

Organizuoja
Vilniaus universitetas

Remia
UAB „AFFECTO LIETUVA“
LIETUVOS MATEMATIKŲ DRAUGIJA,
Leidykla TEV,
Leidykla TYTO ALBA,
NACIONALINIS EGZAMINŲ CENTRAS,
LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA

XII LIETUVOS 7-8 KLASIŲ MOKSLEIVIŲ MATEMATIKOS OLIMPIADA

**Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos
fakultetas, 2010 09 25**

Uždavinių sąlygos

1. Jūrų princesė visų išmintingesnių Sinbado laivo jūrininkų klausinėdavo, ar galima tarp skaičių, esančių kairiojoje lygybės pusėje

$$7^5 7^4 7^3 7^2 7^1 = 2009$$

sudėlioti skliaustus ir aritmetikos veiksmų ženklus, kad užrašytoji lygybė pasidarytų teisinga.

Ką turėtų atsakyti princesei išmintingieji jūrininkai?

Atsakymą, suprantama, jūreiviai pagrįsdavo, kad princesė iš jų nesišaipytų.

Ar tai įmanoma?

2. Sinbadas keliaudamas jūromis retomis atilsio akimirkomis nejučia vis imdavo svajoti apie gimtinę žvelgdamas į 10 skaičių vartinę

135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143 ir 144.

Ilgesio kankinamas jis imdavo visaip dėlioti tos vartinės skaičius.

Sykį jis labai užsidegė surasti visus tokius natūraliuosius skaičius, kurių niekaip negalima gauti iš jo turimos vartinės skaičių juos sudėjinėjant. (Pastaba. Dėliodamas savo vartinės skaičius Sinbadas neprivalo nei būtinai panaudoti kiekvieną kartą juos visus, nei net bet kurį iš jų imti sumon tik vieną kartą, t.y. bet kurį iš jų galima imti sumon ir po kelis kartus, ir visai neimti – bet sumoje turi būti bent du dėmenys).

(A) Nurodykite kokį nors natūralųjį skaičių, kurio Sinbadas negali gauti dėliodamas savo vartinės skaičius.

(B) Ar taip dėliodamas jis gali gauti „metų skaičių“ 2010?

(C) Ar egzistuoja pats didžiausias skaičius, kurio niekaip negalima būtų gauti dėliojant Sinbado vartinės skaičius?

3. 20 Sinbado draugų jūrininkų pakeliaavę laiko mašina užsidegė tenisu ir išlipę į krantą Dubajuje surengė teniso turnyrą, kur kiekvienas sužaidė po vieną geimą su kiekvienu kitu jūrininku. Kai jie vėl išplaukė į jūrą, Sinbadas iškėlė tokį, kaip jiems visiems pasirodė, labai įdomų ir kartu kai kam oi kaip sunkų klausimą: tarkime, kad jie sužaidė bet kaip, kad kiekvienas jūreivis tikrai laimėjo nors vieną geimą (lygiųjų tenise nebūna). Tai ar tada po kiekvieno tokio turnyro būtinai visada rasis tokie trys jūrininkai A , B ir C , kad A yra laimėjęs prieš B , B yra laimėjęs prieš C ir C yra laimėjęs prieš A ?

4. Jūreivio Sinbado knygų lentynėlėje yra 10 skirtingų knygų. Kiekvieną vakarą Sinbadas jas išima iš knygų skrynelės ir vis kitaip išrikiuoja jas savo knygų lentynėlėje. Garbusis jūreivis rikiuoja jas kaip tinkamas, tik visada žiūri, kad Jūreivių garbės kodekso komentarai visada stovėtų kairiau Interneto veiklos pradžiamokslio (abi minėtosios knygos gali ir nestovėti šalia). Kiek daugiausiai vakarų, išlaikydamas tą savo principą, jis galės išdėlioti savo 10 turimų knygų, kad knygų rikiuotė niekada nesikartotų?

5. Princesė prašo Sinbado visiems paaiškinti, ar skaičius $4^{20} + 2^{20} + 1$ tikrai dalijasi dar iš kokio nors trečiojo natūraliojo skaičiaus, o ne tik kad iš 1 ir, žinoma, pats iš savęs.

(Mokslininkų kalba kalbant, Princesė, suprantama, teiraujasi, ar tas skaičius yra pirminis skaičius, ar nėra.)

Tai kaip ten yra? Atsakymą princesei pagrįskite.

6. Jūreivis Sinbadas, išgirdęs, kad skaičiai, $x_{1,2}$, tinkantys vadinamajai kvadratinei lygčiai $ax^2 + bx + c = 0$, jeigu jų yra, randami iš lygybės

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, ir prisiminęs, kad pradžios mokykloje jam puikiai sekėsi visaip

grupuoti narius ir iškėlinėti prieš skliaustus bendrus daugiklius, staiga ėmė ir pareiškė, kad jam nesudarytų jokių keblumų per pusvalandį surasti absoliučiai visus, kad ir tokios kubinės lygties $9x^3 - 13x - 6 = 0$ sprendinius.

Jis dar pridūrė, kad kiekvienas, kuris irgi gali tai padaryti ir dar parodyti, kaip jis tai daro, skelbiamas jūreivio Sinbado aritmetiniu kolega ir gali prisijungti prie jo Facebook'o.

Ar nenorėtumėte ir Jūs dabar nedelsdamas tapti kapitono Sinbado aritmetiniu draugu?