7-oji komandinė Lietuvos jaunųjų matematikų olimpiada
Vilnius, 1992 10 17

1. (Sankt-Peterburgas, 1992) Taisyklingojo trikampio ABC kraštinėje BC paimtas taškas D. Tiesė, lygiagreti AD ir einanti per tašką C, kerta tiesę AB taške E. Įrodykite, kad $\frac{CE}{CD} \geq 2\sqrt{3}$.

2. (Kolumbija, 1992) n plokštumos taškų $(x_i, y_i), i = 1, 2, ..., n$, parinkti taip, kad $x_1x_2...x_n = y_1y_2...y_n = 1$. Įrodykite, kad jų tarpe yra bent vienas taškas, nutolęs nuo koordinačių pradžios ne mažiau kaip $\sqrt{2}$.

3. (Ispanija, 1989*) Tarkime, kad su realiuoju skaičiumi α galima rasti tris aritmetinės progresijos

$$\alpha, \alpha + 1, \alpha + 2, ..., \alpha + n, ...$$

narius, sudarančius geometrinę progresiją. Įrodykite, kad α yra **racionalusis** skaičius.

4. (Taivanis, 1992*) Seka $\{a_n\}$ apibrėžta taip:

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \frac{n \cdot a_n + 2(n+1)^2}{n+2}.$$

Įrodykite, kad visi sekos nariai yra sveikieji skaičiai.

5. (Argentina, 1991) Raskite penkiaženklį skaičių N su skirtingais, nelygiais 0 skaitmenimis, kuris lygus sumai visų triženklių skaičių, sudarytų iš skaičiaus N (skirtingų) skaitmenų.

6. (Italija, 1992) Sakysime, kad tiesė taisyklingai kerta kubą, jei ji eina per vidinį kubo tašką. Padalykime kubą $3 \times 3 \times 3$ į 27 lygius kubelius. Kokį didžiausią skaičių šių kubelių gali taisyklingai kirsti viena tiesė ?

7. (Lenkija, 1989) Išspręskite lygtį

$$\operatorname{tg} 7x - \sin 6x = \cos 4x - \operatorname{ctg} 7x.$$

8. (Ukraina, 1992) Ant kiekvienos nepersišviečiančio kubo sienos parašytas natūralusis skaičius. Jei kelias (vieną, dvi, tris) kubo sienas galima matyti vienu metu, tai užrašome skaičių, esančių ant šių sienų, sumą. Kiek daugiausia **skirtingų** skaičių galima gauti tokiu būdu ?

9. (Vietnamas, 1992*) Įrodykite,kad lygtis

$$x^2 + y^2 - 5xy + 5 = 0$$

turi be galo daug natūraliųjų sprendinių.

---

* Supaprastintas variantas.

10. (Japonija, 1992) x ir y yra tarpusavyje pirminiai skaičiai, ir $xy > 1$. Įrodykite, kad su bet kokiu natūraliuoju skaičiumi n skaičius $x^{2n} + y^{2n}$ nesidalija iš $x + y$.

11. (Airija, 1992) natūraliųjų skaičių seka $\{a_n\}$ sudaroma pagal taisyklę: skaičius a_{n+1} yra lygus skaičiaus a_n skaitmenų sandaugai (pavyzdžiui, jei $a_1 = 24378$, tai $a_2 = 1344$, $a_3 = 48$, $a_4 = 32$, $a_5 = 6$, $a_6 = a_7 = ... = 6$). Įrodykite, kad jei $a_n = 1$ su kokiu nors n, tai skaičiaus a_1 visi skaitmenys yra lygūs 1.

12. (Naujoji Zelandija, 1992) Trikampio ABC kraštinėse AC ir AB pažymėti atitinkamai taškai D ir E. Raskite kampą $\angle CED$, jei $\angle ACE = 20°$, $\angle BCE = 60°$, $\angle ABD = 30°$, $\angle CBD = 50°$.

13. (JAV, Ohajo valstija, 1991) Į taisyklingajį šešiakampį taip įbrėžtas kvadratas, kad jo dvi kraštinės yra lygiagrečios šešiakampio kraštinėms. Raskite kvadrato ir šešiakampio plotų santykį.

14. (Bulgarija, 1992) Išspręskite natūraliaisiais skaičiais lygtį

$$2n! = m!\,(m! + 2).$$

15. (Singapūras, 1989) Įrodykite, kad jei $a, b, c > 0$, tai bent viena iš nelygybių

$$a(1-b) > \frac{1}{4}, \qquad b(1-c) > \frac{1}{4}, \qquad c(1-a) > \frac{1}{4}$$

nėra išpildyta.

16. (Latvija, 1990) Trys pirminiai skaičiai sudaro aritmetinę progresiją, kurios skirtumas yra lygus 20. Raskite visus tokius pirminių skaičių trejetus.

17. (Olandija, 1992) Raskite $a^4 + b^4 + c^4$, jei

$$a + b + c = 3, \quad a^2 + a^2 + c^2 = 9, \quad a^3 + b^3 + c^3 = 24.$$

18. (Slovėnija, 1992) Įrodykite, kad su kiekvienu sveikųjų skaičių rinkiniu $a_1, a_2, ..., a_n$, suma

$$|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \cdots + |a_{n-1} - a_n| + |a_n - a_1|$$

yra lyginis skaičius.

19. (Čekija ir Slovakija, 1992) Įrodykite, kad jei a, b, c, d, e, f – tetraedro briaunos, tai jo paviršiaus plotas

$$S \leq \frac{\sqrt{3}}{6}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2).$$

20. (Anglija, 1992) Kokią didžiausią liekaną galima gauti dalijant dviženklį skaičių iš jo skaitmenų sumos ?

Alternatyvūs uždaviniai

21.(Šiaurės šalių olimpiada, 1992) Petras turi neribotą kiekį juodų ir baltų kvadratėlių. Naudodamas šiuos kvadratėlius, Petras nori sudėti kvadratą $n \times n$, pasižymintį tokia savybe:

Bet kokio stačiakampio, esančio kvadrato viduje, kampiniai kvadratėliai **nėra** *vienos spalvos.*

Kokio dydžio kvadratus gali sudėti Petras?

22. (Lenkija, 1992) Funkcijų seka $f_0, f_1, f_2, ...$, apibrėžta lygybėmis

$$f_0(x) = 8, \qquad x \in \mathbf{R},$$

$$f_{n+1}(x) = \sqrt{x^2 + 6f_n(x)}, \qquad x \in \mathbf{R}, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

Išspręskite lygtį

$$f_{1992}(x) = 2x.$$

23. (Ukraina, 1992) natūralieji skaičiai m ir n tenkina lygybę $2m = n^2 + 1$. Įrodykite, kad skaičių m galima išreikšti dviejų natūraliųjų skaičių kvadratų suma.

24. (Šiaurės šalių olimpiada, 1992) Raskite visus skaičius x, y, z, didesnius už 1 ir tenkinančius lygybę

$$x + y + z + \frac{3}{x-1} + \frac{3}{y-1} + \frac{3}{z-1} = 2(\sqrt{x+2} + \sqrt{y+2} + \sqrt{z+2}).$$