Funkcinės analizės egzaminas

(2007 m. sausio 15 d., pradžia 13 val., pabaiga 14 val. 30 min.)

Vardas, pavardė . . . .

Studijų programa, grupė . . . .

Parašykite, kokiu pažymiu įsivertintumėte savo funkcinės analizės žinias . . . . . .

SĖKMĖS!

• • •

Atlikite šias trumpas užduotis. (Kiekvienas teisingas atsakymas - 1 taškas.)

1. Kompleksinių skaičių aibėje C apibrėžkite bent dvi skirtingas atstumo funkcijas.

2. Apibrėžkite metrinę erdvę $L_3[1,2]$.

3. Tegu $S_r(x_0)$ - atvirasis metrinės erdvės X rutulys. Koks jo atžvilgiu yra elementas $y \in X$, tenkinantis sąlygą: $d(x_0, y) = r$? Atsakymą pagrįskite.

4. ε-kalba perrašykite teiginį „$\lim_{n\to\infty} x_n$ neegzistuoja metrinėje erdvėje (X, d)".

5. Ko dar, be aibės $A \subset C[a,b]$ lygialaipsnio tolydumo reikia, kad aibė A būtų kompaktinė?

6. Ar tiesinės erdvės E intervalas $[x, y)$, $x, y \in E$ yra iškila aibė? Atsakymą pagrįskite.

7. Tegu E yra tiesinė erdvė, $x \in E$. Užrašykite mažiausią tiesinę erdvės E aibę, kuriai priklauso taškas x.

8. Užrašykite realiosios tiesinės erdvės skaliarinės daugybos aksiomas.

9. Kokia yra bendroji tiesinio tolydžiojo Hilberto erdvės funkcionalo išraiška?

10. Užrašykite bent vieną tiesinio funkcionalo normos apibrėžimą.

Atlikite šias dvi teorines užduotis. (Kiekviena teisingai atlikta užduotis verinama 5 taškais.)

1. Tegu (X, d) yra pilna metrinė erdvė, atvaizdis $f : X \to X$ yra sutraukiantis, (x_n) yra paprastųjų iteracijų seka: $x_n = f(x_{n-1}), n = 1, 2, \ldots$ Įrodykite, kad egzistuoja $\lim x_n$. Ar tam būtinai reikia, kad erdvė X būtų pilna? Atsakymą motyvuokite.

2. Įrodykite, kad Banacho erdvėje $B[a, b]$ neegzistuoja Šauderio bazė.

Išspręskite šiuos du uždavinius. (Teisingas uždavinio sprendimas vertinamas 5 taškais.)

1. Tegu aibė $A = \{f \in C[0,1] : f \;\text{ yra nemažėjanti}\}$. Įrodykite, kad aibė A yra uždara bet nėra atvira.

2. Nagrinėkime tiesinę normuotą erdvę $Y = \{x = (x_k)_{k \in N} : \exists c > 0 \forall k \in N, |x_k| < c/k\}$ su norma $||x|| = \sup_{k \in N} |x_k|$. Įrodykite, kad erdvė Y nėra Banacho.