^{11} + \cdots + a_1 2 + a_0,$$

kurios visi $a_i = 0$ arba 1. Todėl, sudėję pinigus į paketus po 1, 2, $2^2, \ldots, 2^{12}$ centų, galėsime iš jų sudaryti bet kokią sumą $k \leq 8191$ – tereikia paimti paketus, kuriuos atitinkantys koeficientai $a_i = 1$.

Įsitikinsime, kad šis centų išskirstymo į paketus būdas yra vienintelis (beje, to įrodyti nesugebėjo nė viena komanda). Pastebėkime, kad iš 13 paketų galima sudaryti $2^{13}$ skirtingų rinkinių – lygiai tiek, kiek yra galimų kainų. Todėl negali būti vienodos vertės paketų ir bet kokių dviejų jų kombinacijų sumos turi būti skirtingos. Sudėkime paketus didėjimo tvarka. Indukcija pagal $n$ parodysime, kad pirmuosiuose $n$ paketų būtinai yra $1, 2, \ldots, 2^{n-1}$ centų. Akivaizdu, kad paketas su 1 centu yra būtinas. Tarkime, kad jau sudaryti paketai po $1, 2, \ldots, 2^{n-1}$ centų, ir sakykime, kad $(n+1)$-ajame pakete yra $M > 2^{n-1}$ centų. Jei būtų $M < 2^n$, tai už prekę, kainuojančią $M$ centų, be sumokėjimo paties paketo turiniu, galėtume sumokėti dar vienu būdu, nes atsirastų tokie $b_i = 0$ arba 1, kad $M = b_{n-1}2^{n-1} + \cdots + b_1 + b_0$. Jei $M > 2^n$, tai negalėtume sudaryti sumos $2^n$. Todėl vienintelė galima $M$ reikšmė yra $2^n$.

**11.** Pasinaudodami Koši nelygybe, gauname

$$xt + yz \leq \left(x^2 + y^2\right)^{1/2}\left(t^2 + z^2\right)^{1/2} = \sqrt{9 \cdot 16} = 12,$$

t.y. paskutinėje nelygybėje faktiškai turime lygybę, be to, $\frac{x}{t} = \frac{y}{z}$. Pažymėję pastarąjį santykį $a$ ir įstatę $x = ta$, $y = za$ į trečiąją, dabar jau lygybę, gauname

$$(t^2 + z^2)a = 12 \Longrightarrow a = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} \Longrightarrow z = \frac{4}{3}y = \frac{4}{3}\sqrt{9 - x^2}.$$

Todėl reikia rasti funkcijos $f(x) = x + \frac{4}{3}\sqrt{9-x^2}$ didžiausią reikšmę. Jos išvestinė $f'(x) = 1 - \frac{4x}{3\sqrt{9-x^2}}$ lygi 0, kai $x = \frac{9}{5}$. Nesunku ištirti, kad tai – maksimumo taškas. Randame kitų nežinomųjų reikšmes $z = \frac{16}{5}$, $y = t = \frac{12}{5}$ ir kartu didžiausią galimą $x + z$ reikšmę $\frac{9}{5} + \frac{16}{5} = 5$. *Atsakymas:* 5.

**12.** Imkime $x_2 = x_3 = \ldots = x_{1995} = 1$. Tada

$$x_0 + x_1^2 + 1994 = x_0 x_1^2,$$
$$x_0 = \frac{x_1^2 + 1994}{x_1^2 - 1}.$$

Dabar galime paimti $x_1 = 2$, $x_0 = \frac{4+1994}{3} = 666$. *Atsakymas:* turi.

**13.** Pažymėkime tetraedro sienų plotus $S_1 \le S_2 \le S_3 \le S_4$, o atstumus nuo taško $M$ iki tų sienų – $x_1, x_2, x_3, x_4$. Tetraedro tūris lygus $V = \frac{1}{3}(x_1S_1 + x_2S_2 + x_3S_3 + x_4S_4)$. Iš čia

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= x_1 + x_2 + x_3 + \frac{3V - x_1S_1 - x_2S_2 - x_3S_3}{S_4} \\ &= \frac{3V}{S_4} + x_1\Big(1 - \frac{S_1}{S_4}\Big) + x_2\Big(1 - \frac{S_2}{S_4}\Big) + x_3\Big(1 - \frac{S_3}{S_4}\Big) \\ &\ge \frac{3V}{S_4}. \end{aligned}$$

Mažiausia galima sumos reikšmė $\frac{3V}{S_4}$ gaunama imant $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, t.y. imant tašką $M$ viršūnėje priešais didžiausio ploto ($S_4$) sieną.
*Atsakymas:* viršūnė prieš didžiausio ploto sieną.

**14.** Įrodysime, jei sekos narys $a_k$ baigiasi $n$ devynetų, tai kitas sekos narys $a_{k+1}$ baigiasi bent $2n$ devynetų. Taigi sakykime, $a_k = a \cdot 10^n - 1$. Tada

$$\begin{aligned} a_{k+1} =& 3\big(a^4 \cdot 10^{4n} - 4a^3 \cdot 10^{3n} + 6a^2 \cdot 10^{2n} - 4a \cdot 10^n + 1\big) \\ &+ 4\big(a^3 \cdot 10^{3n} - 3a^2 \cdot 10^{2n} + 3a \cdot 10^n - 1\big) = A \cdot 10^{2n} - 1. \end{aligned}$$

Tad sekos narys $a_2$ turi bent 2 devynetukus, $a_3$ – bent 4, $a_4$ – bent 8, $a_5$ – bent 16.

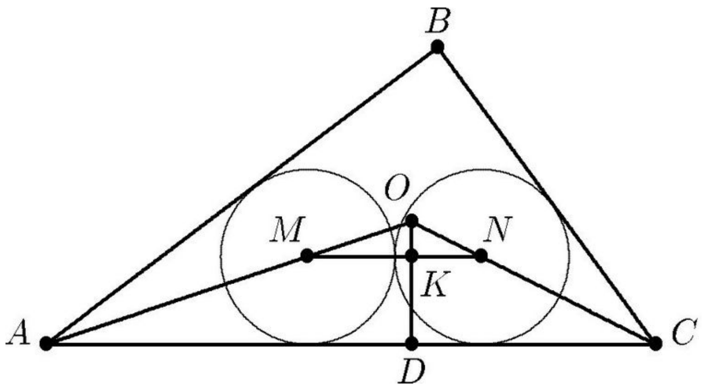
*Pastaba.* Beje, tiksli skaičiaus $a_5$ reikšmė yra 4804702770220452450226625610220900629061609658771138834740083009466470989990605666416318194609860806906204226655288089360472870791463569035854436406550031936455226391532637658569504383199922235201773311819670208186843836932189249091074438341148384972934120924406092800655359999999999999999.

**15.** Visų skaičių suma $1+2+\cdots+1001=\frac{1}{2}(1+1001)\cdot 1001=501501$ nelyginė. Keičiant sumoje ženklą $+$ į ženklą $-$, sumos lyginumas nesikeičia. Todėl skaičių 1994 ir 1996 negalima gauti reikalaujamu būdu. Pavyzdžiui, sumą 1995 galima gauti taip (visuose skliaustuose sumos lygios 0):

$$-1-2-3+(4-5-6+7)+(8-9-10+11)$$
$$+\cdots+(996-997-998+999)+1000+1001.$$

*Atsakymas:* 1994, 1996 – negalima; 1995 – galima.

**16.** Aišku, kad ieškomi skrituliai turi liesti vienas kitą ir trikampio kraštines, nes priešingu atveju juos galima būtų padidinti trikampio ribose, t.y. jie nebūtų didžiausi. Todėl apskritimų centrai turi būti pusiaukampinėse.




Sakykime, $OD=R$ yra į trikampį įbrėžto skritulio spindulys, $r$ – ieškomų skritulių spinduliai. Iš trikampių $AOC$ ir $MON$ panašumo turime, kad $\frac{OK}{MN}=\frac{OD}{AC}$ arba $\frac{R-r}{2r}=\frac{R}{AC}$, t.y. $\frac{1}{r}=\frac{2}{AC}+\frac{1}{R}$. Todėl $r$ yra didžiausias, kai $AC$ yra ilgiausioji kraštinė. Taigi didžiausi skrituliai liečia ilgiausiąją kraštinę.

*Atsakymas:* didžiausi skrituliai liečia ilgiausiąją trikampio kraštinę ir po vieną kitas dvi kraštines. Skritulių spinduliai lygūs $r=(\frac{2}{b}+\frac{1}{R})^{-1}$; čia $b$ – ilgiausios kraštinės ilgis.

**17.** Iš lygybių

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)$$

ir

$$\begin{aligned} x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 &= (x_1 + x_2 + x_3)^3 \\ &\quad -3(x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2 + x_3^2x_1 + x_3x_1^2) - 6x_1x_2x_3 \\ &= (x_1 + x_2 + x_3)^3 \\ &\quad -3(x_1 + x_2 + x_3)(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) + 3x_1x_2x_3 \end{aligned}$$

gauname

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -\frac{1}{2} \qquad \text{ir} \qquad x_1x_2x_3 = \frac{1}{6}.$$

Taigi

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = 1, \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 & = -\frac{1}{2}, \\ x_1x_2x_3 & = \frac{1}{6}. \end{cases}$$

Todėl $x_1, x_2, x_3$ yra daugianario $x^3 - x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}$ šaknys, t.y. $x_i^3 = x_i^2 + \frac{1}{2}x_i + \frac{1}{6}$, $i = 1, 2, 3$. Iš čia

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{3} x_i^4 &= \sum_{i=1}^{3} x_i^3 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} x_i^2 + \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{3} x_i \\ &= 3 + \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 1 = \frac{25}{6} \end{aligned}$$

ir

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{3} x_i^5 &= \sum_{i=1}^{3} x_i^4 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} x_i^3 + \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{3} x_i^2 \\ &= \frac{25}{6} + \frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 2 = 6. \end{aligned}$$

*Atsakymas:* 6.

*Pastaba.* Beje, dvi daugianario $x^3 - x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}$ šaknys yra kompleksinės. Todėl, jei apsiribotume tik realiosiomis šaknimis, uždavinys būtų ne visai korektiškas. Jį galima pataisyti, parenkant lygčių sistemos dešinę pusę. Pavyzdžiui, vietoje 1, 2 ir 3 įrašę 0, 20 ir 30, gautume $\sum_{i=1}^{3} x_i^5 = 500$.

**18.** Kadangi

$$10^{3^n} - 1 = \left(10^{3^{n-1}} - 1\right)\left(1 + 10^{3^{n-1}} + 10^{2\cdot 3^{n-1}}\right),$$

tai, pažymėję

$$A_n = 10^{3^{n-1}} - 1, \qquad B_n = 1 + 10^{3^{n-1}} + 10^{2\cdot 3^{n-1}},$$

gauname

$$A_n = A_{n-1}B_{n-1} = A_{n-2}B_{n-2}B_{n-1} = \cdots = A_0B_0B_1\ldots B_{n-1}.$$

Visi skaičiai $B_k$, $k = 1, \ldots n-1$, dalijasi iš 3, nes jų skaitmenų sumos lygios 3. Be to, $A_0 = 9 = 3^2$. Taigi $A_n$ dalijasi iš $3^2 \cdot 3^n = 3^{n+2}$.

**19.** Bet kuris skaičiaus $30 = 2\cdot 3\cdot 5$ kartotinis $d$ gali būti užrašytas pavidalu

$$d = 2^\alpha 3^\beta 5^\gamma p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_k^{n_k};$$

čia: $p_i$ – pirminiai skaičiai, nelygūs 2, 3, 5; $\alpha, \beta, \gamma$ – natūralieji skaičiai, $n_i$ –neneigiami sveiki skaičiai. Tokio skaičiaus $d$ daliklių skaičius lygus

$$(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)(n_1+1)(n_2+1)\ldots(n_k+1).$$

Sakykime, ši sandauga lygi 30. Kadangi pirmieji trys šios sandaugos skaičiai yra didesni už 1, tai vienas iš jų lygus 2, vienas – 3 ir vienas – 5; visi likusieji turi būti lygūs 1. Tad faktiškai $d = 2^\alpha 3^\beta 5^\gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in \{1, 2, 4\}$. Iš čia lengvai išrašome visus (šešis) kartotinius:

$$2\cdot 3^2\cdot 5^4, \quad 2^2\cdot 3\cdot 5^4, \quad 2\cdot 3^4\cdot 5^2, \quad 2^2\cdot 3^4\cdot 5, \quad 2^4\cdot 3\cdot 5^2, \quad 2^4\cdot 3^2\cdot 5.$$

*Atsakymas:* 11250, 7500, 4050, 1200, 1620, 720.

**20.** Sumuodami po tris kampus, sudarančius „ištiestinius“ kampus „viršūnėse“ $A$, $B$, $C$ ir $D$, gauname lygtis

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi,$$
$$\alpha + \widetilde{\beta} + \widetilde{\gamma} = \pi,$$
$$\widetilde{\alpha} + \beta + \widetilde{\gamma} = \pi,$$
$$\alpha + \widetilde{\beta} + \gamma = \pi.$$

Antrąją ir trečiąją lygtis padauginę iš $-1$ ir visas lygtis sudėję, gauname $2\gamma - 2\widetilde{\gamma} = 0$, t.y. $\gamma = \widetilde{\gamma}$. Iš čia $\beta = \widetilde{\beta}$ ir – svarbiausia – $\alpha = \widetilde{\alpha}$.