STATINĖS BENDROSIOS PUSIAUSVYROS MATEMATINIAI PAGRINDAI

RIMAS NORVAIŠA

1 Skyrius

Pratarmė

Šis vadovėlis skirtas vienai iš matematinės ekonomikos sričių – statinei bendrosios pusiausvyros teorijai. Jis papildo ir pagilina mikroekonomikos žinias, suteikdamas joms matematinį pagrindą. Rašant vadovėlį buvo pasinaudota konspektu kurso, kurį autorius keletą metų dėstė Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakulteto ekonometrijos katedros studentams.

Tematikos svarba. Bendrosios pusiausvyros idėja ekonomikos teorijoje gimė dar XIX amžiuje. Ji padėjo paaiškinti bendrą rinkos ekonomikos mechanizmą. Dominuojančia ši idėja tampa XX amžiaus viduryje. Šiandien bendrosios pusiausvyros koncepcijos prasiskverbė beveik į visas ekonomikos teorijos sritis. Neatskiriamas bendrosios pusiausvyros idėjos bruožas buvo ir yra fundamentalus jos matematinis pagrindimas.

Šiuolaikinė bendrosios pusiausvyros koncepcija remiasi daugeliu matematikos teorijų (aibių teorija, diferencialine geometrija, topologija, funkcine analizė, tikimybių teorija, diferencialinių lygčių teorija ir t. t.), ir jai įsisavinti reikia nemenkų matematikos studijų. Guodžia bent tai, kad tokios studijos turi natūralią pradžią. Tiksliau kalbant, šiuolaikinės bendrosios pusiausvyros kryptys yra vienõs teorijos, vadinamos statine bendrąja pusiausvyra, tolesni patikslinimai ir papildymai. Statinės bendrosios pusiausvyros pagrindą sudaro vadinamasis *Arrow–Debreu* ekonomikos modelis, kurio autoryste kartu su *Kenneth*u *Arrow* ir *Gerard*u *Debreu* dalijasi *Lionel*is *McKenzie*. Šiame vadovėlyje detaliai nagrinėjamas būtent *Arrow–Debreu* ekonomikos modelis.

Vadovėlio ypatumai. Viena, visi teiginiai yra pagrįsti matematiniais įrodymais. Tai nėra įprasta populiariausiems šios srities vadovėliams, matyt, dėl keleto priežasčių. Visų pirma, standartinis vadovėlis orientuojasi į skaitytoją, kuris yra ekonomikos fakulteto studentas, ir todėl nemanoma, kad jo matematinės žinios yra pakankamos. Antra ir svarbiausia priežastis, mūsų nuomone, yra tradicija. Daugumai vadovėlių būdinga tam tikra inercija – nauji vadovėliai savo turiniu skiriasi nuo ankstesnių tik nežymiai (neretai minimas 15% dydis), laikantis „įprastinių“ turinio standartų. Ekonomikos teorijos atveju, greta jau paminėtos, tarp tokių tradicijų yra tikslių ir pilnų įrodymų vengimas, apsiribojant teiginių ir formulių interpretacija bei iliustravimu pavyzdžiais; taip pat būdingas ir nepakankamas formuluojamo teiginio prielaidų akcentavimas.

Tiesa, tai nereiškia, jog nėra statinės bendrosios pusiausvyros teorijos išsamaus matematinio išdėstymo. Tokių knygų yra nemažai (žr. šio vadovėlio literatūros sąrašą). Tačiau tos knygos nėra vadovėliai, nes jose nekreipiamas dėmesys bent jau į reikalingų matematikos faktų tikslias nuorodas, tikintis iš skaitytojo pakankamo matematinių žinių lygio. Ši padėtis atspindi ir kitą nemažą ekonomikos teorijos problemą, susijusią su jos matematizavimu. Apie tai daugiau rašoma šio vadovėlio 1.5 skyrelyje.

Kita, vadovėlyje išdėstyta visa *Arrow–Debreu* ekonomikos modelio paaiškinimui reikalinga matematika, nenukreipiant į kitus vadovėlius. Tai padaryta dėl kelių priežasčių. Tie patys matematikos objektai ir faktai gali būti apibrėžiami ir dėstomi ekvivalenčiais bet skirtingais būdais (kaip, pavyzdžiui, funkcijos tarp euklidinių erdvių antrosios eilės išvestinė). Skirtingi matematikos vadovėliai dažnai atspindi skirtingus požiūrius ir yra skirtingo bendrumo lygio. Pakankamo matematinio išsilavinimo neturinčiam skaitytojui tai sukelia rimtų sunkumų.

Šiame vadovėlyje visi reikalingi matematinės analizės rezultatai pateikiami ir įrodomi nesiplečiant, tik tiek, kiek tai yra būtina ir pakankama vadovėlio tikslui pasiekti. Mūsų atveju užtenka pagrindinės matematinės struktūros, nusakomos euklidine erdve, ir funkcijos tarp tokių erdvių antrosios eilės išvestinės. Savo ruožtu, euklidinės erdvės struktūra yra realiųjų skaičių aibės bendrinys, o pastaroji net ir matematikos vadovėliuose dažnai pateikiama paviršutiniškai. Laužant nusistovėjusią tradiciją, šiame vadovėlyje pradedama primenant aibių teorijos aksiomatiką ir neaksiominę realiųjų skaičių aibės konstrukciją. Taip daroma ir todėl, kad šiuolaikinės bendrosios pusiausvyros tolesnis vystymasis kvestionuoja standartinę aibių teorijos aksiomatiką.

Nepaisant to, vadovėlyje yra nemažai nuorodų į kitus tiek matematinės ekonomikos, tiek ir matematikos vadovėlius. Tačiau tokių nuorodų tikslas yra papildomų ir tolesnių rezultatų aptarimas nukreipiant į atitinkamus šaltinius. Tai daroma kiekvieno skyriaus pabaigoje.

Galiausiai, vadovėlyje detaliai nagrinėjami matematinei ekonomikai reikalingi specifiniai matematikos faktai. Tai daugiareikšmės funkcijos, vadovėlyje vadinamos atitiktimis, bei *Brouwer*io ir *Kakutani*o nejudamojo taško teoremos. Šie faktai paprastai neįeina į universitetinį matematikos specialybės kursą.

Kiekvieno skyrelio pabaigoje skaitytojas ras pratimų. Vienuose iš jų prašoma papildyti pagrindiname tekste esančio įrodymo etapą. Kituose prašoma įrodyti naudingą, bet paprastą teiginį, kuris yra toliau naudojamas. Kartais pratimas tiesiog iliustruoja bendrą faktą, nagrinėjamą pagrindiniame tekste. Dalis pratimų formuluojami tiesiog pagrindiniame tekste įterpiant žodelį „kodėl? “. Taip atkreipiamas dėmesys į tai, kad čia remiamasi sudėtingesne argumentacija, ir skaitytojas prašomas pačiam ją atstatyti.

Naudojimosi vadovėliu rekomendacijos. Priklausomai nuo to, kiek laiko skaitytojas gali skirti šio vadovėlio turiniui įsisavinti, galima laikytis skirtingų skaitymo būdų.

- Norinčiam tik susipažinti su statinės bendrosios pusiausvyros teorijos esme, pakanka perskaityti 1.1 ir 1.3 skyrelius.

- Visas *Arrow–Debreu* ekonomikos modelis dėstomas 3, 5 ir 6 skyriuose. Pirmame dėstoma vartotojo pasirinkimo, dar vadinama sprendimų, teorija. Antro skyriaus turinys – mainų rinkos (be gamybos) bendroji pusiausvyra. Paskutiniame skyriuje pateikiamas bendrosios pusiausvyros egzistavimo įrodymas.

- Reikiami matematikos faktai dėstomi 2 ir 4 skyriuose. Šias vadovėlio dalis galima skaityti ir nepriklausomai nuo tų faktų ekonominės interpretacijos kitose dalyse.

Autorius nuoširdžiai dėkoja V. Čekanavičiui, J. Mačiui ir H. Pragarauskui, perskaičiusiems vadovėlio rankraštį ir pasiūliusiems vertingų patarimų. Tačiau dėl likusių netikslumų ar klaidų atsakingas tik autorius.

Turinys

1 Skyrius

Įvadas

Kadangi metafizinis mąstymas dėl savo pobūdžio yra tamsus ir pavojingas, kadangi šis mąstymas remiasi tik vaidenimusi ir suklydimams pavaldaus proto tam tikra apyvarta, o matematikoje vien tik skaičiavimas mus apsaugo nuo vaidenimosi ir klaidų, tiksliomis operacijų taisyklėmis dėmesį laikydamas tikrumo varžtuose, – tai matematikos moksluose *gali būti vadinama matematiniu mąstymu tik tai, kas paaiškinama, išvedama ir įrodoma skaičiavimu*.

Janas Sniadeckis[1], 1818[2].

Žmogaus poreikiams patenkinti būtinų išteklių stygius lemia tai, kad visuomenė neišvengiamai turi rūpintis esamų išteklių paskirstymu. Šią nepakankamų išteklių paskirstymo visuomenėje problemą ir sprendžia ekonomika kaip visuomeninė veikla. Kaip žinių sistema, ekonomika tiria gėrybių ir paslaugų gamybos, paskirstymo ir vartojimo būdus. Vadovėlyje nagrinėjama bendroji pusiausvyra aiškina rinkos ekonomika grindžiamą išteklių paskirstymo mechanizmą.

1.1 Dalinė ir bendroji pusiausvyros

Kalbant apie žmonių elgesį ekonominėje situacijoje, pusiausvyra yra tokia būsena, kurioje niekam nėra tiesioginių paskatų keisti savo elgseną, ir todėl tokia padėtis gali tęstis, bent jau laikinai. Pusiausvyros sąvoka vartojama įvairiose ekonomikos teorijos srityse. Paminėsime tik svarbiausias iš jų: makroekonomiką, lošimų teoriją ir mikroekonomiką.

Makroekonomikoje pusiausvyra apibūdina tokią situaciją, kai kainų lygis ir įvairių ekonomikos subjektų veikla vienas kitam neprieštarauja, ir todėl visi numatomi planai

[1] Jan Śniadecki – Janas Sniadeckis (1786–1830), lenkų mokslininkas: fizikas, astronomas, matematikas.

[2] Čia ir toliau citatos iš straipsnio: Janas Sniadeckis. Apie matematinį mąstymą. Pranešimas, skaitytas Imperatoriškojo Vilniaus universiteto mokslinėje sesijoje 1818 m. balandžio 15 d. Vertimas iš lenkų kalbos: *Problemos*, 2006, 70, p. 165–175.

gali būti realizuoti. Ekonominės veiklos su skirtingais interesais pavyzdžiu yra taupymas ir investavimas. Individų ir firmų taupymo ir investavimo *ex ante* planai gali būti skirtingi. Tačiau visuminėje ekonomikoje visi šie planai gali būti realizuojami tik tuo atveju, jei nacionalinių pajamų lygis ir palūkanų normos yra tokie, kad visuminio taupymo ir visuminio investavimo planai sutampa. Šią nacionalinių pajamų ir palūkanų normos priklausomybę aprašo paprasčiausias makroekonominės pusiausvyros modelis, vadinamas IS-LM modeliu (žr. *O. Blanchard* [5]). Tokia makroekonominė pusiausvyra gali neegzistuoti, nes individualių ekonomikos subjektų planai priklauso nuo lūkesčių vienas kito atžvilgiu. Tačiau jei tokia pusiausvyra egzistuoja ir yra realizuota, tai niekas bent jau laikinai neturi priežasčių keisti savo planus.

Kita pusiausvyros sąvokos vartojimo sritis yra lošimų teorija. Šiuo atveju kalbama apie ekonomikos subjektų (veikėjų) strategijų pusiausvyrą (žr. *G. Owen* [23]). Strategija yra individualaus subjekto pasirenkamas sprendimas, priklausantis nuo kitų subjektų sprendimų pasirinkimo. Strategijų pusiausvyra egzistuoja, jei kiekvienam subjektui esamas visų kitų subjektų strategijų pasirinkimas nesukelia poreikio keisti savąją strategiją. Jei kiekvienas ekonominio lošimo subjektas sprendimą renkasi taip, lyg visų kitų subjektų sprendimai jam yra žinomi, tai tokia pusiausvyra vadinama *Nasho*[3] pusiausvyra. Gali būti ir taip, kad vienas iš subjektų, vadinamas lyderiu, sprendimą daro tik numatydamas visų kitų subjektų reakciją, o tie kiti subjektai elgiasi sutinkamai su lyderio sprendimais. Tokia pusiausvyra vadinama *Stackelbergo*[4] pusiausvyra.

Pagaliau, mikroekonomikoje kalbama apie tokią ekonominę situaciją, kurioje išskiriami vartotojų ir gamintojų interesai. Pirmieji iš jų siekia patenkinti savo poreikius, kurios išreiškia prekių paklausa, o pastarieji savo gamybinėje veikloje siekia maksimalaus pelno, sukurdami prekių pasiūlą. Tiek prekės paklausa, tiek ir jos pasiūla priklauso nuo prekės kainos. Kaina vadinama pusiausvyrine, jei pasiūla lygi paklausai, vartotojai realizuoja savo poreikius, o gamintojai maksimizuoja pelną. Aišku, jei tokia pusiausvyra realizuota, tai vartotojai ir gamintojai neturi tiesioginių paskatų keisti savo sprendimus bent jau laikinai.

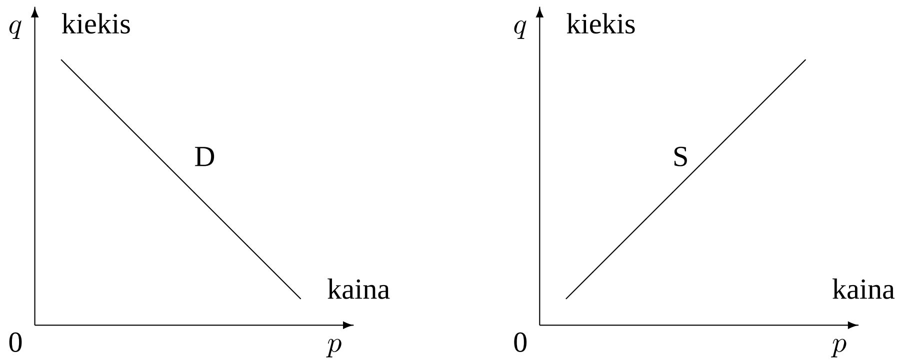
Toliau vadovėlyje pusiausvyra suprantama būtent mikroekonomikos kontekste, ir ekonomikos matematinis modelis nagrinėjamas siekiant nustatyti pusiausvyros tarp pasiūlos ir paklausos egzistavimo sąlygas.

Paklausa ir pasiūla Mikroekonomikoje pasiūlos ir paklausos sąryšiai naudojami pagrįsti pusiausvyros galimybę, kuri savo ruožtu, atlieka optimalų išteklių paskirstymą. Šia prasme pasiūlos ir paklausos sąvokoms tenka labai svarbus vaidmuo ekonomikos teorijoje. Paprasčiausia pasiūlos ir paklausos sąryšių iliustracija gaunama nagrinėjant vienos prekės kiekio priklausomybę nuo jos kainos.

Paklausa išreiškia vartotojo poreikį prekei ar paslaugai. Šis poreikis išreiškiamas

[3] John F. Nash – Džonas Nešas (1928), amerikiečių matematikas, Nobelio premijos laureatas ekonomikos srityje.

[4] Heinrich F. von Stackelberg – Heinrichas Stakelbergas (1905–1946), vokiečių ekonomistas.



1.1 . Paklausos ir pasiūlos funkcijos

pageidaujamu prekės kiekiu, priklausančiu nuo jos kainos. Pageidaujamos prekės kainos priklausomybė nuo jos kiekio ir vadinama *paklausos sąryšiu*.

Pasiūla išreiškia gamintojo galimybes suteikti prekę ar paslaugą. Siūlomas prekės kiekis atitinka gamintojo norą, priklausantį nuo tos prekės kainos rinkoje. Šis siūlomos prekės kiekio priklausymas nuo jos kainos vadinamas *pasiūlos sąryšiu*.

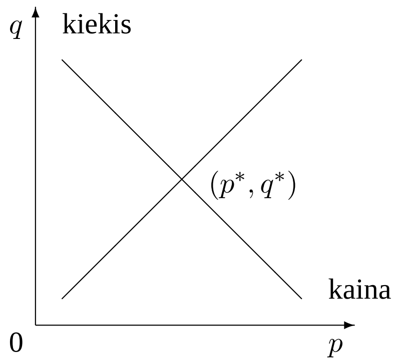
Vadinamasis paklausos dėsnis sako, jog *nesikeičiant kitoms sąlygoms* didesnė prekės kaina reiškia mažesnę jos paklausą. Toks sąryšis grindžiamas tuo, kad didesnės kainos prekės perkama mažesniu kiekiu, nes didėjant prekės kainai mažėja galimybės ją įpirkti. Savo ruožtu, tai paaiškinama vartotojo vengimu pirkti prekę tais atvejais, kai jis priverstas atsisakyti to, ką jis gal būt labiau vertina.

Panašiai kaip ir paklausos atveju, pasiūlos dėsnis rodo, kaip siūlomi parduoti prekės kiekiai priklauso nuo jos rinkos kainos. Tik, priešingai paklausai, pasiūlos sąryšio forma yra aukštyn kylanti kreivė. Šis sąryšis aiškinamas tuo, jog prekės kainai augant, jos siūlomas kiekis didėja, nes gamintojui tai reiškia didesnes pajamas.

Naudojant matematinę terminologiją, pasiūlos ir paklausos dėsniai išreiškia ekonominės prigimties *prielaidą*, jog prekės pasiūla ir paklausa yra jos kainos tam tikro pobūdžio funkcijos. Tiksliau kalbant, viena iš šių funkcijų yra nemažėjanti, o kita – nedidėjanti. 1.1 piešinys iliustruoja dar stipresnę prielaidą, jog paklausos funkcijos grafikas yra žemyn besileidžianti tiesės atkarpa, o pasiūlos funkcijos grafikas yra aukštyn kylanti tiesės atkarpa.

Prekės kiekio paklausos nuo kainos funkciją žymėkime D, o atitinkamą pasiūlos funkciją S. Kaip matome iš brėžinio, kadangi funkcijos tolydžios, tai jos privalo kirstis kuriame nors taške (žr. 1.2 piešinį). Funkcijų grafikų susikirtimo taškas, kurio koordinatės yra (p^*, q^*), turi svarbią savybę. Prekės kainai esant p^*, jos kiekio pasiūla lygi paklausai, t. y. $q^* = D(p^*) = S(p^*)$. Ši vienos prekės rinkos būsena dažnai vadinama pusiausvyra.

Formuluojant pasiūlos ir paklausos dėsnius buvo panaudota frazė „kitoms sąlygoms



1.2 . Pusiausvyra

nesikeičiant“. Ekonomistai dažnai ir įvairiose situacijose šią frazę pasako lotyniškai – *ceteris paribus*. Šiuo atveju ceteris paribus reiškia, jog prekės paklausa ir pasiūla priklauso tik nuo jos kainos ir nuo nieko daugiau. Ar ši prielaida reali?

Tarkime, kad nagrinėjamoji prekė yra automobilis, kurio kainą paprastai nustato rinka, remdamasi automobilio pasiūla ir paklausa. Dabar tarkime, kad naftos rinkoje įvyko svarbūs pokyčiai, dėl kurių kelis kartus padidėjo naftos kainos, kurios savo ruožtu kelis kartus pakėlė benzino kainą. Pavyzdžiui, dėl politinių priežasčių kilusio 1973 metų krizės naftos kainos pakilo keturis kartus. Kas tokiu atveju atsitinka su automobilio paklausa? Be abejonės – ji mažėja ir visai ne dėl automobilio rinkos kainos. Taigi prielaida, jog automobilio pasiūla ir paklausa priklauso tik nuo jo kainos, neatrodo esanti reali.

Ekonominio reiškinio tyrimas, neatsižvelgiant į visas kitas aplinkybes, yra naudojamas paprastumo dėlei ir ekonominiams principams aiškinti. Todėl pusiausvyros egzistavimas vienoje izoliuotoje rinkoje vadinamas *daline pusiausvyra*.

Tačiau ir dalinės pusiausvyros egzistavimą vargiai galima laikyti neabejotinu faktu, išplaukiančiu iš pasiūlos ir paklausos dėsnių. Ekonomistai žino ne vienos prekės pavyzdį, kuriai negalioja pasiūlos ir paklausos dėsniai (žr. [16, 2 skyrius]).

Bendroji pusiausvyra Nagrinėjant rinkos ekonomikos mechanizmą giliau, tenka silpninti ceteris paribus sąlygą ir leisti kiekvienos prekės kainai priklausyti nuo visų kitų prekių kainų. Kadangi kainų pokyčiai sąveikauja tarpusavyje, ekonomikos pusiausvyra, jei ji egzistuoja, turėtų apimti vienu metu visas prekių rinkas. Tokia pusiausvyra vadinama *bendrąja*.

Bendroji pusiausvyra, arba sutrumpintai BP, apibrėžiama tokiu prekių kainų rinkiniu, kuri ne tik užtikrina kiekvienos prekės paklausos ir pasiūlos lygybę, bet patenkina vartotojų ir gamintojų lūkesčius. Tarkime, kad ekonomiką sudaro ℓ prekių. Kiekvienam $h \in \{1, \dots, \ell\}$, h-tosios prekės pasiūlos ir paklausos kiekis priklauso ne tik nuo jos kainos, bet ir nuo daugelio kitų prekių kainų. Esant duotai kainų sistemai $(p_1, \dots, p_\ell)$, žymėkime h-tosios prekės pasiūlą $S_h(p_1, \dots, p_\ell)$ ir paklausą $D_h(p_1, \dots, p_\ell)$. Kintant kainų sistemai $(p_1, \dots, p_\ell)$, šios reikšmės apibrėžia ℓ kintamųjų funkcijas S_h ir D_h, kurios savo ruožtu, yra vektorinių funkcijų $S = (S_1, \dots, S_\ell)$ ir $D = (D_1, \dots, D_\ell)$ komponentės. Sakoma, jog kainų sistema $(p_1^*, \dots, p_\ell^*)$ apibrėžia pusiausvyrą, jei kiekvienos prekės rinkoje yra pusiausvyra, t. y. kiekvienam $h \in \{1, \dots, \ell\}$

$$S_h(p_1^*, \dots, p_\ell^*) = D_h(p_1^*, \dots, p_\ell^*).$$

Taigi bendroji pusiausvyra nuo dalinės skiriasi tuo, kad pasiūlos ir paklausos funkcijos priklauso nuo visų kainų.

Kodėl ekonomistus domina bendroji pusiausvyra? Vaizdžiai kalbant, tikima, jog rinkoje kainos kitimą veikia pasiūlos ir paklausos „jėgos“. Šių „jėgų sąveika“ keičia rinkos „būseną“, jas artindamos prie pusiausvyros ar tolindamos nuo pusiausvyros. Be to, manoma, jog trokštamą rinkos efektyvumą lemia jos buvimas pusiausvyroje. Nagrinėjant ekonomikos bendrąją pusiausvyrą, tradiciškai analizuojami šie klausimai:

- egzistavimas – pusiausvyrą apibūdinančių lygčių sprendinių egzistavimo sąlygų nustatymas;
- vienatis – pusiausvyrą apibrėžiančių kainų vienaties ir nevienaties tyrimas;
- stabilumas – ar kainos formavimosi mechanizmas – jos didėjimas ar mažėjimas priklausomai nuo atitinkamo paklausos kitimo – konverguoja į pusiausvyrinę kainą;
- efektyvumas – ar pusiausvyroje ištekliai panaudojami efektyviai (*Pareto*[5] efektyvumas);
- taikymas realioms ekonomikoms – remiantis konkrečiais duomenimis, įvertinti bendrosios pusiausvyros modelį skaitiniu ir empiriniu būdu;
- derybos (angl. bargaining) – sąryšis tarp strateginių derybų ir pasyvaus rinkoje nustatomos kainos naudojimo.

Vadovėlyje nagrinėjami bendrosios pusiausvyros egzistavimo ir efektyvumo klausimai. Pastarajam klausimui skirtas paskutinis 6.4 skyrelis.

Bendroji pusiausvyra vadovėlyje nagrinėjama taip, lyg pasaulis nepriklausytų nuo laiko ir atsitiktinumų. Todėl atitinkamas bendrosios pusiausvyros matematinis modelis vadinamas *statiniu*. Toks supaprastinimas turi prasmę tuo atveju, kai matematinį modelį galima taip papildyti, kad pradines prielaidas galima būtų pakeisti gerokai realesnėmis. Tokių galimybių aptarimas reikalauja daug gilesnių ir platesnių žinių negu tos, kurios pateikiamos šiame vadovėlyje.

[5]Vilfredo F. D. Pareto – Vilfredas Paretas (1848–1923), prancūzų ir italų sociologas, ekonomistas ir filosofas.

1.2 Bendrosios pusiausvyros iliustracija

Bendrosios pusiausvyros modelio esmę galima iliustruoti nagrinėjant vienintelio vartotojo sukuriamą ekonomiką. Tradiciškai ekonomikoje, tą vienintelio ekonomikos subjekto vaidmenį atlieka *Daniel*io *Defoe*[6] romano herojus Robinzonas Kruzas (*Robinson Crusoe*), kurį laiką praleidęs negyvenamoje saloje. Įvairios šiam herojui ekonomistų priskiriamos ekonominės veiklos interpretacijos vadinamos Robinzono Kruzo ekonomika. Sekdami šia tradicija ir norėdami palyginti skirtingus išteklių skirstymo mechanizmus, toliau nagrinėsime dviejų rūšių ekonominės veiklos negyvenamoje saloje pasirinkimo ir motyvacijos būdus.

Pirmiausia, Robinzono Kruzo gyvenimo aplinkos paprastumas įgalina resursų paskirstymą išreikšti vienos funkcijos maksimizavimu. Toks ekonominių sprendimų būdas, toliau vadinamas *centralizuotu paskirstymu*, iliustruoja planinės ekonomikos idėją.

Antrasis resursų skirstymo būdas pagrįstas kainos mechanizmu. Mūsų pavyzdyje kainą pavyksta įvesti tik atskyrus dvi Robinzono Kruzo veiklos rūšis – vartojimą ir gamybą. Dėl to tenka imituoti vieno individo prekybą su pačiu savimi. Šiuo atveju efektyvus išteklių paskirstymas gaunamas nepriklausomai maksimizuojant dvi funkcijas; viena iš jų apibūdina gamybą, o kita – vartojimą. Šį ekonomikos modelį vadinsime *decentralizuotu paskirstymu*.

Ištekliai ir ekonominė veikla Mus domins tik dviejų rūšių Robinzono Kruzo veikla – būtent, jo darbas ir vartojimas (poilsis), prasidedantys laiko momentu 0 ir besitęsiantys iki kurio nors momento $L > 0$. Jei Robinzonas tik vartoja (ilsisi), tai jam gresia vartojimo išteklių stygius. Jei Robinzonas be pertraukos dirba, tai jam gresia kitokios rūšies nemalonumai. Bandysime nustatyti optimalų darbo ir poilsio laiko pasirinkimą.

Robinzono darbinė veikla yra kokoso riešutų rinkimas, toliau vadinama gamyba. Gamybos ištekliais laikysime darbą, matuojamą rinkimo laiku $d \in [0, L]$, o surinktų riešutų kiekis $q \geq 0$ bus gamybos produktas. Tarkime, kad kiekvienai darbo trukmei d surenkamas kokoso riešutų kiekis q išreiškiamas funkcija f, t. y. kiekvienam $d \in [0, L]$

$$q = f(d) \geq 0. \tag{1.1}$$

Tokia funkcija $f\colon\ [0, L] \to \mathbb{R}_+$ gamybos teorijoje yra vadinama gamybos funkcija (daugiau apie tai 6.1 skyrelyje).

Toliau, tarkime, kad gamybos funkcija f yra du kartus diferencijuojama kiekviename atvirojo intervalo $(0, L)$ taške ir kiekvienam $t \in (0, L)$, galioja savybės

$$f'(t) > 0, \qquad f''(t) < 0 \quad \text{ir} \quad f(0) \geq 0. \tag{1.2}$$

Funkcija f su reikšmėmis $f(t) = \sqrt{t}$, $t \geq 0$, yra tokios funkcijos pavyzdys. Pirmoji iš (1.2) savybių reiškia, jog funkcija didėja, o antroji – funkcijos didėjimo greitis mažėja.

[6] Daniel Defoe – Danielas Defo (1659/1661–1731), anglų rašytojas.

Savybė $f(0) = 0$ reiškia, kad laikotarpio pradžioje Robinzonas neturi riešutų ir tuo pačiu vartojimo išteklių. Atvejį $f(0) > 0$ galėtų atitikti situacija, kai Robinzono išteklius papildo iš anksčiau turimi arba nuo palmių patys nukritę kokoso riešutai. Funkcijos f didėjimas reikštų, jog didėjant darbo laikui, didėja surenkamų riešutų kiekis. Tuo tarpu darbo efektyvumas laikui bėgant mažėja, kas derinasi su antrosios išvestinės ženklu.

Robinzono Kruzo vartojimą išreikškime kitais dviem dydžiais – suvartotu kokoso riešutų kiekiu $k \geq 0$ ir laisvalaikio trukme $l \in [0, L]$. Kadangi vienu metu Robinzonas gali užsiimti tik vienos r$\overline{\text{u}}$šies veikla, tarkime, kad

$$0 \leq l + d \leq L. \tag{1.3}$$

Jei $l + d < L$, tai reiškia, jog be laisvo laiko leidimo, vartojimo ir kokoso riešutų rinkimo, Robinzonas dar kažkuo užsiėmęs. Priklausomai nuo l ir k reikšmių, Robinzonas jaučia mažesnį ar didesnį malonumą, kuris ir lemia jo pasirinkimą. Ekonomikoje yra postuluojamas žmogaus kaip vartotojo siekimas visada didinti savo malonumą turimų galimybių ribose. Šia prielaida remsimės, numatydami Robinzono kaip vartotojo galimus pasirinkimus.

Tradiciškai ekonomikoje gėrybių suteikiamas malonumas yra vertinimas gėrybių kiekių kitimo aibėje apibrėžta funkcija su realiomis reikšmėmis, vadinama naudingumo funkcija (apie ją rašoma 3.2 skyrelyje). Robinzono atveju naudingumo funkcija yra dviejų kintamųjų funkcija u, kurios argumentus žymime raidėmis l ir k. Toliau, tarkime, kad naudingumo funkcija u, apibrėžta aibėje $X := [0, L] \times [0, +\infty) \subset \mathbb{R}^2$, tenkina savybes:

- $0 \leq u(l, k) < +\infty$ kiekvienam $(l, k) \in X$;
- $u(l, k) \geq u(l', k')$, jei $l \geq l'$ ir $k \geq k'$;[7]
- aibė $\{(l, k) \in X : \ u(l, k) \geq c\}$ yra iškila ir uždara kiekvienam $c > 0$.

Vėliau matysime, kaip šiomis savybėmis naudojamasi matematiniame modelyje. Kol kas pasakysime tik tiek, kad pastarosios dvi savybės yra išpildytos, jei u yra du kartus tolydžiai diferencijuojama aibės X viduje ir bet kuriems $(l, k) \in (0, L) \times (0, +\infty)$

$$\begin{aligned} &D_1 u(l, k) > 0, \quad D_2 u(l, k) > 0, \\ &D_{11} u(l, k) < 0, \quad D_{22} u(l, k) < 0, \quad D_{12} u(l, k) > 0; \end{aligned} \tag{1.4}$$

čia ir toliau simboliai D_i ir D_{ij} žymi funkcijos u pirmosios ir antrosios eilės dalines išvestines. Funkcija u su reikšmėmis $u(l, k) := l^\alpha k^{1-\alpha}$, $(l, k) \in X$, ir $\alpha \in (0, 1)$ išpildo (1.4) sąlygas.

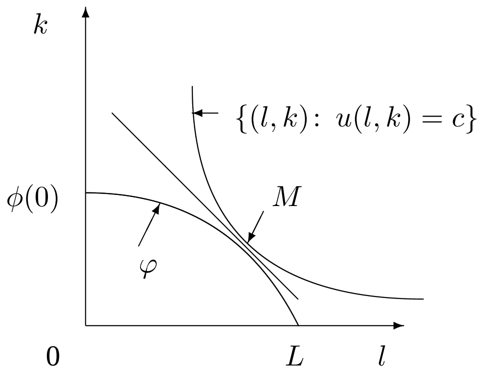
[7] Toliau naudojamas sutrumpintas šios savybės žymėjimas $(l, k) \geq (l', k')$, žr. (2.29).

Centralizuotas paskirstymas Tarkime, kad Robinzono gyvenimo kokybę saloje nusako naudingumo funkcija u – laisvalaikio trukmės l ir suvartotų riešutų kiekio k funkcija. Todėl pagrindinė matematinė problema yra paprasta – maksimizuoti funkciją u. Matysime, kad šio uždavinio sprendinys turi ekonominę interpretaciją. Kadangi, nesant gamybos – riešutų rinkimo – suvartotų riešutų kiekis būtų minimalus, gamyba saloje taip pat yra neišvengiama būtinybė. Taigi Robinzono pasirinkimas tarp laisvalaikio ir darbo trukmės yra natūralus.

Naudingumo funkcijos maksimizavimo uždaviniui spręsti centralizuotu būdu tarkime, kad
$$l + d = L \quad \text{ir} \quad k = q, \tag{1.5}$$
t. y. Robinzonas arba ilsisi, arba renka riešutus ir suvalgo visus surinktus riešutus. Iš šios prielaidos išplaukia, kad naudingumo funkcijos u argumentai l ir k išreiškiami vienu kintamuoju – darbo trukme d, nes $l = L - d$ ir $k = q = f(d)$.

Kiekvienam $d \in [0, L]$, pažymėję $g(d) := (L-d, f(d))$, gauname funkciją $g\colon\ [0, L] \to \mathbb{R}^2$. Dvi funkcijos u ir g apibrėžia naują funkciją $u \circ g$, vadinamą jų kompozicija, su reikšmėmis $(u \circ g)(d) := u(g(d))$, $d \in [0, L]$. Taigi naudingumo funkcijos u maksimizavimas, laikantis (1.1) ir (1.5) sąlygų, tampa ekvivalentus vieno argumento funkcijos $h := u \circ g$, įgyjančios reikšmes
$$h(d) := u(L - d, f(d)), \qquad d \in [0, L],$$
(besąlyginiam) maksimizavimui. Sąlygos (1.2) ir (1.4) garantuoja, jog toliau naudojami analizės faktai galioja. Pirmiausia, funkcijos $h = u \circ g$ išvestinę
$$h'(d) = \big(D_2 u \circ g\big)(d)\, f'(d) - \big(D_1 u \circ g\big)(d) \tag{1.6}$$
randame naudodami kompozicijos diferencijavimo taisyklę (2.44). Tarkime, kad lygtis $h'(d) = 0$ turi sprendinį $d^* \in (0, L)$ (1.2.1 pratimas). Jei $h''(d^*) < 0$, tai d^* yra lokalaus maksimumo taškas remiantis besąlyginio ekstremumo teorema (2.114 teorema). Tegul $(l^*, k^*) := g(d^*) = (L - d^*, f(d^*))$. Tada
$$\sup\{u(l, k)\colon\ (l, k) \in X\} = \sup\{h(d)\colon\ d \in [0, L]\} = u(l^*, k^*),$$
ir maksimizavimo uždavinys išspręstas. Iliustruosime šio uždavinio sprendinį grafiškai.

Su kiekviena skaičiaus c reikšme aibė $\{(l, k) \in X\colon\ u(l, k) = c\}$ vadinama indiferentiškumo kreive, nes šios kreivės taškuose naudingumo funkcija įgyja ta pačią reikšmę. Antra vertus, sąryšis $u(l, k) = c$ apibrėžia neišreikštinę kintamųjų l ir k funkciją. Remiantis neišreikštinės funkcijos teorema (2.117 teorema), taško M su koordinatėmis (l^*, k^*) aplinkoje egzistuoja tokia tolydžiai diferencijuojama funkcija ψ, kad $k = \psi(l)$ ir
$$\psi'(l) = -\frac{D_1 u(l, k)}{D_2 u(l, k)}.$$



1.3 . Optimalus paskirstymas centralizuotoje ekonomikoje

Parodysime, kad funkcijos φ su reikšmėmis $\varphi(l) := f(L-l)$, $l \in [0,L]$, ir funkcijos u grafikų liestinės taške M sutampa. Dar kartą panaudoję kompozicijos diferencijavimo taisyklę, turime $\varphi'(l) = -f'(d)$. Įstatę šias išraiškas į formulę (1.6) su $d = d^*$, gauname lygybes

$$\psi'(l^*) = -\frac{D_1u(l^*,k^*)}{D_2u(l^*,k^*)} = -f'(d^*) = \varphi'(l^*), \tag{1.7}$$

t. y. funkcijų φ ir u grafikų liestinės taške M su koordinatėmis (l^*, k^*) sutampa (žr. 1.3 piešinį). Efektyvus darbo paskirstymas gaunamas tame gamybos krašto taške, kuriame naudingumo funkcija įgyja didžiausią reikšmę. Tame taške gamybos krašto ir indiferentiškumo kreivės liestinės turi tą patį posvyrį (angl. slope). Ši dviejų liestinių posvyrių lygybė apibūdina optimalų paskirstymą. Ji reiškia, jog kokoso riešutų kiekis, būtinas surinkti vienam laisvalaikio vienetui (valandai), yra lygus kokoso riešutų kiekiui, kurį Robinzonas Kruzas norėtų paaukoti, kad įgytų vieną laisvalaikio vienetą (valandą).

Išvestinės (1.7) lygybės abiejose pusėse turi toliau aptariamą ekonominę interpretaciją. Tarkime, kad funkcija u su reikšmėmis $u(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_\ell) \in \mathbb{R}^\ell$, yra vartotojo naudingumo funkcija, priklausanti nuo ℓ kintamųjų, interpretuojamų kaip gėrybių kiekiai. Fiksuodami visas funkcijos u koordinates, išskyrus i-tąją bei j-tąją, ir diferencijuodami lygybę $u(x) = c$, gauname

$$D_iu(x)\,dx_i + D_ju(x)\,dx_j = 0;$$

čia dx_i ir dx_j yra atitinkamų kintamųjų pokyčiai. Taigi mažinant x_i dydžiu $dx_i < 0$ ir norint išlaikyti naudingumą nepakitusiu, būtina didinti x_j dydžiu $dx_j = RPN_{ij}(x)(-dx_i)$, kur

$$RPN_{ij}(x) := \frac{D_iu(x)}{D_ju(x)}.$$

Kitaip tariant, santykis $RPN_{ij}(x)$ yra i-tosios gėrybės kiekis, reikalingas kompensuoti vartotojui už j-tosios gėrybės kiekio vieneto atsisakymą taip, kad naudingumo funkcijos reikšmė nepakistų. $RPN_{ij}(x)$ vadinamas *ribine pakeitimo norma*[8] (angl. marginal rate of substitution).

Tuo pačiu paminėsime ir panaudosime keletą sąvokų iš gamybos teorijos, apie kurią plačiau kalbama 6.1 skyrelyje. Tarkime, kad funkcija F su reikšmėmis $F(y)$, $y = (y_1, \dots, y_\ell) \in \mathbb{R}^\ell$, yra transformacijos funkcija, t. y. gamybos procese naudojamų išteklių ir pagaminamų gėrybių kiekių sudarytų vektorių aibė yra $\{y\colon\ F(y) \leq 0\}$, o vektorius y nurodo maksimalų pagaminamų gėrybių kiekį (dėl to tas vektorius vadinamas efektyviu) tada ir tik tada, kai $F(y) = 0$. Čia ir toliau laikomasi taisyklės, kad vektoriaus y, vadinamo gamybos planu, koordinatė, atitinkanti suvartojamą gėrybę, yra neigiama, o koordinatė, atitinkanti pagaminamą gėrybę, yra teigiama. Atveju, kai pagaminama tik viena ℓ-toji gėrybė, jos kiekį pažymėkime $q := y_\ell > 0$. Tuo tarpu likusios koordinatės $i \in \{1, \dots, \ell - 1\}$ nurodo suvartojamų gėrybių kiekius, žymimus $x_i := -y_i > 0$. Tada kartu su transformacijos funkcija F yra apibrėžta vadinamoji gamybos funkcija f su reikšmėmis $f(x)$, $x = (x_1, \dots, x_{\ell-1})$ ir tokia, kad $F(y) = q - f(x)$. Jei transformacijos funkcija F yra diferencijuojama ir y yra efektyvus gėrybių rinkinys, tai bet kuriems skirtingiems $i, j \in \{1, \dots, \ell\}$ dalinių išvestinių santykis

$$RKN_{ij}(y) := \frac{D_i F(y)}{D_j F(y)}$$

vadinamas *ribine keitimo norma* (angl. marginal rate of transformation). Samprotaudami kaip ir vartojimo atveju, galime teigti, jog ši norma nurodo, kiek i-tosios gėrybės mažinimas vienetu padidina j-osios gėrybės kiekį, išlaikant efektyvų gamybos būdą.

Pritaikysime šias sąvokas centralizuotam paskirstymui apibūdinti. Robinzono gamyboje vartojama gėrybė yra darbas, o pagaminama gėrybė yra kokoso riešutai. Kadangi darbas ir laisvalaikis yra susiję sąryšiu $l + d = L$, o naudingumas u yra suvartojamų–pagaminamų kokoso riešutų kiekio $k = q$ ir laisvalaikio l funkcija, tai transformacijos funkcija F priklauso nuo l ir q. Taigi mūsų atveju transformacijos funkcija $F(y) = q - f(L - l) = q - \varphi(l)$, $y = (l, q)$, ir ribinė pakeitimo norma gamybai yra

$$RKN_{12}(y) = -\varphi'(l) = f'(d).$$

Tuo tarpu ribinė pakeitimo norma vartojimui nagrinėjamu atveju yra

$$RPN_{12}(x) = \frac{D_1 u(l, k)}{D_2 u(l, k)}, \quad x = (l, k).$$

Taigi remiantis (1.7), lygybė $RPN_{12}(M) = RKN_{12}(M)$ apibūdina optimalų paskirstymą Robinzono ekonomikoje.

Labai dažnai lygybė tarp ribinės pakeitimo normos vartotojams ir ribinės pakeitimo normos gamintojams yra ekonominės veiklos optimalumo kriterijus. Tačiau vadovėlyje ši ekonominės analizės kryptis toliau nenagrinėjama.

[8] Kai kuriuose tekstuose ribine pakeitimo norma vadinamas $-RPN_{ij}(x)$, kuris atveju $\ell = 2$ yra naudingumo funkcijos liestinės taške x posvyris. Neretai šis ženklo skirtumas tarp išvestinių santykio ir liestinės posvyrio tiesiog ignoruojamas.

Decentralizuotas paskirstymas Šioje skyrelio dalyje nagrinėsime Robinzono ekonominę veiklą šiek tiek dirbtinai padalijęs ją į dvi rinkas ir įvedę gėrybių kainas. Tai yra svarbus pavyzdys, iliustruojantis ir padedantis suprasti toliau detaliai nagrinėjamą kainos kitimo mechanizmą valstybės ekonomikoje. Be to, matysime, kad šis, decentralizuotu vadinamas, išteklių paskirstymas ir ką tik nagrinėtas paskirstymas centralizuotu būdu – sutampa.

Kokoso riešutų rinkimą laikysime gamybine veikla firmos, kuri samdo darbo jėgą (Robinzoną) ir parduoda surinktus riešutus. Firmos pelnas atitenka jos savininkui, irgi Robinzonui. Robinzono, kaip namų ūkio šeimininko, pajamas sudaro atlygis už parduotą firmai darbo jėgą ir iš tos firmos gaunamas pelnas. Taigi turime dvi rinkas: darbo jėgos ir kokoso riešutų. Samdomąją darbo jėgą, išreikštą darbo valandomis, žymėsime d, o surinktų riešutų kiekį – q. Naudojant anksčiau įvestą gamybos teorijos terminologiją, šių kiekių sudarytas gamybos planas yra $y = (-d, q)$, ir juos sieja gamybos funkcija f, t. y. galioja (1.1). Greta šių gėrybių, tiesiogiai su jomis susiję yra Robinzono laisvalaikio kiekis l, kuriam galioja (1.3) sąryšis, ir Robinzono suvartojamų riešutų kiekis k, nebūtinai lygus surinktų riešutų kiekiui q. Kaip ir anksčiau, Robinzono pasirinkimą laisvalaikio ir vartojimo atžvilgiu apibūdina naudingumo funkcija u su reikšmėmis $u(l, k)$, $(l, k) \in X = [0, L] \times [0, +\infty)$.

Šią ekonominę schemą papildysime kaina. Tarkime, kad vienos darbo valandos kaina yra $p_1 > 0$, o vieno kokoso riešuto kaina yra $p_2 > 0$. Įkainotas gėrybes dažnai vadinsime prekėmis. Taigi gamybos planą sudarančių prekių rinkinio $y = (-d, q)$ atitinkama kainų sistema yra vektorius $p = (p_1, p_2)$. Visa prekių rinkinio kaina išreiškiama vektorių skaliarine sandauga $p{\cdot}y = -p_1 d + p_2 q$. Kadangi $q = f(d)$, firmos pajamas išreiškianti lygybė $p{\cdot}y = p_2 f(d) - p_1 d$ rodo, kad jos priklauso tik nuo d ir p. Esant duotai kainų sistemai p, firma siekia gauti maksimalų pelną, t. y. rasti tokį $d^* \in [0, L]$, kad

$$\pi(p) := \sup_{d \in [0,L]} \{p_2 f(d) - p_1 d\} = p_2 f(d^*) - p_1 d^*.$$

Tarkime, kad toks d^* egzistuoja intervale $(0, L)$. Remiantis besąlyginio ekstremumo būtina sąlyga (2.83 lema) funkcijai $d \mapsto p_2 f(d) - p_1 d$, $d \in (0, L)$, galioja lygybė

$$f'(d^*) = p_1/p_2. \tag{1.8}$$

Šie matematiniai samprotavimai apibūdina Robinzono gamybinę veiklą.

Nagrinėjant vartojimą, Robinzono namų ūkio išlaidos negali viršyti turimo biudžeto, kurį riboją iš firmos gaunamas pelnas $\pi = \pi(p)$ ir pajamos $p_1 L$, gaunamos pardavus visą turimą darbo jėgą. Šią sumą žymėsime

$$w = w(p) := p{\cdot}e + \pi(p), \qquad \text{ir} \qquad e := (L, 0).$$

Vektorius e vadinamas rinkos *pradiniu įnašu* ir nurodo tas rinkoje esančius gėrybių išteklius, kurie nėra pagaminami, bet gali būti vartojami. Robinzono vartojimo planą sudaro prekių vektorius $x = (l, k) \in X$, kurio kaina $p{\cdot}x = p_1 l + p_2 k$ ne didesnė už w; čia tariama, kad laisvalaikio valandos kaina yra lygi vienos darbo valandos kainai. Tokie prekių rinkiniai sudaro vadinamąją biudžeto aibę $B = B(p, w)$, t. y.

$$B(p, w) := \{x \in X\colon\ p{\cdot}x \le w\} = \{(l, k) \in X\colon\ p_2 k \le p_1(L - l) + \pi(p)\}.$$

Robinzonas, kaip namų ūkio šeimininkas, siekia maksimizuoti savąją naudingumo funkciją nepažeisdamas biudžeto rėžio w. Kitaip tariant, Robinzono uždavinys yra pasirinkti tokią prekių porą $(l^*, k^*) \in B$, kad

$$\sup\{u(l, k)\colon\ (l, k) \in B\} = u(l^*, k^*). \tag{1.9}$$

Naudingumo funkcija u maksimumą dažniausiai įgyja ant biudžeto krašto, t. y.

$$p_1 l^* + p_2 k^* = w. \tag{1.10}$$

Įrodysime, kad ši savybė galioja, kai vartotojas yra godus.

Sakoma (žr. 3.6 apibrėžimą), jog vartotojo pasirinkimas yra *lokaliai nepasotinamas*, jei su bet kuriuo gėrybių rinkiniu $\bar{x} \in \mathbb{R}^\ell$ ir skaičiumi $\epsilon > 0$ egzistuoja toks gėrybių rinkinys $x \in \mathbb{R}^\ell$, kad $u(x) > u(\bar{x})$ ir $|\bar{x} - x| < \epsilon$; čia $|z|$ žymi z vektoriaus atstumą iki nulio euklidinėje erdvėje $\mathbb{R}^\ell$. Ši vartotojo naudingumo funkcijos u savybė reiškia, jog galima padidinti vartotojo pasitenkimą vos vos pakeitus turimą gėrybių kiekį. Tarus, kad naudingumo funkcijos maksimumas pasiekiamas taške $x^* \in B$ ir $p{\cdot}x^* < w$, t. y. vidiniame biudžeto aibės taške, galima rasti tokį $\epsilon > 0$, kad $p{\cdot}x < w$ visiems x, kuriems $|x^* - x| < \epsilon$ (1.2.2 pratimas). Jei taip, tai remiantis lokaliojo nepasotinamumo savybe, gauname prieštaravimą tam, kad x^* yra u maksimumo taškas tarp visų $x \in B(p, w)$ ir todėl (1.10) privalo galioti vektoriui $x^* = (l^*, k^*)$.

Taigi galiojant (1.10), namų ūkio problemai išspręsti reikia pasirinkti tokį k, kuris maksimizuotų funkciją h su reikšmėmis

$$h(k) := u((w - p_2 k)/p_1, k) = (u{\circ}g)(k);$$

čia funkcijos g reikšmės yra $g(k) := ((w - p_2 k)/p_1, k)$. Tarkime, kad egzistuoja funkcijos h maksimumas taške $k^* > 0$. Tada jam galioja lygybės

$$0 = h'(k^*) = -\frac{p_2}{p_1}\big(D_1 u{\circ}g\big)(k^*) + \big(D_2 u{\circ}g\big)(k^*),$$

iš kurių pirmoji gaunama remiantis būtina ekstremumo egzistavimo sąlyga (2.83 lema), o antroji – naudojantis kompozicijos diferencijavimo taisykle (2.44), kaip ir (1.6) lygybėje. Iš čia, pažymėjus $l^* := w - p_2 k^*/p_1$, išplaukia sąlyga:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\big(D_1 u{\circ}g\big)(k^*)}{\big(D_2 u{\circ}g\big)(k^*)} = \frac{D_1 u(l^*, k^*)}{D_2 u(l^*, k^*)}. \tag{1.11}$$

Taigi namų ūkis, laikydamas kainą p ir pelną $\pi(p)$ duotais, randa sau optimalų laisvalaikio ir riešutų vartojimą (l^*, k^*), kuris išsprendžia Robinzono uždavinį (1.9). Sąryšiai (1.11), (1.8) ir (1.7) rodo, kad decentralizuotu paskirstymu gautas optimalus sprendinys (l^*, k^*) sutampa su centralizuoto paskirstymo sprendiniu.

Dabar įvertinkime visuminę pasiūlą ir paklausą Robinzono Kruzo ekonomikoje, kurią sudaro darbo ir riešutų rinkos. Tegul $y = (-d, q)$ yra Robinzono pasirinktas gamybos planas, nusakantis jo firmos pelną ir taip apibrėžiantis optimalų Robinzono vartojimo planą $x = (l, k)$. Prisiminus pradinį įnašą $e = (L, 0)$, Robinzono ekonomikos *visuminė perteklinė paklausa*, arba trumpai VPP, yra prekių vektorius

$$Z := x - y - e = (l + d - L, k - q).$$

Jis gaunamas vadovaujantis principu – visų vartojamų prekių kiekiai yra su pliuso ženklu, o visų pagaminamų arba jau esamų prekių kiekiai yra su minuso ženklu. VPP Z išreiškiama per atskirų rinkų paklausą D ir pasiūlą S. Paklausos vektorių D sudaro darbo ir riešutų rinkų paklausos (d, k), o pasiūlos vektorių S sudaro atitinkama abiejų rinkų pasiūla $(L - l, q)$. Taigi šiuo atveju $Z = D - S$.

Dabar jau esame pasiruošę suformuluoti bendrąją pusiausvyrą Robinzono ekonomikos atveju.

1.1 apibrėžimas. *Tegul $x^* = (l^*, k^*)$ yra Robinzono vartojimo planas, $y^* = (-d^*, q^*)$ yra Robinzono gamybos planas ir $p^* = (p_1^*, p_2^*)$ yra kainų sistema. Rinkinys (x^*, y^*, p^*) yra Robinzono ekonomikos pusiausvyra, jei*

(a) *y^* maksimizuoja Robinzono pelną $\pi(p^*) = p_2^* q^* - p_1^* d^*$, kai $q^* = f(d^*)$;*

(b) *x^* maksimizuoja Robinzono naudingumą, neperžengdama biudžeto rėžio $p_1^* l^* + p_2^* k^* \leq p_1^* L + \pi(p^*)$;*

(c) *visuminė perteklinė paklausa $Z = 0$, t. y. $k^* = q^*$ ir $l^* + d^* = L$.*

Šiame pusiausvyros apibrėžime kaina atlieka ypatingą vaidmenį. Beveik nepriklausomi vienas nuo kito gamybinės veiklos ir vartotojo pasirinkimo optimizavimo procesai vyksta esant duotai kainai, t. y. kaina yra egzogeninis kintamasis. Esant fiksuotoms gamybos technologijai f ir naudingumo funkcijai u, abiejų rinkų optimalūs sprendimai gali keistis kintant kainai, t. y. kaina lyg ir valdo rinką. Kalbant apie pusiausvyrą, pagrindinis yra klausimas – ar egzistuoja tokia gamybą ir vartojimą optimizuojanti kainų sistema, kurios sukuriama pasiūla ir paklausa yra suderintos. Tokia prekių kainų sistema vadinama *pusiausvyrine kaina*.

Ar pusiausvyrinė kaina, jei ji egzistuoja, yra vienintelė? Remiantis (1.8) ir (1.11), jei pusiausvyra egzistuoja, tai kainų sitema $p = (p_1, p_2)$ privalo tenkinti sąlygą

$$\frac{D_1 u(l^*, k^*)}{D_2 u(l^*, k^*)} = \frac{p_1}{p_2} = f'(d^*). \tag{1.12}$$

Tačiau ši sąlyga neapibrėžia kainų vienareikšmiškai. Jei (1.12) galioja kainų sistemai $p = (p_1, p_2)$, tai ši sąlyga taip pat galioja kainų sistemai $\lambda p = (\lambda p_1, \lambda p_2)$ su bet kuriuo $\lambda > 0$.

O kas darosi su gamybos ir vartojimo optimizavimu, kai kainų sistema $p = (p_1, p_2)$ yra keičiama λp? Nesunku įsitikinti, kad $\pi(\lambda p) = \lambda\pi(p)$, t. y. pelno funkcija π yra pirmosios eilės teigiamai homogeniška funkcija. Tačiau abi kainų sistemas atitinkantis ir pelną maksimizuojantis sprendinys d^* yra tas pats. Taip pat nesunku matyti, kad $B(\lambda p, w) = B(p, w)$, t. y. tai, kas toliau vadinama atitiktimi, būtent $p \mapsto B(p, w)$, yra nulinės eilės teigiamai homogeniška. Kitaip tariant, kainų sistemai p keičiantis daugikliu λ, biudžeto aibė $B(p, w)$ nesikeičia, ir todėl nesikeičia naudingumo funkcijos u optimizavimo sprendinys (l^*, k^*). Išvada: jei p yra pusiausvyrinė kaina, tai tokia yra ir λp kiekvienam $\lambda > 0$.

Kitas klausimas – kokios VPP savybės užtikrina pusiausvyros sąlygą (c), t. y. kada visuminė perteklinė paklausa $Z = 0$. Nagrinėjant šį klausimą verta pastebėti, jog galiojant (1.10) teisingas vadinamasis *Walraso*[9] dėsnis: su kiekviena kainų sistema $p > 0$,

$$p \cdot Z = 0. \tag{1.13}$$

Iš tikro, su bet kuriuo $p = (p_1, p_2) > 0$, $\pi(p) = p_2 q^* - p_1 d^*$ ir $w = e \cdot p + \pi(p)$, iš (1.10), gauname

$$p_1(l^* + d^* - L) + p_2(k^* - q^*) = 0,$$

t. y. galioja (1.13). Remiantis *Walraso* dėsniu, $Z = 0$ jei arba $l^* + d^* - L = 0$, arba $k^* - q^* = 0$. Bet kurią iš šių dviejų lygybių galima įrodyti esant jau nagrinėtų pasiūlos ir paklausos dėsnių išvada. Įrodysime, pavyzdžiui, lygybę $q^* = k^*$.

Tarkime, kad kaina p_2 kinta intervale $[0, c]$ su kuriuo nors $c > 0$, k ir q yra tolydžios p_2 argumento funkcijos, $k(0) - q(0) > 0$ ir $k(c) - q(c) < 0$. Šias matematines sąlygas išpildo bet kurie tipiški, anksčiau nagrinėti paklausos $k \equiv D$ ir pasiūlos $q \equiv S$ sąryšiai. Intervale $[0, c]$ apibrėžkime naują funkciją g su reikšmėmis $g(t) := k(t) - q(t)$, $t \in [0, c]$. Tada g yra tolydi, $g(0) > 0$ ir $g(c) < 0$, o tai reiškia, kad g funkcija išpildo *Bolzano*[10] teoremos prielaidas (žr. 4.2 teoremą). Remiantis šia teorema, egzistuoja toks $t \in (0, c)$, kad $g(t) = 0$, o tai reiškia, jog egzistuoja tokia kaina $p_2^* \in (0, c)$, kad $k^* := k(p_2^*) = q(p_2^*) =: q^*$.

Robinzono Kruzo atveju lygybės $k = q$ klausimas nekyla. Natūralu, jog Robinzonas nusiskina tiek kokoso riešutų, kiek jam reikia prasimaitinti. Tačiau *Bolzano* teoremos taikymas iliustruoja toliau nagrinėjamą abstrakčiąją konkurencinę rinką. Tuo atveju remsimės *Bolzano* teoremos apibendrinimu – *Brouwer*io[11] nejudamojo taško teorema.

Pratimai.

1. Tegul $L > 0$, $u(l, k) = l^\alpha k^{1-\alpha}$, $(l, k) \in [0, L] \times \mathbb{R}_+$, $f(d) = d^\beta$, $d \in [0, L]$, ir $h(d) = u(L - d, f(d))$. Kokiems α ir β funkcija h įgyja maksimumą taške $d^* \in (0, L)$? Rasti jį.

[9] Léon Walras – Leonas Valrasas (1834–1910), prancūzų ekonomistas.

[10] Bernard Bolzano – Bernardas Bolcanas (1781–1848), čekų matematikas ir teologas.

[11] Luitzen Egbertus Jan Brouwer – Janas Braueris (1881–1966), olandų matematikas ir filosofas.

2. Tegul $p, z \in \mathbb{R}^\ell$, $w > 0$ ir $p{\cdot}z < w$. Rasti tokį $\epsilon > 0$, kad $p{\cdot}x < w$, jei $|x - z| < \epsilon$.

3. Tarkime, kad Robinzono kokoso riešutų rinkimo gamybos funkcija yra $f(d) = 12\sqrt{a + d}$, $a \geq 0$, ir jo naudingumo funkcija yra $u(l, k) = 18 \ln k + l$. Rasti Robinzono ekonomikos pusiausvyrą ir nubrėžti kokoso riešutų rinkos paklausos ir pasiūlos sąryšių grafiką.

4. Tarkime, kad Robinzono kokoso riešutų rinkimo gamybos funkcija yra $f(d) = \sqrt{d}$, o jo naudingumo funkcija yra $u(l, k) = (24 - L + l)k$, $L > 0$. Rasti Robinzono ekonomikos pusiausvyrą.

5. Tegul $\alpha \in (0, 1)$ ir $u(x) = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+$. Rasti funkcijos u ribinę pakeitimo normą tarp dviejų gėrybių.

1.3 Arrow–Debreu ekonomika

Kaip minėta, mūsų tikslas yra išsiaškinti vieną iš pagrindinių bendrosios pusiausvyros modelių, vadinamą *Arrow*[12]*–Debreu*[13] ekonomika. Šiame skyrelyje modelis apibūdinamas pilnai, bet glaustai. Išsamiai jis nagrinėjimas tolesniuose vadovėlio skyriuose.

Pagal veiklos pobūdį ekonomikos subjektai yra dviejų rūšių: vartotojai ir gamintojai. Šie veiklos būdai yra susiję su skirtingais ekonominės veiklos šaltiniais: prekių vartojimu ir jų gamyba. Tačiau svarbiausia bet kurioje ekonomikoje yra pačios prekės, kurios yra ekonominės veiklos priemonė ir tikslas. Prekių kaina yra rodiklis, kuris nurodo prekių stygiaus laipsnį.

> *Šio rodiklio – kainos – susidarymo mechanizmas ir yra grindžiamas pusiausvyra.*

BP teorijos pagrindinės sąvokos yra *pusiausvyra*, *prekės* ir *kaina*. Pradėsime nuo pastarųjų dviejų.

Prekės ir kainos Preke (angl. commodity) vadinama tokia gėrybė, kurią galima pirkti ar parduoti, o jos vienetai yra lygiaverčiai. Toliau nagrinėjama prekių rinka turi baigtinį skaičių ℓ skirtingų prekių, sunumeruotų indeksais iš aibės $I = \{1, \ldots, \ell\}$. Paprastumo dėlei prekė yra tapatinama su vienu iš indeksų $h \in I$. Kiekvieną prekę, t. y. indeksą, atitinka du realieji skaičiai.

Vienas iš dviejų h-tąją prekę atitinkančių skaičių $x_h \in \mathbb{R}$ žymi prekės kiekį. Toks susitarimas reiškia, jog prekių kiekiai gali būti trupmeniniai skaičiai. Ši prielaida yra prasminga, kai fizinė gėrybė yra daloma, arba kai preke yra paslauga vertinama laiko

[12]Kenneth J. Arrow – Kenetas Erou (1921), amerikiečių ekonomistas, Nobelio premijos laureatas ekonomikos srityje.

[13]Gerard Debreu – Žeraras Debriù (1921–2004), amerikiečių matematikas ir ekonomistas Prancūzijoje gimęs, Nobelio premijos laureatas ekonomikos srityje.

trukme. Dėl prekės kiekio ženklo interpretavimo galima tarti, kad ekonomikos subjektui (vartotojui) teigiamas skaičius x_h reiškia jo įsigyjamos prekės kiekį, o neigiamas skaičius x_h reiškia tokios prekės perdavimą kitam rinkos subjektui. Pavyzdžiui, $x_1 = 2$ gali reikšti įsigijimą dviejų kilogramų grybų, $x_2 = -4$ – keturių valandų matematikos paskaitų skaitymą dėstytojui, o $x_2 = 4$ – šios paskaitos klausymo studentui. Vektorius $x = (x_1, \dots, x_\ell) \in \mathbb{R}^\ell$, kurio kiekviena koordinatė yra prekės kiekis, vadinama *prekių rinkiniu* arba *vartojimo planu*. Visa prekių rinkinių aibė X yra euklidinės erdvės $\mathbb{R}^\ell$ aibė, vadinama *vartojimo aibe*. Sutrumpintai prekių rinkinys $x = (x_1, \dots, x_\ell)$ žymimas (x_h); čia ir toliau $h \in I$. Taigi prekių rinkinio $x = (x_h)$ koordinatė x_h yra teigiama, jei vartotojas įsigyja h-tosios prekės x_h vienetų, ir neigiama, jei vartotojas atiduoda atitinkamą kiekį prekių.

Antras realusis skaičius, atitinkantis prekę, yra jos vieneto kaina. Prekės *kaina* yra dydis, kurį reikia mokėti įsigyjant vieną kurios nors prekės vienetą. Kiekvienam $h \in I$, h-tosios prekės vienetui yra priskiriamas realusis skaičius p_h, vadinamas jo kaina. Tokiu būdu indeksų aibę I atitinka vektorius $p = (p_1, \dots, p_\ell) = (p_h) \in \mathbb{R}^\ell$, vadinamas *kainų sistema*. Prekių rinkinio $x = (x_h) \in X \subset \mathbb{R}^\ell$ su atitinkama kainų sistema $p = (p_h)$ kaina yra dydis

$$p{\cdot}x = \sum_{h=1}^{\ell} p_h x_h, \tag{1.14}$$

vadinamas vektorių p ir x skaliarine sandauga. Visų kainų sistemas sudarančių vektorių $p = (p_h)$ aibę žymėsime $P \subset \mathbb{R}^\ell$. Priklausomai nuo to, ar $p_h \in \mathbb{R}$ yra teigiama, nulis ar neigiama, tarsime, kad h-toji prekė yra atitinkamai reta, neribota ar kenksminga.

Remiantis šiais prekės ir pinigų apibrėžimais, ekonomikos subjekto *sprendimas* yra prekių rinkinio x pasirinkimas vartojimo aibėje $X \subset \mathbb{R}^\ell$. Tokio sprendimo pasirinkimo kaina priklauso nuo kainų sistemos $p \in P \subset \mathbb{R}^\ell$ ir yra lygi skaliarinei sandaugai $p{\cdot}x$. Ekonominėje pinigų teorijoje pinigai laikomi tarpine preke, tačiau mūsų tolesniame nagrinėjime pinigai nėra laikomi preke. Kaina yra matas to, už kiek ją galima įsigyti. Kaina nėra prekės vidinė savybė, bet priklauso nuo išorinių aplinkybių – technologijos lygmens, vietos, laiko ir panašiai.

Toliau kalbant apie ekonomikos subjektus, jie skiriami į dvi kategorijas: *gamintojai* ir *vartotojai*. Formaliai abi subjektų kategorijos skiriasi pagal toliau aptariamus prekių pasirinkimo apribojimus ir pasirinkimo kriterijus. Neformaliai gamintojus ir vartotojus galima skirti pagal jų veiklos tikslus.

Vartojimas ir vartotojai Vartotojas yra ekonomikos subjektas, kuris renkasi prekes iš vartojimo aibės $X \subset \mathbb{R}^\ell$, siekdamas maksimizuoti savo naudą. Toliau tariama, kad vartojimo aibė X išpildo tam tikras sąlygas. Kaip taisyklė, tokios sąlygos atsiranda dėl matematinio įrodymo reikalavimų. Pavyzdžiui, mes tarsime, kad aibė X yra *iškila*, t. y. jei $x, y \in X$, tai $\lambda x + (1-\lambda)y \in X$ bet kuriam $\lambda \in (0,1)$. Dažniausiai tokias sąlygas galima interpretuoti ir ekonomiškai. Nagrinėjant vartotojo pasirinkimo mechanizmą galima nekreipti dėmesio į tai, kad rinkoje renkamasi tarp prekių. Kitaip tariant, bet kuris prekių rinkinys, išreiškiamas vektoriumi $x = (x_h) \in X$, yra alternatyva vartotojui. Vadovėlio 3 skyriuje prekių pasirinkimas nagrinėjamas kaip pasirinkimas tarp bet kokių alternatyvų, o ne būtinai euklidinės erdvės aibė X tuo atveju vadinama alternatyvų aibe.

Kita svarbi vartotojo charakteristika yra prekių ar alternatyvų pasirinkimo kriterijus. Šiuolaikinėje ekonomikoje pasirinkimo kriterijumi laikomas aibės X binarusis sąryšis $\succeq$, vadinamas *preferencija*. Atskiru atveju preferencija gaunama naudojant *naudingumo funkciją*, apibrėžtą aibėje X. Mes sakome, kad preferencija yra *racionali*, kai aibės X binarusis sąryšis yra pilnas ir tranzityvus. Porą $(X, \succeq)$, sudarytą iš vartojimo aibės X ir racionalios preferencijos $\succeq$, vadiname *gėrybių lauku*, arba alternatyvų lauku. Nagrinėjant pusiausvyros egzistavimo sąlygas, taip apibrėžiamas vartotojų pasirinkimas yra laikomas žinomu, o preferencija duota. Klausimas, kaip nustatyti preferenciją pagal pasirinkimo rezultatus, nagrinėjamas 3.4 skyrelyje.

Tarkime, kad mūsų nagrinėjamoje ekonomikoje yra n vartotojų; kiekvieną iš jų žymėsime indeksu $i \in \{1, \dots, n\} =: V$. Kiekvieno vartotojo alternatyvų aibė ir preferencija gali skirtis. Todėl i-tojo vartotojo alternatyvų aibę žymėsime X_i, o jo preferenciją aibėje X_i žymėsime $\succeq_i$. Toliau, tarkime, kad i-tasis vartotojas turi pradinį turtą, sudarytą iš pradinio įnašo $e_i = (e_{i1}, \dots, e_{i\ell}) \in X_i$ ir dalies rinkos gamintojų pelno, kurį apibrėšime šiek tiek vėliau. Visų vartotojų įnašų suma $e := e_1 + \dots + e_n$ vadinama ekonomikos *ištekliais*. Tegul w_i yra i-tojo vartotojo pradinio turto kaina, o $p \in P$ yra kainų sistema. Tada vartotojo pasirinkimo ribojimas yra išreiškiamas sąlyga: prekių rinkinys $x \in X_i$ yra leistinas, jei jo kaina $p{\cdot}x \le w_i$. Visų tokių prekių $x \in X_i$ aibė $B_i(p, w_i)$ toliau vadinama *biudžeto aibe*, t. y.

$$B_i(p, w_i) := \{x \in X_i \colon\ p{\cdot}x \le w_i\}, \quad i \in V. \tag{1.15}$$

Taigi i-tojo vartotojo tikslas, esant duotam (p, w_i), – rasti tokį $x_i^* \in B_i(p, w_i)$, vadinamą optimalaus pasirinkimo rinkiniu, kad $x_i^* \succeq_i z$ kiekvienam $z \in B_i(p, w_i)$. Tokio rinkinio gali ir nebūti, arba jų gali būti daugiau negu vienas. Klausimas, kokiomis aplinkybėmis galima optimaliai pasirinkti, vadinamas vartotojo optimalaus pasirinkimo problema, ir jis detaliai nagrinėjamas 5.1 skyrelyje.

Kalbant apie interpretacijas, paminėsime, jog vartotoju gali būti individas, namų ūkis ar kita bendrų interesų vienijama grupė. Vartotojas numato savo vartojimo planą, arba trumpiau – vartojimą, sudarytą iš prekių rinkinių. Šis pasirinkimas yra ribotas dėl galimo vartojimo aibės fizinio ribotumo, dėl kainos nulemiamo rinkos ribojimo ir dėl asmeninio biudžeto ribotumo. Vartotojų tikslas yra maksimalios naudos siekis turimomis sąlygomis (nulis valandų darbo ir tona aukso yra nerealus siekis). Ekonomikos subjektų „godumas“ yra jų aktyvumo šaltinis, kuris ir sudaro ekonomikos teorijos, vadinamos neoklasikine, vieną iš fundamentalių prielaidų: vartotojų *begalinį egoizmą*.

Gamyba ir gamintojai Gamintojas yra ekonomikos subjektas, kuris renkasi iš gamybos planų, siekdamas maksimizuoti savo pelną. *Gamybos planu* vadinamas vektorius

$y = (y_1, \ldots, y_\ell) = (y_h) \in \mathbb{R}^\ell$, kurį sudaro gamybos ištekliams skirtų gėrybių ir pagaminamų gėrybių kiekiai. Tam, kad jas galėtume atskirti, ištekliams skirtų gėrybių kiekis yra neteigiamas skaičius, o pagaminamų gėrybių kiekis yra neneigiamas skaičius. Šiame vadovėlyje gamybos plano pirmosios koordinatės atitinka išteklius, o likusios koordinatės – produktą. Aibę gamybos planų riboja technologijos ir ištekliai. Toliau visų įmanomų gamybos planų aibę žymėsime $Y \subset \mathbb{R}^\ell$ ir vadinsime *gamybos aibe*. Kaip ir vartojimo atveju, gamybos aibė išpildo tam tikras sąlygas.

Tarkime, kad mūsų nagrinėjamoje ekonomikoje yra m gamintojų; kiekvieną iš jų žymėsime indeksu $j \in \{1, \ldots, m\} =: G$. Vėlgi, kiekvienam gamintojui j gamybos aibė Y_j gali būti skirtinga. Gamintojo pasirinkimo iš skirtingų gamybos planų kriterijų sudaro pelno maksimizavimo tikslas, t. y. pasirenkamas toks gamybos planas, kuris maksimizuoja pelną. Esant duotai kainų sistemai $p = (p_h) \in \mathbb{R}^\ell$, gamybos pelnas, atitinkantis gamybos planą $y = (y_h) \in Y_j$, yra vektorių p ir y skaliarinė sandauga

$$p \cdot y = \sum_{h=1}^{\ell} p_h y_h.$$

Gamintojo tikslas – maksimizuoti pelną esant duotai kainų sistemai p, t. y. rasti tokį gamybos planą $y_j^* \in Y_j$, vadinamą pelną maksimizuojančiu gamybos planu, kad

$$p \cdot y_j^* = \sup\{p \cdot y\colon\ y \in Y_j\} =: \pi_j(p). \tag{1.16}$$

Dydis $\pi_j(p) = p \cdot y_j^*$ yra j-tojo gamintojo maksimalus pelnas, atitinkantis kainų sistemą $p \in \mathbb{R}^\ell$. Vėlgi klausimas, ar pelną maksimizuojantis gamybos planas egzistuoja, vadinamas pelno maksimizavimo problema ir detaliai nagrinėjamas 6.1 skyrelyje.

Kalbant apie gamybos ir gamintojų statinio modelio prielaidas, iš esmės tariama, kad gamintojai sugeba ruošti pilną gamybos planą, numatomą visai ateičiai. Tai reiškia, kad ateities planai ir pasekmės yra žinomi *dabar*. Be kita ko, gamintojai nusprendžia, kokios, kiek ir pagal kokią technologiją bus gaminamos prekės. Taigi ekonomikos subjektų tyrimo prielaida yra „neriboto numatymo“ galimybė. Kitaip kalbant, ši ekonomikos subjektų dalis pasižymi absoliučia ir neribota toliaregiškumo savybe.

Arrow–Debreu ekonomika Apibendrinant tai, kas iki šiol jau apibrėžta, nagrinėjamą ekonomiką sudaro:

• n vartotojų, žymimų indeksais $i \in \{1, \ldots, n\} = V$, ir m gamintojų, žymimų indeksais $j \in \{1, \ldots, m\} = G$. Taigi iš viso ekonomikoje yra $m + n$ subjektų.

• Kiekvienas vartotojas $i \in V$ turi savo vartojimo aibę $X_i \subset \mathbb{R}^\ell$ ir aibėje X_i apibrėžtą savo racionalią preferenciją $\succeq_i$.

• Kiekvienas vartotojas $i \in V$ turi pradinį įnašą $e_i = (e_{i1}, \ldots, e_{i\ell}) \in X_i \subset \mathbb{R}^\ell$, o tų įnašų suma $e = e_1 + \cdots + e_n$ sudaro ekonomikos išteklius.

• Kiekvienas gamintojas $j \in G$ turi savo gamybinę aibę $Y_j \subset \mathbb{R}^\ell$, ribojančią jo technologinius pasirinkimus.

Taip apibrėžtą ekonomiką vadiname *Arrow–Debreu* ekonomika. Trumpiau kalbant, *Arrow–Debreu* ekonomika yra rinkinys $\mathcal{E} := (X_i, \succeq_i, Y_j, e_i)$.

Greta to, ką jau turime, papildomai apibrėšime ryšius tarp vartotojų ir gamintojų, kuriuos interpretuodami vadinsime ekonomika su privačiąja nuosavybe. Priminsime, kad kiekvieno vartotojo pasirinkimą riboja biudžeto aibė (1.15), kurioje w_i yra i-tojo vartotojo pradinis turtas. Kaip buvo minėta, w_i sudaro pradiniai įnašai $e_i \in X_i$ ir dalis gamintojų pelno. Dabar galime tiksliai apibrėžti kiekvieno vartotojo gaunamą gamintojų pelno dalį. Kiekvienam $j \in G$ ir $p \in P \subset \mathbb{R}^\ell$, j-tojo gamintojo gauto pelno $\pi_j(p)$ dalis, atitenkanti i-tajam vartotojui, nusakoma skaičiumi $\theta_{ij} \in [0, 1]$, ir i-tajam vartotojui atitenkanti j-tojo gamintojo pelno dalis yra $\theta_{ij}\pi_j(p)$. Laikysime, kad vartotojai pasidalija visą pelną, t. y. $\sum_{i \in V} \theta_{ij} = 1$ kiekvienam $j \in G$.

Tarkime, kad $p \in P \subset \mathbb{R}^\ell$ yra kainų sistema, o $\pi_j(p)$ yra atitinkamas j-tojo gamintojo pelnas (1.16). Tada kiekvienam $i \in V$, i-tojo vartotojo pradinis turtas yra

$$w_i = w_i(p) := p \cdot e_i + \sum_{j \in G} \theta_{ij}\pi_j(p) \in \mathbb{R}. \tag{1.17}$$

Žinant pradinį turtą w_i ir kainų sistemą $p \in \mathbb{R}^\ell$, i-tojo vartotojo biudžeto aibė $B_i(p, w_i)$ apibrėžta lygybe (1.15). Vartotojo turtas priklauso nuo gamintojo pelno ir šia prasme vartotojo pasirinkimą daro priklausomą nuo gamintojo rezultatų. *Arrow–Debreu* ekonomika $\mathcal{E}$, kurioje vartotojus ir gamintojus sieja (1.17) sąryšis, vadinama *privačiosios nuosavybės ekonomika*. Trumpiau kalbant, *Arrow–Debreu* ekonomika su privačiąja nuosavybe yra rinkinys

$$\mathcal{PNE} := (X_i, \succeq_i, Y_j, e_i, \theta_{ij}, P). \tag{1.18}$$

Arrow–Debreu ekonomikos pusiausvyra Sakykime, kad $\mathcal{PNE}$ yra *Arrow–Debreu* ekonomika su privačiąja nuosavybe, apibrėžta (1.18) rinkiniu. Tegul $x_i = (x_{ih}) \in X_i$, $i \in V$, ir $y_j = (y_{jh}) \in Y_j$, $j \in G$. Tada rinkinys

$$(x_i, y_j) = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) \in X_1 \times \cdots \times X_n \times Y_1 \times \cdots \times Y_m \subset \mathbb{R}^{\ell(n+m)}$$

vadinamas prekių paskirstymu. Taigi prekių paskirstymas yra rinkos subjektų sprendimų rezultatas. $\mathcal{PNE}$ ekonomikos paskirstymą (x_i, y_j) atitinkanti *visuminė perteklinė paklausa*, arba sutrumpintai VPP, yra gėrybių rinkinys

$$Z(x_i, y_j) := \sum_{i \in V} x_i - \sum_{j \in G} y_j - \sum_{i \in V} e_i \in \mathbb{R}^\ell. \tag{1.19}$$

Šis žymėjimas reiškia, jog kintamaisiais visuminėje perteklinėje paklausoje yra laikomi tik x_i ir y_j, o ekonomikos ištekliai e_i nekinta.

Visuminė perteklinė paklausa $Z = Z(x_i, y_j)$ yra toks vektorius $(Z_h) = (Z_1, \ldots, Z_\ell) \in \mathbb{R}^\ell$, kurio koordinatė

$$Z_h(x_i, y_j) = \sum_{i \in V} x_{ih} - \sum_{j \in G} y_{jh} - \sum_{i \in V} e_{ih} \in \mathbb{R}$$

kiekvienam $h \in I$. Prisiminkime, kad $y_{ih} \leq 0$, jei h-toji gėrybė yra gamybos ištekliai, t. y. h-toji gėrybė yra suvartojama, ir $y_{ih} \geq 0$, jei h-toji gėrybė yra gamybos produktas. Kitaip tariant, sumoje $Z_h(x_i, y_j)$ suvartojami h-tosios gėrybės kiekiai yra su pliuso ženklu, o sukuriami tos gėrybės kiekiai yra su minuso ženklu. Vadinasi, suma $Z_h(x_i, y_j)$ yra h-tosios gėrybės balansas visoje ekonomikoje. Jei $Z_h(x_i, y_j) > 0$, tai h-tosios gėrybės yra nepakankamai, o jei $Z_h(x_i, y_j) < 0$, tai h-tosios gėrybės yra perteklius. Sakysime, kad prekių paskirstymas (x_i, y_j) yra *leistinas*, jei $Z_h(x_i, y_j) \leq 0$ kiekvienam $h \in I$, t. y. $Z(x_i, y_j) \leq 0$.

Kartu su paskirstymo (x_i, y_j) leistinumu, pusiausvyra apibūdinama ir tuo, kad visuminės perteklinės paklausos kaina lygi nuliui, t. y.

$$p{\cdot}Z(x_i, y_j) = \sum_{h\in I} p_h Z_h(x_i, y_j) = 0. \tag{1.20}$$

Tegul $p = (p_h) \geq 0$ ir $Z(x_i, y_j) \leq 0$. Tada kiekvienas (1.20) sumos narys yra lygus nuliui, t. y. kiekvienos prekės pasiūlos ir paklausos balanso kaina yra nulis. Be to, jei $p_h > 0$, tai $Z_h(x_i, y_j) = 0$, t. y. vertingos prekės pasiūla lygi paklausai.

Prekių paskirstymas (x_i, y_j) tarp ekonomikos subjektų ir kainų sistema $p \in P$ sudaro rinkinį (x_i, y_j, p), kurį vadinsime ekonomikos $\mathcal{PNE}$ *būsena*.

1.2 apibrėžimas. Tegul $\mathcal{PNE}$ yra Arrow–Debreu ekonomika nusakoma (1.18) rinkiniu. Būseną (x_i^*, y_j^*, p^*) vadinsime ekonomikos $\mathcal{PNE}$ *pusiausvyra*, jei galioja (a), (b) ir (c); čia

(a) kiekvienam $i \in V$, x_i^* yra optimalus biudžeto aibės $B_i(p^*, w_i(p^*))$ elementas;

(b) kiekvienam $j \in G$, y_j^* yra maksimalų pelną $\pi_j(p^*)$ realizuojantis gamybos planas;

(c) visuminė perteklinė paklausa $Z(x_i^*, y_j^*) \leq 0$ ir $p^*{\cdot}Z(x_i^*, y_j^*) = 0$.

Pusiausvyros egzistavimo problema Pusiausvyros problemą suformuluosime kaip nuo kainų sistemos priklausančios aibės egzistavimo problemą. Pradėsime nuo 1.2 apibrėžimo (a) ir (b) sąlygų. Esant bet kuriai kainų sistemai $p \in \mathbb{R}^\ell$ ir gamintojui $j \in G$, apibrėžkime aibę

$$S_j(p) := \{y \in Y_j \colon\ (\forall\, z \in Y_j)\, [p{\cdot}y \geq p{\cdot}z]\},$$

kuri gali būti tuščia arba ne. Jei $S_j(p) \neq \varnothing$, tai j-tasis gamintojas renkasi bet kurį maksimalų pelną realizuojantį gamybos planą $y_j \in S_j(p)$. Tarkime, kad $p \in \mathbb{R}^\ell$ yra tokia kainų sistema, kad visos aibės $S_j(p)$, $j \in G$, yra netuščios, t. y. galioja 1.2 apibrėžimo (b) sąlyga. Tokiu atveju yra apibrėžti maksimalūs pelnai $\pi_j(p)$, $j \in G$, o visų vartotojų pradiniai turtai $w_i(p)$ apibrėžti pagal formulę (1.17). Tada kiekvienam vartotojui $i \in V$ apibrėžkime aibę

$$D_i(p) := \{x \in B_i(p, w_i(p)) \colon\ (\forall z \in B_i(p, w_i(p)))\, [x \succeq_i z]\},$$

kuri taip pat gali būti tuščia arba ne. Jei $D_i(p) \neq \varnothing$, tai i-tasis vartotojas renkasi bet kurį optimalų prekių rinkinį $x_i \in D_i(p)$. Tegul P yra aibė tų kainų sistemų $p \in \mathbb{R}^\ell$, su kuriomis yra netuščios visos aibės $S_j(p)$, $j \in G$, ir $D_i(p)$, $i \in V$. Aibė P gali būti tuščia arba ne. Jei P yra netuščia, tai galioja 1.2 apibrėžimo (a) ir (b) sąlygos.

Sakykime, kad P yra netuščia. Norėdami sudaryti Arrow–Debreu ekonomikos pasiūlą ir paklausą, sudėkime gamintojų ir vartotojų pasirinkimus, kurie yra šios ekonomikos subjektų sprendimai. Kadangi $D_i(p)$ ir $S_j(p)$ gali būti aibės, sudarytos iš daugiau nei vieno elemento, naudosimės netuščių euklidinės erdvės poaibių A ir B *Minkowskio*[14] sudėtimi $A + B$ ir atimtimi $A - B$, kur

$$A \pm B := \{u \pm v\colon\ u \in A,\ v \in B\}. \tag{1.21}$$

Taip sudėję, gauname aibes

$$D(p) := \sum_{i \in V} D_i(p) \qquad \text{ir} \qquad S(p) := \sum_{j \in G} S_j(p), \tag{1.22}$$

vadinamas atitinkamai *visumine paklausa* ir *visumine pasiūla*. Šios aibės kartu su ekonomikos ištekliais $e = \sum_{i \in V} e_i$, apibrėžia aibę

$$\begin{aligned} \zeta[p] &:= D(p) - S(p) - \{e\} \\ &= \big\{Z(x_i, y_j)\colon\ x_i \in D_i(p),\ y_j \in S_j(p)\big\}. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Jei kainų sistema $p \in P$, tai $x_i \in D_i(p)$, $i \in V$, ir $y_j \in S_j(p)$, $j \in G$, yra optimalūs ekonomikos subjektų sprendimai, o VPP $Z(x_i, y_j) \in \zeta[p]$. Aibė

$$\zeta := \big\{(p, z) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d\colon\ p \in P,\ z \in \zeta[p]\big\}$$

yra atitiktis iš $\mathbb{R}^d$ į $\mathbb{R}^d$ su apibrėžimo sritimi P, vadinama *visumine pertekline paklausa*. Jei kiekvienam $p \in P$, aibės $D_i(p) = \{x_i^*\}$, $i \in V$, ir $S_j(p) = \{y_j^*\}$, $j \in G$, yra sudarytos iš vienintelio elemento, tai reikšmės $\zeta(p) := Z(x_i^*, y_j^*)$ apibrėžia funkciją $\zeta\colon\ p \mapsto \zeta(p) \in \mathbb{R}^d$, $p \in P$, taip pat vadinama visumine pertekline paklausa. Daugiau apie atitiktis ir funkcijas rašoma 2.2 skyrelyje.

Taigi 1.2 apibrėžimo (a) ir (b) sąlygos galioja, jei egzistuoja visuminė perteklinė paklausa ζ su apibrėžimo sritimi P. Jei kainų sistema $p^* \in P$ yra tokia, kad $0 \in \zeta[p^*]$, tai egzistuoja tokie $x_i^* \in D_i(p^*)$ ir $y_j^* \in S_j(p^*)$, kad $Z(x_i^*, y_j^*) = 0$, o tai rodo, kad Arrow–Debreu ekonomikos būsenai (x_i^*, y_j^*, p^*) galioja visos trys 1.2 apibrėžimo sąlygos. Šie samprotavimai įrodo teiginį:

1.3 teiginys. *Arrow–Debreu ekonomikoje $\mathcal{PNE}$ egzistuoja pusiausvyra, jei egzistuoja visuminė perteklinė paklausa ζ su apibrėžimo sritimi P ir tokia kainų sistema $p^* \in P$, kad* $0 \in \zeta[p^*]$.

[14] Hermann Minkowski – Hermanas Minkovskis (1864–1909), Kaune gimęs vokiečių matematikas.

Šio teiginio kainų sistema p^*, jei ji egzistuoja, vadinama *pusiausvyrine kaina*. Mūsų pagrindinis tikslas – rasti sąlygas ekonomikai (1.18), kurioje egzistuoja pusiausvyrinė kaina.

Pusiausvyrinės kainos egzistavimo sąlygų paieška nėra vienareikšmė. Bendroji pusiausvyra yra visos ekonomikos savybė, ir todėl jos egzistavimui galima būtų formuluoti sąlygas tiek visai ekonomikai, tiek ir atskiroms jos dalims. Nagrinėjamojo *Arrow–Debreu* ekonomikos dalys yra matematinio modelio elementai, t. y. (1.18) rinkinio sudedamosios dalys. Taigi, *Arrow–Debreu* ekonomikos kontekste sąlygos pusiausvyrai egzistuoti išreiškiamos prielaidomis modelio elementams. Tokiu būdu galima tikėtis paaiškinti pusiausvyrinės kainos formavimosi mechanizmą. Be to, praktiniu požiūriu tokias sąlygas galima būtų tikėtis lengviau interpretuoti ir pateisinti ekonomiškai.

Pusiausvyros egzistavimo sąlygos Suformuluosime tas sąlygas *Arrow–Debreu* ekonomikai (1.18), kurioms galiojant 6.8 teoremoje įrodomas pusiausvyros egzistavimas.

Kiekvienam $i \in V$ vartojimo aibei X_i galioja

$V0$: $X_i \subset \mathbb{R}^\ell_+ = \{x \in \mathbb{R}^\ell \colon\ x \geq 0\}$;

$V1$: X_i yra iškila, t. y. bet kuriems $x, y \in X_i$ ir $\lambda \in (0, 1)$, $\lambda x + (1 - \lambda)y \in X_i$;

$V2$: X_i yra kompaktiška, t. y. uždara ir aprėžta;

$V3$: egzistuoja toks $\tilde{x}_i \in X_i$, kad $\tilde{x}_i < e_i$.

Kiekvienam $i \in V$ vartojimo aibės X_i preferencija $\succeq_i$ yra racionali (3.1 apibrėžimas), o gėrybių laukas $(X_i, \succeq_i)$ yra

$L1$: tolydus, t. y. aibės $\{y \in X_i \colon\ y \succeq_i x\}$ ir $\{y \in X_i \colon\ x \succeq_i y\}$ yra uždaros kiekvienam $x \in X_i$ (3.9 apibrėžimas);

$L2$: iškilas, t. y. jei $x, y, z \in X_i$, $y \succeq_i x$ ir $z \succeq_i x$, tai $\lambda y + (1 - \lambda)z \succeq_i x$ galioja kiekvienam $\lambda \in (0, 1)$ (3.17 apibrėžimas);

$L3$: lokaliai nepasotinamas, t. y. duotiems $x \in X_i$ ir $\epsilon > 0$ egzistuoja toks $y \in X_i$, kad $|x - y| < \epsilon$ ir griežtoji preferencija $y \succ_i x$ (3.6 apibrėžimas).

Kiekvienam $j \in G$ gamybos aibė $Y_j \subset \mathbb{R}^\ell$

$G1$: yra iškila;

$G2$: yra kompaktiška;

$G3$: leidžia nieko neveikti, t. y. $0 \in Y_j$.

Priklausomai nuo rinkos kainos, nieko neveikimas gali būti optimalus firmos sprendimas. Bet kuriuo atveju iš sąlygos $G3$ išplaukia, kad pelnas visada yra neneigiamas dydis.

Galiausiai, prielaida apie kainų sistemas yra

$P1$: $P = \mathbb{R}^\ell_+ \setminus \{0\}$.

Daugumoje pusiausvyros egzistavimo įrodymų vartojimo ir gamybos aibių iškilumas ($V1$ ir $G1$ sąlygos) yra labai svarbios. Gamybos atveju iškilumas kartu su $G3$ sąlyga reiškia, kad jei technologija y yra galima, tai ir λy yra galima kiekvienam $\lambda \in [0,1]$. Tai rodo, jog mažinant gamybos sąnaudas proporcingai mažėja pagaminamos produkcijos kiekis (angl. non-increasing returns to scale).

Vadovėlyje įrodoma pusiausvyros egzistavimo teorema 6.8 sąlygų bendrumo prasme nėra pati universaliausia. Pavyzdžiui, aibių X_i ir Y_j kompaktiškumo sąlygą galima būtų pakeisti šių aibių uždarumo sąlyga. Tačiau dažniausiai bendresnė teorema reikalauja sudėtingesnio įrodymo. Nuorodos į kitus žinomus ir susijusius rezultatus yra pateikiamos šio ir kitų skyrių pabaigoje.

Taikomoji bendrosios pusiausvyros analizė Taip vadinama ekonominių darbų sritis, kuriais siekiama abstrakčią bendrosios pusiausvyros struktūrą, *Arrow–Debreu* ekonomiką, taikyti konkrečioms ekonomikoms. Empiriškai įvertintas ir realius duomenis atitinkantis bendrosios pusiausvyros matematinis modelis naudojamas lyginti ekonominės politikos alternatyvas. Tokia politika domisi ekonomikos reakcija ir jos elgsena priklausomai nuo įvairių ekonomikos rodiklių pasikeitimų ir ekonominės politikos sprendimų.

Bandymai tiesiogiai taikyti *Arrow–Debreu* ekonomikos modelį susiduria su dviem pagrindinėmis problemomis. Viena, pusiausvyros egzistavimo įrodymas nėra konstruktyvus. Tam naudojamos *Brouwer*io ir *Kakutani*o nejudamojo taško teoremos teigia pusiausvyros egzistavimą, bet nenurodo būdo jai rasti. Nejudamojo taško teoremos yra svarbios parodant ekonominio modelio loginį suderinamumą, kas yra būtina padaryti pirmiausia. Toliau natūralu bandyti rasti nejudamojo taško paieškos algoritmus. Pirmasis reikšmingų rezultatų šia kryptimi pasiekė *H. Scarf*as[15] septintame XX amžiaus dešimtmetyje. Konstruktyvus požiūris į bendrosios pusiausvyros analizę dėstomas jo knygoje [27].

Kita problema yra tai, kad *Arrow–Debreu* ekonomikos modelyje nėra tokių įprastinių ekonominės politikos įrankių, kaip vyriausybė, mokesčiai, tarifai, prekybos apribojimai ir panašiai. Pagrindinis ir supaprastintas vyriausybės ekonominės politikos vaidmuo yra mokesčių rinkimas ir jų paskirstymas įvairioms reikmėms. Nuo vyriausybės veiklos priklauso ir rinkos ekonomikos subjektų sprendimai, o šių funkcijų įtraukimas į *Arrow–Debreu* modelį tampa netrivialiu uždaviniu. Vieną iš galimų šios problemos sprendimo variantų ir gauto modelio panaudojimo rezultatų aptarimą galima rasti [28] knygoje.

1.4 Istorinė idėjų apžvalga

Ekonomikos kaip šiuolaikine prasme atskiros žinių sistemos pradžia siejama su *Adam*o *Smith*o[16] knygos „Tautų turtas“ [29] pasirodymu 1776 metais. Iki tol ekonomika bu-

[15] Herbert E. Scarf – Herbertas Skarfas (1930), amerikiečių matematikas ir ekonomistas.

[16] Adam Smith – Adamas Smitas (1723–1790), škotų ekonomistas ir filosofas.

vo tiesiog vienas iš politikos mokslų skyrių apie valstybės valdymo meną. Lyginant su anksčiau gyvenusiais ekonomistais, *Smith*as išsiskyrė ne tik savo žinių moksliškumu ir gilumu, bet ir savo sukurto abstraktaus gamtos ir tuometinės kapitalistinės sistemos modelio pilnumu ir nuoseklumu. Jis aiškiai pastebėjo ir išskyrė svarbiausius ryšius tarp pagrindinių visuomenės sluoksnių, įvairių gamybos sektorių, gerovės ir pajamų paskirstymo, pinigų apytakos, kainos formavimosi procesų ir ekonominio augimo. Dauguma po jo gyvenusių ir dirbusių ekonomistų vienaip ar kitaip savo idėjas kildino iš *Smith*o „Tautų turto“. Būtų beviltiška bandyti bent kiek išsamiau čia apžvelgti *Smith*o ir kitų ekonomistų idėjų santrauką. Mūsų nuomone, tam egzistuoja puikūs tekstai, pavyzdžiui *Hunt*o knyga *History of Economic Thought* [14]. Todėl apsiribosime tik tuo, kas tiesiogiai siejasi su bendrosios pusiausvyros idėja, ir bendro pobūdžio pastabomis apie šiuolaikinės ekonomikos įvairovę.

Bendrosios pusiausvyros idėja Ekonominių reiškinių stebėjimo patirtis rodo, jog egzistuoja stebėtinas suderinamumas tarp daugybės individų, atrodytų, visiškai nepriklausomų sprendimų, susijusių su gamyba ir prekyba. Šis suderinamumas pasireiškia gaminamo ir siūlomo parduoti ar norimo pirkti prekių ir paslaugų kiekio tam tikru balansu. Norintys pirkti paprastai tiksliai numato savo galimybes, o norintys gaminti paprastai negamina tiek, kad po to negalėtų parduoti. Šio reiškinio svarbos suvokimas atsirado senai, dar *Adam*o *Smith*o laikais.

Kelių paskutiniųjų šimtų metų Vakarų šalių istorija pateikia įvairių šio ekonominio reiškinio vystymosi aspektų. Pavyzdžiui, didėjant pajamoms ir prekių paklausai, netrunka atitinkamai reaguoti gamyba ir darbo jėgos paklausa. Arba, atsirandant naujoms technologijoms, išsilaisvinusi darbo jėga ne prapuola, bet panaudojama kitose ekonominės sistemos srityse. Šie pavyzdžiai rodo, jog pati ekonominė sistema daugiau ar mažiau sklandžiai prisitaiko prie naujų pokyčių.

Ekonominių sprendimų savaiminio suderinamumo reiškinys tampa ypač akivaizdus ir mįslingas laisvosios rinkos sąlygomis. Tad nenuostabu, kad jau nuo *Adam*o *Smith*o laikų šio reiškinio mechanizmo paaiškinimo galimumas suvokiamas kaip mokslinė problema. Ekonominės minties istorija teigia, kad pirmieji įtikinamą šios problemos sprendimo variantą pasiūlė apie 1870-uosius *W. Jevons*as[17], *C. Menger*is[18] ir ypač *L. Walras*as.

Sprendimo idėja grindžiama faktu, jog visų rinkos subjektų stebima prekių kainų sistema ir yra tas rodiklis, kuris įgalina koordinuoti, atrodytų, chaotišką ekonominę veiklą. Šis faktas grindžiamas tuo, kad atsiradus pasiūlos ir paklausos skirtumams pakinta kai kurių prekių kaina, kas ir grąžina ekonominei sistemai prarastą balansą. Toks kainų sistemos stabilizuojančios veiklos reiškinys pradedamas vadinti *bendrąja pusiausvyra*, tuo terminu apeliuojant į analogiškų reiškinių egzistavimą moksle ir matematikoje. Žodis „bendroji“ taip pat svarbus, nes aiškinamasis mechanizmas turi prasmę tik bendroje ekonominėje sistemoje, sudarytoje iš daugelio prekių ir paslaugų rinkų. Kitaip tariant,

[17] William S. Jevons – Viljamas Dževonsas (1835–1882), anglų ekonomistas ir logikas.
[18] Carl Menger – Karlas Mengeris (1840–1921), austrų ekonominės mokyklos pradininkas.

visuminė ekonominė pusiausvyra nėra išskaidoma į atskiras prekes atitinkančių pusiausvyrų sumą.

Ekonominės minties istorija taip pat liudija, jog kainų sistema nebuvo laikoma vienintele problemos aiškinimo galimybe. Tačiau bendrosios pusiausvyros idėja turėjo papildomą privalumą – galimybę kalbėti apie ekonominės sistemos optimalumą. Ypač reikšmingu tapo optimalumas išreiškiamas tuo, kas dabar vadinama *Pareto efektyvumu*. Ekonominių išteklių paskirstymas vadinamas *Pareto* prasme efektyviu, jei nėra kito galimo išteklių paskirstymo, kuris pagerintų kieno nors padėtį, nepablogindamas visų kitų padėties. Paaiškėjo, jo Pareto efektyvumas yra tampriai susijęs su bendrąja pusiausvyra.

Tiesa, Pareto efektyvumas jokiu būdu nėra siejamas su paskirstymo teisingumu. Gėrybių paskirstymas gali būti efektyvus Pareto prasme, bet tuo pačiu gali toleruoti be galo turtingų ir be galo vargingų visuomenės narių egzistavimą. Šia prasme bendroji pusiausvyra ir Pareto efektyvumas nėra socialinio teisingumo sąvokos.

Neoklasikinė ekonomikos teorija Ekonomikos teorija yra sudedamoji ir svarbiausioji ekonomikos mokslo dalis. Greta ekonomikos teorijos, ekonomikos žinių sistemą sudaro makroekonomika, ekonometrija, taikomoji ekonomika, ekonomikos filosofija ir metodologija, ekonominės minties istorija bei kitos jos dalys. Ekonomikos mokslą galima skirstyti ir pagal jį sudarančias įvairias mokyklas bei kryptis. Dominuojančia tarp visų jų yra vadinamoji neoklasikinė mokykla, arba neoklasikinė ekonomika.

Klasikine vadinama ekonominės minties mokykla, atstovaujama *Adam*o *Smith*o ir *David*o *Ricardo*[19], ir laikoma pirmąja šiuolaikinės ekonomikos mokykla. Klasikinė ekonomika akcentavo laisvosios prekybos naudą, rinkos polinkį į pusiausvyrą ir vertės teoriją, grindžiamą darbo sąnaudomis (angl. labor theory of value). Klasikinę ekonomikos mokyklą keitė tokios ekonominės minties mokyklos (angl. marginalist schools), kurios vertės šaltinį matė santykiniame naudingume (angl. marginal utility), o ne gamybos kaštuose.

Neoklasikinės mokyklos požiūrio esmė yra ta, kad ekonominio visuomenės vystymosi pasekmė yra ekonomikos rinkos *pusiausvyra*, realizuojama individualių jos narių racionaliu elgesiu esant ribotai pasirinkimo laisvei. Tarp kitų ekonomikos mokslo mokyklų neoklasikinė ekonomika išsiskiria savo prielaidomis apie gamybos proceso technologines galimybes ir apie individualių vartotojų pasirinkimo formas. Pavyzdžiui, laikoma, kad gamybinė bendrovė maksimizuoja savo pelną esant „duotai“ rinkos kainai. Visuomenės narių elgesys yra racionalus ta prasme, kad kiekvieno iš jų pasirinkimas tarp alternatyvių vertybių yra pilnas ir tranzityvus. Kiekvienas individas renkasi maksimizuodamas racionalų pasirinkimą, ribojamą jo pradinio turto. Šios ir kitos neoklasikinės mokyklos prielaidos apie ekonominį visuomenės narių elgesį leidžia pagrįsti (matematiškai įrodyti) minėtosios ekonomikos rinkos pusiausvyros egzistavimo galimybę.

Neoklasikinės ekonomikos mokykloje galima išskirti keturias pagrindines kryptis ir

[19] David Ricardo – Deividas Rikardas (1772–1823), anglų ekonomistas.

daugelį specialių jos sričių. Pusiausvyrinis ekonominio vystymosi požiūris daugiau ar mažiau atsispindi visose šios mokyklos kryptyse. Pirmąją, teorinę neoklasikinės mokyklos kryptį sudaro *pasirinkimo teorija*, *bendrosios pusiausvyros teorija* ir *lošimų teorija*. Didesnė šių teorijų dalis sudaro vadinamąją *mikroekonomiką*. Būtent ši, teorinė neoklasikinės mokyklos kryptis, yra labiausiai dominuojama pusiausvyros požiūrio. Mažiausiai šio požiūrio poveikis yra įžvelgiamas *ekonometrijoje*, kurią sudaro tiek statistika, tiek ir ekonomika. Ekonometrija naudoja realius ekonomikos duomenis ir statistinius sprendimus įvertinant įvairius modelius ir jų parametrus. *Makroekonomika*, trečioji neoklasikinės mokyklos kryptis, nagrinėja tokius bendrus ekonomikos reiškinius, kaip biznio ciklai ir ekonominis augimas. Šiuolaikinė makroekonomikos teorija esmiškai remiasi pusiausvyriniu ekonomikos reiškinių požiūriu, išplaukiančiu iš racionalaus individų elgesio. Racionalaus elgesio sureikšminimas, dar vadinamas *homo economicus*, yra neoklasikinio požiūrio vystymosi pasekmė ir skiriamasis bruožas. *J. M. Keynes*o „*Bendrojoje teorijoje*" [17] – svarbiausiame XX amžiaus ekonominės minties kūrinyje – makroekonomikos ryšys su individualaus pasirinkimo ypatybėmis nebuvo taip sureikšminamas. Ketvirtąją kryptį sudarantys neoklasikinės mokyklos darbai, susiję su *taikomąja ekonomika*, plačiausia ekonomistų veiklos sritimi, taip pat atspindi pusiausvyrinį ekonomikos teorijos paveikslą. Tačiau taikomieji darbai bendrą rinkos pusiausvyros požiūrį papildo naujais aspektais. Taikomosios ekonomikos sritimis yra laikomos tarptautinės prekybos teorija, darbo ekonomika ir finansų ekonomika, atitinkančios skirtingas ekonomikos rinkas.

Kitos ekonomikos mokyklos Šalia neoklasikinės mokyklos egzistuoja daug kitų ekonomikos mokyklų. Tarp jų viena žymiausių yra *austrų ekonominė mokykla*. Taip yra vadinama ekonominės minties sritis, kurios pradininkai buvo austrai *Carl*as *Menger*is, *F. A. Hayek*as[20] ir *Ludwig*as *von Mises*as[21], o toliau vystoma daugiausia amerikiečių ekonomistų, iš kurių žymiausias yra *Murray*us *N. Rothbard*as[22]. Išskyrus požiūrį į pusiausvyrą, ši kryptis turi labai daug bendro su neoklasikine mokykla. Pavyzdžiui, abi mokyklos kapitalizmą laiko geriausia socialine-ekonomine valstybės sistema. Neoklasikams ji yra geriausia todėl, kad pasižymi sąlygomis, būtinomis rinkos pusiausvyrai egzistuoti. Priešingai, austrų ekonomistai remia kapitalizmo sistemą dėl jos gebėjimo prisitaikyti prie pusiausvyros nebuvimo. Jų nuomone, rinkos pusiausvyra realiame pasaulyje yra negalima, nes tai abstrakti mokslinė konstrukcija. Austrų tradicija vietoje pusiausvyros idėjos orientuojasi į verslininko (angl. entrepreneur) vaidmenį rinkoje. Siekdamas pelno verslininkas padaro kapitalizmą lanksčia ir prisitaikančia socialine sistema. Šiuo požiūriu, lyginant su feodalizmu ar socializmu, kapitalizmas laikomas prisitaikančia sistema. Austrų mokykla taip pat ypatingą dėmesį skiria ekonominių sprendimų neapibrėžtumui nagrinėti, atmesdama neoklasikų tuo tikslu naudojamą tikimybių teorija grindži-

[20] Friedrich A. von Hayek – Fridrichas Hajekas (1899–1992), austrų ir britų ekonomistas ir filosofas.
[21] Ludwig H. E. von Mises – Liudvigas Mizesas (1881–1973), ekonomistas ir filosofas.
[22] Murray N. Rothbard – Murėjus Rotbardas (1926–1995), amerikiečių ekonomistas.

amą modelį kaip trivialų. Jų teigimu, prielaida apie tikimybinio mato egzistavimą yra nereali. Tačiau kapitalizmas, būdamas silpnai susijusi sistema, yra geriausiai prisitaikęs prie neapibrėžtumų. Dar vienas skirtumas tarp neoklasikinės ir austrų mokyklos atsiranda požiūryje į matematikos vaidmenį ekonomikoje. Austrų mokyklos atstovai teigia, kad realūs duomenys ir jų tyrimas yra beverčiai, nes yra generuoti nepusiausvyrinės ekonomikos. Be to, jų nuomone, visuomenė nėra ją sudarančių individų aritmetinė suma, ir todėl matematika nepajėgi tirti visuomenės elgesį. Daugiau apie austrų ekonomikos mokyklos idėjas galima sužinoti iš šios teorijos įvado [7].

Kitos ekonomikos teorijos ir jų skiriamieji bruožai:

- *institucionalizmas* – kritiškas abstrakčiam ir bendram teorizavimui, o svarbiausiu laikantis ekonominio elgesio apibūdinimą konkrečios institucijos kontekste; taikomieji neoklasikų ir institucionalistų darbai kartais yra labai panašūs;
- *marksizmas* – toliau vysto *K. Marx*o[23] vertės teoriją ir remiasi metodais, panašiais į neoklasikų;
- *Keynes*o *ekonomika* – makroekonomika, grindžiama analize nuo „viršaus“ (makro-) į „apačią“ (mikro-), priešinga kryptimi nei neoklasikinė analizė;
- *post-Keynes*o *ekonomika* – kritiška neoklasikinės ekonomikos atžvilgiu ir ypatingą svarbą priskirianti neapibrėžtumui ekonomikoje;
- *Sraff*os *ekonomika* – remiasi *Sraff*os[24] knygoje „Production of Commodities by Means of Commodities” išdėstytas samprata; taip pat vadinama *neo-Rikardine* ekonomine mokykla;
- *dinaminė ekonomika* – taikanti netiesinės dinaminių sistemų ir chaoso teorijas ekonomikoje;
- *evoliucinė ekonomika* – laikanti ekonomiką besivystančia sistema, panašiai kaip *Darwin*o[25] evoliucijos teorija.

Detalesnį čia išvardytų ekonomikos teorijų įvertinimą galima rasti *Keen*o knygoje [16, 14 skyrius]. Minėtoje knygoje autorius pažymi, jog nei viena iš šių ekonomikos krypčių negalėtų pretenduoti į vienintelės XXI amžiaus ekonomikos teorijos vardą. Tačiau kiekviena iš jų yra pakankamai stipri toje srityje, kurioje yra silpna neoklasikinė ekonomika. Tikėtina, kad šiame amžiuje dominuojančia turėtų tapti ta ekonominė teorija, kuri akcentuoja šiuolaikinės kapitalistinės ekonomikos dinamiką. Įvadas į šiuolaikinę ekonomiką, kuris nesiremia viena kuria nors ekonomine teorija, yra pateikiamas *Stretton*o knygoje [31].

[23]Karl H. Marx – Karlas Marksas (1818–1883), vokiečių filosofas, ekonomistas ir revoliucionierius.
[24]Piero Sraffa – Pjeras Srafa (1898–1983), italų ekonomistas.
[25]Charles R. Darwin – Čarlzas Darvinas (1809–1882), anglų gamtininkas.

1.5 Kas yra matematinė ekonomika?

Trumpai bet prasmingai apibūdinti matematinę ekonomiką nėra lengva, nes iš pirmo žvilgsnio ekonomikos teorija ir matematika atrodo gerokai skirtingos žinių sistemos. Matematika yra žinių sistema apie tokias sąvokas, kaip dydis, erdvė, struktūra, kitimas ir t. t. Visos šios sąvokos vienaip ar kitaip apibūdina tvarką (angl. pattern) pačia bendriausia prasme, suprantant ją, kaip bet kokį protu suvokiamą reguliarumą. Pasaulis suvokiamas tiek, kiek mes sugebame įžvelgti jame dėsningumas ir išreikšti juos sąvokomis. Matematinis tvarkos supratimas yra bendras ta prasme, kad jos nedomina tiriamą struktūrą sudarantys konkretūs objektai, – svarbūs yra tik ryšiai tarp objektų ir tų ryšių reguliarumas. Kai kas net tiesiog sako, kad matematika yra mokslas apie tvarką (angl. the science of patterns).

Praeitame skyrelyje rašoma apie įvairias ekonomikos teorijas ir mokyklas. Tačiau nėra vieningo požiūrio dėl to, kas yra ekonomikos teorija kaip žinių sistema. Pavyzdžiui *Stigum*as [30, 117 pusl.], rašydamas panašia tema, pradeda teiginiu: „Pasaulyje yra daug ekonomistų ir tikriausiai tiek pat daug yra požiūrių į ekonomikos teorijos esmę“. Vieni sako, kad tai tiesiog rinkinys įvairių teorijų, turinčių vieną savybę – jas galima ir privalu tikrinti. Kiti mano, kad tai yra ekonomikos subjektų naudojamų įrankių rinkinys. Na o dar kiti ekonomikos teorija tiesiog laiko požiūrį į pasaulį, kuriuo remiasi profesionalūs ekonomistai.

Yra dar vienas požiūris į ekonomikos teoriją, kurį formuluoja *Rubinstein*as [25]. Ekonomikos teorija – tai tyrimas sąvokų, naudojamų mąstant apie realų ekonominį gyvenimą. Tirdami tokias sąvokas, mes siekiame geriau suprasti tikrovę, o ekonomikos teorija yra kalba, kuri padeda sistemingai nagrinėti ekonominius santykius. Tai nereiškia, jog ekonomikos teorija siekia apibūdinti pasaulį ar sukuria ateities prognozės metodus. Ekonomikos teorija taip pat nėra kažkokios galutinės tiesos paieška ar ekonomikos politikos rekomendacijų kūrimas. Nėra nieko nekvestionuojamo ekonomikos teorijoje, ir viskas joje yra žmogaus sukurta.

Pastarąja prasme, kaip sąvokų analizė, ekonomikos teorija gali naudoti matematikoje tiriamas sąvokas, savaip jas interpretuodama. *Matematinė ekonomika* yra ne kas kita, kaip atitinkamai interpretuota matematinė teorija. Ekonominis modelis yra matematinė teorija, naudojanti ekonomikos teorijos sąvokomis interpretuotus matematinius objektus. Todėl tiek savo turiniu, tiek ir forma matematinė ekonomika mažai skiriasi nuo vadinamosios grynosios matematikos.

Tai nereiškia, kad visa ekonomikos teorija yra matematinė ekonomika. Dalis ekonomikos teorijos savo argumentacijoje siekia išvengti matematinio formalizmo, naudodama „sveiką protą“ ir įprastą bendrinę kalbą. *P. Samuelson*as[26] pakankamai vaizdžiai apibūdino skirtumą tarp žodinio ir matematinio argumentavimo ekonomikos teorijoje (cituojama iš [8]): „Imdamiesi ekonomikos teorijos problemas spręsti žodžiais, mes sprendžiame tas pačias lygtis lyg perrašydami jas aiškiau. Tuo tarpu didžiausios klaidos atsiranda, kai

[26] Paul A. Samuelson – Samuelsonas (1915), amerikiečių ekonomistas, Nobelio premijos laureatas.

formuluojame prielaidas. Vienas iš matematinio metodo, arba, tiksliau kalbant, matematikams įprasto įrodymo dėstymo, žodžiais ar simboliais, pranašumų yra tai, kad mes esame priversti atidengti savo kortas, ir visi gali matyti mūsų prielaidas.“

Matematinės ekonomikos vystymasis Esama neįprastai vieningos nuomonės dėl to, ką laikyti simboline matematinės ekonomikos pradžia. Tai 1838 metai, kai pasirodė *A. Cournot*o[27] knyga *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*. Tai nereiškia jog matematika nebuvo naudojama ekonominiams samprotavimas pagrįsti ir anksčiau. *Cournot* išsiskyrė gilumu, kuriuo jis naudojo matematinius modelius, aiškindamas ekonominius reiškinius.

A. Cournot pasekėjais XIX a. pabaigoje ir XX a. pradžioje buvo *Léon*as *Walras*as, *Francis Y. Edgeworth*as[28] ir *Vilfredo Pareto*.

Kaip jau buvo minėta, bendrosios pusiausvyros teorijos pradininku laikomas prancūzų ekonomistas *L. Walras*as, kurią jis aprašė svarbiausiame savo gyvenimo veikale (*opus magnum*) pavadinimu *Éléments d'économie politique pure*. Vienos prekės kainos kitimo aiškinimas naudojantis pasiūlos–paklausos mechanizmu buvo žinomas dar *Adam*o *Smith*o laikais. Bet iki *Walras*o ekonomistai beveik nebandė susieti visas rinkas į vieną visumą ir nagrinėti visos ekonomikos pusiausvyros. *L. Walras*as iškėlė sau tikslą sukurti visą ekonomiką aprašančią teoriją, pagrįstą matematine bendrosios pusiausvyros samprata. Nuo savo gimimo pradžios BP teorija buvo kuriama siekiant aprašyti ir analizuoti ekonominę realybę remiantis matematika. Pastebėsime, matematika buvo ne tiek pagalbinė priemonė, kiek tikslas siekiant paversti ekonomiką matematikos sritimi ar bent jau tiksliu ir griežtu mokslu, kokiais tuo metu buvo fizika ir astronomija. *Walras*ui nepavyko pasiekti užsibrėžto tikslo, bet tai, kas pavyko, buvo pirmieji svarbūs žingsniai.

Savo knygoje *Walras*as pateikia keturis skirtingo bendrumo modelius, vieną iš kurių – bendriausią – suformuluosime toliau (naudodami šiuolaikinę matematikos simboliką). Modelyje visi ekonomikos subjektų sprendimai ir jų realizacijos atliekami tuo pačiu metu, arba vienu laiko periodu, t. y. modelis yra statinis. Ekonomikos subjektų yra tiek daug, kad visi jie elgiasi taip, lyg neturėtų jokios įtakos kainai ir gali rinktis tik tarp visų pagaminamų ir vartojamų gėrybių kiekių. Kaip ir 1.3 skyrelyje aprašytame *Arrow–Debreu* ekonomikos modelyje, tarkime, kad yra ℓ gėrybių ir kiekviena iš jų žymima indeksu $h \in \{1, \ldots, \ell\}$. Tarkime, kad gėrybių kiekiai yra teigiamieji realieji skaičiai, sudarantys vektorių $x = (x_1, \ldots, x_\ell) \in \mathbb{R}^\ell_+$, visų gėrybių vienetų kainos sudaro kainų sistemą $p = (p_1, \ldots, p_\ell) \in \mathbb{R}^\ell_+$, ir viso rinkinio kaina yra skaliarinė sandauga $p \cdot x$, išreiškiama (1.14) sąryšiu.

Savo knygos [33] IV skyriuje *Walras*as, nagrinėdamas savąjį konkurencinės rinkos pusiausvyros modelį, daro prielaidą, kad visos ℓ gėrybių yra gaminamos iš m gamybos išteklių, kuriuos žymėsime indeksais $i \in \{1, \ldots, m\}$. Kiekvienas gamybos produktas h gaminamas nepriklausomai nuo visų kitų ir naudojama tik viena gamybos technologija.

[27] Augustin Cournot – Ogiustenas Kurno (1801–1877), prancūzų ekonomistas, filosofas ir matematikas.
[28] Francis Y. Edgeworth – Frensis Edžvortas (1845–1926), airių matematikas.

Taigi gamyba yra apibūdinama *gamybos koeficientų* matrica $B = [b_{hi}]$, kurios elementai b_{hi} yra neneigiamieji realieji skaičiai, išreiškiantys išteklių i-tosios gėrybės kiekį, reikalingą pagaminti produkto h-tosios gėrybės vienetą. Tegul $q = (q_1, \ldots, q_m) \in \mathbb{R}^m$ yra išteklių kainų sistema. Tada dėl konkurencijos gamintojo pelnas esant pusiausvyrai turėtų būti lygus

$$p^t = q^t B. \tag{1.24}$$

Be to, esant pusiausvyrai turėtų galioti ir kitas sąryšis, išreiškiantis išteklių paklausos ir pasiūlos lygybę. Tegul $y = (y_1, \ldots, y_\ell) \in \mathbb{R}^\ell_+$ yra gamybos produktą išreiškiantis gėrybių rinkinys, o $b = (b_1, \ldots, b_m) \in \mathbb{R}^m_+$ – visuminis naudojamų išteklių rinkinys. Tada galioja lygybė

$$By = b. \tag{1.25}$$

Iš (1.24) ir (1.25) sąryšių gauname tokias skaliarinių sandaugų lygybes:

$$q^t By = q{\cdot}b = p{\cdot}y.$$

Pastaroji lygybė reiškia, kad pagaminto produkto kaina lygi gamyboje panaudotų išteklių kainai.

Į gamybos procesą *Walras*as įtraukia vartotojus, tardamas, kad namų ūkio pajamos priklauso nuo kainų sistemos q jiems dalyvaujant gamyboje ir perkant pagamintas gėrybes už kainų sistemą p. Tą priklausomybę išreiškia funkcija $g\colon \mathbb{R}^\ell_+ \times \mathbb{R}^m_+ \to \mathbb{R}^m_+$, kurios reikšmės

$$z = g(p, q) \tag{1.26}$$

yra išteklių vektorius, siūlomas už kainą (p, q). Be to, tariama, kad egzistuoja tokia funkcija $f\colon \mathbb{R}^\ell_+ \times \mathbb{R}^m_+ \to \mathbb{R}^\ell_+$, kurios reikšmės

$$x = f(p, q) \tag{1.27}$$

yra vektorius, išreiškiantis pagaminamų gėrybių namų ūkių paklausą. Abi funkcijos yra tolydžios ir nulinės eilės teigiamai homogeninės savo argumentų atžvilgiu. Jei kiekvienas vartotojas išleidžia visas savo pajamas pirkdamas pagaminams gėrybes, tai visuminiu ekonomikos lygmeniu vartojimo kaštai lygūs pajamoms, t. y. galioja lygybė

$$p{\cdot}f(p, q) = q{\cdot}g(p, q), \tag{1.28}$$

kuri *Arrow–Debreu* ekonomikos modelyje atitinka tai, kas vadinama *Walras*o dėsniu.

Pusiausvyroje vartotojų paklausa pagaminamų produktų atžvilgiu turi būti lygi gamybos produktą išreiškiančiam gėrybių rinkiniui, t. y. galioja lygybė

$$x = y, \tag{1.29}$$

o gamintojų naudojamas išteklių vektorius lygus vartotojų siūlomam išteklių kiekiui, t. y. galioja lygybė

$$b = z. \tag{1.30}$$

Apibendrinant, pusiausvyrą apibrėžia visi septyni sąryšiai (1.24) – (1.30). Klausimas: ar taip apibrėžta pusiausvyra egzistuoja?

Pusiausvyrą apibrėžiantys sąryšiai yra netiesinių lygčių sistema. Į tokių sistemų sprendinių egzistavimo klausimus *Walras*o laikais matematika dar neturėjo atsakymų, o pats jis neturėjo pakankamo tokiems uždaviniams spręsti matematinio išprusimo. Tačiau *Walras*as, kaip ir dauguma to meto ekonomistų, manė, jog sprendinio egzistavimą savo sukurtuose modeliuose jis įrodė net dviem būdais: „teoriniu“ ir „praktiniu“.

Įrodymas „teoriniu“ būdu reiškė parodyti, kad nepriklausomų lygčių ir kintamųjų skaičiai sutampa. Kai aprašytame modelyje $x = y$ ir $b = z$, *Walras*as suskaičiavo $2(m + \ell)$ lygtis (1.24) – (1.28) ir tiek pat nežinomųjų p_h, q_i, x_h, b_i. Dėl *Walras*o dėsnio (1.28) viena lygtis yra priklausoma nuo likusių, ir todėl lieka $2(m+\ell)-1$ nepriklausomų lygčių. Be to, funkcijų f ir g homogeniškumo dėka, pusiausvyrą apsprendžia tik kainų santykiai. Taigi nepriklausomų lygčių ir nežinomųjų skaičiai lygūs. Tačiau priešingai nei manė *Walras*as, nesunkiai konstruojami pavyzdžiai rodo, jog tai nėra nei būtina, nei pakankama tokių sistemų sprendinių egzistavimo sąlyga.

Sprendinio egzistavimui pagrįsti „praktiniu“ būdu *Walras*as sugalvojo *tâtonnement*'u (apčiupinėjimas, aklinėjimas – iš prancūzų kalbos) vadinamą manipuliavimo kaina procesą, kuris visą sistemą turi atvesti į pusiausvyrą, nuo bet kurios kainų sistemos pradinės reikšmės. Šiais laikais šis procesas atpasakojamas pasitelkiant įsivaizduojamą aukcionierių. Jam paskelbus pradinę kainų sistemos (p, q) reikšmę, ją iš karto sužino visi ekonomikos subjektai. Tada kiekvienas iš jų renkasi optimalius veiksmus ir praneša aukcionieriui apie gautus paklausos ir pasiūlos gėrybių kiekius. Įvertinęs visuminę perteklinę paklausą, aukcionierius mažina kainą tų gėrybių, kurių paklausa yra mažesnė už pasiūlą, ir didina kainą tų gėrybių, kurių paklausos ir pasiūlos santykis yra priešingas. Paskelbus naują kainų sistemos reikšmę (p^*, q^*), procedūra kartojama. *Walras*o nuomone, kiekviename žingsnyje kainų sistema taip pasikeičia, kad absoliutus visuminės perteklinės paklausos dydis mažėja ir artėja į nulį, kai žingsnių skaičius neaprėžtai auga. Šiam teiginiui pagrįsti jis naudoja pasiūlos ir paklausos dėsnius. Tačiau šiuolaikinė ekonomika pateikė daugybę ekonominės sistemos modelių pavyzdžių, kuriuose kainų konvergavimo procesas yra gerokai sudėtingesnis, nei manė *Walras*as. Apskritai, yra žinomi paprasti net mažų ekonominių sistemų pavyzdžiai, kuriuose vienintelė egzistuojanti pusiausvyra nėra stabili, t. y. *tâtonnement*'o procesas nekonverguoja į tą pusiausvyrą.

Pirmą matematiškai korektišką bendrosios pusiausvyros modelį pasiūlė *A. Wald*as[29] 1935 ir 1936 metais, paskelbęs du straipsnius su dviem skirtingais modeliais. Pusiausvyra vėlgi buvo nusakoma tam tikra netiesinių lygčių sistema. Padaręs papildomą prielaidą, panašią į šiais laikais vadinamą atskleistosios preferencijos aksiomą, *Wald*as įrodė tokios sistemos sprendinio egzistavimą.

Jei 1838 metus laikysime matemtinės ekonomikos gimimo data, tai jos šiuolaikinio periodo simboline pradžia laikomi 1944 metai. Tais metais pasirodė *John*o *von Neu-*

[29] Abraham Wald – Abrahamas Valdas (1902–1950), vengrų kilmės rumunų matematikas.

manno[30] ir *Oskar*o *Morgensterno*[31] knygos *Theory of Games and Economic Behavior* [21] pirmasis leidimas.

Šiuolaikinė BP versija buvo suformuluota ir matematiškai pagrįsta apie 1950-uosius metus. Jos kūrėjais yra *Kenneth*as *Arrow*, *Gerard*as *Debreu* ir *Lionel*is *McKenzie*[32]. Pirmą kartą BP teorija pilnai išdėstyta *Debreu* knygoje „Vertės teorija“ [9]. Šioje knygoje įrodyti dabar pagrindiniais laikomi BP teiginiai – BP egzistavimas ir optimalumas, vadinamas *Pareto* efektyvumu. *McKenzie*o BP variantas aiškinamas jo knygoje [20].

Svarbus šiuolaikinės BP bruožas yra jos griežtai matematinis pagrįstumas. Kaip yra įprasta taikomajai matematikos teorijai, matematikos objektams ir sąvokoms yra suteikiama ekonominė interpretacija. Pavyzdžiui, ekonomikos pusiausvyra iš esmės yra ne kas kita, kaip matematinio objekto, vadinamo atitiktimi, nejudamasis taškas. Natūralu, kad pusiausvyros ekonomikoje egzistavimo įrodymas tampa priklausomu nuo atitikties nejudamojo taško egzistavimo įrodymo. Pasirodo, kad šis faktas yra visiškai netrivialus matematikoje. Pakankamai bendrą pusiausvyros ekonomikos reikmėms rezultatą pirmasis įrodė *L. E. J. Brouwer*is.

Kitas pavyzdys – tai svarbiausio ekonomikos subjekto – žmogaus – interpretacija, neretai vadinama *homo economicus*. Jis BP teorijoje yra „atstovaujamas“ specialaus tipo binariuoju sąryšiu gėrybių aibėje, atspindinčiu žmogaus pasirinkimo iš alternatyvų savybes. Geriausiai žinomas tokio pasirinkimo atskiras atvejis, apibrėžiamas naudingumo funkcija – sąvoka, plačiai paplitusi už ekonomikos mokslo ribų ir susijusi su utilitarizmu – etine teorija, siejama su *J. Bentham*u[33].

Vadovėlyje nagrinėjama BP teorija traktuojama kaip aksiomatinė sistema. Ekonominė pusiausvyra įrodoma tariant, jog pasiūlą formuoja ekonomikos subjektai, siekiantys maksimalaus pelno, o paklausa priklauso nuo ekonomikos subjektų, siekiančių maksimizuoti savo naudą.

BP teorijos vystymasį XX amžiuje galima apibūdinti dar vienu aspektu - matematikos pobūdžiu naudojamu teorijos formulavimui ir analizei. Galima išskirti mažiausiai tris naudojamos matematikos tipus. Seniausias ir mažiausiai rafinuotas teorijos formulavimas naudoja tik tiesinę algebrą ir kelių kintamųjų funkcijų matematinę analizę; faktiškai pakanka žinoti dalines išvestines. Tokia matematika pirmą kartą pasirodė 1909 metais publikuotos *Pareto* knygos [24] priede. Galutinę formą šios rūšies BP teorijai suteikė *Hicks* [12] ir *Samuelson* [26].

Antrojo tipo matematikos paplitimą motyvavo siekimas BP teorijoje išvengti bereikalingų matematinių prielaidų. Pasirodė, kad svarbiausios problemos, pusiausvyros egzistavimo faktas ir gerovės ekonomikos charakterizavimas, yra išsprendžiamos, nesinaudojant naudingumo funkcijos ir gamybos funkcijos diferencijuojamumu. Šio pasiekimo kaina - BP teorija įgyjo abstraktesnę formą pagrįstą aibių teorija, iškila analize ir bendrąja topologija. *Debreu* [9] monografija tapo pripažintu šios teorijos dėstymo etalonu. Labai

[30] John von Neumann – Džonas Noimanas (1903–1957), vengrų kilmės amerikiečių matematikas.
[31] Oskar Morgenstern – Oskaras Morgenšternas (1902–1977), vokiečių kilmės austrų ekonomistas.
[32] Lionel W. McKenzie – Lajonelis Makenzis (1919), amerikiečių ekonomistas
[33] Jeremy Bentham – Džeremis Bentamas (1748-1832), anglų juristas ir filosofas.

naudingu papildymu naudojant matematiką be diferencijavimo technikos yra Arrow ir Hahn [2] knyga.

Trečiojo tipo matematiką teko naudotis bandant tirti tokias BP savybes, kaip ekonomikos pusiausvyros egzistavimo sprendinių skaičius. Ar šis skaičius baigtinis ir kokie ekonomikos modeliai turi šią savybę? jei pusiausvyros atvejų yra tik baigtinis skaičius, tai kiekviena iš jų yra izoliuota topologine prasme ir išskyrus nedaugelį atvejų, pati pusiausvyra tolydžiai priklauso nuo jos pagrindinių charakteristikų. Todėl tokias ekonomikas imta vadinti reguliariomis. Šios rūšies analizė vėl pareikalavimo glodžių funkcijų aparato, tik gerokai modernesnio - diferencialinės topologijos. Pirmieji tokius rezultatus apžvalgė Mas-Colell [18] ir Balasko [3].

Matematinis formalizmas ekonomikoje Ekonomikos kontekste frazė „matematinis formalizmas“ dažnai reiškia tokį formalų matematikos metodų taikymą, kuris tampa savitiksliu, ir pamirštama pradinė ekonominė problema. Kitaip tariant, siekdamas panaudoti egzistuojančius matematinius metodus, matematinis formalizmas pernelyg supaprastina ekonominę realybę ir tuo pačiu ją iškreipia.

Kartais matematiniu formalizmu ekonomikoje vadinamas abstrakčios teorijos vystymas atsietai nuo empirinio tikrinimo. Šia prasme matematinis formalizmas yra gana paplitęs reiškinys – tai rodo įvairiuose ekonomikos žurnaluose publikuojami straipsniai. Tačiau ši problema, jei to norima, nesunkiai įveikiama pasitelkus ekonometrinę analizę.

Gerokai sudėtingesnius matematinio formalizmo atvejus ir apskritai neoklasikinės ekonomikos teorijos problemas, susijusias su matematika, aptaria *Keen*as knygoje [16, 12 skyrius], kur jis rašo:

> „Kaltę dėl akivaizdžių ekonomikos trūkumų daugelis kritikų priskyrė matematikai. Jie tvirtina, kad matematika yra kalta dėl perdėto formalizmo ekonomikoje, kuris nustelbė šiai sričiai būdingą socialinę jos prigimtį.
>
> Neneigiant, kad pernelyg didelė meilė matematiniam formalizmui prisidėjo prie tam tikro intelektualinio nesaikingumo ekonomikoje, apskritai tokia reakcija yra tiek pat klaidinga, kiek kaltinti pianiną dėl atlikėjo prastos muzikinės klausos. Jei ką dėl to reikėtų nušauti, tai tik pianistą, bet ne pianiną.
>
> Nors matematika turi neabejotinų apribojimų, tačiau deramai naudojamas loginis metodas turėtų skaidrinti, o ne temdyti. Taikydami matematiką ekonomistai aptemdė realybę, kadangi naudojo ją netinkamai ir nesuvokė matematikos ribotumo.“

Klausimas, kiek yra rimta matematinio formalizmo paplitimo ekonomikos teorijoje problema, nėra lengvas, nes jam aiškintis reikia labai gilaus tiek ekonomikos, tiek ir matematikos išmanymo. Prieš bandant tai daryti verta suprasti ir tai, kas išdėstyta šiame vadovėlyje.

1.6 Pastabos ir papildoma literatūra

1.1 skyrelis Skyrelio pabaigoje buvo išvardyta keletas klausimų, susijusių su BP tolesniu tyrimu. Svarbiausias iš jų (po pusiausvyros egzistavimo klausimo) yra stabilumo klausimas. Jis kyla bandant suvokti, ar egzistuoja 1.1 skyrelyje minėtos rinkos „jėgos“, stumiančios ekonominę sistemą pusiausvyros būsenos kryptimi. Klasikinė ekonomikos teorija rinkos judėjimą į pusiausvyrą nusako vadinamuoju *tâtonnement*'o procesu. Būtent tariama, kad egzistuoja išorinis rinkos „subjektas“, vadinamas rinkos aukcionieriumi, kurio vienintelė funkcija yra informuoti ir koordinuoti. Pirmas aukcionieriaus žingsnis yra skelbti pradinę kainos sistemą, tarkim $p^{(1)} \in P$. Rinkos subjektai – vartotojai ir gamintojai – atsakydami į tai paskelbia savo pasirinkimų rezultatus $D(p^{(1)})$ ir $S(p^{(1)})$, kaip apibrėžta (1.22) sąryšiu. Antru žingsniu aukcionierius suskaičiuoja atitinkamą visuminės perteklinės paklausos vektorių aibę $\zeta(p^{(1)})$. Jei $0 \in \zeta(p^{(1)})$, tai pusiausvyra pasiekta ir *tâtonnement*'o procesas baigtas. Priešingu atveju aukcionierius skelbia naują kainų sistemą $p^{(2)} \in P$, ir *tâtonnement*'o procesas tęsiamas.

Rinkos aukcionieriaus kainos sistemos pasirinkimas remiasi anksčiau minėtu pasiūlos ir paklausos dėsniu, kurį naudojo *Walras*as. Šio dėsnio esmė yra ta, kad jei visuminė perteklinė paklausa yra teigiama, t. y. paklausa didesnė už pasiūlą, tai kaina didinama. Atvirkščiai, jei visuminė perteklinė paklausa neigiama, t. y. paklausa yra mažesnė už pasiūlą, tai kaina mažinama. Besitęsiantis *tâtonnement*'o procesas generuoja kainų sistemų seką $p^{(1)}, p^{(2)}, \ldots, p^{(k)}, \ldots$. Galima tarti, kad šią seką sudaro nuo laiko priklausančios kainų sistemos – funkcijos $p(t) = (p_1(t), \ldots, p_\ell(t))$ reikšmės, t. y. $p_h(t_k) = p_h^{(k)}$ visiems h kuriai nors laiko momentų sekai $t_1, t_2, \ldots$. Be to, galima tarti, kad kainų sistema nuo laiko priklauso tolydžiai. Tada pasiūlos ir paklausos dėsnį galima išreikšti sąlyga

$$\begin{cases} p_1'(t) = a_1\zeta_1(p(t)), \\ \qquad \cdots \\ p_\ell'(t) = a_\ell\zeta_\ell(p(t)); \end{cases}$$

čia $a_1, \ldots, a_\ell$ yra teigiamos konstantos. Šios diferencialinių lygčių sistemos sprendinys, jei jis egzistuoja, yra nuo laiko priklausantis kainų sistemos vektorius $p(t)$. Pusiausvyros būseną atitinka pastovi kainų sistema. Stabilumo klausimas reiškia, ar pradėjus nuo bet kurios kainų sistemos reikšmės $p^{(1)} = p(t_1)$ kainų sistema $p(t)$ konverguos prie pastovios kainos.

Pusiausvyros stabilumo klausimų sprendimas remiasi paprastųjų diferencialinių lygčių teorija, ir šiame vadovėlyje nenagrinėjamas. Trumpa šios srities apžvalga yra *Nicola* knygos [22] 17-as skyrius. Stabilumo problemų ir apskritai statinės bendrosios pusiausvyros metodologinių prielaidų kritika yra *Keen* knygoje [16, 8 skyrius].

1.3 skyrelis Šiame skyrelyje pateiktų formalių susitarimų apie prekės ir kainos sąvokas visiškai pakanka vadovėlyje nagrinėjamam statiniam bendrosios pusiausvyros modeliui. Siekdamas parodyti, kad šis modelis gali apimti didesnę matematinės teorijos taikymų įvairovę, *Debreu* [9, 7 skyrius] pasiūlė gerokai platesnę šių sąvokų taikymo sritį. Pavyzdžiui, yra galimos tokios prekės ir kainos interpretacijos:

- ta pati gėrybė skirtingose vietose laikoma skirtingomis prekėmis;
- ta pati gėrybė skirtingais laiko momentais laikoma skirtingomis prekėmis;
- prekių gamyba ir vartojimas ateityje visiškai numatomi dabar.

Naudojantis šiomis interpretacijomis, galima būtų laikyti, kad prekės nepriklauso nuo vietos bei laiko ir neatsižvelgti į ateities neapibrėžtumą. Iš tikro, ta pati gėrybė gali būti skirtinga kaip prekė priklausomai nuo vietos, kurioje ji yra, ir nuo laiko, kada ji prieinama. Pavyzdžiui, prekė yra tokia ekonominė gėrybė, kaip grybai. Aišku, kad tos pačios rūšies grybai gali turėti skirtingas kainas skirtingose vietose ir skirtingu laiku. Todėl grybai tampa preke, jei žinomas jų kiekis, rūšis bei kur ir kada juos galima pirkti ar parduoti. Kita ekonominių gėrybių rūšis yra paslauga, pavyzdžiui, matematikos mokymas. Ši paslauga įvertinama žinių kiekiu, perduotu, sakysime, per dvi valandas. Matematikos paskaitai priskyrę vietą ir laiką, gauname prekę. Be to, abiem atvejais reikia sutarti dėl prekės matavimo vienetų. Pirmu atveju tokiu vienetu galėtų būti kilogramas, o antru – vienos valandos ilgio paskaita.

Ateities neapibrėžtumas žmogaus veikloje yra bene sunkiausia problema bet kurioje socialinėje teorijoje. Paprasčiausias šios problemos sprendimas (tiksliau vengimas ją spręsti) yra prielaida, jog žmogus turi gebėjimą tiksliai prognozuoti savo pasirinkimų pasekmes ir todėl tarp daugybės ateities scenarijų sugeba rasti labiausiai jam palankų. Priklausomai nuo ateities scenarijų gali skirtis prekių kiekiai ateityje. Šiuos aplinkybių nulemiamus skirtumus laikydami skirtingomis prekėmis, galime tarti, jog prekių gamyba ir vartojimas ateityje pilnai numatomi dabar.

Taigi nagrinėjamajame ekonomikos modelyje prekė yra tokia gėrybė, kuri apibūdinama savo fizinėmis savybėmis, savo vietos laiku ir ta pasaulio būsena, kuriai esant prekė pristatoma vartotojui. Kitaip tariant, preke gali būti kontraktas, pagal kurį įsipareigojama to kontrakto savininkui pristatyti sutartą prekę sutartu laiku į sutartą vietą, jei galios sutartos sąlygos dėl pasaulio būsenos. Pavyzdžiui, prekė yra „10 kiaušinių pristatymas nurodytu adresu 2012 metais gegužės 15 dieną 10 valandą, jei tuo metu šviečia saulė“. Tai – nuo ateities būsenos priklausančios prekės (angl. state-contingent commodity) pavyzdys. Dėl šių priežasčių *Arrow–Debreu* ekonomikos modelis yra vadinamas tarplaikiniu (angl. intertemporal), su tobulu ateities numatymu ir su pilna nuo ateities būsenų priklausančių prekių rinka, žinoma dabarties momentu.

Arrow–Debreu ekonomikos modelyje greta kitų prielaidų tariama, kad prekių kiekiams galioja begalinio dalumo sąlyga ir nagrinėjamas tik baigtinis prekių kiekis. Abi šios prielaidos nėra esminės ir jų paprastai nereikia, nagrinėjant ekonomikos modelius su begaliniu gėrybių kiekiu ir naudojant sudėtingesnį matematikos aparatą. Tiksliau kalbant, vartojimo aibė yra begalinio matavimo tiesinė erdvė, o kainų sistemos priklauso tokios erdvės jungtinei. Tokių matematinių modelių pavyzdžius galima rasti Mass-Colell (1975), Bewley (1972), Aliprantis ir Brown (1983) ir daugelyje kitų darbų.

Kitos teorijos. Kitos prekių kainos mechanizmo aiškinimo teorijos: klasikinė ir marksistinė gamybos kainų analizė, *Leontief* o[34] įėjimo–išėjimo analizė, *von Neumann*o tiesinio programavimo modelis.

Dinaminė pusiausvyra. Tarp XXI amžiaus matematikos problemų yra ir problemų, susijusių su bendrąja ekonomine pusiausvyra (žr. 8 problemą Smale (1998)). Kaip buvo minėta, čia aptariamas modelis yra statinis ta prasme, kad kainos nekinta laike.

1.4 problema. *Praplėsti bendrosios pusiausvyros matematinį modelį, leidžiant kainoms keistis laike.*

Tokia teorija turėtų būti suderinama su dabar egzistuojančia statine bendrosios ekonomikos pusiausvyros teorija. S. Smale nuomone, būtų labai gerai, jei kainų kitimas priklausytų nuo rinkos subjektų elgesio. Detaliau apie šią problemą ir jos matematinį formulavimą galima pasiskaityti Smale (1981).

1.5 skyrelis Kalbant apie ekonomikos teorijos ir realios tikrovės atitikimą, klausiama, ar naudojamas formalus matematikos aparatas nesukuria papildomų reikalavimų ekonomikos subjektų pažintiniams (kognityviniams) gebėjimams greta jo elgesio racionalumo ir kitų anksčiau minėtų prielaidų. Jei taip, tai ar tie papildomi reikalavimai yra realūs? Pavyzdžiui, *Campbell* (1978) klausia ar pasirinkimas iš gėrybių aibės yra realizuojamas apskaičiuojamumo prasme (angl. computable), t. y. ar galima rasti tokią pasirinkimo reikšmės apskaičiavimo procedūrą, kuri nėra per ilgai trunkanti ir lengvai adaptuojama pasirodžius naujoms alternatyvoms?

Įdomu tai, kad šį klausimą galima susieti su matematikos pagrindais net keliomis prasmėmis. Viena, matematikos teiginių konstruktyvumo prasme ir kita, aibių teorijos aksiomų sistemos pasirinkimo prasme. Kalbant apie pirmąjį atvejį, remsimės apskaičiuojamumu vadinamosios *Church*'io tezės kontekste (žr. *Rogers*, 1987, knygos $ 1.7 skyrelį). Neformaliai kalbant, funkcija $f\colon X \to \mathbb{N}$ bus vadinama rekursine, jei egzistuoja tokia *Turing*o mašina, kuri bet kuriems $(x, y) \in X \times \mathbb{N}$, į klausimą „ar $f(x)$ yra lygus y? “ atsako „taip“ jei $f(x) = y$ ir atsako „ne“ priešingu atveju. *Turing*o mašina yra idealizuotas skaitmeninis kompiuteris su neribota atmintimi, įkūnyjantis tai, kas vadinama efektyvia apskaičiavimo procedūra. Vadinamoji *Church*io–*Turing*o tezė (žr. *Turing*, 1950) teigia, kad *Turing*o mašinos pagalba apskaičiuojamos funkcijos yra kaip tik tos, kurias gali įveikti žmogaus protas.

Tarkime, kad X yra alternatyvų aibė, $\mathcal{B}$ yra X poaibių klasė ir $C(B) \in B$ yra vienintelis „geriausias“ elementas iš B kiekvienam $B \in \mathcal{B}$. Tokiu atveju turime funkciją $\mathcal{C}\colon B \mapsto C(B)$, $B \in \mathcal{B}$, kurią vadinsime *pasirinkimo funkcija*. Be to, tarkime, kad aibės X binarusis sąryšis $\succeq$ yra pilnas ir tranzityvus, t. y. $\succeq$ yra aibės X racionali preferencija.

[34]Wassily Leontief – Vasilijus Leontjevas (1906–1999), gimęs Sankt Peterburge ekonomistas, Nobelio premijos laureatas.

Sakysime, kad pasirinkimo funkcija $\mathcal{C}$ yra *realizuojama*, jei egzistuoja tokia rekursinė funkcija $f\colon\ X \to \mathbb{N}$, kad

- bet kuriems $x, y \in X$, $x \succeq y$ tada ir tik tada, kai $f(x) \geq f(y)$;
- kiekvienam $B \in \mathcal{B}$, $C(B) = \{x \in B\colon\ f(x) \geq f(y),\ \forall y \in B\}$.

Taip pat sakysime, kad pasirinkimo funkcija $\mathcal{C}$ yra *rekursiškai realizuojama*, jei aibėje $\mathcal{B} \times X$ egzistuoja rekursinė funkcija φ su reikšmėmis

$$\varphi((B,x)) = \begin{cases} 1 & \text{jei } x = C(B), \\ 0 & \text{priešingu atveju.} \end{cases}$$

Jei pasirinkimo funkcija $\mathcal{C}$ yra realizuojama, tai su kiekviena duota aibe $B \in \mathcal{B}$ galima apskaičiuoti pasirinkimą $C(B)$. Tuo tarpu, jei $\mathcal{C}$ yra rekursiškai realizuojama, tai žinome pasirinkimus $C(B)$ su kiekviena aibe $B \in \mathcal{B}$. *Lewis* (1985) įrodė, kad pasirinkimo funkcija *nėra* rekursiškai realizuojama, jei alterantyvų aibei galioja tam tikros sąlygos.

Pastarąjį *Lewis*o rezultatą galima vertinti, kaip įrodymą, kad *Arrow–Debreu* ekonomikos modelis reikalauja iš ekonomikos subjektų nerealių skaičiavimo gebėjimų, nes *Walras*o paklausos funkcija apibrėžiama (5.4) sąryšiu žemiau iš esmės yra ką tik apibrėžta pasirinkimo funkcija.

Antra vertus, pasirinkimo funkcija *yra* rekursiškai realizuojama, jei keičiama matematikoje priimta aibių teorijos *Zermelo–Fraenkel*io aksiomų sistema, kurios formulavimu pradedamas 2.1 skyrelis. *Tohmé* (2006) įrodė šį faktą, išrinkimo aksiomą (2.8 aksiomą) pakeitęs keliomis naujomis aksiomomis.

Post–autizmas ekonomikoje Tai, kad čia aptariamos ekonomikos teorijos problemos svarbios ne tik akademiniam mokslui, rodo studentų judėjimas prasidėjęs 2000 metų birželio mėnesį Prancūzijoje. Interneto svetainėje grupė ekonomikos studentų paskelbė peticiją prieš:

- realizmo trūkumą ekonomikos mokyme;
- matematikos traktavimą kaip „tikslas dėl tikslo“ ir jos „neribotą naudojimą“ ekonomikoje, pavertusiais ją „autistiniu mokslu“ pasimetusiu „įsivaizduojamuose pasauliuose“;
- neoklasikinės ekonomikos ir su ją susijusių sričių prievartinį dominavimą universitetiniuose ekonomikos kursuose; ir
- dogmatinį ekonomikos dėstymo stilių, nepaliekantį vietos kritiniam ir reflektyviam mąstymui.

Prancūzų studentų peticija agitavo už:

- sąsają su empirine ir konkrečia ekonomine realybe;

- mokslo prioritetą prieš scientizmą (angl. science over scientism);
- pliuralizmą požiūrių, prisitaikiusių prie ekonomikos objektų įvairovės ir svarbiausius ekonomikos klausimus gaubiančią nežinomybę; ir
- jų profesorių inicijuojamą reformą, siekiančią išgelbėti ekonomiką nuo autizmo ir socialinio neatsakingumo būsenos.

Šios peticijos sukeltą kontroversiją ne tik Prancūzijoje, bet ir likusiame pasaulyje atspindi *Fullbrook* (2003) surinktos apžvalgos ir interneto svetainė
`http://www.paecon.net` .

Papildoma literatūra

1. C. D. Aliprantis and D. J. Brown (1983). Equilibria in Markets with a Riesz Space of Commodities. *Journal of Mathematical Economics*, 11, p. 189–207
2. K. J. Arrow and G. Debreu (1954). The Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy. *Econometrica*, vol. XXII, p. 265–290

   `http://cowles.econ.yale.edu/P/cp/p00b/p0087.pdf`
3. T. Bewley (1972). Existence of Equilibria in Economies with Infinitely Many Commodities. *Journal of Economic Theory*, 4, p. 414–540.
4. D. E. Campbell (1978). Realization of Choice Functions. *Econometrica*, 46, p. 171–180.
5. G. Debreu (1984). Economic Theory in the Mathematical Mode. *The American Economic Review*, vol. 74, No. 3, p. 267–278.
6. E. Fullbrook (2003). *The Crisis in Economics: The post–autistic economics movement: the first 600 days.* Economics as Social Theory Series. Routledge.
7. A. Lewis (1985). On Effectively Computable Realizations of Choice Functions. *Mathematical Social Sciences*, 10, p. 43–85.
8. A. Mas-Colell (1975). A Model of Equilibrium with Differentiated Commodities. *Journal of Mathematical Economics*, 2, 263–295.
9. H. Rogers, Jr. (1987). *Theory of Recursive Functions and Effective Computability*. The MIT Press, Cambridge.
10. S. Smale (1981). Global analysis and economics. Rinkinyje: *Handbook of Mathematical Economics* 1, Eds. K. J. Arrow ir M. D. Intrilligator, p. 331–370. North-Holland, Amsterdam.

11. S. Smale (1998). Mathematical problems for the next century. *The Mathematical Intelligencer*, vol. 20, No. 2, p. 7–15.

12. F. Tohmé (2006). Formal Limitations in Economic Theory and the Alternative Set Theory. Working Paper.

13. A. M. Turing (1950). Computing machinery and intelligence. *Mind*, vol. 59, p. 433–460.

2 Skyrius

Matematika I

> Matematinis mąstymas grindžiamas mokėjimu skaityti ir vartoti kalbą, mokėjimu patikimai ir sąryšingai išreikšti tiesas bei gerai apmąstytas idėjas, skaičiavimo nulemtos tvarkos, sąryšio ir kilmės matymu.
>
> Janas Sniadeckis, 1818.

Šiame skyriuje pateikiama matematinės analizės sutelkta apžvalga. Čia apsiribojama tik ta jos dalimi ir tokiu jos gilumo lygiu, kuris yra būtinas ir pakankamas suprasti vadovėlyje dėstomus bendrosios pusiausvyros matematinius pagrindus. Svarbiausias šios apžvalgos privalumas yra vieninga visų rezultatų dėstymo forma, kuri dažniausiai yra labai įvairi skirtinguose vadovėliuose. Neįprastas universitetiniams matematikos kursams yra tik 2.2 skyrelis apie daugiareikšmes funkcijas, vadinamas atitiktimis. Kita neįprasta matematikams analizės dalis yra *Brouwer*io ir *Kakutani*o nejudamojo taško teoremos, kurių detalus nagrinėjimas atidedamas iki 4 skyriaus, pavadinto matematika II.

Pirmasis skyrelis apie aibes ir skaičius naudojamas 3 skyriuje, kuriame dėstoma individualaus pasirinkimo teorija. Renkamasi tarp alternatyvų, kurios matematiškai formuluojamas kaip abstrakčios aibės elementai.

2.1 Aibės ir skaičiai

Svarbiausi matematinės analizės objektai yra euklidinės erdvės ir funkcijos. Euklidinė ervė yra iš realiųjų skaičių rinkinių sudaryta aibė, turinti įprastą tiesinės ir metrinės erdvės struktūrą, panašią į tą, kurią turime realiųjų skaičių aibėje. Viena iš svarbiausių tokios struktūros savybių yra erdvės pilnumas, reiškiantis, kad kiekviena šios erdvės elementų Koši seka konverguoja. Tiesiausias pilnumo savybės įrodymas yra šiame skyrelyje aprašoma realiųjų skaičių aibės konstrukcija, naudojantis racionaliųjų skaičių Koši sekomis.

Pradedame nuo aibės sąvokos todėl, kad visi matematikos objektai yra apibrėžiami naudojantis aibėmis. Savo ruožtu, aibė yra pirminė matematikos sąvoka ir nėra apibrėžiama naudojantis kitais matematikos objektais. Aibė apibrėžiama matematikoje įprastu būdu naudojant aksiomas, t. y. išvardijant objektus jų savybėmis. Tai reiškia, jog apibrėžiamos aibių konstravimo taisyklės remiantis paprasčiausiomis aibėmis, kurių egzistavimas yra postuluojamas.

Aibės ir jų konstravimas Neformaliai kalbant, aibė yra rinkinys objektų, paprastai turinčių kurią nors bendrą, juos jungiančią savybę. Sąvokos „objektas“, „rinkinys“ ir „savybė“ čia vartojamos įprastine bendrinės kalbos prasme. Objektai, sudarantys aibę, vadinamai *aibės elementais*. Toliau, kaip ir bet kurioje matematikos teorijoje, aibės elementai yra tik aibės. Matematikos taikymuose gali atsirasti ir kitokio tipo aibės elementų.

Vienos aibės buvimas kitos aibės elementu yra pirminė matematikos sąvoka, apibrėžiama toliau aptariama aksiomų sistema. Jei X yra aibė, o x yra jos elementas, tai šis sąryšis žymimas „$x \in X$“. Žodžiais šis sąryšis išreiškiamas „x yra aibės X elementas“ arba „aibė X turi elementą x“. Jei x nėra aibės X elementas, tai rašoma $x \notin X$. Aibę visiškai apibrėžia jos elementai. Tiksliau šią savybę formuluoja pirmoji aibių teorijos aksioma:

2.1 aksioma. Jei dvi aibės turi tuos pačius elementus, tai jos yra lygios.

Šia aksioma nusakoma aibės savybė vadinama *ekstensija*. Remiantis ekstensijos savybe, toliau aksiomomis apibrėžiamos aibės yra vienintelės. Lygybė tarp aibių x ir y žymima $x = y$.

Kita aksioma postuluoja tuščiosiosw aibės egzistavimą:

2.2 aksioma. Egzistuoja elementų neturinti aibė, vadinama *tuščiąja aibe* ir žymima $\varnothing$.

Tolesnės aksiomos nurodo metodus, kuriais remiantis iš jau turimų aibių sudaromos naujos aibės. Pirmoji iš jų vadinama *poravimo aksioma*.

2.3 aksioma. Su bet kuriomis dviem aibėmis x ir y, egzistuoja aibė $X := \{x, y\}$, kurios elementai yra tik tos dvi aibės.

Tuo atveju, kai poravimo aksiomoje aibės x ir y yra lygios, gauname egzistavimą aibės, kurios vienintelis elementas yra bet kuri duota aibė, t. y. egzistuoja *vieninė aibė* $\{x\} := \{x, x\}$ (angl. singleton).

Dėl aibių ekstensijos savybės, bet kokia papildoma aibės elementų struktūra yra nesvarbi apibūdinant aibes. Pavyzdžiui, aibės $\{x, y\}$ ir $\{y, x\}$ yra lygios nepriklausomai nuo jų elementų išdėstymo tvarkos, ir šia prasme bet kuri dviejų elementų aibė yra *nesutvarkytoji pora*.

Tačiau tenka naudotis du ir daugiau elementų turinčiomis aibėmis, kuriose vis dėlto norime nurodyti aibės elementų tvarką. Tvarkos struktūra aibėje apibrėžiama tokiu būdu: bet kurių dviejų aibių x ir y *sutvarkytoji pora* yra aibė

$$(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\}. \tag{2.1}$$

Tokio apibrėžimo motyvas yra svarbus, bet nesunkiai įrodomas faktas (2.1.1 pratimas): bet kuriems x, y, u, v

$$(x, y) = (u, v) \text{ tada ir tik tada, kai } x = u \text{ ir } y = v. \tag{2.2}$$

Toliau, remdamiesi sutvarkytąja pora, apibrėžiame sutvarkytąjį trejetą $(x, y, z) := ((x, y), z)$. Šią procedūrą apibendriname apibrėždami bet kurio baigtinio ilgio sutvarkytąjį rinkinį $(x_1, \ldots, x_n)$, naudodamiesi matematine indukcija, kuri apibrėžiama toliau kartu su natūraliųjų skaičių aibe.

Kita aibių konstravimo aksioma vadinama *jungimo aksioma*.

2.4 aksioma. Bet kuriai aibei X egzistuoja tokia aibė, žymima $\bigcup X$ ir vadinama *jungtimi* (angl. union), kurios vieninteliai elementai yra aibės, priklausančios kuriam nors X elementui.

Kitaip kalbant, aibės X jungties $\bigcup X$ elementas $x \in \bigcup X$, jei $x \in y$ su kuriuo nors $y \in X$.

Tegul x ir X yra tokios dvi aibės, kad kiekvienas x elementas yra ir X elementas. Tada sakysime, kad x yra aibės X *poaibis*, o X yra aibės x *viršaibis*. Sąryšiui tarp poaibio ir viršaibio žymėti naudojamas simbolis $\subset$; pavyzdžiui, šiuo atveju $x \subset X$.

2.5 aksioma. Bet kuriai aibei X egzistuoja tokia aibė, vadinama *laipsnine aibe* (angl. power set) ir žymima $\mathcal{P}(X)$, kurios vieninteliai elementai yra visi X poaibiai ir tuščioji aibė $\varnothing$.

Dar viena aibių konstravimo aksioma apibrėžiama naudojantis nurodyta aibių savybe. Aibių savybė formuluojama teiginiu apie aibes ir priklausomumą aibėms, naudojant logikos jungtukus $\wedge$ (ir), $\vee$ (arba), $\neg$ (neigimas), $\Rightarrow$ (išplaukia), ( ), [ ] (skliaustai), taip pat vadinamuosius kvantorius: $\forall$ (kiekvienam) ir $\exists$ (egzistuoja). Tokie teiginiai matematinėje logikoje vadinami taisyklingai formuluojama formule.

2.6 aksioma. Bet kuriai aibei X ir taisyklingai formuluojamai formulei $\Phi(\cdot)$, priklausančiai nuo X elementų, egzistuoja aibė, sudaryta iš tų X elementų x, kuriems teisinga formulė $\Phi(x)$, ir ši aibė žymima

$$\{x \in X \colon \Phi(x)\}. \tag{2.3}$$

Kadangi (2.3) aibė yra X poaibis ir priklauso nuo $\Phi(\cdot)$ savybės, toks aibių apibrėžimo būdas vadinamas *poaibio aksiomų schema*. Vietoje (2.3) kartais rašoma $\{x \colon \Phi(x)\}$, jei iš konteksto aišku, kokios aibės X elementai yra aibės x. Neatsižvelgiant į šį apribojimą galima gauti objektų rinkinius, kurie sukelia prieštaravimų. Pavyzdžiui, taip atsitinka bandant atsakyti į klausimą ar pati „aibė“ $\{x\colon\ x \notin x\}$ yra jos pačios elementas.

Naudojantis minėtomis aibių konstravimo taisyklėmis, apibrėžiamos kitos standartinės operacijos su aibėmis: dviejų aibių x ir y sąjunga

$$x \cup y := \bigcup\{x, y\};$$

aibių x ir y skirtumas

$$x \setminus y := \{z \in x\colon\ z \notin y\};$$

bet kurios aibės X sankirta

$$\bigcap X := \Big\{y \in \bigcup X\colon\ \forall Y \in X, [y \in Y]\Big\};$$

ir dviejų aibių x ir y sankirta

$$x \cap y = \bigcap\{x, y\}.$$

Dabar galime apibrėžti aibę, kurios elementai yra sutvarkytosios poros (x, y), kai $x \in X$ ir $y \in Y$. Remiantis (2.1) apibrėžimu, $(x, y) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X \cup Y))$. Tada aibė

$$X \times Y := \{z \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X \cup Y))\colon\ \exists x \in X\ \exists y \in Y\ [z = (x, y)]\}$$

vadinama *Dekarto sandauga*. Naudojant indukciją, kiekvienam $n \geq 2$ apibrėžiama aibių $X_1, \ldots, X_n$ Dekarto sandauga

$$\begin{aligned} X_1 \times \cdots \times X_n &:= (X_1 \times \cdots \times X_{n-1}) \times X_n \\ &= \{(x_1, \ldots, x_n)\colon\ x_1 \in X_1, \ldots, x_n \in X_n\}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Dekarto sandaugos $X_1 \times \cdots \times X_n$ elementas $x := (x_1, \ldots, x_n)$ vadinamas *vektoriumi*, o aibės $x_1, \ldots, x_n$ vadinamos x elemento *koordinatėmis*. Taigi sutvarkytoji pora yra vektorius, turintis tik dvi koordinates. Prie Dekarto sandaugos grįšime apibrėždami euklidinę erdvę 2.3 ir 2.4 skyreliuose.

Begalybės aksioma vadinamai prielaidai formuluoti naudosime jau turimas aksiomas. Kiekvienai aibei x iš pradžių galime sukonstruoti vieninę aibę $\{x\}$, po to porinę aibę $\{x, \{x\}\}$, kurios jungtis yra aibė

$$S(x) := x \cup \{x\} = \bigcup\{x, \{x\}\},$$

vadinama *tęsiniu* (angl. successor), t. y. x aibės tęsinys yra aibė, kurios vieninteliai elementai yra visi x elementai ir pati aibė x. Kaip matysime netrukus, ši aibė naudojama apibrėžti natūraliesiems skaičiams

$$0 := \varnothing, \quad 1 := S(0) = \{0\}, \quad 2 := S(1) = \{0, 1\}, \quad \ldots. \tag{2.5}$$

Aibės, kurios elementai yra visos šios aibės, egzistavimą garantuoja begalybės aksioma:

2.7 aksioma. Egzistuoja aibė, vadinama *indukcine,* kuriai priklauso tuščioji aibė $\varnothing$ ir kiekvieno jos elemento x tęsinys $S(x)$.

Tegul X ir Y yra aibės. *Funkcija* iš X į Y vadinamas toks Dekarto sandaugos poaibis $f \subset X \times Y$, kad kiekvienam $x \in X$, $(x, y) \in f$ su ne daugiau kaip vienu elementu $y \in Y$. Paprastai vienintelis toks elementas y vadinamas funkcijos f reikšme ir žymimas $f(x)$. Daugiau apie funkcijas kalbama kitame skyrelyje.

Paskutinė šio sąrašo aksioma, vadinama *rinkimo aksioma,* teigia egzistuojant specialaus tipo funkcijai:

2.8 aksioma. Bet kuriai aibei X, neturinčiai tuščios aibės kaip elemento, egzistuoja tokia funkcija f iš X į $\bigcup X$, kad $f(x) \in x$ kiekvienam $x \in X$.

Kitaip kalbant, turėdami bet kurį netuščiųjų aibių rinkinį (aibę X), mes galime išrinkti po vieną elementą iš kiekvienos aibės. Taip formuluojama rinkimo aksioma atrodo akivaizdi. Bet ja naudojantis galima įrodyti tokį faktą. Vienetinio spindulio rutulį galima padalyti į penkias dalis taip, kad sujungę dvi iš tų dalių gauname vieną vienetinio spindulio rutulį, o sujungę kitas tris dalis gauname kitą vienetinio spindulio rutulį. Jei tai būtų galima atlikti *konstruktyviu* būdu, tai visos mūsų ekonomikos problemos senai būtų išspręstos ir nebereikėtų šio vadovėlio. Deja, vadovėlis reikalingas, nes minėtas rutulio dalijimas į penkis gabalus yra galimas tik naudojantis nekonstruktyvia rinkimo aksioma; pats egzistavimo faktas dar nenurodo būdo, kaip konstruoti tokią funkciją.

Čia išdėstytas aibių aksiomų sąrašas vadinamas Cermelio[1]-Frenkelio[2] aksiomų sistema. Ši sistema yra labiausiai paplitusi, nors yra ir kitų aibes apibrėžiančių aksiomų sistemų.

Natūralieji skaičiai Natūralieji skaičiai matematikoje apibrėžiami arba juos konstruojant, arba aksiomiškai. Norėdami iliustruoti ankstesnį teiginį, kad visi matematikos objektai apibrėžiami naudojantis tik aibėmis, pasirinkome pirmąjį būdą apibrėžti skaičiams, juos konstruojant iš aibių. Prisiminę indukcinės aibės apibrėžimą begalybės aksioma 2.7, turime tokį skaičiaus apibrėžimą.

2.9 apibrėžimas. *Natūraliuoju skaičiumi vadinama aibė, priklausanti kiekvienai indukcinei aibei.*

Kadangi tuščioji aibė $\varnothing$ priklauso kiekvienai indukcinei aibei, tai kiekvienai indukcinei aibei priklauso ir visos (2.5) išnašoje išvardytos aibės. Todėl pagal apibrėžimą kiekviena iš (2.5) aibių yra natūralusis skaičius. Visos jos sudaro naują aibę, vadinamą *natūraliųjų skaičių aibe.*

2.10 teorema. *Egzistuoja aibė, žymima $\mathbb{N}$, kurios elementai yra tik natūralieji skaičiai.*

[1]Ernst Zermelo – Ernstas Cermelas (1871–1953), vokiečių matematikas.

[2]Adolf Abraham Halevi Fraenkel – Adolfas Frenkelis (1891–1965), vokiečių kilmės Izraelio matematikas.

Įrodymas. Tegul X yra indukcinė aibė; begalybės aksiomos dėka ji egzistuoja. Remiantis poaibio aksiomų schema, egzistuoja aibė

$$N := \{x \in X \colon\ x \text{ priklauso kiekvienai kitai indukcinei aibei}\}.$$

Tai įrodo teoremą, kadangi $x \in N$ tada ir tik tada, kai x priklauso kiekvienai indukcinei aibei. □

Nesunku patikrinti, kad $\mathbb{N}$ yra indukcinė aibė. Todėl jai priklauso visos (2.5) aibės, t. y. 0, 1, $2, \dots$ yra natūralieji skaičiai. Kitų elementų $\mathbb{N}$ aibė neturi pagal apibrėžimą. Kartais natūraliaisiais vadinami tik skaičiai $1, 2, \dots$. Tai yra tik susitarimo reikalas; mes toliau šią aibę žymėsime $\mathbb{N}_+ := \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, \dots\}$.

Tai, kad $\mathbb{N}$ yra indukcinė aibė naudojama pagrindžiant labai svarbų matematikoje principą:

2.11 Indukcijos principas. *Jei $A \subset \mathbb{N}$, $0 \in A$ ir $S(n) \in A$ kiekvienam $n \in A$, tai $A = \mathbb{N}$.*

Iš šio indukcijos principo gauname tokią dažnai naudojamą jo versiją: tegul P yra natūraliųjų skaičių savybė; jei 0 turi P ir jei $S(n)$ turi P kiekvienam $n \in \mathbb{N}$, kuris turi P, tai P galioja visiems natūraliesiems skaičiams.

Natūraliųjų skaičių aibėje sumos ir daugybos operacijos apibrėžiamos, naudojant indukciją, atitinkamai, taip: visiems $k, n \in \mathbb{N}$,

$$k + 0 := k \quad \text{ir} \quad k + S(n) := S(k + n); \tag{2.6}$$

$$k \cdot 0 := 0 \quad \text{ir} \quad k \cdot S(n) := k + k \cdot n. \tag{2.7}$$

Vėlgi remiantis indukcija, nesunkiai patikrinama, jog šios operacijos turi įprastines komutatyvumo, asociatyvumo ir distributyvumo savybes.

Mūsų pasirinkta natūraliųjų skaičių konstrukcija (2.5) leidžia natūraliai įvesti tvarką aibėje $\mathbb{N}$. Visiems $k, n \in \mathbb{N}$, sakysime, kad k yra *mažesnis už* n, t. y.

$$k < n, \qquad jei \qquad k \in n. \tag{2.8}$$

Nesunku patikrinti (2.1.4 pratimas), kad sąryšis $<$ tarp natūraliųjų skaičių yra tranzityvus, t. y. bet kuriems $k, n, m \in \mathbb{N}$, jei $k < n$ ir $n < m$, tai $k < m$. Tačiau vadinamoji trichotomijos savybė patikrinama ne visai tiesiogiai. Pradėsime nuo pagalbinio teiginio.

2.12 lema. (a) *Bet kuriems $k, n \in \mathbb{N}$, $k \in n$ tada ir tik tada, kai $S(k) \in S(n)$;*

(b) *Nėra natūraliųjų skaičių, kurie būtų patys savo elementais.*

Įrodymas. Įrodydami (a) tarkime, kad $k, n \in \mathbb{N}$. Iš pradžių tegul $S(k) \in S(n)$. Pagal $S(n)$ apibrėžimą turime arba $S(k) \in n$, arba $S(k) = n$. Abiem atvejais $k \in n$. Šio teiginio įrodymui priešinga kryptimi, naudodamiesi indukcija parodysime, kad aibė

$$A := \{n \in \mathbb{N} \colon\ (\forall\, k \in n)[S(k) \in S(n)]\}$$

sutampa su visa $\mathbb{N}$. Iš tikrųjų, $0 = \varnothing \in A$, nes $\varnothing \in \mathbb{N}$ pagal $\mathbb{N}$ apibrėžimą, ir aibę A apibrėžianti savybė galioja tuščiajai aibei, nes ji neturi elementų. Tarkime, kad $n \in A$. Reikia įrodyti, kad jei $k \in S(n)$, tai $S(k) \in S(S(n))$. Tegul $k \in S(n)$. Tada pagal $S(n)$ apibrėžimą arba $k = n$, arba $k \in n$. Pirmu atveju $S(k) = S(n) \in S(S(n))$. Antru atveju, kadangi $n \in A$, tai $S(k) \in S(n) \subset S(S(n))$. Taigi abiem atvejais $S(k) \in S(S(n))$. Remiantis indukcijos principu $A = \mathbb{N}$, ir tuo pačiu teiginys (a) įrodytas.

Įrodant (b) tegul $A := \{n \in \mathbb{N}\colon\ n \notin n\}$. Visų pirma, $0 \in A$, kadangi tuščioji aibė elementų neturi. Jei $n \notin n$, tai $S(n) \notin S(n)$ pagal ką tik įrodytą teiginį (a). Taigi A yra indukcinė aibė, ir todėl sutampa su $\mathbb{N}$. $\square$

Dabar galime įrodyti natūraliųjų skaičių *trichotomijos* savybę:

2.13 teorema. *Bet kuriems $k, n \in \mathbb{N}$, galioja tik viena iš trijų alternatyvų: arba $k < n$, arba $k = n$, arba $n < k$.*

Įrodymas. Pirmiausia įrodysime, kad visos trys alternatyvos yra nesuderinamos. Jei $k \in n$ ir $k = n$, tai $k \in k$, kas yra neįmanoma dėka 2.12(b) lemos. Jei $k \in n$ ir $n \in k$, tai pagal tranzityvumą gauname tą patį prieštaravimą $k \in k$. Taigi pakanka įrodyti, kad galioja bent viena iš trijų alternatyvų. Tam parodysime, kad aibė

$$A := \{n \in \mathbb{N}\colon\ (\forall k \in \mathbb{N})\,[k \in n \ \text{ arba } \ k = n \ \text{ arba } \ n \in k]\}$$

sutampa su $\mathbb{N}$. Kiekvienam $k \in \mathbb{N}$ pagal indukciją turime arba $0 = k$, arba $0 \in k$. Todėl $0 \in A$. Tegul $n \in A$ ir $k \in \mathbb{N}$. Jei $k \in n$ arba $k = n$, tai $k \in S(n)$. Jei $n \in k$, tai dėka 2.12(a) lemos $S(n) \in S(k)$, ir todėl arba $S(n) \in k$, arba $S(n) = k$. Taigi $S(n) \in A$, ir $A = \mathbb{N}$ pagal indukciją. $\square$ $\square$

Kita dažnai reikalinga natūraliųjų skaičių tvarka apibrėžiama taip: visiems $k, n \in \mathbb{N}$, sakysime, kad k yra *ne didesnis už* n, t. y.

$$k \leq n, \qquad jei \quad \text{arba} \quad k \in n, \quad arba \quad k = n.$$

2.14 teorema. *Bet kuriems $n, m, k \in \mathbb{N}$, galioja*

$$m \in n \qquad \textit{tada ir tik tada, kai} \qquad m + k \in n + k. \tag{2.9}$$

Jei be to, $k \neq 0$, tai

$$m \in n \qquad \textit{tada ir tik tada, kai} \qquad m{\cdot}k \in n{\cdot}k. \tag{2.10}$$

Įrodymas. Teiginių (2.9) ir (2.10) įrodymai panašūs. Todėl įrodysime tik antrąjį teiginį, o pirmąjį paliekame kaip pratimą skaitytojui. Taigi tegul $k \neq 0$ ir $m \in n$. Parodysime, kad aibė

$$A := \{i \in \mathbb{N}\colon\ m{\cdot}S(i) \in n{\cdot}S(i)\}$$

sutampa su visa $\mathbb{N}$. Kadangi kiekvienam natūraliam skaičiui $k \neq 0$ egzistuoja toks $i \in \mathbb{N}$, kad $k = S(i)$ (2.1.3 pratimas), tai bus įrodyta (2.10) teiginio implikacija „$\Rightarrow$“. Pirma, $0 \in A$, nes $m{\cdot}S(0) = m$ ir $n{\cdot}S(0) = n$ atsižvelgiant į (2.7). Tarkime, kad $j \in A$. Du kartus remdamiesi (2.7) ir (2.9), gauname

$$m{\cdot}S(S(j)) = m{\cdot}S(j) + m \in n{\cdot}S(j) + m \in n{\cdot}S(j) + n = n{\cdot}S(S(j)).$$

Taigi $S(j) \in A$. Remiantis indukcija, $A = \mathbb{N}$, kas įrodo (2.10) teiginio „$\Rightarrow$“ implikaciją.

(2.10) teiginio priešingos implikacijos įrodymui remsimės trichotomijos savybe ir jau įrodyta „$\Rightarrow$“ implikacija. Tegul $m{\cdot}k \in n{\cdot}k$. Tada $m = n$ nėra galima, nes tada būtų $m{\cdot}k = n{\cdot}k$. Taip pat $n \in m$ nėra galima, nes tada $n{\cdot}k \in m{\cdot}k$. Todėl $m \in n$; tai ir reikėjo įrodyti. $\square$

Kitas teiginys vadinamas natūraliųjų skaičių aibės *Archimedo savybe*.

2.15 teorema. *Bet kuriems $n, m \in \mathbb{N}_+$ egzistuoja toks $k \in \mathbb{N}$, kad $n < mk$.*

Įrodymas. Nesunku rasti norimą $k \in \mathbb{N}$, kai arba $n \in m$, arba $n = m$. Tarkime, kad teiginys nėra teisingas, kai $m \in n$. Tada remiantis trichotomijos savybe egzistuoja tokie $n, m \in \mathbb{N}_+$, kad $m \in n$ ir $mk \leq n$ kiekvienam $k \in \mathbb{N}$. Naudojantis tuo, kad $1 \leq m$, galioja (2.10) ir tranzityvumu, turime $k \leq n$ kiekvienam $k \in \mathbb{N}$. Tačiau atveju, kai $k = S(n) \in \mathbb{N}$, turime arba $S(n) = n$, arba $S(n) \in n \in S(n)$. Tęsinio apibrėžimo ir 2.12(b) lemos dėka abiem atvejais gauname prieštarą, kuri įrodo teoremą. $\square$

Rekursija aibėje $\mathbb{N}$ Tarkime, kad X yra aibė ir f yra funkcija iš $\mathbb{N}$ į X. Kaip nusakyti tokios funkcijos reikšmes? Jei žinome reikšmę $f(0)$ ir tokią funkciją F iš X į X, kad $f(n+1) = F(f(n))$ kiekvienam $n \in \mathbb{N}$, tai nuosekliai gauname reikšmes

$$f(0), \quad f(1) = F(f(0)), \quad f(2) = F(f(1)), \quad \ldots \quad \text{ir t. t.}$$

Tačiau nežinant, jog funkcija f egzistuoja, tai ar galima įrodyti jos egzistavimą žinant pradinę reikšmę $f(0)$, o kitoms jos reikšmėms galioja funkcijos F nusakoma nuosekli taisyklė, vadinama rekursija. Toks teiginys vadinamas *rekursijos teorema* natūraliųjų skaičių aibei $\mathbb{N}$:

2.16 teorema. *Tarkime, kad X yra aibė, $x \in X$ ir F yra funkcija iš X į X. Egzistuoja vienintelė tokia funkcija f iš $\mathbb{N}$ į X, kad (a) $f(0) = x$ ir (b) $f(n+1) = F(f(n))$ kiekvienam $n \in \mathbb{N}$.*

Įrodymas. Šiame įrodyme sakysime, kad funkcija u yra *galima*, jei jos apibrėžimo sritis $\mathcal{A}(u) \subset \mathbb{N}$, kitimo sritis $\mathcal{R}(u) \subset X$ (arba $u \subset \mathbb{N} \times X$) ir galioja kitos dvi savybės:

(i) jei $0 \in \mathcal{A}(u)$, tai $u(0) = x$;

(ii) jei $S(n) \in \mathcal{A}(u)$ (čia $n \in \mathbb{N}$), tai $n \in \mathcal{A}(u)$ ir $u(S(n)) = F(u(n))$.

Tegul $\mathcal{F}$ yra galimų funkcijų aibė, ir tegul $f := \bigcup \mathcal{F}$. Pagal apibrėžimą galioja

$$\begin{aligned} (n,y) \in f \qquad & \text{tada ir tik tada, kai } (n,y) \text{ priklauso kuriai nors galimai } u \\ & \text{tada ir tik tada, kai } u(n) = y \text{ su kuria nors galima } u. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Įrodysime, kad funkcijai f galioja teoremos tvirtinimas. Tai padarysime įrodymą padalinę keturiais žingsniais: (1) f yra funkcija, (2) f yra galima, (3) jos apibrėžimo sritis $\mathcal{A}(f) = \mathbb{N}$ ir (4) f yra vienintelė.

1. Parodysime, kad f yra funkcija. Pagal apibrėžimą $f \subset \mathbb{N} \times X$. Tegul

$$A := \{n \in \mathbb{N} \colon \ (n,y) \in f \quad \text{galioja ne daugiau, kaip su vienu} \quad y\}.$$

Reikia įrodyti, kad $A = \mathbb{N}$. Remiantis indukcijos principu pakanka parodyti, kad A yra indukcinė aibė. Tegul $(0, y_1) \in f$ ir $(0, y_2) \in f$. Dėka (2.11), egzistuoja dvi galimos funkcijos u_1 ir u_2 su reikšmėmis $u_1(0) = y_1$ ir $u_2(0) = y_2$. Tačiau remiantis (i) savybe $y_1 = x = y_2$, ir todėl $0 \in A$.

Tarkime, kad $n \in A$; parodysime, kad $S(n) = n + 1 \in A$. Tam tikslui tarkime, kad $(S(n), y_1) \in f$ ir $(S(n), y_2) \in f$. Dar kartą dėka (2.11), egzistuoja tokios dvi galimos funkcijos u_1 ir u_2, kurių reikšmės $u_1(S(n)) = y_1$ ir $u_2(S(n)) = y_2$. Tačiau remiantis (ii) savybe, galioja

$$y_1 = u_1(S(n)) = F(u_1(n)) \quad \text{ir} \quad y_2 = u_2(S(n)) = F(u_2(n)).$$

Be to, $u_1(n) = u_2(n)$ kadangi pagal prielaidą $n \in A$. Todėl $y_1 = y_2$, t. y. $S(n) \in A$. Remiantis indukcijos principu $A = \mathbb{N}$, ir todėl f yra funkcija.

2. Parodysime, kad funkcija $f \subset \mathbb{N} \times X$ yra galima. Tam pakanka patikrinti savybes (i) ir (ii). Atsižvelgiant į (i) tegul $0 \in \mathcal{A}(f)$. Pagal f apibrėžimą privalo egzistuoti tokia galima funkcija u, kad $u(0) = f(0)$. Kadangi $u(0) = x$, tai $f(0) = x$.

Atsižvelgiant į (ii) tegul $S(n) \in \mathcal{A}(f)$. Vėl pagal f apibrėžimą privalo egzistuoti tokia galima funkcija u, kad $u(S(n)) = f(S(n))$. Kadangi u yra galima, $n \in \mathcal{A}(u)$ (taigi $u(n) = f(n)$) ir

$$f(S(n)) = u(S(n)) = F(u(n)) = F(f(n)).$$

Gavome, kad (ii) savybė galioja funkcijai f, ir todėl ji yra galima funkcija.

3. Lygybė $\mathcal{A}(f) = \mathbb{N}$ bus įrodyta, jei parodysime, kad $\mathcal{A}(f)$ yra indukcinė aibė. Funkcija $\{(0, x)\}$ yra galima, ir todėl $0 \in \mathcal{A}(f)$. Tarkime, kad $n \in \mathcal{A}(f)$; parodysime, kad $S(n) \in \mathcal{A}(f)$. Tegul $S(n) \notin \mathcal{A}(f)$ ir

$$u := f \cup \{(S(n), F(f(n)))\}.$$

Tada u yra funkcija, $\mathcal{A}(u) \subset \mathbb{N}$ ir $\mathcal{R}(u) \subset X$. Parodysime, kad u yra galima, t. y. jai galioja (i) ir (ii) savybės. Kadangi $u(0) = f(0) = x$, galioja (i). Tegul $S(k) \in \mathcal{A}(u)$ su kuriuo nors $k \in \mathbb{N}$. Jei $S(k) \neq S(n)$, tai $S(k) \in \mathcal{A}(f)$ ir $u(S(k)) = f(S(k)) =$

$F(f(k)) = F(u(k))$. Jei $S(k) = S(n)$, tai $k = n$ remiantis natūraliųjų skaičių trichotomija ir 2.12(a) lema. Pagal prielaidą $n \in \mathcal{A}(f)$. Gauname, kad

$$u(S(k)) = F(f(k)) = F(u(n)),$$

ir todėl galioja (ii) savybė. Vadinasi u yra galima funkcija. Atsižvelgiant į jos apibrėžimą $u \subset f$ ir $S(n) \in \mathcal{A}(f)$. Ši prieštara rodo, kad prielaida $S(n) \notin \mathcal{A}(f)$ negalima. Todėl $S(n) \in \mathcal{A}(f)$ ir $\mathcal{A}(f)$ yra indukcinė aibė, taigi $\mathcal{A}(f) = \mathbb{N}$.

4. Liko įrodyti, kad f yra vienintelė. Tarkime, kad f_1 ir f_2 yra dvi tokios funkcijos, kurioms galioja teoremos išvada ir

$$A := \{n \in \mathbb{N} \colon \; f_1(n) = f_2(n)\}.$$

Pakanka, įrodyti, kad A yra indukcinė aibė. Tai paliekama atlikti skaitytojui, kaip 2.1.5 pratimas. □

Binarieji sąryšiai Realiesiems skaičiams apibrėžti naudosimės matematikoje dažnai taikomu naujų aibių formavimo būdu, kuris remiasi vadinamosiomis ekvivalentumo klasėmis. Tai reiškia, kad aibė padalijama į nesikertančias klases, kurios tampa naujos aibės elementais. Šią matematinę konstrukciją apibrėžia specialios rūšies binarieji sąryšiai, kuriuos taip pat naudosime kalbėdami apie alternatyvų pasirinktį ekonomikoje.

Tegul X yra aibė, o $X \times X$ yra Dekarto sandauga. Aibės X *binariuoju sąryšiu* vadinamas bet kuris poaibis $R \subset X \times X$. Binariajam sąryšiui apibrėžti naudojamas žymėjimas xRy, reiškiantis, kad $(x, y) \in R$. Pavyzdžiui, atveju $X = \mathbb{N}$ sąryšiu (2.8) apibrėžta tvarka taip pat yra natūraliųjų skaičių aibės binarusis sąryšis, apibrėžtas poaibiu

$$< = \{(k, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \colon \; k < n\} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}.$$

2.17 apibrėžimas. Sakoma, kad aibės X binarusis sąryšis yra

(a) *trichotomija,* jei bet kuriems $x, y \in X$ galioja *tik viena* iš trijų alternatyvų: arba $(x, y) \in R$, arba $(y, x) \in R$, arba $x = y$;

(b) *pilnas,* jei bet kuriems $x, y \in X$ yra arba $(x, y) \in R$, arba $(y, x) \in R$ (arba ir vienas, ir kitas);

(c) *tranzityvus,* jei bet kuriems $x, y, z \in X$, iš to, kad $(x, y) \in R$ ir $(y, z) \in R$ išplaukia $(x, z) \in R$;

(d) *simetriškas,* jei bet kuriems $x, y \in X$, $(x, y) \in R$ tada ir tik tada, kai $(y, x) \in R$;

(e) *antisimetriškas,* jei visiems $x, y \in X$, iš $(x, y) \in R$ ir $(y, x) \in R$ išplaukia $x = y$;

(f) *refleksyvus,* jei $(x, x) \in R$ kiekvienam $x \in X$.

Pilnumo savybėje atveju $x = y$ gauname išvadą, kad sąryšis $(x, x) \in R$ galioja visiems $x \in X$, t. y. pilnasis sąryšis yra ir refleksyvus. Jei aibės X binarusis sąryšis R yra pilnas ir antisimetriškas, tai bet kuriems $x, y \in X$ galioja *bent viena* iš trijų alternatyvų: arba $(x, y) \in R$, arba $(y, x) \in R$, arba $x = y$. Verta palyginti pastarąją savybę su trichotomija.

Aibės X binarusis sąryšis R vadinamas *tiesiniu tvarkiniu*, jei R yra tranzityvus ir turi trichotomijos savybę. Tokiu būdu natūraliųjų skaičių aibės $\mathbb{N}$ binarusis sąryšis $<$ yra tiesinis tvarkinys. Tuo tarpu natūraliųjų skaičių aibės $\mathbb{N}$ binarusis sąryšis $\leq$ yra tranzityvus, pilnas ir antisimetriškas. Tokį bet kurios aibės binarųjį sąryšį vadinsime *tiesiniu pustvarkiniu*[3].

Toliau dažnai bus kalbama apie aibę ir binarųjį sąryšį joje. Pora (X, R), kurią sudaro aibė X ir šios aibės binarusis sąryšis R, vadinama *struktūra*. Taigi, $(\mathbb{N}, <)$ yra tiesinės tvarkos struktūra, o $(\mathbb{N}, \leq)$ yra tiesinio pustvarkinio struktūra.

Nagrinėkime kitą pavyzdį, ir tarkime, kad X yra bet kuri aibė, o $f\colon X \to \mathbb{N}$ yra funkcija. Bet kuriems $x, y \in X$ tegul

$$x \succeq_f y \qquad \text{tada ir tik tada, kai} \qquad f(x) \geq f(y).$$

Tada aibės X binarusis sąryšis $\succeq_f$ yra tranzityvus ir pilnas. Jei kiekvienai porai $x, y \in X$ iš to, kad $f(x) = f(y)$ turime $x = y$, tai $(X, \succeq_f)$ yra tiesinio pustvarkinio struktūra. Tokią savybę turinti funkcija vadinama *injekcija*. Prie šio ir kitų panašių pavyzdžių grįšime kalbėdami apie alternatyvų pasirinkimą 3 skyriuje.

Dabar galime pereiti prie minėto ekvivalentumo sąryšio.

2.18 apibrėžimas. Aibės X binarusis sąryšis R vadinamas *ekvivalentumo sąryšiu*, jei jis yra refleksyvus, simetrinis ir tranzityvus. Tada bet kuriam $x \in X$ aibė

$$[x]_R := \{y \in X\colon\ (x, y) \in R\}$$

vadinama, *ekvivalentumo klase.*

2.19 teiginys. *Jei R yra X aibės ekvivalentumo sąryšis, tai*

(a) *kiekvienam $x \in X$ ekvivalentumo klasė $[x]_R$ yra netuščias X poaibis*;

(b) *kiekvienas X elementas yra ir kurios nors ekvivalentumo klasės elementas*;

(c) *bet kuriems $x, y \in X$ ekvivalentumo klasės $[x]_R$ ir $[y]_R$ arba nesikerta, arba yra lygios.*

Įrodymas. (a) ir (b) galioja todėl, kad kiekvienam $x \in X$ bus $x \in [x]_R$ remiantis binariojo sąryšio refleksyvumu ir $[x]_R \subset X$ remiantis apibrėžimu. Įrodant (c) tegul $x, y \in X$ ir $x \neq y$. Pakanka įrodyti, kad $[x]_R = [y]_R$ jei $[x]_R \cap [y]_R = \varnothing$. Iš tikro, tegul

[3] Apskritai šiuo atveju nėra visiems priimtinos terminologijos, ir ji gali skirtis skirtingose knygose.

$z \in [x]_R \cap [y]_R$. Tada $(x, z) \in R$ ir $(y, z) \in R$. Taigi $(x, y) \in R$ ir $(y, x) \in R$ remiantis binariojo sąryšio simetriškumu ir tranzityvumu. Taigi jei $u \in [x]_R$, tai $(x, u) \in R$, ir todėl $(y, u) \in R$ remiantis tranzityvumu, t. y. $u \in [y]_R$. Simetriškas argumentas rodo, kad $[y]_R \subset [x]_R$, o tai įrodo norimą lygybę $[x]_R = [y]_R$. $\square$

2.19 teiginio prasme ekvivalentumo klasės $[x]_R$, $x \in X$, suskaido visą X aibę į netuščius ir nesikertančius X poaibius. Todėl ekvivalentumo klasių aibė $[X]_R := \{[x]_R\colon\ x \in X\}$ vadinama *faktoraibe* binariojo sąryšio R atžvilgiu.

Sveikieji skaičiai Tolesnį skaičių konstravimą tęsime greta natūraliojo skaičiaus (taip pat vadinamo neneigiamuoju sveikuoju skaičiumi) apibrėždami neigiamuosius sveikuosius skaičius. Apibrėžimą apsprendžia tokia savybė:

$$-1 = 0 - 1 = 1 - 2 = 2 - 3 = \cdots .$$

Taigi kiekvienas neigiamas sveikasis skaičius išreiškiamas tam tikromis dviejų teigiamųjų sveikųjų skaičių poromis. Tuo ir remsimės apibrėždami sveikuosius skaičius. Kadangi atimties operacijos dar neturime, tai remsimės tuo, kad $k - n = p - q$ tada ir tik tada, kai $k + q = n + p$.

Remdamiesi šiais samprotavimais, Dekarto sandaugoje $X := \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ apibrėžkime binarųjį sąryšį $\sim \subset X \times X$, sakydami, kad $(k, n) \sim (p, q)$ tada ir tik tada, kai $k + q = n + p$ bet kuriems $(k, n), (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Nesunku patikrinti (2.1.6 pratimas), kad $\sim$ yra ekvivalentumo binarusis sąryšis aibėje $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

2.20 apibrėžimas. Faktoraibė $[\mathbb{N} \times \mathbb{N}]_\sim$ vadinama *sveikųjų skaičių* aibe ir žymima $\mathbb{Z}$.

Sveikųjų skaičių aibėje $\mathbb{Z}$ apibrėšime sumos ir daugybos operacijas, remdamiesi jau apibrėžtomis atitinkamomis operacijomis natūraliųjų skaičių aibėje (žr. (2.6) ir (2.7)). Jei $a := [(k, n)]_\sim \in \mathbb{Z}$ ir $b := [(p, q)]_\sim \in \mathbb{Z}$, tai

$$a + b := [(k + p, n + q)]_\sim \in \mathbb{Z},$$

$$a \cdot b := [(k{\cdot}p + n{\cdot}q, k{\cdot}q + n{\cdot}p)]_\sim \in \mathbb{Z}.$$

Nesunku patikrinti (2.1.7 pratimas), kad toks operacijų apibrėžimas yra korektiškas. Be to, abi operacijos $\mathbb{Z}$ aibėje turi įprastas komutatyvumo, asociatyvumo ir distributyvumo savybes, o jų įrodymas remiasi analogiškomis natūraliųjų skaičių savybėmis. Tegul $0_\mathbb{Z} := [(0, 0)]_\sim$, $0 \in \mathbb{N}$. Tada kiekvienam $a \in \mathbb{Z}$ bus $a + 0_\mathbb{Z} = a$ ir egzistuos toks vienintelis $b \in \mathbb{Z}$, kad $a + b = 0_\mathbb{Z}$. Toks b vadinamas (adiciniu) atvirkštiniu skaičiui a ir žymimas $-a$. Atvirkštinis skaičius leidžia apibrėžti atimties operaciją: $b - a := b + (-a)$ bet kuriems $a, b \in \mathbb{Z}$.

Tvarka sveikųjų skaičių aibėje $\mathbb{Z}$ apibrėžiama remiantis (2.8) tvarka natūraliųjų skaičių aibėje. Bet kuriems $a := [(k, n)]_\sim \in \mathbb{Z}$ ir $b := [(p, q)]_\sim \in \mathbb{Z}$, sakysime, kad a mažiau už b, arba

$$a < b, \quad \text{jei} \quad k + q \in p + n. \tag{2.12}$$

Nesunku patikrinti (2.1.8 pratimas), kad toks binariojo sąryšio aibėje $\mathbb{Z}$ apibrėžimas yra korektiškas. Taip pat remiantis analogiškomis natūraliųjų skaičių savybėmis, nesunkiai patikrinama, kad struktūra $(\mathbb{Z}, <)$ yra tiesinė tvarka, t. y. binarusis sąryšis $<$ turi tranzityvumo ir trichotomijos savybes.

Nors natūraliųjų skaičių aibė $\mathbb{N}$ nėra $\mathbb{Z}$ poaibis, tačiau tarp $\mathbb{Z}$ poaibių yra aibės $\mathbb{N}$ kopija $\widetilde{\mathbb{N}} := \{[(n,0)]_\sim\colon\ n \in \mathbb{N}\}$, turinti tas pačias natūraliųjų skaičių aibės savybes. Tiksliau kalbant, reikšmės $I(n) := [(n,0)]_\sim \in \widetilde{\mathbb{N}}$ apibrėžia funkciją $I\colon\ \mathbb{N} \to \widetilde{\mathbb{N}}$, kuri yra injekcija, išsauganti sumos, daugybos ir tvarkos operacijas. Bet kuri tokia funkcija vadinama *izomorfizmu*. Be to, bet kuriems $(k,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ bus $[(k,n)]_\sim = I(k) - I(n)$. Aibė $\mathbb{N}$ ir jos kopija $\widetilde{\mathbb{N}}$ toliau yra sutapatinamos. Tada $\mathbb{Z}$ yra aibė $\{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$. Sveikųjų skaičių be nulio aibę žymėsime $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{Z} \setminus \{0\} = \{\pm 1, \pm 2, \dots\}$.

Racionalieji skaičiai Sveikuosius skaičius konstravome apibrėždami lygties $n+x = 0$ sprendinį x, kai $n \in \mathbb{N}$. Analogiškai konstruosime racionaliuosius skaičius kaip lygties $z \cdot x = 1$ sprendinį x, kai $z \in \mathbb{Z}$. Binarųjį sąryšį tarp sveikųjų skaičių apibrėšime remdamiesi faktu, kad trupmenos $a/b = c/d$ tada ir tik tada, kai $ad = bc$ bet kuriems $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, jei $b \neq 0$ ir $d \neq 0$. Dekarto sandaugoje $X := \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+$ apibrėžkime binarųjį sąryšį $\sim \subset X \times X$, sakydami, kad $(a,b) \sim (c,d)$ tada ir tik tada, kai $ad = bc$ bet kuriems $(a,b), (c,d) \in X$. Nesunku patikrinti (2.1.9 pratimas), kad $\sim$ yra ekvivalentumo binarusis sąryšis aibėje $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+$.

2.21 apibrėžimas. Faktoraibė $[\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+]_\sim$ vadinama *racionaliųjų skaičių* aibe ir žymima $\mathbb{Q}$.

Racionaliųjų skaičių aibėje $\mathbb{Q}$ apibrėšime sumos ir daugybos operacijas. Jei $q := [(a,b)]_\sim \in \mathbb{Q}$ ir $r := [(c,d)]_\sim \in \mathbb{Q}$, tai

$$q + r := [(ad + cb, bd)]_\sim \in \mathbb{Q},$$

$$q \cdot r := [(ac, bd)]_\sim \in \mathbb{Q}.$$

Nesunku patikrinti (2.1.10 pratimas), kad toks operacijų apibrėžimas yra korektiškas. Be to, abi operacijos $\mathbb{Q}$ aibėje turi įprastas komutatyvumo, asociatyvumo ir distributyvumo savybes, o jų įrodymas remiasi analogiškomis sveikųjų skaičių savybėmis. Tegul $0_\mathbb{Q} := [(0,1)]_\sim$. Tada kiekvienam $r \in \mathbb{Q}$bus $r + 0_\mathbb{Q} = r$ ir egzistuos toks vienintelis $s \in \mathbb{Q}$, kad $r + s = 0_\mathbb{Q}$. Toks s vadinamas (adiciniu) atvirkštiniu skaičiui r ir žymimas $-r$. Be to, nesunku patikrinti, kad $-[(a,b)]_\sim = [(-a,b)]_\sim$. Tegul $1_\mathbb{Q} := [(1,1)]_\sim$. Tada kiekvienam $r \in \mathbb{Q}_+ := \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ bus $r \cdot 1_\mathbb{Q} = r$ ir egzistuos vienintelis $s \in \mathbb{Q}$, kad $r \cdot s = 1_\mathbb{Q}$. Toks s vadinamas (multiplikaciniu) atvirkštiniu skaičiui r ir žymimas r^{-1}. Be to, nesunku patikrinti, kad $[(a,b)]_\sim^{-1} = [(b,a)]_\sim$. Bet kuriam nelygiam nuliui $r \in \mathbb{Q}$ ir bet kuriam $s \in \mathbb{Q}$ apibrėšime dalybos operaciją $s/r := s \cdot r^{-1}$.

Tvarka racionaliųjų skaičių aibėje $\mathbb{Q}$ apibrėžiama remiantis tvarka sveikųjų skaičių aibėje ir tokiais pastebėjimais. Jei $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $b > 0$ ir $d > 0$, tai $a/b < c/d$ tada ir tik tada, kai $ad < cb$. Kadangi $[(a,b)]_\sim = [(-a,-b)]_\sim$, tai kiekvienas racionalusis skaičius išreiškiamas sveikųjų skaičių pora, kurioje antrasis skaičius yra teigiamas. Tokiu būdu, bet kuriems $q := [(a,b)]_\sim \in \mathbb{Q}$, $r := [(c,d)]_\sim \in \mathbb{Q}$, $b > 0$ ir $d > 0$, sakysime, kad q yra mažiau už r, arba

$$q < r, \quad \text{jei} \quad ad < cb. \tag{2.13}$$

Nesunku patikrinti (2.1.11 pratimas), kad toks binariojo sąryšio aibėje $\mathbb{Q}$ apibrėžimas yra korektiškas. Taip pat, remiantis analogiškomis sveikųjų skaičių savybėmis, nesunkiai patikrinama, kad struktūra $(\mathbb{Q}, <)$ yra tiesinė tvarka, t. y. binarusis sąryšis $<$ aibėje $\mathbb{Q}$ turi tranzityvumo ir trichotomijos savybes.

Sakysime, kad $q \in \mathbb{Q}$ yra *teigiamas*, jei $0_\mathbb{Q} < q$. Remiantis racionaliųjų skaičių trichotomija, galioja lygiai viena iš alternatyvų:

$$q \text{ yra teigiamas}, \qquad q = 0, \qquad -q \text{ yra teigiamas}.$$

Racionaliojo skaičiaus $q \in \mathbb{Q}$ *moduliu* (arba absoliučiuoju didumu) vadinamas skaičius

$$|q| := \begin{cases} -q, & \text{jei } -q \text{ yra teigiamas}, \\ q, & \text{priešingu atveju}. \end{cases}$$

Toliau išvardytų modulio savybių įrodymas siūlomas kaip pratimas skaitytojui.

2.22 teiginys. *Bet kuriems $q, s \in \mathbb{Q}$ galioja*

(a) $|q| \geq 0$ (neneigiamumas);

(b) $|q| = 0$ *tada ir tik tada, kai* $q = 0$ (teigiamas apibrėžtumas);

(c) $|q \cdot p| = |q| \cdot |p|$ (multiplikatyvumas);

(d) $|q + p| \leq |q| + |p|$ (subadityvumas).

Kaip ir natūraliųjų skaičių atveju, sveikųjų skaičių aibė $\mathbb{Z}$ nėra $\mathbb{Q}$ poaibis, tačiau tarp $\mathbb{Q}$ poaibių yra $\mathbb{Z}$ aibės kopija $\{I(a) := [(a,1)]_\sim \colon a \in \mathbb{Z}\}$, turinti tas pačias sveikųjų skaičių aibės savybes ir izomorfiška $\mathbb{Z}$. Bet kuriems $a \in \mathbb{Z}$ ir $b \in \mathbb{Z}_+$ bus $[(a,b)]_\sim = I(a)/I(b)$. Aibė $\mathbb{Z}$ ir jos kopija toliau yra tapatinamos. Taigi $\mathbb{Q}$ yra aibė $\{a/b \colon (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+\}$.

Realieji skaičiai Racionaliųjų skaičių seka yra funkcija $\mathbb{N} \ni n \mapsto q_n \in \mathbb{Q}$, kurią žymėsime

$$(q_n) = (q_n)_{n \in \mathbb{N}} = (q_0, q_1, q_2, \ldots).$$

Racionaliųjų skaičių seka (q_n) vadinama *Koši*[4] *seka*, jei bet kuriam teigiamam $\omega \in \mathbb{Q}$, egzistuoja toks $N = N(\omega) \in \mathbb{N}$, kad visiems $n, m > N$, $|q_n - q_m| < \omega$.

[4]Augustin Louis Cauchy – Augustinas Koši (1789–1857), prancūzų matematikas.

Tegul (q_n) yra racionaliųjų skaičių seka. Sakysime, kad (q_n) *konverguoja*, jei egzistuoja toks $q \in \mathbb{Q}$, jog bet kuriam teigiamam $\omega \in \mathbb{Q}$, galima rasti tokį $N = N(\omega) \in \mathbb{N}$, kad visiems $n > N$ $|q_n - q| < \omega$. Simboliškai sekos (q_n) konvergavimo į q faktą žymėsime $q_n \to q$. Naudojantis modulio subadityvumu, galima įrodyti, kad kiekviena konverguojanti racionaliųjų skaičių seka yra Koši seka. Tačiau atvirkščiai – nebūtinai. Racionaliųjų skaičių aibėje gali ir neegzistuoti elemento, į kurį konverguoja Koši seka. Tačiau visas Koši sekas galima suskirstyti į nesikertančias klases taip, kad vienos klasės elementai būtų artimi ir ta prasme ekvivalentūs. Tokioje klasių aibėje yra racionaliųjų skaičių aibę atitinkantis poaibis ir kiekviena tos klasių aibės elementų Koši seka konverguoja. Toliau aprašoma Koši sekų ekvivalentumo klasių aibė bus realiųjų skaičių aibė, o jos konstrukcija vadinama racionaliųjų skaičių aibės *papildymu* arba Koši konstrukcija.

Tegul C yra visų racionaliųjų skaičių Koši sekų aibė. Šioje aibėje apibrėšime binarųjį sąryšį R sakydami, kad bet kurios dvi sekos (q_n) ir (p_n) iš C yra ekvivalenčios, jei $q_n - p_n \to 0$. Taip apibrėžtas binarusis sąryšis aibėje C yra ekvivalentumo sąryšis (įrodyti).

2.23 apibrėžimas. Faktoraibė $[C]_R$ vadinama *realiųjų skaičių* aibe ir žymima $\mathbb{R}$.

Taigi realusis skaičius yra ekvivalentumo klasė $[(q_n)]_R$, kurią sudaro tarpusavyje artimos racionaliųjų skaičių Koši sekos. Jei q yra racionalusis skaičius, tai ekvivalentumo klasė, kuriai priklauso racionaliųjų skaičių seka $(q, q, q, \dots) = (q)$, tapatinama su q, ir tokiu būdu realiųjų skaičių aibėje $\mathbb{R}$ apibrėžiamas poaibis izomorfiškas racionaliųjų skaičių aibei ir taip pat žymimas $\mathbb{Q}$.

Apibrėšime aritmetines operacijas realiųjų skaičių aibėje. Bet kuriems $t = [(q_n)]_R \in \mathbb{R}$ ir $s = [(p_n)]_R \in \mathbb{R}$ tegul

$$t + s := [(q_n + p_n)]_R \quad \text{ir} \quad t \cdot s := [(q_n \cdot p_n)]_R. \tag{2.14}$$

Šis sumos ir daugybos operacijų apibrėžimas yra korektiškas (2.1.13 pratimas). Taip pat korektiškos yra skirtumo ir dalybos operacijos, apibrėžiant jas, kaip ir racionaliųjų skaičių atveju, naudojant adicinį atvirkštinį $-t := [(-q_n)]_R$ ir multiplikacinį atvirkštinį $t^{-1} := [(q_n^{-1})]_R$ (kai $t \neq 0$).

Toliau įvedamai tvarkai realiųjų skaičių aibėje pagrįsti patogu pradėti nuo tokio fakto:

2.24 lema. *Jei $(q_n) \in C$ ir $[(q_n)]_R \neq 0$, tai galioja tik viena iš dviejų alternatyvų:*

(a) *egzistuoja toks $N \in \mathbb{N}$, kad $q_n > 0$ visiems $n > N$;*

(b) *egzistuoja toks $N \in \mathbb{N}$, kad $q_n < 0$ visiems $n > N$.*

Įrodymas. Kadangi abi alternatyvos yra galimos ir skirtingos, pakanka parodyti, kad kitų alternatyvų nėra. Tarkime, kad (a) ir (b) teiginiai nėra teisingi. Tada kiekvienam $N \in \mathbb{N}$ egzistuoja tokie natūralieji skaičiai $i > N$ ir $j > N$, kad $q_i \leq 0$ ir $q_j \geq 0$. Parodysime, kad tada $q_n \to 0$. Tegul $\omega \in \mathbb{Q}$ ir $\omega > 0$. Kadangi $(q_n) \in C$, tai galime rasti tokį $N(\omega) \in \mathbb{N}$, kad $|q_n - q_m| < \omega$ visiems $n, m > N(\omega)$. Tegul $k > N(\omega)$. Remiantis racionaliųjų skaičių trichotomija galioja arba $q_k > 0$, arba $q_k \leq 0$. Pirmu atveju galime rasti tokį $i > N(\omega)$, kad $q_i \leq 0$ ir

$$|q_k| = q_k \leq q_k - q_i = |q_k - q_i| < \omega.$$

Antru atveju galime rasti tokį $j > N(\omega)$, kad $q_j \geq 0$ ir

$$|q_k| = -q_k \leq q_j - q_k = |q_j - q_k| < \omega.$$

Kadangi $k > N(\omega)$ ir ω yra laisvai pasirinkti, tai $q_n \to 0$. Taigi $[(q_n)]_R = 0$. Ši prieštara įrodo lemą. □

Tegul C_0 yra į nulį konverguojančių racionaliųjų skaičių Koši sekų aibė, t. y. aibė visų tų C elementų, kurie yra R-ekvivalentūs nulių sekai. Tegul C_+ ir C_- yra aibės tų $C \setminus C_0$ elementų, kuriems atitinkamai galioja 2.24 lemos (a) ir (b) teiginiai. Tvarka realiųjų skaičių aibėje įvedama tokiu būdu:

2.25 apibrėžimas. Tarkime, kad $t \in \mathbb{R}$. Sakysime, kad t yra *teigiamas*, arba $t > 0$, jei egzistuoja tokia racionaliųjų skaičių Koši seka $(q_n) \in C_+$, kad $t = [(q_n)]_R$. Bet kuriems dviems realiesiems t ir s sakysime, kad s yra *mažesnis už* t, arba $s < t$, jei $t - s$ yra teigiamas.

Šis apibrėžimas yra korektiškas (2.1.13 pratimas). Remiantis 2.24 lema, C yra sąjunga nesikertančių aibių C_+, C_0 ir C_-. Todėl binarusis sąryšis $<$ realiųjų skaičių aibėje $\mathbb{R}$ turi trichotomijos savybę. Be to, šiam sąryšiui nesunkiai patikrinama tranzityvumo savybė. Taigi struktūra $(\mathbb{R}, <)$ yra tiesinė tvarka.

Kaip ir racionaliųjų skaičių atveju, pasitelkus trichotomijos savybę, realiojo skaičiaus $t \in \mathbb{R}$ *moduliu* vadinamas skaičius:

$$|t| := \begin{cases} -t, & \text{jei } -t \text{ yra teigiamas,} \\ \ \ t, & \text{priešingu atveju.} \end{cases} \tag{2.15}$$

Realiųjų skaičių modulis turi tas pačias savybes, kaip ir racionaliųjų skaičių modulis (2.22 teiginys).

Greta tiesinės tvarkos, realiųjų skaičių aibėje turime ir tiesinę pustvarkę, apibrėžiamą binariuoju sąryšiu: bet kuriems $s, t \in \mathbb{R}$

$$s \leq t \quad \text{tada ir tik tada, kai} \quad s < t \quad \text{arba} \quad s = t. \tag{2.16}$$

Šis binarusis sąryšis nebeturi trichotomijos savybės, tačiau yra pilnas, tranzityvus ir antisimetriškas (žr. 2.17 apibrėžimą), t. y. $(\mathbb{R}, \leq)$ struktūra yra tiesinė pustvarkė.

Parodysime, kad racionaliųjų skaičių aibė yra tiršta realiųjų skaičių aibėje tokia prasme:

2.26 lema. *Bet kuriam $t \in \mathbb{R}$ ir teigiamam $\omega \in \mathbb{Q}$ egzistuoja toks $q \in \mathbb{Q}$, kad $|t - q| < \omega$.*

Įrodymas. Pagal 2.23 apibrėžimą, $t = [(q_n)]_R$ ir (q_n) yra racionaliųjų skaičių Koši seka. Todėl egzistuoja toks $N \in \mathbb{N}$, kad visiems natūraliesiems $m, n > N$ yra $|q_m - q_n| < \omega$. Tegul $k \in \mathbb{N}$, $k > N$ ir $q := [(q_k, q_k, \dots)]_R$. Tada $|t - q| = |[(q_n - q_k)]|_R < \omega$. □

Realiųjų skaičių seka, realiųjų skaičių Koši seka ir realiųjų skaičių sekos konvergavimas apibrėžiami lygiai taip pat, kaip ir racionaliųjų skaičių atveju.

2.27 teorema. *Kiekviena realiųjų skaičių Koši seka konverguoja.*

Įrodymas. Tegul (t_n) yra realiųjų skaičių Koši seka. Remiantis 2.26 lema, kiekvienam $n \in \mathbb{N}$, egzistuoja toks racionalusis q_n, kad $|t_n - q_n| < 1/n$. Parodysime, kad (q_n) yra racionaliųjų skaičių Koši seka. Tegul $\omega \in \mathbb{Q}$ ir $\omega > 0$. Remiantis Archimedo savybe natūraliesiems skaičiams (2.15 teorema) egzistuoja toks $N \in \mathbb{N}$, kad $1/N < \omega/3$. Kadangi (t_n) yra Koši seka, egzistuoja toks $M \in \mathbb{N}$, kad su visais $n, m > M$, $|t_n - t_m| < \omega/3$. Tada visiems $n, m > \max\{N, M\}$, naudodamiesi modulio subadityvumu, gauname

$$|q_n - q_m| \leq |q_n - t_n| + |t_n - t_m| + |t_m - q_m| < \omega/3 + \omega/3 + \omega/3 = \omega,$$

t. y. racionaliųjų skaičių seka (q_n) yra Koši seka. Tegul $t := [(q_n)]_R \in \mathbb{R}$. Kiekvienam $n \in \mathbb{N}$ tegul $\tilde{q}_n := [(q_n, q_n, \dots)]_R \in \mathbb{R}$. Tada $\tilde{q}_n \to t$ ir $|t_n - \tilde{q}_n| < 1/n$. Iš čia gauname, kad $t_n \to t$; tai ir reikėjo įrodyti. □

Taigi racionaliųjų skaičių aibę papildėme taip, kad naujoje, realiųjų skaičių aibėje, konverguoja ne tik racionaliųjų skaičių Koši sekos, bet ir realiųjų skaičių Koši sekos. Aibė, kurioje apibrėžtos Koši sekos ir konvergavimo sąvokos, vadinama *pilna*, jei šioje aibėje konverguoja kiekviena Koši seka. Taigi realiųjų skaičių aibė yra pilna.

Mažiausio viršutinio rėžio savybė Naudodamiesi realiųjų skaičių aibės pilnumo savybe įrodysime jos kitą svarbią savybę.

2.28 apibrėžimas. Tarkime, kad A yra netuščia realiųjų skaičių aibė. Jei egzistuoja toks realusis skaičius R, kad $x \leq R$ kiekvienam $x \in A$, tai sakoma, kad aibė A yra *aprėžta ir viršaus,* o R yra aibės A *viršutinis rėžis.* Apatinius rėžius apibrėžiame analogiškai. Jei aibė yra aprėžta iš viršaus ir iš apačios, tai ji vadinama *aprėžta.*

Toliau formuluojama svarbiausia sąvoka:

2.29 apibrėžimas. Tarkime, kad netuščia realiųjų skaičių aibė A yra aprėžta iš viršaus. Skaičius $M = MVR_A$ vadinamas aibės A *mažiausiu viršutiniu rėžiu,* jei (a) M yra aibės A viršutinis rėžis ir (b) jei $x < M$, tai x nėra aibės A viršutinis rėžis.

Jei mažiausias viršutinis rėžis egzistuoja, tai atsižvelgiant į (b) savybę toks skaičius yra vienintelis. Didžiausias apatinis rėžis apibrėžiamas analogiškai.

Toliau formuluojama realiųjų skaičių aibės savybė vadinama *mažiausio viršutinio rėžio savybe.* Dažniausiai ši savybė formuluojama prieš pilnumo savybės įrodymą, ir tada ji vadinama aksioma.

2.30 teorema. *Jei netuščia realiųjų skaičių aibė yra aprėžta, tai ji turi mažiausią viršutinį rėžį.*

Įrodymas. Tegul $A \subset \mathbb{R}$ yra netuščia aprėžta aibė ir tegul R yra aibės A viršutinis rėžis. Tegul $a \in A$. Jei $a = R$, tai $MVR_A = a$, ir įrodymas baigtas. Tarkime, kad $a < R$.

Sukonstruosime dvi realiųjų skaičių sekas (x_n) ir (y_n), kurios konverguos į MVR_A. Tegul $x_0 := a$ ir $y_0 := R$. Tarkime, kad x_n ir y_n jau apibrėžti, ir tegul $m_n := (x_n + y_n)/2$. Jei m_n yra aibės A viršutinis rėžis, tegul $y_{n+1} := m_n$ ir $x_{n+1} := x_n$. Jei m_n nėra aibės A viršutinis rėžis, tegul $y_{n+1} := y_n$ ir $x_{n+1} := m_n$. Remiantis rekursijos teorema (2.16 teorema), egzistuoja dvi realiųjų skaičių sekos (x_n) ir (y_n). Remiantis indukcija gaunama, kad (x_n) yra nemažėjanti ($x_n \leq x_{n+1}$), o (y_n) yra nedidėjanti ($y_{n+1} \leq y_n$). Kitą pagalbinį teiginį siūlome įrodyti skaitytojui:

2.31 lema. *Kiekviena nemažėjanti ir aprėžta realiųjų skaičių seka yra Koši seka.*

Remiantis šiuo teiginiu, (x_n) ir (y_n) sekos yra Koši sekos. Kadangi realiųjų skaičių aibė yra pilna (2.27 teorema), tai seka (y_n) konverguoja. Tegul y yra jos riba. Parodysime, kad $x_n \to y$, kai $n \to \infty$. Pagal (x_n) ir (y_n) sekų apibrėžimą, kiekvienam $n \geq 1$,

$$y_{n+1} - x_{n+1} = (y_n - x_n)/2 = \cdots = (M - a)2^{-n}.$$

Remiantis Archimedo savybe, dešinioji pusė konverguoja į 0, kai $n \to \infty$. Taigi galioja $x_n \to y$, kai $n \to \infty$.

Galiausiai parodysime, kad $y = MVR_A$. Kadangi kiekvienam $n \in \mathbb{N}$ y_n yra A aibės viršutinis rėžis pagal sekos (y_n) apibrėžimą, gauname, kad riba y taip pat yra aibės A viršutinis rėžis (kodėl?). Tarkime, kad egzistuoja toks A aibės viršutinis rėžis R, kad $R < y$. Kadangi $x_n \to y$ ir $x_n \in A$ su kievienu n pagal sekos (x_n) apibrėžimą, gauname $R < x_n < y$ pakankamai dideliam n. Ši prieštara įrodo, kad y yra A aibės mažiausias viršutinis rėžis; tai ir reikėjo įrodyti. □

Kaip ką tik įrodėme, kad mažiausias viršutinis rėžis egzistuoja visada, kai aibė yra netuščia ir aprėžta. Tačiau patogu praplėsti šio skaičiaus apibrėžimą bet kurioms aibėms. Šiuo ir kitais tikslais naudojamas realiųjų skaičių aibės $\mathbb{R}$ plėtinys dviem simboliais: *plius begalybė*, žymima $+\infty$, ir *minus begalybė*, žymima $-\infty$. Šie du elementai yra suderinti su $\mathbb{R}$ aibės aritmetine ir tvarkos struktūromis tokiu būdu: kiekvienam realiajam skaičiui x,

$$-\infty < +\infty, \qquad -\infty < x < +\infty,$$

$$(\pm\infty) + (\pm\infty) = x + (\pm\infty) = (\pm\infty) + x = \pm\infty,$$

$$\frac{x}{\pm\infty} = 0, \qquad x(\pm\infty) = (\pm\infty)x = \begin{cases} \pm\infty & \text{jei } x > 0, \\ \mp\infty & \text{jei } x < 0, \end{cases}$$

$$(\pm\infty)(\pm\infty) = +\infty, \qquad (\pm\infty)(\mp\infty) = -\infty.$$

Kitos galimos operacijos su begalybėmis yra paliktos neapibrėžtos. Taigi bet kurios realiųjų skaičių aibės A *supremumą*, apibrėšime taip:

$$\sup A := \begin{cases} -\infty, & \text{jei } A = \varnothing, \\ MVR_A, & \text{jei } A \text{ yra netuščia ir aprėžta,} \\ +\infty, & \text{jei } A \text{ yra netuščia ir neaprėžta.} \end{cases} \tag{2.17}$$

Jei $MVR_A \in A$, tai šį faktą žymime $\max A = MVR_A = \sup A$. Jei aibė A baigtinė, tai visada jos supremumas yra vienas iš aibės elementų.

Pratimai

1. Įrodyti (2.2).

2. Įrodyti, kad $2 + 2 = 4$.

3. Įrodyti, kad kiekvienas nelygus nuliui natūralusis skaičius yra kito natūraliojo skaičiaus tęsinys.

4. Įrodyti, jog visiems $k, n, m \in \mathbb{N}$, jei $k < n$ ir $n < m$, tai $k < m$.

5. Baigti 2.16 teoremos įrodymą.

6. Bet kuriems $(k, n), (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sakysime, kad $(k, n) \sim (p, q)$, jei $k + q = n + p$. Įrodyti, kad $\sim$ yra ekvivalentumo binarusis sąryšis aibėje $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

7. Tegul $\sim$ yra 6 pratime apibrėžtas binarusis sąryšis aibėje $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Įrodyti: jei $(k, n) \sim (k', n')$ ir $(p, q) \sim (p', q')$, tai $(k + p, n + q) \sim (k' + p', n' + q')$.

8. Tegul $\sim$ yra 6 pratime apibrėžtas binarusis sąryšis aibėje $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Įrodyti (2.12) korektiškumą: jei $(k, n) \sim (k', n')$ ir $(p, q) \sim (p', q')$, tai $k + q \in n + p$ tada ir tik tada, kai $k' + q' \in n' + p'$.

9. Bet kuriems $(k, n), (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+$ sakysime, kad $(k, n) \sim (p, q)$, jei $kq = np$. Įrodyti, kad $\sim$ yra ekvivalentumo binarusis sąryšis aibėje $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+$.

10. Tegul $\sim$ yra 9 pratime apibrėžtas binarusis sąryšis aibėje $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+$. Įrodyti: jei $(a, b) \sim (a', b')$ ir $(c, d) \sim (c', d')$, tai $(ad + cb, bd) \sim (a'd' + c'b', b'd')$.

11. Tegul $\sim$ yra 9 pratime apibrėžtas binarusis sąryšis aibėje $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+$. Įrodyti (2.13) korektiškumą: jei $(a, b) \sim (a', b')$, $(c, d) \sim (c', d')$ ir b, b', d, d' yra teigiami, tai $ad < cb$ tada ir tik tada, kai $a'd' < c'b'$.

12. Įrodyti 2.22 teiginį.

13. Ką reiškia, kad (2.14) operacijų ir 2.25 apibrėžimas yra korektiški? Įrodyti jų korektiškumą.

14. Įrodyti 2.31 lemą.

2.2 Atitiktis ir funkcija

Kaip jau buvo minėta, šiame skyrelyje supažindiname su daugiareikšmės funkcijos, vadinamos atitiktimi, samprata. Ja nuolat naudojamasi toliau kalbant apie bendrąją pusiausvyrą.

Atitiktis Tegul X ir Y yra aibės, o $X \times Y$ yra jų Dekarto sandauga. Bet kuris netuščias $X \times Y$ poaibis f vadinamas *atitiktimi* iš X į Y. Pastebėsime, kad atveju $X = Y$ atitiktimi vadinamas tiesiog netuščias binarusis sąryšis.

Atitikties $f \subset X \times Y$ *apibrėžimo sritis* yra netuščia aibė

$$\mathcal{A}(f) := \{x \in X \colon \exists\, y \in Y,\ (x,y) \in f\},$$

o jos *kitimo sritis* yra netuščia aibė

$$\mathcal{R}(f) := \{y \in Y \colon \exists\, x \in X,\ (x,y) \in f\}.$$

Kiekvienam poaibiui $A \subset \mathcal{A}(f)$ aibė

$$f[A] := \{y \in Y \colon \exists\, x \in A,\ (x,y) \in f\} \tag{2.18}$$

yra vadinama aibės A *vaizdu* f atitikties atžvilgiu. Nesunku suvokti, kad $\mathcal{R}(f) = f[\mathcal{A}(f)]$. Apibrėždami vaizdą, naudojame laužtinius skliaustus [ ] vietoje lenktinių skliaustų ( ) todėl, kad poaibis A gali ir nebūti X aibės elementu. Jei $A = \{x\}$, $x \in X$, tai šios vieno elemento aibės vaizdas f atžvilgiu žymimas $f[x] := f[\{x\}]$. Kiekvienam atitikties apibrėžimo srities elementui priskiriama aibė, ir tai žymima taip:

$$f \colon x \mapsto f[x] \subset Y, \quad x \in \mathcal{A}(f). \tag{2.19}$$

Neretai vaizdumo sumetimais atitiktis apibrėžiama, kaip „taisyklė“, kuri vienos aibės elementams priskiria kitos aibės poaibius. Tokiu atveju aibė

$$f = \big\{(x,y) \in X \times Y \colon x \in \mathcal{A}(f),\ y \in f[x]\big\},$$

kuri mūsų atveju yra tik kitas atitikties užrašas, vadinama atitikties grafiku. Naudojant mūsų ką tik įvestą vieno elemento aibės vaizdo žymėjimą, aibės $A \subset \mathcal{A}(f)$ vaizdas atitikties f atžvilgiu išreiškiamas ir taip:

$$f[A] = \big\{y \in Y \colon \exists\, x \in A,\ y \in f[x]\big\} = \bigcup_{x \in A} f[x].$$

Daugiau apie šiuos susitarimus rašoma tuoj po funkcijos apibrėžimo (toliau 2.36 apibrėžimas).

Atitiktis $f \subset X \times Y$ vadinama *vienareikšme*, jei bet kuriems $x \in X$ ir $y_1, y_2 \in Y$, iš $(x, y_1) \in f$ ir $(x, y_2) \in f$ išplaukia $y_1 = y_2$. Kitaip tariant, atitiktis $f \subset X \times Y$ yra vienareikšmė, jei kiekvienam $x \in \mathcal{A}(f)$ vaizdas $f[x]$ turi vienintelį elementą. Atitiktis $f \subset X \times Y$ vadinama *injekcija*, jei bet kuriems $x_1, x_2 \in X$ ir $y \in Y$ iš $(x_1, y) \in f$ ir $(x_2, y) \in f$ gauname $x_1 = x_2$. Nesunku patikrinti (2.2.2 pratimas), kad atitiktis f yra injekcija tada ir tik tada, kai skirtingi f apibrėžimo srities elementai turi nesikertančius vaizdus. Pavyzdžiui, bet kuriam netuščiam poaibiui $U \subset X$, aibė

$$1_U := \{(x, x) \in X \times X \colon\ x \in U\}$$

yra atitiktis iš X į X, kuri yra ir vienareikšmė, ir injekcija.

Jei f yra atitiktis iš X į Y, tai aibė

$$f^{-1} := \{(y, x) \in Y \times X \colon\ (x, y) \in f\} \tag{2.20}$$

yra atitiktis iš Y į X, vadinama *atvirkštine atitiktimi*. Naudinga atkreipti dėmesį į tai, kad atvirkštinė atitiktis f^{-1} yra visada apibrėžta, jei yra apibrėžta atitiktis f.

2.32 teiginys. *Atitiktis f iš X į Y yra injekcija (vienareikšmė) tada ir tik tada, kai atvirkštinė atitiktis f^{-1} iš Y į X yra vienareikšmė (injekcija).*

Įrodymas. Bet kuriems $x_1, x_2 \in X$ ir $y \in Y$, remiantis (2.20) apibrėžimu,

$$\left\{ \begin{array}{l} (y, x_1) \in f^{-1} \\ (y, x_2) \in f^{-1} \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} (x_1, y) \in f \\ (x_2, y) \in f \end{array} \right\}.$$

Taigi f yra injekcija tada ir tik tada, kai bet kuriems $x_1, x_2 \in X$ ir $y \in Y$, tada iš $(y, x_1) \in f^{-1}$ ir $(y, x_2) \in f^{-1}$ gauname $x_1 = x_2$, o tai yra tada ir tik tada, kai f^{-1} yra vienareikšmė atitiktis.

Įrodymas, kad f yra vienareikšmė tada ir tik tada, kai f^{-1} yra injekcija – simetriškas. $\square$

2.33 teiginys. *Su bet kuria atitiktimi f, $\mathcal{A}(f^{-1}) = \mathcal{R}(f)$ ir $\mathcal{A}(f) = \mathcal{R}(f^{-1})$.*

Įrodymas. Įrodysime tik pirmą lygybę, kadangi antros įrodymas panašus. Tegul $f \subset X \times Y$. Tada, remiantis (2.20) apibrėžimu,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(f^{-1}) &= \{y \in Y \colon\ \exists\, x \in X,\ (y, x) \in f^{-1}\} \\ &= \{y \in Y \colon\ \exists\, x \in X,\ (x, y) \in f\} = \mathcal{R}(f). \end{aligned}$$

Tai ir reikėjo įrodyti. $\square$

Tarkime, kad X, Y ir Z yra aibės. Jei $f \subset X \times Y$ ir $g \subset Y \times Z$ yra atitiktys, o aibė

$$g \circ f := \{(x, z) \in X \times Z \colon\ \exists\, y \in Y,\ \ (x, y) \in f \quad \text{ir} \quad (y, z) \in g\} \tag{2.21}$$

yra netuščia, tai ji yra atitiktis iš X į Z, vadinama *kompozicijos atitiktimi*. Pavyzdžiui, jei $\mathcal{R}(f) = \mathcal{A}(g)$, tai aibė $g \circ f$ yra netuščia, t. y. ji yra atitiktis.

Su bet kuria atitiktimi f iš X į Y ir atitiktimi f^{-1} iš Y į X, kompozicijos $f^{-1} \circ f$ ir $f \circ f^{-1}$ yra visada apibrėžtos, remiantis 2.33 teiginiu. Be to, $1_{\mathcal{A}(f)} \subset f^{-1} \circ f$ ir $1_{\mathcal{R}(f)} \subset f \circ f^{-1}$. Nesunku pastebėti, jog lygybių gali ir nebūti, jei f nėra injekcija arba nėra vienareikšmė.

2.34 teiginys. *Jei atitiktis f yra injekcija, tai $f^{-1}\circ f = 1_{\mathcal{A}(f)}$. Jei atitiktis f yra vienareikšmė, tai $f\circ f^{-1} = 1_{\mathcal{R}(f)}$.*

Įrodymas. Įrodysime tik pirmą teiginį, kadangi antro įrodymas panašus. Atsižvelgiant į anksčiau minėtas priežastis, pakanka įrodyti, kad $f^{-1}\circ f \subset 1_{\mathcal{A}(f)}$. Tarkime, kad f yra atitiktis iš X į Y. Jei $(x,z) \in f^{-1}\circ f$, tai egzistuoja toks $y \in Y$, kad $(x,y) \in f$ ir $(y,z) \in f^{-1}$. Remiantis (2.20) apibrėžimu, gauname $(x,y) \in f$ ir $(z,y) \in f$. Kadangi f yra injekcija, $x = z \in \mathcal{A}(f)$, ir todėl $(x,z) \in 1_{\mathcal{A}(f)}$. Tai ir reikėjo įrodyti. □

2.35 teiginys. *Tegul $f \subset X \times Y$ ir $g \subset Y \times X$ yra tokios atitiktys, kad $\mathcal{R}(f) = \mathcal{A}(g)$ ir $g\circ f = 1_{\mathcal{A}(f)}$. Tada $g = f^{-1}$.*

Įrodymas. Tegul $(y,z) \in g$. Kadangi $\mathcal{A}(g) = \mathcal{R}(f)$, tai $y \in \mathcal{R}(f)$. Todėl egzistuoja toks $x \in \mathcal{A}(f)$, kad $(x,y) \in f$. Remiantis (2.21) apibrėžimu, $(x,z) \in g\circ f$. Kadangi $g\circ f = 1_{\mathcal{A}(f)}$, $z = x \in \mathcal{A}(f)$ ir todėl $(z,y) \in f$. Remiantis (2.20) apibrėžimu, $(y,z) \in f^{-1}$.

Atvirkščiai, tegul $(y,x) \in f^{-1}$. Remiantis (2.20) apibrėžimu, $(x,y) \in f$. Kadangi $\mathcal{R}(f) = \mathcal{A}(g)$, $y \in \mathcal{A}(g)$. Todėl egzistuoja toks $z \in X$, kad $(y,z) \in g$. Remiantis (2.21) apibrėžimu, $(x,z) \in g\circ f$. Kadangi $g\circ f = 1_{\mathcal{A}(f)}$, $z = x \in \mathcal{A}(f)$, ir todėl $(y,x) \in g$. Taigi $g = f^{-1}$. □

Funkcija Funkcija yra vienas iš svarbiausių matematikos objektų. Neformalus funkcijos iš aibės X į aibę Y apibūdinimas sako, jog tai yra taisyklė, kuri kievienam aibės X elementui priskiria lygiai vieną aibės Y elementą. Šis apibūdinimas nėra pakankamas, kadangi jame naudojamas, paprastai neapibrėžiamas, žodis „taisyklė“. Todėl matematikoje įprasta funkciją apibrėžti kaip tam tikrą aibių X ir Y Dekarto sandaugos poaibį, t. y. kaip atitiktį iš X į Y su papildomomis savybėmis.

2.36 apibrėžimas. Atitiktis f iš X į Y vadinama *funkcija*, jei $\mathcal{A}(f) = X$ ir f yra vienareikšmė. Funkciją f iš X į Y žymėsime $f\colon\ X \to Y$, o vienareikšmiškai poros $(x,y) \in f$ apibrėžiamą elementą y vadinsime argumentą x atitinkančia funkcijos f *reikšme* ir žymėsime $f(x)$.

Taigi, funkcija $f\colon\ X \to Y$, būdama atitiktimi, kiekvienam $x \in X$ greta vaizdo $f[x] \subset Y$ turi reikšmę $f(x) \in Y$ ir $f[x] = \{f(x)\}$[5]. Reikšmė $f(x)$ apibrėžta *tik* f esant funkcijai. Funkcijos reikšmės priskyrimas argumento reikšmei, žymimas

$$f\colon\ x \mapsto f(x) \in Y, \qquad x \in X = \mathcal{A}(f),$$

(palygink su (2.19)), visiškai apibūdina funkciją

$$f = \{(x, f(x))\colon\ x \in X\}\colon\ X \to Y.$$

[5]Neretai vaizdas atitikties atžvilgiu žymimas kaip ir funkcijos reikšmė teigiant, kad dviprasmiškumo išvengiama atsižvelgiant į kontekstą, arba neskiriant aibės $\{y\}$ nuo jos elemento y [13, 187 p.]

Beje tuose vadovėliuose, kuriuose funkcija vadinama „taisykle“, f vadinama *grafiku*. Šios pastabos ypač svarbios 4.3 skyrelyje, kalbant apie atitikties ir funkcijos nejudamuosius taškus.

Tegul $f\colon X \to Y$. Jei $\mathcal{R}(f) = Y$, tai sakoma, kad funkcija f yra *siurjekcija*. Funkcija $f\colon X \to Y$ vadinama *injekcija*, jei ji yra injekcija kaip atitiktis, t. y. bet kuriems $x, y \in X$ iš $f(x) = f(y)$ išplaukia $x = y$. Funkcija vadinama *bijekcija*, jei ji yra injekcija ir siurjekcija.

Jei $f\colon X \to Y$ ir $g\colon Y \to Z$ yra funkcijos, tai egzistuoja kompozicijos atitiktis $g \circ f$ iš X į Z, apibrėžta aibe (2.21). Be to, tai yra funkcija, kaip teigia teorema:

2.37 teorema. *Jei $f\colon X \to Y$ ir $g\colon Y \to Z$ yra funkcijos, tai kompozicijos atitiktis $g \circ f$ yra funkcija $g \circ f\colon X \to Z$ su reikšmėmis $g \circ f(x) = g(f(x))$, $x \in X$.*

Įrodymas. Kompozicijos atitikties vienareikšmiškumui patikrinti, tarkime, kad $(x, z_1) \in g \circ f$ ir $(x, z_2) \in g \circ f$. Pagal (2.21) apibrėžimą, egzistuoja tokie $y_1, y_2 \in Y$, kad $(x, y_1) \in f$, $(x, y_2) \in f$, $(y_1, z_1) \in g$ ir $(y_2, z_2) \in g$. Kadangi f yra vienareikšmė, iš pirmų dviejų savybių gauname $y_1 = y_2$. Tada, naudodami g vienareikšmiškumą ir kitas dvi savybes, gauname, kad $z_1 = z_2$, t. y. $g \circ f$ yra vienareikšmiška atitiktis.

Tegul $x \in X$. Kadangi $\mathcal{A}(f) = X$, tai $f(x) \in Y$ ir $(x, f(x)) \in f$. Kadangi $\mathcal{A}(g) = Y$, tai $g(f(x)) \in Z$ ir $(f(x), g(f(x)) \in g$. Taigi kiekvienam $x \in X$, yra $(x, g(f(x)) \in g \circ f$; tai ir reikėjo įrodyti. $\square$

Remiantis pastarąja teorema, funkcijų $f\colon X \to Y$ ir $g\colon Y \to Z$ kompozicijos atitiktis visada yra funkcija $g \circ f\colon X \to Z$, toliau vadinama kompozicijos funkcija, arba tiesiog *kompozicija*.

Kaip matėme, atvirkštinė atitiktis apibrėžta kiekvienai atitikčiai. Tačiau taip nėra funkcijoms, kaip rodo toks pavyzdys. Tarkime, kad funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ apibrėžta reikšmėmis $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, t. y. $f = \{(x, x^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+\colon x \in \mathbb{R}\}$. Šios funkcijos atvirkštinė atitiktis yra $f^{-1} = \{(x^2, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}\colon x \in \mathbb{R}\}$. Tačiau f^{-1} nėra vienareikšmė. Pavyzdžiui, $f^{-1}[4] = \{-2, 2\}$. Šiame pavyzdyje f nėra injekcija.

2.38 teorema. *Tarkime, kad $f\colon X \to Y$. Atitiktis f^{-1} yra funkcija tada ir tik tada, kai f yra bijekcija.*

Įrodymas. Remiantis 2.36 apibrėžimu, atitiktis $f^{-1} \subset X \times Y$ yra funkcija tada ir tik tada, kai $\mathcal{A}(f^{-1}) = Y$ ir f^{-1} yra vienareikšmė. Remiantis 2.32 ir 2.33 teiginiais, taip yra tada ir tik tada, kai $\mathcal{R}(f) = Y$ ir f yra injekcija, kas reiškia, jog f yra bijekcija. Tai ir reikėjo įrodyti. $\square$

2.39 apibrėžimas. Tarkime, kad funkcija $f\colon X \to Y$ yra bijekcija. Tada funkcija f^{-1} vadinama *atvirkštine* funkcijai f.

2.40 teorema. *Tegul $f\colon X \to Y$ yra bijekcija ir $g\colon Y \to X$. Tada $g = f^{-1}$ tada ir tik tada, kai $g \circ f = 1_X$.*

Įrodymas. Kadangi f yra injekcija ir $\mathcal{A}(f) = X$, tai remiantis 2.34 teiginiu, jei $g = f^{-1}$, tai $g \circ f = 1_X$. Kadangi, be to $\mathcal{R}(f) = Y = \mathcal{A}(g)$, tai remiantis 2.35 teiginiu, jei $g \circ f = 1_X$, tai $g = f^{-1}$. □

Toliau formuluojamo fakto įrodymas paliekamas skaitytojui.

2.41 išvada. *Tegul $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$, o f^{-1} ir g^{-1} yra jų atvirkštinės funkcijos. Tada kompozicijos $g \circ f\colon X \to Z$ atvirkštinė funkcija yra $f^{-1} \circ g^{-1}\colon Z \to X$.*

2.42 teorema. *Tarkime, kad $f\colon X \to Y$ ir $g\colon Y \to X$. Teiginiai (a) ir (b) ekvivalentūs; čia*

(a) *f yra bijekcija ir $g = f^{-1}$;*

(b) *$f \circ g = 1_Y$ ir $g \circ f = 1_X$.*

Įrodymas. Tarkime, kad galioja (a). Tegul $y \in Y$. Kadangi f yra siurjekcija, egzistuoja toks $x \in X$, kad $y = f(x)$. Kadangi $g = f^{-1}$, tai $g(y) = x$. Tokiu būdu $f(g(y)) = y$ bet kuriam $y \in Y$, t. y. $1_Y \subset f \circ g$. Tegul $(y_1, y_2) \in f \circ g$, t. y. egzistuoja toks $x \in X$, kad $g(y_1) = x$ ir $f(x) = y_2$. Kadangi $g = f^{-1}$, $f(x) = y_1$. Remiantis f vienareikšmiškumu, $y_1 = y_2$, t. y. $f \circ g \subset 1_Y$. Įrodėme, kad $f \circ g = 1_Y$, jei galioja (a). Likusius teiginius siūlome įrodyti skaitytojui. □

Pratimai

1. Tegul $f = \{(0,1), (0,2), (0,3), (1,2), (1,3), (2,3)\}$. Rasti $f \circ f$, $f[1]$ ir $f^{-1}[3]$.
2. Atitiktis f iš X į Y yra injekcija tada ir tik tada, kai su bet kuriais $x_1, x_2 \in \mathcal{A}(f)$, jei $x_1 \neq x_2$, tai $f[x_1] \cap f[x_2] = \varnothing$.
3. Jei f yra atitiktis, tai $(f^{-1})^{-1} = f$.
4. Jei yra apibrėžta atitikčių f ir g kompozicijos atitiktis $g \circ f$, tai apibrėžta kompozicijos atitiktis $f^{-1} \circ g^{-1}$ ir galioja lygybė $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
5. Jei yra apibrėžta atitikčių f ir g kompozicijos atitiktis $g \circ f$, tai $\mathcal{A}(g \circ f) = f^{-1}[\mathcal{A}(g)]$.
6. Tegul f ir g yra tokios funkcijos, kad $\mathcal{A}(f) = \mathcal{A}(g)$ ir $f(x) = g(x)$ visiems x iš bendros apibrėžimo srities. Įrodyti, kad $f = g$.
7. Jei f yra funkcija, tai $f^{-1}[A] = \{x \in \mathcal{A}(f)\colon\ f(x) \in A\}$.
8. Tarkime, kad funkcija $f\colon X \to Y$ yra bijekcija, o g yra funkcija, apibrėžta reikšmėmis $g(B) := f[B]$ kiekvienai aibei $B \in \mathcal{P}(X)$ (žr. 2.5 aksiomą). Įrodyti, kad $g\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$ yra bijekcija.
9. Baigti 2.42 teoremos įrodymą.

2.3 Tiesinės erdvės ir funkcijos

Šiame skyrelyje primename kai kuriuos toliau naudojamus tiesinės algebros faktus.

Matricos ir determinantai Tarkime, kad $m, n \in \mathbb{N}_+ = \{1, 2, \ldots\}$. Realiųjų skaičių stačiakampė lentelė

$$A := [a_{ji}] := \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

sudaryta iš m eilučių ir n stulpelių, vadinama *eilės* $m \times n$ *matrica*. Realieji skaičiai a_{ji} vadinami matricos A elementais. Jei $m = n$, tai A vadinama n-tos *eilės kvadratine matrica*. Matrica, gauta iš A, sukeitus jos eilutes su stulpeliais, vadinama *transponuotąja matrica* ir žymima A^t. Matrica A vadinama *simetrine*, jei $A = A^t$, t. y. jei visiems jos elementams $a_{ji} = a_{ij}$.

Priminsime įprastas veiksmų su matricomis taisykles: bet kuriems $m, n, k \in \mathbb{N}_+$,

1. dvi vienodos eilės $m \times n$ matricas $A = [a_{ji}]$ ir $B = [b_{ji}]$ vadiname *lygiomis* ir rašome $A = B$, jei $a_{ji} = b_{ji}$ visiems j, i;

2. dviejų eilės $m \times n$ matricų $A = [a_{ji}]$ ir $B = [b_{ji}]$ *suma* vadinama tokia eilės $m \times n$ matrica $C = [c_{ji}]$, žymima $C := A + B$, kurios elementai yra $c_{ji} = a_{ji} + b_{ji}$ visiems j, i;

3. eilės $m \times k$ matricos $A = [a_{ji}]$ ir $k \times n$ matricos $B = [b_{ji}]$ *sandauga* vadinama tokia eilės $m \times n$ matrica $C = [c_{ji}]$, žymima $C := AB$, kurios elementai yra $c_{ji} = a_{j1}b_{1i} + a_{j2}b_{2i} + \cdots + a_{jk}b_{ki}$ visiems j, i.

4. matricos $A = [a_{ji}]$ ir *realaus skaičiaus* λ *sandauga* yra tos pačios eilės matrica $C = [c_{ji}]$, žymima $C = \lambda A$, kurios elementai yra $c_{ji} = \lambda a_{ji}$ visiems j, i.

Visų eilės $m \times n$ matricų aibę žymėsime $\mathbb{M}^{m \times n}$. Galima įsitikinti, kad $\mathbb{M}^{m \times n}$ yra tiesinė erdvė atžvilgiu matricų sumos ir matricos daugybos iš realiojo skaičiaus. Tai reiškia, kad matricų sumai galioja asociatyvumo savybė $(A + B) + C = A + (B + C)$, komutatyvumo savybė $A + B = B + A$, nulinės matricos egzistavimas $A + 0 = A$, priešingos matricos egzistavimas $A + (-A) = 0$, sandaugos iš realiojo skaičiaus asociatyvumo savybė $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$ ir distributyvumo savybė $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$.

Norėdami apibrėžti atvirkštinę matricą, priminsime, jog *vienetinė matrica* yra bet kuri kvadratinė n-tosios eilės matrica $E = [e_{ji}]$, kurios elementas $e_{ji} = 1$, kai $i = j$ ir $e_{ji} = 0$, kai $i \neq j$. Tarkime, kad $A = [a_{ji}]$ yra n-tosios eilės kvadratinė matrica. n-tosios eilės kvadratinę matricą B vadinsime matricai A *atvirkštine matrica* ir žymėsime $B := A^{-1}$, jei $AB = BA = E$.

Dar kartą, tegul A yra n-tosios eilės kvadratinė matrica. Iš kiekvienos eilutės ir kiekvieno stulpelio imdami lygiai po vieną matricos A elementą, sudarykime sandaugą

$a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n}$. Kitaip tariant, antrųjų indeksų sudarytas vektorius

$$\sigma \equiv (\sigma(1),\dots,\sigma(n)) := (k_1,k_2,\dots,k_n)$$

yra gaunamas iš vektoriaus $(1,2,\dots,n)$ jo elementų perstatymo būdu ir vadinamas *keitiniu* σ. Nesunku patikrinti, kad yra $n!$ skirtingų keitinių. Sakysime, kad du indeksai $\sigma(k)$ ir $\sigma(l)$ sudaro *netvarką*, jei $\sigma(k)<\sigma(l)$, kai $k>l$. Tegul I_σ yra keitinio σ padarytų netvarkų skaičius. Tada n-tos eilės kvadratinės matricos A *determinantu* vadinamas skaičius

$$\det A := \sum_\sigma (-1)^{I_\sigma} a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)},$$

kur sumuojama pagal visus $n!$ skirtingus keitinius σ. Kvadratinė matrica vadinama *neišsigimusia*, jei jos determinantas nelygus nuliui.

2.43 teorema. *Kvadratinė matrica A turi atvirkštinę matricą A^{-1} tada ir tik tada, kai matrica A yra neišsigimusi.*

Įrodymas. Tegul A yra neišsigimusi n-tos eilės kvadratinė matrica. Su kiekviena indeksų pora $i,j\in\{1,\dots,n\}$, tegul A_{ji} yra matricos, gautos iš A išbraukus j-tąją eilutę ir i-tąjį stulpelį, determinato ir $(-1)^{i+j}$ skaičiaus sandauga. Tada matrica $A^{-1} := [A_{ji}]/|A|$ yra atvirkštinė matricai A.

Atvirkščiai, tarkime, kad n-tos eilės kvadratinė matrica A turi atvirkštinę matricą A^{-1}. Tada $1=|E|=|AA^{-1}|=|A||A^{-1}|$ ir $|A|$ negali būti lygus nuliui. $\square$

Aritmetinė tiesinė erdvė $\mathbb{R}^d$ Tegul $d\in\mathbb{N}_+=\{1,2,\dots\}$. (2.4) lygybe apibrėžta, realiųjų skaičių aibių $\mathbb{R}$ Dekarto sandauga yra

$$\mathbb{R}^d := \overbrace{\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}}^{d} = \{(x_1,\dots,x_d)\colon\ x_i\in\mathbb{R},\ i=1,\dots,d\}.$$

Realiųjų skaičių sutvarkytąjį rinkinį $x:=(x_1,\dots,x_d)\in\mathbb{R}^d$, Dekarto sandaugos elementą, vadiname vektoriumi, o skaičiai $x_1,\dots,x_d$ vadinami vektoriaus x koordinatėmis. Bet kuriems $n,m\in\mathbb{N}$ Dekarto sandaugą $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ tapatinsime su sandauga $\mathbb{R}^{n+m}$, nedarydami skirtumo tarp sutvarkytosios poros $((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_m))$ ir vektoriaus $(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)$. Taigi jei $A\subset\mathbb{R}^n$ ir $B\subset\mathbb{R}^m$, tai Dekarto sandaugą $A\times B$ laikysime aibės $\mathbb{R}^{n+m}$ poaibiu.

Aibės $\mathbb{R}^d$ vektorių suma ir vektoriaus daugyba iš realiojo skaičiaus (skaliaro) apibrėžiama taip: jei $x=(x_1,\dots,x_d)$ ir $y=(y_1,\dots,y_d)$ yra vektoriai, o λ yra realusis skaičius, tai $x+y$ ir λx yra vektoriai

$$x+y := (x_1+y_1,\dots,x_d+y_d) \quad \text{ir} \quad \lambda x := (\lambda x_1,\dots,\lambda x_d).$$

Aibės $\mathbb{R}^d$ su taip apibrėžtomis suma ir sandauga iš skaliaro yra *tiesinė erdvė*. Tai reiškia, kad vektorių sumai galioja asociatyvumo savybė $(x+y)+z=x+(y+z)$, komutatyvumo savybė $x+y = y+x$, nulinio vektoriaus egzistavimas $x+0 = x$, atvirkštinio vektoriaus egzistavimas $x+(-x) = 0$, sandaugos iš skaliaro asociatyvumo savybė $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$ ir distributyvumo savybė $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$.

Aibė $\mathbb{R}^d$ su tiesinės erdvės struktūra vadinama d-mate *aritmetine tiesine erdve*. Erdvės $\mathbb{R}^d$ elementai vadinami šios erdvės taškais, arba vektoriais. Tiesinėje algebroje erdvės $\mathbb{R}^d$ elementai rašomi dvejopai; vektoriai taip pat reiškiami $d \times 1$ matrica:

$$x = (x_1, \dots, x_d) = \begin{bmatrix} x_1 \\ .. \\ x_d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^d. \tag{2.22}$$

Kuri iš formų, vektorius ar matrica, yra naudojama, visada aišku iš konteksto. Verta atkreipti dėmesį į tai, kad $1 \times d$ matrica $[x_1 \cdots x_d]$ yra transponuota matrica x^t, taigi nesutampa su vektoriumi x.

Aritmetinės tiesinės erdvės $\mathbb{R}^d$ poaibis V vadinamas *tiesiškai priklausomu*, jei egzistuoja toks baigtinis rinkinys $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ ir tokie realūs skaičiai $a_1, \dots, a_n$, ne visi jų lygūs nuliui, kad

$$a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0. \tag{2.23}$$

Jei tokių skaičių $a_1, \dots, a_n$ nėra, tai vektoriai $v_1, \dots, v_n$ vadinamai *tiesiškai nepriklausomais*. Kitaip kalbant, vektoriai $v_1, \dots, x_v$ yra tiesiškai nepriklausomi, jei lygybė (2.23) galioja tik tuo atveju, kai $a_i = 0$ kiekvienam i.

2.44 teiginys. *Bet kuris n vektorių rinkinys aritmetinėje tiesinėje erdvėje $\mathbb{R}^d$ yra tiesiškai priklausomas jei $n > d$.*

Įrodymas. Tarkime, kad $v_1 = (v_{11}, \dots, v_{1d})$, $\dots$, $v_n = (v_{n1}, \dots, v_{nd})$ yra n vektorių rinkinys ir $n > d$. Reikia rasti tokius realius skaičius $a_1, \dots, a_n$, kad ne visi jų lygūs nuliui ir galioja (2.23) lygybė. Šią lygybę perrašę vektorių koordinatėms, gauname lygčių sistemą

$$\begin{aligned} &a_1 v_{11} + \dots + a_n v_{n1} = 0, \\ &\dots \\ &a_1 v_{1d} + \dots + a_n v_{nd} = 0, \end{aligned}$$

atžvilgiu nežinomųjų $a_1, \dots, a_n$. Gavome d lygčių turinčių n nežinomųjų. Kadangi $d < n$, sistema turi nenulinį sprendinį $a_1, \dots, a_n$, kuriam galioja (2.23) lygybė. Teiginys įrodytas. $\square$

Erdvės $\mathbb{R}^d$ *poerdviu* vadinamas bet kuris jos poaibis, tų pačių operacijų atžvilgiu esantis tiesine erdve. Erdvės $\mathbb{R}^d$ vektorių $v_1, \dots, v_k$ *tiesiniu dariniu* vadinamas vektorius $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k$; čia $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ yra realieji skaičiai. Vektorių $v_1, \dots, v_k$ *tiesiniu apvalku* vadinama visų tiesinių darinių aibė. Erdvės $\mathbb{R}^d$ vektoriai

$$e_1 := (1, 0, 0, \dots, 0, 0), \quad e_2 := (0, 1, 0, \dots, 0, 0), \cdots, e_d := (0, 0, 0, \dots, 0, 1)$$

vadinami *standartine baze*, nes lygybė $x = (x_1, x_2, \dots, x_d) = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_de_d$ galioja bet kuriam $x \in \mathbb{R}^d$. Kitaip tariant, aritmetinė tiesinė erdvė $\mathbb{R}^d$ yra savo standartinės bazės tiesinis apvalkas. Be to, vektoriai $e_1, \dots, e_d$ yra tiesiškai nepriklausomi.

Bet kuri funkcija veikianti tarp $\mathbb{R}^d$ erdvių turi toliau apibrėžiamą vektorinę struktūrą.

2.45 apibrėžimas. Tarkime, kad $X \subset \mathbb{R}^n$, $f\colon\ X \to \mathbb{R}^m$ ir $\{e'_j\}_{j=1}^m$ yra standartinė bazė erdvėje $\mathbb{R}^m$. Kiekvienam $x \in X$ egzistuoja m tokių realiųjų skaičių $\{f_j(x)\}_{j=1}^m$, kad

$$f(x) = \sum_{j=1}^m f_j(x)e'_j(x) \in \mathbb{R}^m.$$

Kiekvienam $j \in \{1, \dots, m\}$ funkcija $f_j\colon\ X \to \mathbb{R}$ su reikšmėmis $f_j(x)$, $x \in X$, vadinama f *komponente.* Jei $\pi\colon\ \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ yra tapačioji funkcija, t. y. $\pi(x) = x$, $x \in \mathbb{R}^d$, tai kiekviena π komponentė π_j, $j \in \{1, \dots, d\}$, vadinama *projekcija.*

Jei turime m funkcijų $g_j\colon\ X \to \mathbb{R}$, tai funkcija f su reikšmėmis $f(x) := (g_1(x), \dots, g_m(x))$ $x \in X$, veikia iš X į $\mathbb{R}^m$, o jos komponentės yra $f_j \equiv g_j$. Todėl funkcija vieninteliu būdu apibrėžiama savo komponentėmis. Kadangi funkcijos $f\colon\ X \to \mathbb{R}^m$ ir jos komponenčių $f_j\colon\ X \to \mathbb{R}$ reikšmėms galioja lygybė $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$, $x \in X$, tai naudojamas funkcijos žymėjimas

$$f = (f_1, \dots, f_m)\colon\ X \to \mathbb{R}^m.$$

Nesunku pastebėti, kad kiekvienam $j \in \{1, \dots, m\}$ galioja lygybė $f_j = \pi_j \circ f$.

Tiesinės funkcijos Funkcija L iš $\mathbb{R}^n$ į $\mathbb{R}^m$ vadinama *tiesine* jei visiems $x, y \in \mathbb{R}^n$ ir $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ galioja lygybė

$$L(\lambda x + \mu y) = \lambda L(x) + \mu L(y).$$

Visų tiesinių funkcijų iš $\mathbb{R}^n$ į $\mathbb{R}^m$ aibę žymėsime $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Tegul $L_1, L_2 \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ ir $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Lygybė

$$(\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2)(x) := \lambda_1 L_1(x) + \lambda_2 L_2(x)$$

kiekvienam $x \in \mathbb{R}^n$, apibrėžia funkciją $\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Nesunku įstikinti, kad $\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Be to, galima patikrinti, kad $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ yra tiesinė erdvė.

Kiekviena tiesinė funkcija tarp aritmetinių tiesinių erdvių $\mathbb{R}^n$ yra išreiškiama matrica vieninteliu būdu, jei naudojama tik standartinė bazė. Tegul $\{e_i\}_{i=1}^n$ ir $\{e'_j\}_{j=1}^m$ yra atitinkamai erdvės $\mathbb{R}^n$ ir $\mathbb{R}^m$ standartinės bazės. Tada tiesinė funkcija $L\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ išreiškiama eilės $m \times n$ matrica $[L] := [a_{ji}]$, kur $L(e_i) = \sum_{j=1}^m a_{ji}e'_j$ kiekvienam

$i \in \{1, \ldots, n\}$. Tada $L(y) = [L]y$ bet kuriam $y \in \mathbb{R}^n$, o $[L]$ vadinsime tiesinės funkcijos L matricine išraiška. Remiantis vektoriaus matricine forma (2.22), čia ir toliau eilės $m \times n$ matricos $A = [a_{ji}]$ ir vektoriaus $y = (y_1, \ldots, y_n)$ sandauga yra

$$Ay = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}y_1 + \cdots + a_{1n}y_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}y_1 + \cdots + a_{mn}y_n \end{bmatrix}.$$

Galima įsitikinti, kad funkcija

$$L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \ni L \mapsto [L] \in \mathbb{M}^{m\times n} \tag{2.24}$$

yra tiesinė, o funkcija $[\,\cdot\,] := \{(L, [L]) \colon\ L \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)\}$ yra bijekcija.

Bet kuri tiesinė bijekcija tarp tiesinių erdvių vadinama *tiesiniu izomorfizmu*, o tokios erdvės vadinamos *tiesiškai izomorfiškos*. Todėl teisinga teorema:

2.46 teorema. *Funkcija $[\,\cdot\,]$ yra erdvių $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ ir $\mathbb{M}^{m\times n}$ tiesinis izomorfizmas.*

Tiesinio izomorfizmo prasme galima sutapatinti matricų erdvę $\mathbb{M}^{m\times n}$ su aritmetine tiesine erdve $\mathbb{R}^{mn}$ naudojant funkciją

$$\mathbb{M}^{m\times n} \ni A = [a_{ji}] \mapsto c(A) := (a_{11}, \ldots, a_{m1}, a_{12}, \ldots, a_{m2}, \ldots, a_{mn}) \in \mathbb{R}^{mn}.$$

Gautų tiesinių bijekcijų kompozicija nustato tiesinį izomorfizmą:

$$L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \ni L \mapsto c([L]) \in \mathbb{R}^{nm}. \tag{2.25}$$

Jei $n = 1$ ir $m \geq 1$, tai tiesinė funkcija $L\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ išreiškiama $m \times 1$ matrica arba vektoriumi

$$[L] = \begin{bmatrix} a_1 \\ \ldots \\ a_m \end{bmatrix} = (a_1, \ldots, a_m) = L(1) \in \mathbb{R}^m, \tag{2.26}$$

remiantis $\mathbb{R}^m$ erdvės elementų tapatinimu su atitinkamomis matricomis (2.22). Kadangi tiesinė funkcija L iš $\mathbb{R}$ į $\mathbb{R}^m$ yra vektoriaus $L(1)$ daugyba iš erdvės $\mathbb{R}$ elemento (skaliaro), tai L tapatinama su vektoriumi $L(1) = [L]$.

Jei $m = 1$ ir $n \geq 1$, tai tiesinė funkcija $L\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ išreiškiama $1 \times m$ matrica, kurios transponuota matrica yra vektorius:

$$[L] = [a_1 \cdots a_n] \quad \text{ir} \quad [L]^t = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n. \tag{2.27}$$

Funkcija tarp $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ir $\mathbb{R}^n$, apibrėžta taisykle $L \mapsto [L]^t$, yra tiesinė bijekcija, t. y. tiesinis izomorfizmas. Šią funkciją toliau naudojame apibrėžti gradiento ir hesiano matricas.

Sąryšis tarp tiesinės funkcijos ir ją išreiškiančios matricos yra suderintas su funkcijų kompozicija tokia prasme:

2.47 teorema. *Tarkime, kad $L\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ir $K\colon\ \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ yra tiesinės funkcijos, o $A = [L]$ ir $B = [K]$ yra šių funkcijų matricinės išraiškos standartinių bazių atžvilgiu. Tada kompozicija $K \circ L$ yra tiesinė funkcija, ir jos matricinė išraiška yra matricų sandauga BA.*

Šios teoremos įrodymas nėra sudėtingas ir paliekamas skaitytojui. Panašios teoremos, apie tiesinės funkcijos atvirktinę ir ją atitinkančią matricą, įrodymas taip pat si$\overline{\text{u}}$lomas kaip pratimas skaitytojui.

2.48 teorema. *Tarkime, kad $L\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ yra tiesinė funkcija ir $[L]$ yra jos matricinė išraiška standartinės bazės atžvilgiu. Funkcija L yra bijekcija tada ir tik tada, kai matrica $[L]$ yra neišsigimusi. Jei bent vienas iš šių teiginių teisingas, tai atvirkštinė funkcija L^{-1} yra tiesinė ir jos matricinė išraiška $[L^{-1}] = [L]^{-1}$.*

2.49 apibrėžimas. Tarkime, kad $A = [a_{ji}] \in \mathbb{M}^{d\times d}$ ir $Z \subset \mathbb{R}^d$. Matrica A ir ją atitinkanti kvadratinė forma

$$q_A(x) := x^t A x = \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij} x_i x_j, \qquad x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d,$$

vadinami

(a) *teigiamai apibrėžtomis* (angl. positive definite) aibėje Z, jei $q_A(x) > 0$ kiekvienam $x \in Z \setminus \{0\}$;

(b) *teigiamai pusapibrėžtomis* (angl. positive semidefinite) aibėje Z, jei $q_A(x) \geq 0$ kiekvienam $x \in Z \setminus \{0\}$;

(c) *neigiamai apibrėžtomis* (angl. negative definite) aibėje Z, jei $q_A(x) < 0$ kiekvienam $x \in Z \setminus \{0\}$;

(d) *neigiamai pusapibrėžtomis* (angl. negative semidefinite) aibėje Z, jei $q_A(x) \leq 0$ kiekvienam $x \in Z \setminus \{0\}$;

(e) *neapibrėžtomis aibėje* Z, jei skaičiai $q_A(x)$, $x \in Z \setminus \{0\}$, gali įgyti tiek teigiamas, tiek ir neigiamas reikšmes.

Kai nurodytos sąlygos išpildytos su $Z = \mathbb{R}^d$, tai A ir q_A vadinamos, atitinkamai, teigiamai apibrėžtomis, teigiamai pusapibrėžtėmis, neigiamai apibrėžtomis, neigiamai pusapibrėžtėmis, arba neapibrėžtomis.

Pratimai

1. Tegul $j \in \{1, \ldots, d\}$ ir $\pi_j(x) := x_j$ kiekvienam $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$. Taip apibrėžta funkcija $\pi_j\colon\ \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ yra tiesinė (patikrinti) ir vadinama *projekcija* j-tosios koordinatės kryptimi. Rasti jos matricinę išraišką $[\pi_j]$.

2. Įrodyti 2.46 teoremą.
3. Įrodyti 2.47 teoremą.
4. Įrodyti 2.48 teoremą.

2.4 Euklidinės erdvės

Tarkime, kad $d \in \mathbb{N}_+ = \{1, 2, \dots\}$ ir $\mathbb{R}^d$ yra aritmetinė tiesinė erdvė, apibrėžta praeitame skyrelyje. Bet kuriai šios erdvės elementų porai $x = (x_1, \dots, x_d)$ ir $y = (y_1, \dots, y_d)$ priskirsime skaičių

$$x{\cdot}y := x_1 y_1 + \dots + x_d y_d = x^t y;$$

čia dešinėje lygybės pusėje naudojama $\mathbb{R}^d$ erdvės elementų išraiška vektoriais stulpeliais (2.22) ir matricų daugyba. Šis priskyrimas $(x, y) \mapsto x{\cdot}y$ apibrėžia funkciją iš $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ į $\mathbb{R}$, vadinamą standartine *skaliarine daugyba* erdvėje $\mathbb{R}^d$. Nesunku patikrinti, kad bet kuriems $x, y, z \in \mathbb{R}^d$ ir $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, galioja savybės

$$\begin{aligned} &x{\cdot}x > 0, \quad \text{jei } x \neq 0,\\ &x{\cdot}y = y{\cdot}x,\\ &x{\cdot}(\lambda y + \mu z) = \lambda(x{\cdot}y) + \mu(x{\cdot}z). \end{aligned} \tag{2.28}$$

Pastaroji savybė reiškia, kad fiksuotam x funkcija $y \mapsto x{\cdot}y$ yra tiesinė. Tas pats galioja ir funkcijai $x \mapsto x{\cdot}y$, kai fiksuotas y, remiantis antrąja, argumentų simetriškumo, savybe. Kitaip tariant, skaliarinė daugyba yra tiesinė pagal kiekvieną iš dviejų argumentų, kas vadinama *bitiesiškumu*. Taigi skaliarinė daugyba yra simetrinė ir bitiesinė funkcija.

2.50 apibrėžimas. Aritmetinė tiesinė erdvė $\mathbb{R}^d$ su joje apibrėžta standartine skaliarine vektorių daugyba vadinama *euklidine erdve.*

Binarusis sąryšis $>$ realiųjų skaičių aibėje yra tiesinė tvarka, t. y. bet kurie du realieji skaičiai yra palyginami, jiems galioja trichotomijos savybė bei tranzityvumas. Bet kurie du realieji skaičiai yra palyginami ir tiesinės pustvarkės atveju, apibrėžiamos binariuoju sąryšiu $\leq$ (žr. (2.16)). Šiuos binariuosius sąryšius galima perkelti ir į euklidinę erdvę tokiu būdu. Tegul $x = (x_1, \dots, x_d)$ ir $y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$. Sakysime, kad $x > y$ arba $y < x$, jei $x_i > y_i$ kiekvienam $i = 1, \dots, d$. Taip pat sakysime, kad

$$x \geq y \text{ arba } y \leq x, \text{ jei } x_i \geq y_i \text{ kiekvienam } i = 1, \dots, d. \tag{2.29}$$

Atveju, kai $d > 1$, abu binarieji sąryšiai $>$ ir $\geq$ nėra pilni, pavyzdžiui, vektoriai $x = (1, 0)$ ir $y = (0, 1)$ nėra palyginami. Tačiau šiais binariaisiais sąryšiais apibrėžiama tvarka yra svarbi ir toliau naudojama. Jei $x \in \mathbb{R}^d$ ir $x \geq 0$, tai sakome, kad vektorius x yra *neneigiamas*, o jei $x > 0$, tai sakome, kad vektorius x yra *teigiamas*. Tokių vektorių aibes atitinkamai žymėsime

$$\mathbb{R}^d_+ := \{x \in \mathbb{R}^d \colon\ x \geq 0\} \qquad \text{ir} \qquad \mathbb{R}^d_{++} := \{x \in \mathbb{R}^d \colon\ x > 0\}.$$

Skaliarinė daugyba euklidinėje erdvėje leidžia apibrėžti atstumą tarp vektorių. Bet kuriam $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ tegul

$$x \mapsto |x| := \sqrt{x{\cdot}x} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_d^2}. \tag{2.30}$$

Kai $d = 1$, $|x|$ yra realiojo skaičiaus x modulis (žr. (2.15)). (2.30) reikšmių priskyrimas apibrėžia funkciją $|\cdot| = \{(x, |x|)\colon\ x \in \mathbb{R}^d\}\colon\ \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ su tokiomis savybėmis:

(1) kiekvienam $x \in \mathbb{R}^d$, $|x| \geq 0$ (neneigiamumas);

(2) kiekvienam $x \in \mathbb{R}^d$, $|x| = 0$ tada ir tik tada, kai $x = 0$ (teigiamas apibrėžtumas);

(3) visiems $x \in \mathbb{R}^d$ ir $\lambda \in \mathbb{R}$, $|\lambda x| = |\lambda||x|$ (homogeniškumas);

(4) visiems $x, y \in \mathbb{R}^d$, $|x + y| \leq |x| + |y|$ (subadityvumas).

Nesunku patikrinti pirmą, antrą ir trečią savybes. Ketvirtoji gaunama naudojantis Koši nelygybe[6]:

2.51 teiginys. *Bet kuriems $x, y \in \mathbb{R}^d$, $|x{\cdot}y| \leq |x|{\cdot}|y|$.*

Įrodymas. Bet kuriam $\lambda \in \mathbb{R}$

$$|\lambda x + y|^2 = (\lambda x + y){\cdot}(\lambda x + y) = \lambda^2|x|^2 + 2\lambda(x{\cdot}y) + |y|^2.$$

Šis kvadratinis trinaris λ atžvilgiu yra neneigiamas. Todėl jo diskriminantas (negriežtai) neigiamas, t. y. $(x{\cdot}y)^2 - |x|^2|y|^2 \leq 0$, kas ir įrodo norimą nelygybę. □

Savybės (1), (2), (3) ir (4) reiškia, kad funkcija $|\cdot|$ yra norma erdvėje $\mathbb{R}^d$. Todėl euklidinė erdvė $\mathbb{R}^d$ yra *normuotoji erdvė*, o jos norma (2.30) vadinama *euklidine norma*. Kaip ir bet kuri norma, euklidinė norma apibrėžia atstumą $|x - y|$ tarp bet kurių vektorių $x, y \in \mathbb{R}^d$, vadinamą metrika. Tokiu būdu euklidinė erdvė greta tiesinės struktūros turi ir metrinę struktūrą. Abi šios struktūros yra suderintos ta prasme, kad tiesinės operacijos ir skaliarinė daugyba yra tolydžios metrinės struktūros atžvilgiu (2.4.7 pratimas).

Be to, skaliarinė daugyba ir euklidinė norma naudojamos interpretuoti vektoriaus $x \in \mathbb{R}^d$ *ilgį*, juo vadinant normą $|x|$, o *kampą* φ tarp nenulinių vektorių $x, y \in \mathbb{R}^d$ apibrėžiant taip:

$$\cos\varphi := \frac{x{\cdot}y}{|x|\,|y|}. \tag{2.31}$$

Du vektoriai vadinami *ortogonaliais*, jei jų skaliarinė sandauga lygi nuliui.

Tegul $x \in \mathbb{R}^d$ ir $r > 0$ yra realusis skaičius. Euklidinės erdvės $\mathbb{R}^d$ atviruoju rutuliu su centru taške x ir spinduliu r vadinama aibė $B(x, r) := \{y \in \mathbb{R}^d\colon\ |x - y|\}$. Tačiau ekonominiame kontekste dažniausiai kalbama ne apie visą euklidinę erdvę, bet apie jos poaibį. Tegul X yra bet kuris euklidinės erdvės $\mathbb{R}^d$ poaibis ir $x \in X$ ir $r > 0$. Tokiu

[6] Šią nelygybę Augustin Louis Cauchy įrodė 1821 m.

atveju *atviruoju rutuliu aibėje* X vadinama aibė $B(x,r)\cap X = \{y \in X\colon\ |x-y| < r\}$. Pavyzdžiui, atviruoju rutuliu neneigiamųjų vektorių aibėje $\mathbb{R}^d_+$ yra tokia aibė:

$$G := \{x \in \mathbb{R}^d\colon\ x \geq 0 \text{ ir } |x| < 1\} = B(0,1) \cap \mathbb{R}^d_+. \tag{2.32}$$

Tiesinių funkcijų tarp euklidinių erdvių $\mathbb{R}^n$ ir $\mathbb{R}^m$ aibė $L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ taip pat yra tiesinė erdvė. Be to, remiantis (2.25), ji yra tiesiškai izomorfiška euklidinei erdvei $\mathbb{R}^{mn}$. Toliau $L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ erdvėje naudosime euklidinę normą:

$$|L| := |c([L])| = \sqrt{\sum_{1\leq i\leq n} |Le_i|^2} = \sqrt{\sum_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m} a_{ji}^2}. \tag{2.33}$$

Remdamiesi Koši nelygybe (2.51 teiginys), gauname tokį tiesinės funkcijos reikšmės įvertį:

$$|L(x)| \leq |L|\,|x|, \quad \text{visiems } x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.34}$$

2.27 teorema teigia, kad realiųjų skaičių aibė yra pilna. Ši savybė išlieka ir euklidinėje erdvėje. Sakysime, kad euklidinės erdvės $\mathbb{R}^d$ elementų seka $(x_n) = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_0, x_1, x_2, \dots)$ vadinama *Koši seka*, jei kiekvienam $\epsilon > 0$ egzistuoja toks $N \in \mathbb{N}$, kad $|x_n - x_m| < \epsilon$, kai $n > N$ ir $m > N$.

2.52 teorema. *Kiekviena euklidinės erdvės $\mathbb{R}^d$ Koši seka konverguoja.*

Įrodymas. Tegul (x_n) yra Koši seka ir $x_n = (x_{n1},\dots,x_{nd}) \in \mathbb{R}^d$ kiekvienam n. Kadangi $|x_{ni} - x_{mi}| \leq |x_n - x_m|$, kai $n,m \in \mathbb{N}$ ir $i \in \{1,\dots,d\}$, tai $(x_{ni})_{n\in\mathbb{N}}$ yra Koši seka kiekvienam i. Remiantis 2.27 teorema, kiekvienam i seka (x_{ni}) konverguoja, t. y. egzistuoja toks $y_i \in \mathbb{R}$, kad $|x_{ni} - y_i| \to 0$, kai $n \to \infty$. Tada $y := (y_1,\dots,y_d) \in \mathbb{R}^d$ ir $|x_n - y| \to 0$, kai $n \to \infty$, t. y. Koši seka (x_n) konverguoja; tai ir reikėjo įrodyti. $\square$

Atvirosios ir uždarosios aibės Tegul X yra bet kuri euklidinės erdvės $\mathbb{R}^d$ aibė. Aibės X poaibis G vadinamas *atviru aibės X atžvilgiu*, arba *atviru aibėje X*, jei kiekvienam $x \in G$ egzistuoja toks atvirasis rutulys B_x su centru x, kad $B_x \cap X \subset G$. Aibė vadinama *atvira*, jei ji yra atvira euklidinės erdvės atžvilgiu. Taigi (2.4.2 pratimas) poaibis $G \subset X$ yra atviras aibės X atžvilgiu tada ir tik tada, kai egzistuoja tokia atviroji aibė G', kad $G = G' \cap X$. Pavyzdžiui, (2.32) aibė yra atvira atžvilgiu aibės $\mathbb{R}^d_+$, bet nėra atvira atžvilgiu aibės $\mathbb{R}^d$ (kodėl?).

2.53 teiginys. *Tarkime, kad X yra euklidinės erdvės aibė ir $\mathcal{O}_X$ yra atvirų X aibės atžvilgiu poaibių klasė.*

(a) *Tuščioji aibė $\varnothing$ ir X priklauso $\mathcal{O}_X$;*

(b) *Jei A yra bet kokia aibė ir $G_\alpha \in \mathcal{O}_X$ kiekvienam $\alpha \in A$, tai sąjunga $\cup_{\alpha\in A} G_\alpha \in \mathcal{O}_X$;*

(c) *Jei A yra baigtinė aibė ir $G_\alpha \in \mathcal{O}_X$ kiekvienam $\alpha \in A$, tai sankirta $\cap_{\alpha\in A} G_\alpha \in \mathcal{O}_X$.*

Tegul X yra bet kuri euklidinės erdvės $\mathbb{R}^d$ aibė ir $A \subset X$. Aibės A elementas x vadinamas *vidiniu X atžvilgiu tašku*, jei egzistuoja toks atviras X aibėje rutulys B_x su centru taške x, kad $B_x \subset A$. Taigi A yra atvira aibėje X tada ir tik tada, kai kiekvienas A elementas yra jos vidinis X atžvilgiu taškas.

Tegul X yra bet kuri euklidinės erdvės $\mathbb{R}^d$ aibė. Aibės $X \subseteq \mathbb{R}^d$ poaibis C vadinamas *uždaru aibės X atžvilgiu*, jei jo papildinys $X \setminus C = \{x \in X\colon\ x \notin C\}$ yra atviras aibėje X.

2.54 teiginys. *Tarkime, kad X yra euklidinės erdvės aibė ir $\mathcal{C}_X$ yra uždarų X aibės atžvilgiu poaibių klasė.*

(a) *Tuščioji aibė $\varnothing$ ir X priklauso $\mathcal{C}_X$;*

(b) *Jei A yra bet kokia aibė ir $F_\alpha \in \mathcal{C}_X$ kiekvienam $\alpha \in A$, tai sankirta $\cap_{\alpha\in A} F_\alpha \in \mathcal{C}_X$;*

(c) *Jei A yra baigtinė aibė ir $F_\alpha \in \mathcal{C}_X$ kiekvienam $\alpha \in A$, tai sąjunga $\cup_{\alpha\in A} F_\alpha \in \mathcal{C}_X$.*

Tarkime, kad F yra euklidinės erdvės $\mathbb{R}^d$ aibė. Vektorius $a \in \mathbb{R}^d$ vadinamas aibės F *ribiniu tašku*, jei kiekvienas atvirasis euklidinės erdvės rutulys su centru taške a turi F aibės elementų, skirtingų nuo a. Kitaip tariant, F aibėje yra elementų kiek norint arti vektoriaus a.

2.55 teiginys. *Tarkime, kad X yra euklidinės erdvės aibė ir $F \subset X$. F uždara X aibės atžvilgiu tada ir tik tada, kai F priklauso visi tie jos ribiniai taškai, kurie priklauso X.*

Įrodymas. Tegul F uždara aibėje X, a yra aibės F ribinis taškas ir $a \in X$. Tada $X \setminus F$ yra atvirasis X poaibis ir kiekvienas rutulys su centru a turi aibės F elementų. Remiantis šiomis priežastimis a negali priklausyti $X \setminus F$, ir todėl $a \in F$.

Atvirkščiai, tegul F priklauso visi tie jos ribiniai taškai, kurie priklauso X. Jei $a \in X\setminus F$, tai egzistuoja toks atvirasis rutulys su centru a, kuris neturi bendrų elementų su F. Atsižvelgianį į šią priežastį $X\setminus F$ yra atviras X aibės atžvilgiu, ir todėl $F = X\setminus(X\setminus F)$ yra uždaras X poaibis. □

Įliustruodami pastarąjį teiginį pastebėsime, kad (2.32) lygybe apibrėžtos aibės G, kuri yra atvira aibėje $\mathbb{R}^d_+$, ribiniai taškai, priklausantys $\mathbb{R}^d_+ \setminus G$, sudaro aibę $\{x \in \mathbb{R}^d\colon\ x \geq 0 \text{ ir } |x| = 1\}$.

2.56 apibrėžimas. Tegul A yra euklidinės erdvės aibės X poaibis ir tegul A' yra visi tie A ribiniai taškai, kurie priklauso X. Aibė $\overline{A} := A \cup A'$ vadinama A aibės *uždariniu aibėje X*, o aibė A' vadinama A aibės *siena.*

Kitas teiginys formuluojamas naudojant aprėžtumo ir mažiausio viršutinio rėžio sąvokas iš 2.28 ir 2.29 apibrėžimų.

2.57 teiginys. *Jei netuščioji realiųjų skaičių aibė yra uždara ir aprėžta iš viršaus, tai jai priklauso jos mažiausias viršutinis rėžis.*

Įrodymas. Tegul $A \subset \mathbb{R}$ yra netuščia, uždara ir aprėžta iš viršaus. Remiantis realiųjų skaičių aibės mažiausio viršutinio rėžio savybe (2.30 teorema), egzistuoja skaičius $a := MVR_A$. Tarkime, kad $a \notin A$. Remiantis 2.29 apibrėžimu, kiekvienam $\epsilon > 0$ egzistuoja toks $x \in A$, kad $a - \epsilon < x < a$. Todėl a yra ribinis taškas, nepriklausantis uždarai aibei A. Ši prieštara įrodo teiginį. □

Kompaktinės aibės Tarkime, kad K yra euklidinės erdvės aibė. Šios erdvės aibių šeima $\{G_i\}_{i \in I}$ yra aibės K *denginys*, jei $K \subset \cup_{i \in I} G_i$. Čia ir toliau indeksų aibė I gali turėti neskaitų elementų kiekį. Jei denginį sudaro baigtinis aibių kiekis, tai jis vadinamas *baigtiniu denginiu*. Aibė K vadinama *kompaktine*, jei iš bet kurio jos denginio atvirųjų aibių šeima galima išrinkti baigtinį denginį.

Šiame aibės apibrėžime naudojome atviras (euklidinės erdvės atžvilgiu) aibes. Atveju, kai $K \subset X \subset \mathbb{R}^d$, galima kalbėti apie aibės X atžvilgiu kompaktišką aibę. Tiksliau, aibė K vadinama *kompaktine X atžvilgiu*, jei iš bet kurio jos denginio atvirų X atžvilgiu aibių šeima galima išrinkti baigtinį denginį. Tačiau toks apibrėžimas yra ekvivalentus ankstesniajam, o šio fakto įrodymas si$\overline{\text{u}}$lomas skaitytojui:

2.58 teiginys. *Sakykime, kad $K \subset X \subset \mathbb{R}^d$. Aibė K yra kompaktinė tada ir tik tada, kai ji yra kompaktinė X atžvilgiu.*

Kompaktinės aibės pavyzdys yra realiųjų skaičių aibės uždaras intervalas $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \colon a \leq x \leq b\}$, $-\infty < a < b < +\infty$. Faktas, kad ši aibė yra kompaktinė, vadinamas Heinės[7]–Borelio[8] teorema. Šis faktas, taip pat ir tai, kad bet kuris uždarasis euklidinės erdvės rutulys yra kompaktinė aibė, lengvai išplaukia iš toliau įrodytos 2.60(c) teoremos. Pastebėsime, kad atviras intervalas $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \colon a < x < b\}$ nėra kompaktinė aibė (kodėl?). Visa euklidinė erdvė taip pat nėra kompaktinė aibė, nes iš jos denginio atvirais ir be galo didėjančių spindulių rutuliais $\{B(0, n) \colon n \in \mathbb{N}\}$ neįmanoma išrinkti baigtinio denginio.

Iš pradžių įrodysime vieną naudingą kompaktinės aibės apib$\overline{\text{u}}$dinimą. Sakoma, kad aibių šeima turi *baigtinės sankirtos savybę*, jei bet kuri baigtinė tos šeimos narių sankirta yra netuščia.

2.59 teorema. *Euklidinės erdvės aibė yra kompaktinė tada ir tik tada, kai bet kurios uždarų jos poaibių šeimos, turinčios baigtinės sankirtos savybę, visų elementų sankirta yra netuščia.*

Įrodymas. Tarkime, kad aibė K yra kompaktinė ir $\{F_i\}_{i \in I}$ yra uždarų jos poaibių šeima, turinti baigtinės sankirtos savybę. Jei visų jos elementų sankirta $\cap_{i \in I} F_i = \varnothing$, tai papildinių šeima $\{F_i^c\}_{i \in I}$, sudaryta iš atvirųjų aibių, yra aibės K denginys. Kadangi aibė K

[7]Eduard Heine
[8]Émile Borel

yra kompaktinė, egzistuoja jos baigtinis denginys $\{F_{i_1}^c, \dots, F_{i_n}^c\}$. Nesunku pastebėti, kad $\cap_{k=1}^n F_{i_k} = \varnothing$, prieštara, įrodanti, kad $\cap_i F_i \neq \varnothing$.

Atvirkščiai, tarkime, kad $\{G_i\}_{i\in I}$ yra atvirųjų aibių šeima, dengianti K, ir $F_i := G_i^c$ kiekvienam $i \in I$. Jei iš $\{G_i\}_{i\in I}$ negalima išrinkti aibės K baigtinio denginio, tai $\{F_i\}_{i\in I}$ yra uždarųjų K poaibių šeima, turinti baigtinės sankirtos savybę. Todėl pagal prielaidą $\cap_i F_i \neq \varnothing$, prieštara tam, kad $\{G_i\}_{i\in I}$ yra K denginys atviromis aibėmis, įrodanti, kad aibė K yra kompaktinė. □

Kitos teoremos formulavimui naudojamos keletas naujų sąvokų. Euklidinės erdvės aibė A vadinama *aprėžta*, jei galima rasti tokį rutulį B su centru nulyje, kad $A \subset B$. Realiųjų skaičių aibės atveju aibės aprėžtumas ekvivalentus tam, kad aibė yra aprėžta iš viršaus ir iš apačios (2.28 apibrėžimas). Jei (x_n) yra euklidinės erdvės elementų seka ir $(n_k) = (n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $n_0 < n_1 < \cdots < n_k < \cdots$ yra begalinė didėjanti natūraliųjų skaičių seka, tai seka (x_{n_k}), sudaryta iš funkcijos $k \mapsto x_{n_k}$, $k \in \mathbb{N}$, reikšmių, vadinama *posekiu*, ir sakoma, kad (x_n) turi posekį (x_{n_k}).

Dalis toliau įrodomos teoremos teiginių turi aiškią prasmę tik tuo atveju, kai nagrinėjama aibė turi be galo daug skirtingų elementų. Tokiu atveju sakysime, kad aibė yra *begalinė*. Jei aibė turi tik baigtinį elementų skaičių, tai ji visada yra kompaktinė (kodėl?) ir šiuo aspektu neįdomi.

2.60 teorema. *Toliau išvardyti teiginiai apie begalinę euklidinės erdvės aibę K yra ekvivalentūs:*

(a) *K yra kompaktinė;*

(b) *kiekvienas aibės K begalinis poaibis turi ribinį tašką, priklausantį K;*

(c) *kiekviena aibės K elementų seka turi posekį, konverguojantį į aibės K elementą;*

(d) *K yra aprėžta ir uždara.*

Įrodymas. $(a) \Rightarrow (b)$: Tegul F yra begalinis aibės K poaibis, neturintis ribinio taško, priklausančio K. Tada aibė F yra uždara aibėje K remiantis 2.55 teiginiu. Be to, kiekvienam $x \in F$ egzistuoja toks atviras rutulys B_x su centru taške x, kuris neturi bendrų taškų su $F \setminus \{x\}$. Tokiu būdu atvirų aibių šeima $\{B_x\colon\ x \in F\} \cup (K \setminus F)$ yra aibės K denginys, kuris neturi baigtinio denginio. Ši prieštara įrodo (b).

$(b) \Rightarrow (c)$: Tegul (x_n) yra seka, kurios elementai priklauso aibei K. Jei tarp visų sekos elementų yra tik baigtinis skaičius skirtingų, tai bent vienas iš jų sekoje pasirodo be galo dažnai. Tokiu atveju posekis sudarytas iš vieno elemento konverguoja į save patį, t. y. (c) teiginys galioja šiuo atveju. Tarkime, kad (x_n) seka turi be galo daug skirtingų elementų. Tada ji turi ribinį tašką $x \in K$, o kiekvienai šio taško aplinkai, atviram rutuliui su centru x, priklauso be galo daug skirtingų sekos elementų. Posekis, konverguojantis į x, išrenkamas remiantis indukcija, ir tuo įrodomas (c).

$(c) \Rightarrow (d)$: Tegul x yra aibės K ribinis taškas. Remiantis ribinio taško apibrėžimu, sukonstruojama K elementų seka, konverguojanti į x. Tada $x \in K$ pagal prielaidą (c), o K uždara remiantis 2.55 teiginiu, kuriame X yra euklidinė erdvė. Jei K nėra aprėžta, tai kiekvienam $n \in \mathbb{N}$ galime rasti tokį $x_n \in K$, kad $|x_n| > n$. Tokiu būdu gauta K elementų seka (x_n) nekonverguoja, ir ši prieštara įrodo K aprėžtumą ir (d) teiginį.

Paskutinės teoremos dalies įrodymui naudosime tokį pagalbinį teiginį.

2.61 lema. *Jei K yra euklidinės erdvės kompaktinė aibė ir F yra uždaras jos poaibis, tai F irgi yra kompaktinė aibė.*

Įrodymas. Tegul atvirųjų aibių sistema $\mathcal{G}$ yra aibės F denginys. Papildinys F^c yra atviroji aibė, todėl $\mathcal{G}' := \mathcal{G} \cup \{F^c\}$ yra aibės K denginys atvirosiomis aibėmis. Kadangi K yra kompaktinė aibė, egzistuoja jos baigtinis denginys, iš kurio išbraukę aibę F^c, jei ji ten liko, gauname aibės F baigtinį denginį; tai ir reikėjo įrodyti. □

Toliau tęsdami 2.60 teoremos įrodymą, parodysime, kad $(d) \Rightarrow (a)$: Tegul K yra aprėžta ir uždara. Aprėžtumo dėka galima rasti tokį stačiakampį $A := [a, b] \times \cdots \times [a, b] \subset \mathbb{R}^d$, kad $K \subset A$. Remiantis lema, pakanka parodyti, kad A yra kompaktinė aibė. Tarkime, kad taip nėra. Tada egzistuoja toks A denginys atvirųjų aibių šeima $\mathcal{U}$, kuris neturi baigtinio denginio. Stačiakampį A padalijame į 2^n mažesnių stačiakampių. Tarp jų turi egzistuoti bent vienas toks, kurio negalima padengti baigtiniu $\mathcal{U}$ denginio elementų skaičiumi. Pažymėkime tą stačiakampį A_1 ir tęskime toliau tą pačią dalijimo ir išrinkimo į mažesnius stačiakampius procedūrą. Gausime seką įdėtų stačiakampių $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$, kurių kraštinių ilgiai artėja į nulį ir nei vienas iš jų nepadengiamas baigtiniu $\mathcal{U}$ denginio elementų skaičiumi.

Parodysime, kad sankirta $\cap_{n \geq 1} A_n$ yra aibė, sudaryta lygiai iš vieno vektoriaus. Iš kiekvieno stačiakampio paimkime po vieną vektorių. Gausime vektorių seką (x_n). Kadangi stačiakampiai vienas į kitą įdėti ir jų kraštinių ilgiai artėja į nulį, nesunku įsitikinti, kad (x_n) yra Koši seka. Kadangi euklidinė erdvė yra pilna (2.52 teorema), seka (x_n) konverguoja. Tarkime, kad ta riba yra vektorius x. Tada $x \in \cap_{n \geq 1} A_n$. Iš tikro, bet kuriam $n \geq 1$, x yra stačiakampio A_n ribinis taškas, o A_n yra uždara aibė. Todėl $x \in A_n$. Kadangi stačiakampių kraštinių ilgiai artėja į nulį, nesunku įsitikinti, kad stačiakampų sankirta negali turėti dviejų skirtingų elementų, t. y. $\{x\} = \cap_{n \geq 1} A_n$.

Įrodymo pabaigai pastebėkime, kad denginyje $\mathcal{U}$ privalo egzistuoti bent viena tokia atvira aibė U, kuriai priklauso x. remiantis U atvirumu, jai turi priklausyti ir pakankamai mažas stačiakampis A_n, o tai prieštarauja tam, kad jos negalima padengti baigtiniu denginiu. Todėl prielaida, kad A nėra kompaktinė aibė nėra teisinga, kas įrodo (a) teiginį. □

Pastarosios teoremos (b) savybė galioja, jei K yra kompaktinė aibė. Tačiau šios savybės pirmoji dalis galioja ir šiek tiek bendresniu atveju, kuris vadinamas *Bolcano*[9]–*Vejerštraso*[10] *savybe*.

[9] Bernhard Bolzano (1781–1848), matematikas
[10] Karl Theodor Wilhelm Weierstraß (1815–1897), vokiečių matematikas

2.62 išvada. *Bet kuri aprėžta ir begalinė euklidinės erdvės aibė turi ribinį tašką.*

Įrodymas. Tegul A yra aprėžta ir begalinė euklidinės erdvės aibė. remiantis aprėžtumu, egzistuoja toks uždaras rutulys B su centru nulyje, kad $A \subset B$. Remiantis 2.60(d) teorema, B yra kompaktinė aibė, todėl, remiantis tos pačios teorems (b) teiginiu, aibė A turi ribinį tašką. Tai ir reikėjo įrodyti. □

Funkcijos tolydumas Tegul X yra bet kuri $\mathbb{R}^n$ erdvės aibė, Y yra bet kuri $\mathbb{R}^m$ erdvės aibė ir $f\colon X \to Y$ yra funkcija. Funkcija f vadinama *tolydžia taške* $x_0 \in X$, jei kiekvienam $\epsilon > 0$ egzistuoja toks $\delta > 0$, kad $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$, kai tik $x \in X$ ir $|x - x_0| < \delta$. Funkcija f vadinama *tolydžia aibėje* X, jei ji yra tolydi kiekviename taške $x_0 \in X$. Atveju, kai $X = \mathbb{R}^n$ ir $Y = \mathbb{R}^m$, funkcija $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ yra tolydi taške $x_0 \in \mathbb{R}^n$, jei kiekvienam $\epsilon > 0$ egzistuoja toks $\delta > 0$, kad rutulio vaizdas $f[B(x_0, \delta)] \subset B(f(x_0), \epsilon)$.

Toliau įrodysime dažnai naudingą funkcijos tolydumo apibūdinimą, naudodamiesi atvirkštine atitiktimi f^{-1}, apibrėžta (2.20) lygybe, ir atitikties vaizdo sąvoka, apibrėžta (2.18) lygybe. Priminsime (2.38 teorema), jog atvirkštinė atitiktis f^{-1} yra funkcija tada ir tik tada, kai funkcija f yra bijekcija. Taigi toliau formuluojamoje teoremoje f^{-1} neprivalo būti funkcija.

2.63 teiginys. *Tegul* $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ *ir* $f\colon X \to Y$. *Teiginiai* (a), (b) *ir* (c) *yra ekvivalentūs:*

(a) *f yra tolydi*;

(b) *kiekvienam atviram aibėje Y poaibiui V aibė $f^{-1}[V]$ yra atvira aibėje X*;

(c) *kiekvienam uždaram aibėje Y poaibiui C aibė $f^{-1}[C]$ yra uždara aibėje X.*

Įrodymas. $(a) \Rightarrow (b)$: Tegul aibė V yra atvira aibės Y atžvilgiu ir $u \in f^{-1}[V]$. Kadangi $f^{-1}[V] \subset X$, tai pakanka parodyti, kad u yra $f^{-1}[V]$ aibės vidinis taškas. Kadangi V atvira aibėje Y, tai egzistuoja toks $\epsilon > 0$, kad $B(f(u), \epsilon) \cap Y \subset V$. Kadangi f tolydi ir

$$U_\epsilon := \{x \in X\colon\ |f(x) - f(u)| < \epsilon\} = f^{-1}[B(f(u), \epsilon) \cap Y] \subset f^{-1}[V],$$

tai egzistuoja toks $\delta > 0$, kad $B(u, \delta) \subset U_\epsilon$. Taigi u yra $f^{-1}[V]$ aibės vidinis taškas ir galioja (b) teiginys. Atvirkščiai, jei galioja (b), tai (a) teiginio įrodymas gaunamas naudojantis atvirosios aibės apibrėžimu ir paliekamas skaitytojui. (b) ir (c) teiginių ekvivalentumas įrodomas, naudojantis lygybe

$$X \setminus f^{-1}[A] = f^{-1}[Y \setminus A],$$

galiojančia bet kuriai aibei $A \subset Y$. Jos įrodymas ir panaudojimas taip pat paliekami skaitytojui. □

Toliau nagrinėjant tolydžiasias funkcijas tarp euklidinių erdvių, prisiminkime, kad funkcijos vaizdas yra atitikties vaizdas, apibrėžtas (2.18) lygybe.

2.64 teorema. *Kompaktinės aibės vaizdas tolydžios funkcijos atžvilgiu yra kompaktinė aibė.*

Įrodymas. Tegul $X \subset \mathbb{R}^n$ yra kompaktinė aibė ir $f\colon\ X \to \mathbb{R}^m$ yra tolydi. Parodysime, kad vaizdas $f[X]$ yra kompaktinė aibė. Tegul T yra begalinis aibės $f[X]$ poaibis. Tada $S := f^{-1}[T]$ yra begalinis aibės X poaibis. Kadangi X yra kompaktinė aibė, tai remiantis 2.60 teorema S turi ribinį tašką x, t. y. egzistuoja seka (x_n), sudaryta iš S elementų ir konverguojanti į elementą $x \in S$. Remiantis f tolydumu (2.4.5 pratimas) seka $(f(x_n))$ yra sudaryta iš T elementų ir konverguoja į $f(x) \in T$. Dar kartą remiantis 2.60 teorema, $f[X]$ yra kompaktinė aibė; tai ir reikėjo įrodyti. $\square$

Kaip išvadą iš pastarosios teoremos ir mažiausio viršutinio rėžio savybės gauname svarbią toliau formuluojamą, *Vejerštraso teoremą*: bet kuri tolydi su realiomis reikšmėmis funkcija apibrėžta ant kompakto įgyja savo maksimalią ir minimalią reikšmes. Tiksliau, galioja toks teiginys.

2.65 teorema. *Tarkime, kad $K \subset \mathbb{R}^n$ yra netuščia kompaktinė aibė ir $f\colon\ K \to \mathbb{R}$ yra tolydi funkcija. Tada egzistuoja tokie $a, b \in K$, kad $f(a) \le f(x) \le f(b)$ su kievienu $x \in K$.*

Įrodymas. Remiantis 2.64 teorema, vaizdas $f[K]$ yra kompaktinė realiųjų skaičių aibė. Remiantis 2.60 teorema, ji yra netuščia, uždara ir aprėžta aibė. Todėl dėka 2.57 teiginio, aibei $f[K]$ priklauso jos mažiausias viršutinis rėžis, t. y. egzistuoja toks $b \in K$, kad $f(x) \le f(b)$ kiekvienam $x \in K$. Mažiausia reikšmė įgyjama atsižvelgiant į didžiausio apatinio rėžio savybes ir naudojantis analogiškais argumentais; tai ir reikėjo įrodyti. $\square$

Vėl tarkime, kad $X \subset \mathbb{R}^n$ ir $f\colon\ X \to \mathbb{R}^m$. Funkcija f vadinama *tolygiai tolydžia* X aibėje, jei kiekvienam $\epsilon > 0$ egzistuoja toks $\delta > 0$, kad $|f(x) - f(y)| < \epsilon$, kai $x, y \in X$ ir $|x - y| < \delta$.

2.66 teorema. *Bet kuri tolydi kompaktinėje aibėje funkcija yra tolygiai tolydi.*

Įrodymas. Tegul $X \subset \mathbb{R}^n$ yra kompaktinė aibė, $f\colon\ X \to \mathbb{R}^m$ ir $\epsilon > 0$. Kadangi f tolydi, tai kiekvienam $u \in X$ egzistuoja toks $\delta(u) > 0$, kad $|f(x) - f(u)| < \epsilon/2$, jei tik $x \in B(u, \delta(u)) \cap X$. Šeima $\{B(u, \delta(u)/2)\colon\ u \in X\}$ yra X aibės denginys atviromis aibėmis. Kadangi X kompaktinė aibė, egzistuoja baigtinis skaičius vektorių $u_1, \ldots, u_k \in X$ su savybe $X \subset \cup_{i=1}^{k} B(u_i, \delta(u_i)/2)$. Tegul $\delta := (1/2)\min\{\delta(u_1), \ldots, \delta(u_k)\}$. Nesunku įsitikinti, kad $|f(x) - f(y)| < \epsilon$, jei tik $x, y \in X$ ir $|x - y| < \delta$, t. y. f yra tolygiai tolydi aibėje X. $\square$

Pratimai

1. Tegul $a, b, c \in \mathbb{R}$ ir bet kuriems $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ tegul
$$q(x, y) := ax_1y_2 + bx_1y_2 + bx_2y_1 + cx_2y_2.$$
Su kokiais $a, b, c \in \mathbb{R}$ (2.28) savybės galioja funkcijai $q(\cdot, \cdot) \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$?

2. Tegul X yra euklidinės erdvės aibė. Įrodyti, kad poaibis $G \subset X$ yra atviras aibės X atžvilgiu tada ir tik tada, kai egzistuoja tokia atvira aibė G', kad $G = G' \cap X$.

3. Įrodyti 2.53 ir 2.54 teiginius.

4. Įrodyti 2.58 teiginį.

5. Tegul $X \subset \mathbb{R}^n$, $x \in X$ ir $g \colon X \to \mathbb{R}^m$ Įrodyti: g yra tolydi taške x tada ir tik tada, kai $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(x)$ su bet kuria seka (x_n), konverguojančia į x. Nuoroda: naudotis rinkimo aksioma (2.8 aksioma).

6. Įrodyti, kad aibės $A \subset X$ uždarinys $\overline{A}$ aibėje X (2.56 apibrėžimas) yra uždara aibė aibėje X. Be to, jei $A \subset B \subset X$ ir B yra uždara aibėje X, tai $\overline{A} \subset B$.

7. Įrodyti, kad funkcijos (a), (b) ir (c) yra tolydžiosios:
   - (a) $(x, y) \mapsto x + y$ iš $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ į $\mathbb{R}^d$;
   - (b) $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ iš $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ į $\mathbb{R}^d$;
   - (c) $(x, y) \mapsto x \cdot y$ iš $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ į $\mathbb{R}$.

8. Baigti 2.63 teiginio įrodymą.

9. Tegul $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$ ir $f \colon X \to Y$. Įrodyti: f tolydi taške $u \in X$ tada ir tik tada, kai kiekvienam atviram aibės Y poaibiui V, kuriam priklauso $f(u)$, egzistuoja toks atviras aibės X poaibis U, kad $u \in U$ ir $f[U] \subset V$.

10. Įrodyti, kad tolydžiųjų funkcijų kompozicija yra tolydi funkcija.

2.5 Integravimas

Tarkime, kad $[a, b]$, $-\infty < a < b < +\infty$, yra realiųjų skaičių uždarasis intervalas, kuriame apibrėžtos funkcijos $\varphi \colon [a, b] \to \mathbb{R}^d$ ir $\psi \colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Sakoma, kad egzistuoja funkcijos φ *Riemanno–Stieltjeso* integralas atžvilgiu funkcijos ψ
$$\int_a^b \varphi \, d\psi \equiv \int_a^b \varphi(t) \, d\psi(t) := I \in \mathbb{R}^d,$$

jei kiekvienam $\epsilon > 0$ galima rasti tokį $\delta > 0$, kad nelygybė

$$\Big| I - \sum_{j=1}^{k} \varphi(s_j)\big[\psi(t_j) - \psi(t_{j-1})\big]\Big| < \epsilon$$

galioja visiems tiems $[a, b]$ skaidiniams $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ ir bet kuriems $s_j \in [t_{j-1}, t_j]$, kuriems $\max_j [t_j - t_{j-1}] < \delta$. Pastarojoje nelygybėje sukeitę vietomis φ su ψ, gauname realiosios funkcijos ψ integralo atžvilgiu vektorinės funkcijos φ apibrėžimą, taip pat vadinamą *Riemanno–Stieltjes*o integralu $\int_a^b \psi\, d\varphi$. Kai funkcijos φ reikšmės yra erdvėje $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, integralai su reikšme toje erdvėje apibrėžiami taip pat.

2.67 teorema. *Jei $\varphi\colon [a, b] \to \mathbb{R}^d$ yra tolydi ir $\psi\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ yra monotoninė, tai egzistuoja integralas $\int_a^b \varphi\, d\psi$.*

Įrodymas. Integralo egzistavimą įrodysime naudodamiesi euklidinės erdvės $\mathbb{R}^d$ pilnumu. Kiekvienam $n \in \mathbb{N}$ tegul

$$t_i^n := \min\{a + i2^{-n}, b\}, \quad i = 0, 1, \ldots, i_n := \lceil b2^n \rceil;$$

čia $\lceil x \rceil := \min\{k \in \mathbb{N}\colon\ k \geq x\}$, $x \in \mathbb{R}$. Rinkinys $\{t_i^n\}_{i=0}^{i_n}$ yra intervalo $[a, b]$ skaidinys. Taip pat kiekvienam $n \in \mathbb{N}$ tegul

$$s_n := \sum_{i=1}^{i_n} \varphi(t_{i-1}^n)\big[\psi(t_i^n) - \psi(t_{i-1}^n)\big] \in \mathbb{R}^d.$$

Kadangi φ yra tolygiai tolydi intervale $[a, b]$ (2.66 teorema), tai duotam $\epsilon > 0$ egzistuoja toks $N \in \mathbb{N}$, kad

$$\sup\{|\varphi(s) - \varphi(t)|\colon\ t, s \in [a, b],\ |t - s| \leq 2^{-N}\} < \epsilon.$$

Jei $N \leq n < m < \infty$, tai

$$\begin{aligned} |s_n - s_m| &= \Big| \sum_{i=1}^{i_n} \sum_{j\colon\ t_j^m \in (t_{i-1}^n, t_i^n]} \big[\varphi(t_{i-1}^n) - \varphi(t_{j-1}^m)\big]\big[\psi(t_j^m) - \psi(t_{j-1}^m)\big]\Big| \\ &< \epsilon|\psi(b) - \psi(a)|. \end{aligned}$$

Taigi $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^d$ yra Koši seka. Kadangi kiekviena euklidinės erdvės Koši seka konverguoja (2.52 teorema), tai egzistuoja toks vektorius $I \in \mathbb{R}^d$, kad $|I - s_n| \to 0$, kai $n \to \infty$.

Įrodysime, kad $I = \int_a^b \varphi\, d\psi$. Tegul $\epsilon > 0$. Egzistuoja toks $n \in \mathbb{N}$, kad $|I - s_n| < \epsilon$ ir $|\varphi(s) - \varphi(t)| < \epsilon$, kai $s, t \in [a, b]$ ir $|t - s| < 2^{-n}$. Tegul $\delta := 2^{-n}$, $\{t_j\}_{j=0}^{k}$ yra toks $[a, b]$ skaidinys, kad $\max_j [t_j - t_{j-1}] < \delta$ ir tegul $s_j \in [t_{j-1}, t_j]$ kiekvienam j. Tegul

$\{u_l\}$ yra toks $[a,b]$ skaidinys, kurį sudaro visi skaidinių $\{t_i^n\}_{i=0}^n$ ir $\{t_j\}_{j=0}^k$ taškai. Tada pridėję ir atėmę s_n bei $\sum_l \varphi(u_{l-1})[\psi(u_l)-\psi(u_{l-1})]$, gauname

$$\Big|I-\sum_{j=1}^k \varphi(s_j)\big[\psi(t_j)-\psi(t_{j-1})\big]\Big| \le \epsilon$$

$$+\sum_{i=1}^n \sum_{l:\ u_l\in(t_{i-1}^n,t_i^n]} |\varphi(t_{i-1}^n)-\varphi(u_{l-1})||\psi(u_l)-\psi(u_{l-1})|$$

$$+\sum_{j=1}^k \sum_{l:\ u_l\in(t_{j-1},t_j]} |\varphi(u_{l-1})-\varphi(s_j)||\psi(u_l)-\psi(u_{l-1})|$$

$$\le \epsilon + 2\epsilon|\psi(b)-\psi(a)|.$$

Kadangi $\epsilon>0$ yra laisvai pasirinktas, tai teorema įrodyta. □

Toliau formuluojama savybė vadinama *integravimo dalimis formule*.

2.68 teiginys. *Jei integralas $\int_a^b \varphi\,d\psi$ egzistuoja, tai egzistuoja integralas $\int_a^b \psi\,d\varphi$ ir galioja lygybė*

$$\int_a^b \varphi\,d\psi + \int_a^b \psi\,d\varphi = \varphi(b)\psi(b)-\varphi(a)\psi(a). \tag{2.35}$$

Toliau formuluojama savybė vadinama *keitimo formule*.

2.69 teiginys.

$$\int_a^b \varphi(t)\,d\Big[\int_a^t \psi(s)\,ds\Big] = \int_a^b \varphi(t)\psi(t)\,dt. \tag{2.36}$$

2.70 teiginys. *Jei $\varphi\colon\ [a,b]\to\mathbb{R}^d$ yra aprėžta, $\psi\colon\ [a,b]\to\mathbb{R}$ yra monotoninė ir egzistuoja integralas $\int_a^b \varphi\,d\psi$, tai*

$$\Big|\int_a^b \varphi\,d\psi\Big| \le |\psi(b)-\psi(a)|\sup_{a\le t\le b}|\varphi(t)|. \tag{2.37}$$

Įrodymas. Jei $\{t_j\}_{j=0}^k$ yra $[a,b]$ skaidinys ir $s_j\in[t_{j-1},t_j]$ kiekvienam $j=1,\dots,k$, tai

$$\Big|\sum_{j=1}^k \varphi(s_j)\big[\psi(t_j)-\psi(t_{j-1})\big]\Big| \le |\psi(b)-\psi(a)|\sup_{a\le t\le b}|\varphi(t)|.$$

Kadangi integralas egzistuoja, tai galioja (2.37) nelygybė. □

2.6 Diferencijavimas

Išvestinės ir jakobianas Tarkime, kad $\Delta(y) \in \mathbb{R}^m$ visiems $y \in U$ iš kurios nors nulio aplinkos $U \subset \mathbb{R}^n$, t. y. $\Delta\colon U \to \mathbb{R}^m$ yra funkcija. Žymėjimas $\Delta(y) = o(y)$, kai $y \to 0$, reiškia, kad

$$\lim_{y \to 0} \frac{|\Delta(y)|}{|y|} = 0.$$

Jei $x \in U \setminus \{0\}$, $\Delta(tx) = t\Delta(x)$ visiems $t \in \mathbb{R}$ ir $\Delta(y) = o(y)$, tai $\Delta(x) = 0$. Ši aplinkybė rodo, kad toliau siūlomas išvestinės apibrėžimas yra korektiškas (2.6.1 pratimas).

2.71 apibrėžimas. Tegul $U \subset \mathbb{R}^n$ yra atvira aibė ir $f\colon U \to \mathbb{R}^m$. Funkcija f yra *diferencijuojama taške* $a \in U$, jei egzistuoja tokia tiesinė funkcija $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, kad

$$\Delta_f(x) := f(a+x) - f(a) - L(x) = o(x), \quad \text{kai} \quad x \to 0. \tag{2.38}$$

Vienintelę tiesinę funkciją L, priklausančią tik nuo a, žymėsime $Df(a) := L$ ir vadinsime *išvestine taške* a. Sakysime, kad f yra *diferencijuojama,* jei ji yra diferencijuojame kiekviename savo apibrėžimo aibės taške, šiuo atveju U. Tuo atveju yra apibrėžta funkcija $Df\colon U \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, vadinama *išvestinės funkcija.*

Kai $n = m = 1$, tai $Df(a)$ yra tiesinė funkcija veikianti iš $\mathbb{R}$ į $\mathbb{R}$. Nesunku patikrinti, kad tokia funkcija yra daugyba iš skaičiaus. Pažymėkime tą skaičių $f'(a)$. Tada $Df(a)(x) = f'(a)x$ kiekvienam $x \in \mathbb{R}$ ir galioja sąryšis

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \big[f(a+x) - f(a)\big]/x. \tag{2.39}$$

Tokį išvestinės žymėjimą naudosime tik atveju $n = m = 1$. Bendru atveju, kai $n > 1$ arba $m > 1$, tiesinė funkcija išreiškiama matrica, ir tai patikslinama kitame apibrėžime.

2.72 apibrėžimas. Tarkime, kad $U \subset \mathbb{R}^n$ yra atvira aibė, o funkcija $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ yra diferencijuojama taške $a \in U$. Matrica, standartinių bazių atžvilgiu išreiškianti tiesinę funkciją $Df(a)$, vadinama *funkcijos f jakobiano matrica* arba tiesiog *jakobianu taške* a ir žymima $Jf(a) := [Df(a)]$.

Atveju, kai $m = 1$, t. y. kai f yra su realiomis reikšmėmis, jakobianas yra eilės $1 \times n$ matrica, o jos transponuotoji matrica yra $\mathbb{R}^n$ erdvės vektorius, vadinamas f *gradientu taške* a, t.y.

$$\nabla f(a) := Jf(a)^t \in \mathbb{R}^n$$

(žiūrėk (2.27) ir (2.22)). Simbolis ∇ skaitomas *nabla*; žodžio reikšmė kildinama iš vieno senovinio styginio instrumento, primenančio arfą, pavadinimo.

Šiame gradiento apibrėžime naudojame tiesinį izomorfizmą tarp $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ir $\mathbb{R}^n$, apibrėžtą (2.27) sąryšiu. Daugiau apie gradientą rašoma 2.77 išvadoje šiek tiek toliau.

Vienas svarbiausių ir naudingiausių diferencijavimo faktų yra dviejų diferencijuojamų funkcijų kompozicijos diferencijuojamumas. Priminsime funkcijų kompozicijos apibrėžimą. Tegul $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$, $g\colon X \to Y$ ir $f\colon Y \to \mathbb{R}^k$. Kiekvienam $x \in X$, reikšmės $h(x) := f(g(x)) \in \mathbb{R}^k$ apibrėžia funkciją $f{\circ}g := h$ iš X į $\mathbb{R}^k$, vadinamą g ir f funkcijų *kompozicija*. Toliau suformuluosime kompozicijos diferencijavimo taisyklę, sutrumpintai vadinamą *kompozicijos taisykle* (angl. chain rule).

2.73 teorema. *Tegul f ir g yra aukščiau apibrėžtos funkcijos. Jei g yra diferencijuojama taške $a \in X$ ir f yra diferencijuojama taške $g(a) \in Y$, tai kompozicija $f{\circ}g$ yra diferencijuojam taške a ir jos išvestinė yra*

$$D(f{\circ}g)(a) = Df(g(a)){\circ}Dg(a). \tag{2.40}$$

Įrodymas. Tegul $b := g(a)$, $I := Dg(a)$ ir $L := Df(b)$. Kiekvienam $x \in X$ tokiam, kad $a + x \in X$, tegul $\gamma(x) := g(a + x) - g(a)$. Tada

$$\begin{aligned}\Delta_{f\circ g}(x) &:= (f{\circ}g)(a + x) - (f{\circ}g)(a) - (L{\circ}I)(x)\\ &= \big[f(b + \gamma(x)) - f(b) - L(\gamma(x))\big] + L(\gamma(x) - I(x)).\end{aligned}$$

Kadangi g yra diferencijuojama taške a, tai $\Delta_g(x) := \gamma(x) - I(x) = o(x)$, kai $x \to 0$. Remiantis (2.34), galioja $L(\gamma(x) - I(x)) = o(x)$, kai $x \to 0$. Dar kartą naudojant (2.34) tiesinei funkcijai I, $\gamma(x) \to 0$, kai $x \to 0$, t. y. g yra tolydi taške a. Kadangi f yra diferencijuojama taške $b = g(a)$, tai

$$\frac{|f(b + \gamma(x)) - f(b) - L(\gamma(x))|}{|x|} = \frac{|\Delta_f(\gamma(x))|}{|\gamma(x)|}\,\frac{|\Delta_g(x) + I(x)|}{|x|} \to 0,$$

kai $x \to 0$. Taigi $\Delta_{f\circ g}(x) = o(x)$, kai $x \to 0$. Tai ir reikėjo įrodyti. □

Remiantis 2.47 teorema, kompozicijos jakobianas yra lygus atitinkamų funkcijų jakobianų matricų sandaugai:

$$J(f{\circ}g)(a) = Jf(g(a))\,Jg(a). \tag{2.41}$$

Kitam teiginiui verta prisiminti funkcijos komponentės ir projekcijos sąvokas, apibūdintas 2.45 apibrėžime.

2.74 teiginys. *Tegul $U \subset \mathbb{R}^n$ yra atvira ir $f\colon U \to \mathbb{R}^m$.*

(a) *Jei f yra tiesinė, tai ji yra diferencijuojama aibėje U su išvestine funkcija $Df = f$.*

(b) *Funkcija f yra diferencijuojama taške $u \in U$ tada ir tik tada, kai kiekviena komponentė f_j yra diferencijuojama taške u. Be to, galioja lygybės*

$$Df(u) = (Df_1(u), \ldots, Df_m(u)) \quad \textit{ir} \quad Jf(u) = \begin{bmatrix} Jf_1(u)\\ \ldots\ldots\\ Jf_m(u)\end{bmatrix}. \tag{2.42}$$

Įrodymas. Įrodyti teiginį (a) siūlome pačiam skaitytojui. Teiginio (b) įrodymui iš pradžių tarkime, kad f yra diferencijuojama taške $u \in U$ ir $j \in \{1, \ldots, m\}$. Funkcijos f j-toji komponentė yra kompozicija $f_j = \pi_j \circ f$, čia π_j yra projekcija. Remiantis teiginiu (a), projekcija $\pi_j \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ yra diferencijuojama kiekviename erdvės $\mathbb{R}^m$ taške ir $D\pi_j = \pi_j$. Tada remiantis kompozicijos diferencijavimo taisykle (2.73 teorema) yra diferencijuojama komponentė $f_j = \pi_j \circ f$ ir $Df_j(u) = \pi_j \circ Df(u)$. Be kita ko, $Df_j(u) \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ yra funkcijos $Df(u) \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ j-toji komponentė, t. y. galioja pirmoji (2.42) lygybė. Antroji lygybė gaunama naudojantis 2.47 teorema ir tuo, kad $[\pi_j] = e_j^t$.

Atvirkščiai, tegul $u \in U$ ir kiekviena komponentė f_j yra diferencijuojama taške u. Pažymėkime $L := (Df_1(u), \ldots, Df_m(u)) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ ir $\Delta_j(x) := f_j(u + x) - f_j(u) - Df_j(u)(x) \in \mathbb{R}$, jei $u + x \in U$. Tada

$$\frac{|f(u+x) - f(u) - L(x)|}{|x|} = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \Big(\frac{|\Delta_j(x)|}{|x|}\Big)^2} \to 0, \quad \text{kai} \quad x \to 0.$$

Teiginys (b) įrodytas. □

Kryptinės ir dalinės išvestinės Tarkime, kad $f \colon U \to \mathbb{R}^m$ yra diferencijuojama taške $a \in U$, ir $u \in \mathbb{R}^n$ yra bet kuris fiksuotas nenulinis vektorius. Kadangi $Df(a)(\cdot)$ yra tiesinė funkcija, tai tiesinė yra funkcija $t \mapsto L_u(t) := Df(a)(tu)$, $t \in \mathbb{R}$. Sąryšyje (2.38) paėmus $y = tu$, visiems $t \in \mathbb{R}$ pakankamai arti nulio, $a + tu \in U$ ir apibrėžtas vektorius

$$\delta(t) := \Delta(tu) = f(a + tu) - f(a) - L_u(t) \in \mathbb{R}^m.$$

Be to, galioja ribų lygybė

$$\lim_{t \to 0} \frac{|\delta(t)|}{|t|} = |u| \lim_{tu \to 0} \frac{|\Delta(tu)|}{|tu|} = 0.$$

Todėl funkcija $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ su reikšmėmis $g(t) := f(a + tu)$, $t \in \mathbb{R}$, yra diferencijuojama nulyje su išvestine $Dg(0) = L_u \in L(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$.

Kaip minėta anksčiau (žr. (2.26)), tiesinė funkcija iš $\mathbb{R}$ į $\mathbb{R}^m$ tapatinama su vektoriumi. Todėl toliau apibrėžiama kryptinė išvestinė yra vektorius iš $\mathbb{R}^m$, o ne tiesinė funkcija iš $L(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$.

2.75 apibrėžimas. Tegul $U \subset \mathbb{R}^n$ yra atvira aibė, $a, u \in U$ ir $f \colon U \to \mathbb{R}^m$. Sakysime, kad f turi *kryptinę išvestinę* taške a kryptimi u, jei nulio aplinkoje apibrėžta funkcija $t \mapsto f(a + tu)$, $t \in \mathbb{R}$, yra diferencijuojama nulyje. Tuo atveju kryptinė išvestinė yra vektorius

$$D_u f(a) := \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tu) - f(a)}{t} \in \mathbb{R}^m.$$

Atskiru atveju, kai kryptis u yra standartinės bazės vektorius e_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$, tai kryptinė išvestinė $D_i f(a) := D_{e_i} f(a) \in \mathbb{R}^m$ vadinama *i-tąja daline išvestine.*

Naudojant klasikinius žymėjimus, funkcijos $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dalinė išvestinė $D_1 f(x,y)$ rašoma ir tokiu būdu:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \quad \text{arba} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \quad \text{arba} \quad \frac{\partial}{\partial x} f(x,y).$$

Toks žymėjimas yra patogus tais atvejais, kai vienos funkcijos nepriklausomu kintamuoju yra laikoma kita funkcija. Pavyzdžiui, taip atsitinka norint apibrėžti ekonominių dydžių elastingumą (žr. 5.3.4 pratimas).

Pirmoji kito teiginio dalis jau įrodyta prieš 2.75 apibrėžimą.

2.76 teiginys. *Tarkime, kad funkcija $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ yra diferencijuojama taške $a \in U \subset \mathbb{R}^n$. Tada galioja teiginiai:*

(a) *f turi kryptinę išvestinę bet kuria kryptimi $u = (u_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$, ir*

$$D_u f(a) = Df(a)(u) = \sum_{i=1}^n u_i D_i f(a). \tag{2.43}$$

(b) *egzistuoja visų f komponenčių f_j dalinės išvestinės $D_i f_j(a)$, $i \in \{1,\dots,n\}$ bei $j \in \{1,\dots,m\}$, ir*

$$Jf(a) = \begin{bmatrix} D_1 f_1(a) & \cdots & D_n f_1(a) \\ \dots & \dots & \dots \\ D_1 f_m(a) & \cdots & D_n f_m(a) \end{bmatrix}.$$

Įrodymas. Kadangi $u = \sum_{i=1}^n u_i e_i$, $Df(a)$ tiesiškumo dėka gauname

$$Df(a)(u) = \sum_{i=1}^n u_i Df(a)(e_i) = \sum_{i=1}^n u_i D_i f(a),$$

ir tai užbaigia (a) įrodymą. Tuo tarpu faktas (b) išplaukia iš teiginio 2.74(b) ir to, kad

$$Jf_j(a) = [Df_j(e_1), \dots, Df_j(e_n)]$$

kiekvienam $j \in \{1,\dots,m\}$. □

Atskiru atveju, kai $m = 1$, pastarajame teiginyje funkcijos jakobiano matricą galima pakeisti gradientu, ir gauname tokią išvadą.

2.77 išvada. *Tarkime, kad funkcija $f\colon U \to \mathbb{R}$ yra diferencijuojama taške $a \in U \subset \mathbb{R}^n$. Tada yra apibrėžtas f gradientas taške a*

$$\nabla f(a) = (D_1 f(a), \dots, D_n f(a)) = \sum_{i=1}^n D_i f(a) e_i \in \mathbb{R}^n,$$

o išvestinė taške a kryptimi $u \in \mathbb{R}^n$ lygi $D_u f(a) = \langle \nabla f(a), u \rangle$.

Pastaroji formulė leidžia pagrįsti tokią gradiento geometrinę interpretaciją: *gradiento vektorius yra funkcijos didžiausio kitimo kryptis, o norma $|\nabla f(a)|$ yra šio kitimo dydis.* Tuo galima įsitikinti naudojantis formule (žr. (2.31))

$$D_u f(a) = |\nabla f(a)|\,|u| \cos \varphi$$

ir tuo, kad kairė šios formulės pusė nusako funkcijos f kitimo taške a kryptimi u greitį. Taigi $D_u f(a)$ yra nulis, jei u yra statmenas $\nabla f(a)$, ir yra didžiausias tarp visų vienetinių krypčių, kai u yra lygiagretus $\nabla f(a)$.

2.78 teiginys. *Tarkime, kad $I \subset \mathbb{R}$ ir $U \subset \mathbb{R}^m$ yra atviros aibės, o $g\colon I \to U$ ir $f\colon U \to \mathbb{R}$ yra funkcijos. Jei g yra diferencijuojama taške $a \in I$ ir f diferencijuojama taške $g(a)$, tai kompozicija $f \circ g$ diferencijuojama taške a ir jos išvestinė yra*

$$(f \circ g)'(a) = \big(\nabla f(g(a))\big) \cdot Dg(a). \tag{2.44}$$

Įrodymas. Kompozicija $f \circ g$ yra diferencijuojama taške a teoremos 2.73 atveju $n = k = 1$ dėka. Kadangi $L(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tapatiname su $\mathbb{R}$, tai, remiantis (2.41),

$$(f \circ g)'(a) = J(f \circ g)(a) = Jf(g(a))\, Jg(a) \in \mathbb{R}.$$

Kadangi $g = (g_1, \ldots, g_m)$, tai remiantis teiginiu 2.74(b), kiekviena komponentė $g_j\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yra diferencijuojama taške a, ir $Jg(a) = (Dg_1(a), \ldots, Dg_m(a)) = Dg(a)$, nes $L(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ taip pat tapatiname su $\mathbb{R}^m$. Remiantis 2.77(b), egzistuoja visos dalinės išvestinės $D_j f(g(a)) \in \mathbb{R}$ ir $Jf(g(a)) = [D_1 f(g(a)) \cdots D_m f(g(a))]$. Todėl iš gradiento ir skaliarinės daugybos apibrėžimų gauname lygybę

$$Jf(g(a))\, Jg(a) = \sum_{j=1}^{m} D_j f(g(a)) Dg_j(a) = \big(\nabla f(g(a))\big) \cdot Dg(a),$$

iš kurios gauname norimą lygybę (2.44). □

Jei $\alpha \geq 0$, funkcija $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ vadinama α *eilės teigiamai homogenine*, jei

$$f(\lambda x) = \lambda^\alpha f(x) \quad \text{visiems } \lambda > 0 \text{ ir } x \in \mathbb{R}^m.$$

Tokioms funkcijoms teisinga *Euler*io teorema:

2.79 išvada. *Jei $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ yra diferencijuojama ir α eilės teigiamai homogeninė, tai kiekvienam $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$*

$$\alpha f(x) = \sum_{j=1}^{m} x_j D_j f(x). \tag{2.45}$$

Įrodymas. Tegul $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ ir $g(\lambda) := \lambda x$, $\lambda > 0$. Diferencijuodami lygybės

$$\lambda^\alpha f(x) = f(\lambda x) = (f \circ g)(\lambda)$$

abi puses pagal λ ir naudodamiesi (2.44), gauname

$$\alpha\lambda^{\alpha-1} f(x) = \sum_{j=1}^{m} D_j f(\lambda x) x_j.$$

Kai $\lambda = 1$, gauname (2.45). □

Tarkime, kad M yra diferencijuojamos funkcijos $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *lygio aibė*, t. y. su kuria nors konstanta $c \in \mathbb{R}$

$$M \equiv M(c) := \{x \in \mathbb{R}^n\colon\ f(x) = c \quad \text{ir} \quad Df(x) \neq 0\}.$$

Tegul $I \subset \mathbb{R}$ yra nulio aplinka ir $\gamma\colon\ I \to \mathbb{R}^n$ yra diferencijuojama. Reikšmių aibė $\gamma(I) \subset \mathbb{R}^n$ vadinama diferencijuojama kreive. Vektorius $u \in \mathbb{R}^n$ vadinamas *liestiniu lygio aibei M jos taške* a, jei egzistuoja tokia diferencijuojama kreivė $\gamma(I) \subset M$, kad $\gamma(0) = a$ ir $u = D\gamma(0)$. Lygio aibės M visi vektoriai, kurie yra liestiniai M jos taške a, sudaro aibę, vadinamą *liestine erdve* T_aM.

2.80 išvada. *Tarkime, kad funkcija $f\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ yra diferencijuojama, M yra jos lygio aibė ir $a \in M$. Tada gradientas $\nabla f(a)$ yra ortogonalus liestinei erdvei T_aM.*

Įrodymas. Tegul $u \in T_aM$. Tada egzistuoja tokia diferencijuojama kreivė $\gamma(I)$, kad $\gamma(0) = a$, $f(\gamma(t)) = f(a)$ ir $u = D\gamma(0)$. Naudodamiesi (2.44) su $g = \gamma$, gauname

$$0 = D(f \circ \gamma)(0) = \langle \nabla f(\gamma(0)), D\gamma(0) \rangle = \langle \nabla f(a), u \rangle,$$

t. y. u yra ortogonalus $\nabla f(a)$; tai ir reikėjo įrodyti. □

Jei kuriame nors taške egzistuoja funkcijos visos kryptinės išvestinės, tai nebūtinai funkcija yra diferencijuojama tame taške. Pavyzdžiui, tokia yra funkcija

$$f(x) = \frac{x_1 x_2^2}{x_1^2 + x_2^4}, \qquad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

taške $0 \in \mathbb{R}^2$. Nurodysime pakankamas išvestinės egzistavimo sąlygas.

2.81 teorema. *Tarkime, kad $U \subset \mathbb{R}^n$ yra atvira aibė, $a \in U$ ir $f\colon\ U \to \mathbb{R}^m$. Funkcija f yra diferencijuojama taške a, jei to taško aplinkoje egzistuoja visos f dalinės išvestinės ir jos yra tolydžios taške a.*

Kita vertus, kaip rodo pavyzdžiai, dalinių išvestinių tolydumas nėra būtinas diferencijuojamumui.

Tegul $U \subset \mathbb{R}^n$ yra atvira aibė ir $f\colon U \to \mathbb{R}^m$. Sakoma, kad funkcija f yra iš C^1 *klasės*, jei ji yra diferencijuojama savo apibrėžimo srityje U ir jos išvestinės funkcija $Df\colon U \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ yra tolydi. Pasirodo, kad išvestinės funkcijos tolydumo sąlygą galima pakeisti jos dalinių išvestinių tolydumu.

2.82 teorema. *Tarkime, kad $U \subset \mathbb{R}^n$ yra atvira aibė ir $f\colon U \to \mathbb{R}^m$. Funkcija f yra iš C^1 klasės tada ir tik tada, kai f visos dalinės išvestinės egzistuoja ir yra tolydžios aibėje U.*

Vidurinių reikšmių teorema Kitas svarbus diferencijavimo faktas yra vadinamoji vidurinių reikšmių teorema. Atveju, kai $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yra diferencijuojama, šis faktas teigia, jog bet kuriems dviem skaičiais $x, y \in \mathbb{R}$ egzistuoja toks trečias skaičius $\xi \in \mathbb{R}$, esantis tarp jų, kad

$$f(y) - f(x) = f'(\xi)(y - x). \tag{2.46}$$

Teisinga ir šiek tiek bendresnė formulė, kurios įrodymui prireiks ir tokio ne mažiau svarbaus fakto:

2.83 lema. *Sakykime, kad funkcija g su realiomis reikšmėmis apibrėžta bei tolydi uždarame intervale $[a, b]$ ir įgyja maksimumą taške $c \in (a, b)$. Jei g diferencijuojama taške c, tai jos išvestinė $g'(c) = 0$.*

Įrodymas. Tarkime, kad $g'(c) > 0$. Remiantis išvestinės apibrėžimu (2.39), galime rasti tokį $\delta > 0$, kad

$$g(c + x) \geq g(c) + xg'(c)/2 > g(c)$$

visiems $0 < x \leq \delta$. Ši nelygybė prieštarauja tam, kad c yra maksimumo taškas. Simetriškas samprotavimas rodo, kad atvejis $g'(c) < 0$ taip pat nėra galimas. Todėl $g'(c) = 0$ remiantis realiųjų skaičių trichotomijos savybe. □

Šios lemos teiginys toliau bus naudojamas optimizavimo uždaviniuose (žr. 2.111 teiginį). Čia juo naudosimės įrodydami tokį vidurinių reikšmių teoremos variantą:

2.84 teorema. *Sakykime, kad funkcija f su realiosiomis reikšmėmis apibrėžta bei tolydi uždarame intervale $[x, y]$ ir diferencijuojama intervale (x, y). Tada egzistuoja toks $\xi \in (x, y)$, kad galioja* (2.46).

Įrodymas. Apibrėžkime funkciją $g\colon [x, y] \to \mathbb{R}$ su reikšmėmis

$$g(u) := f(u) - \left[f(x) + \frac{f(y) - f(x)}{y - x}(u - x)\right], \quad u \in [x, y].$$

Funkcija g yra tolydi intervale $[x,y]$, diferencijuojama intervale (x,y) ir $g(x)=0=g(y)$. Be to, galioja lygybė

$$g'(u)=f'(u)-\frac{f(y)-f(x)}{y-x},\quad u\in(x,y). \tag{2.47}$$

Jei $g(u)=0$ kiekvienam $u\in(x,y)$, tai $g'(u)=0$ kiekvienam $u\in(x,y)$, ir (2.46) galioja bet kuriam $\xi\in(x,y)$. Priešingu atveju $|g(u_0)|>0$ su kuriuo nors $u_0\in(x,y)$. Jei $g(u_0)>0$, tai remiantis Vejerštraso teorema (2.65 teorema) g įgyja teigiamą maksimumą kuriame nors taške $\xi\in[x,y]$. Bet kadangi $g(x)=g(y)=0$, tai $\xi\in(x,y)$ ir $g'(\xi)=0$ remiantis 2.83 lema. Dėka (2.47), su šiuo $\xi\in(x,y)$ galioja (2.46). Jei $g(u_0)<0$, tai $-g(u_0)>0$ ir galioja ta pati išvada; ją ir reikėjo įrodyti. □

Atveju, kai f funkcija reikšmes įgyja euklidinėje erdvėje $\mathbb{R}^d$ su $d>1$, šis faktas nėra teisingas, kaip rodo toks pavyzdys. Tegul $f(x):=(\cos x,\sin x)$, $x\in\mathbb{R}$. Tada $Df(x)=(-\sin x,\cos x)$ ir formulė

$$f(y)-f(x)=Df(\xi)(y-x)$$

nėra teisinga, kai $x=0$ ir $y=2\pi$.

Tačiau daugeliu atveju pakanka toliau formuluojamo silpnesnio fakto, taip pat vadinamo vidurinių reikšmių teorema. Tiesės atkarpa euklidinėje erdvėje, jungianti jos vektorius x ir y, yra aibė

$$[x,y]:=\{x_\lambda:=\lambda y+(1-\lambda)x\colon\ 0\le\lambda\le 1\}.$$

Nesunku pastebėti, kad euklidinės erdvės aibė U yra iškila tada ir tik tada, kai jai priklauso tiesės atkarpa, jungianti bet kuriuos du U aibės vektorius.

2.85 lema. *Tarkime, kad $U\subset\mathbb{R}^n$ yra atvira aibė ir $f\colon\ U\to\mathbb{R}^m$ yra diferencijuojama. Taip pat tarkime, kad tiesės atkarpa $[x,y]\subset U$. Tada bet kuriam vektoriui $u\in\mathbb{R}^m$ egzistuoja toks vektorius $\xi=\xi(u)\in[x,y]$, kad*

$$u\cdot\big(f(y)-f(x)\big)=u\cdot\big(Df(\xi)(y-x)\big). \tag{2.48}$$

Įrodymas. Kadangi aibė U atvira, tai egzistuoja toks $\delta>0$, kad $x_\lambda\in U$ kiekvienam $\lambda\in I:=(-\delta,1+\delta)$. Tegul $u\in\mathbb{R}^m$ ir $g(\lambda):=u\cdot f(x_\lambda)$, $\lambda\in I$. Šios reikšmės apibrėžia funkciją $g\colon\ I\to\mathbb{R}$, kurią galima išreikšti kompozicija $(u\cdot f)\circ\eta$, kur $\eta(\lambda):=x_\lambda\in\mathbb{R}^n$, $\lambda\in I$, ir $(u\cdot f)(x):=u\cdot f(x)$, $x\in\mathbb{R}^n$. Nesunku patikrinti, kad funkcija $u\cdot f$ yra diferencijuojama su gradientu $\nabla(u\cdot f)(x)=(u\cdot D_if(x))$, o funkcijos η išvestinė $D\eta(\lambda)=y-x$. Tada, naudodamiesi kompozicijos diferencijavimo taisykle (2.44) ir teiginiu 2.76(a), gauname

$$\begin{aligned} g'(\lambda) &= \big(\nabla(u\cdot f)(x_\lambda)\big)\cdot D\eta(\lambda)=u\cdot\Big(\sum_{i=1}^n D_if(x_\lambda)(y_i-x_i)\Big)\\ &= u\cdot\big(Df(x_\lambda)(y-x)\big),\quad \lambda\in I. \end{aligned}$$

Kita vertus, remiantis įprastine vidurinių reikšmių teorema (2.46) funkcijai g, egzistuoja toks $\lambda \in [0,1]$, kad

$$u\cdot\big(f(y)-f(x)\big) = g(1)-g(0) = g'(\lambda).$$

Pažymėję vektorių $\xi(u) := x_\lambda$ su šiuo λ, gauname norimą formulę (2.48). $\square$

2.86 teorema. *Tarkime, kad $U \subset \mathbb{R}^n$ yra atvira iškila aibė ir $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ yra diferencijuojama. Jei $a, a+x \in U$, tai*

$$|f(a+x)-f(a)-Df(a)(x)| \leq |x| \sup_{y\in[a,a+x]} \big|Df(y)-Df(a)\big|. \tag{2.49}$$

Įrodymas. Tegul $a, a+x \in U$ ir $u := f(a+x)-f(a)-Df(a)(x) \in \mathbb{R}^m$. Galime tarti, kad $u \neq 0$. Naudodamiesi vidurinių reikšmių teorema (2.48) su $\xi = \xi(u) \in [a, a+x]$, Koši nelygybe (2.51 teiginys) ir (2.34), kai $L = Df(\xi)-Df(a)$, gauname

$$\begin{aligned} |u|^2 &= \Big|u\cdot\Big(\big(Df(\xi)-Df(a)\big)(x)\Big)\Big| \leq |u|\,\Big|\big(Df(\xi)-Df(a)\big)(x)\Big| \\ &\leq |u|\,\big|Df(\xi)-Df(a)\big||x|. \end{aligned}$$

Padaliję abi nelygybių puses iš $|u|$ gauname (2.49). $\square$

Pastebėsime, kad kalbėdami apie išvestinės funkcijos $Df\colon U \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ tolydumą, erdvėje $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ naudojamės euklidine norma (2.33), gauta remiantis tiesiniu izomorfizmu (2.25).

2.87 apibrėžimas. Tarkime, kad $U \subset \mathbb{R}^n$ yra atvira aibė ir $f\colon U \to \mathbb{R}^m$. Sakoma, kad f yra *tolydžiai diferencijuojama arba f yra C^1 funkcija*, jei f yra diferencijuojama ir jos išvestinė $Df\colon U \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ yra tolydi.

2.88 teiginys. *Tarkime, kad $U \subset \mathbb{R}^n$ yra atvira iškila aibė ir $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ yra funkcija iš C^1 klasės. Jei $a, a+x \in U$, tai*

$$f(a+x)-f(a) = \int_0^1 Df(a+tx)(x)\,dt. \tag{2.50}$$

Įrodymas. Tegul $\varphi(t) := a+tx \in U$ visiems t iš atviro intervalo $J \subset \mathbb{R}$, kurio poaibis yra intervalas $[0,1]$, ir tegul $h := f\circ\varphi$ yra funkcijų kompozicija. Funkcija φ yra diferencijuojama intervale J su išvestine $D\varphi(t) = L_x \in L(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, kur $L_x(r) = rx$, $r \in \mathbb{R}$. Remiantis kompozicijos diferencijavimo taisykle (2.73 teorema), funkcija h yra diferencijuojama intervale J ir $Dh(t) = Df(a+tx)\circ L_x \in L(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$, kai $t \in J$. Kiekvienam $t \in J$ tegul

$$g(t) := \big(Dh(t)\big)(1) = Df(a+tx)(x) \in \mathbb{R}^m.$$

Kadangi f yra funkcija iš C^1 klasės, o φ yra tolydi, tai, remiantis 2.4.10 pratimu, tolydi yra funkcija $J \ni t \mapsto Df(a+tx) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Todėl remiantis (2.34) funkcija g

yra tolydi intervale J. Taigi integralas dešinėje (2.50) lygybės pusėje egzistuoja 2.67 teoremos dėka.

Įrodysime (2.50) lygybę. Remiantis viduriniųjų reikšmių teorema (2.49) funkcijai $h\colon J \to \mathbb{R}^m$, nelygybė

$$\big|h(v) - h(u) - Dh(u)(v-u)\big| \le (v-u) \sup_{u \le t \le v} |Dh(t) - Dh(u)|$$

galioja bet kuriems $u, v \in J$, $u \le v$. Pagal tiesinės funkcijos normos apibrėžimą (2.33), $|Dh(t) - Dh(s)| = |g(t) - g(s)|$, $t, s \in J$. Taigi išvestinė funkcija Dh yra tolydi intervale J. Tegul $\epsilon > 0$. Remiantis Dh tolygiuoju tolydumu intervale $[0,1]$ (2.66 teorema), egzistuoja toks $\delta > 0$, kad $|Dh(t) - Dh(u)| < \epsilon$, kai $u, t \in [0,1]$ ir $0 \le t - u < \delta$. Todėl jei intervalo $[0,1]$ skaidinys $\{t_j\}_{j=0}^m$ yra toks, kad $t_j - t_{j-1} < \delta$, $j = 1, \dots, k$, tai $|R(\{t_j\})| \le \epsilon$, kur

$$R(\{t_j\}) := \sum_{j=1}^m \big[h(t_j) - h(t_{j-1}) - Dh(t_{j-1})(t_j - t_{j-1})\big].$$

Be to, bet kuriam intervalo $[0,1]$ skaidiniui $\{t_j\}_{j=0}^m$ turime lygybes

$$f(a+x) - f(a) - \sum_{j=1}^m g(t_{j-1})(t_j - t_{j-1})$$

$$= \sum_{j=1}^m \big[h(t_j) - h(t_{j-1}) - g(t_{j-1})(t_j - t_{j-1})\big] = R(\{t_j\}).$$

To pakanka (2.50) lygybės įrodymui, kadangi integralas dešinėje pusėje egzistuoja. $\square$

Antrosios eilės išvestinė Tarkime, kad $U \subset \mathbb{R}^n$ – atvira aibė, ir $f\colon U \to \mathbb{R}^m$. Pirmoji f išvestinė, jei egzistuoja, yra išvestinės funkcija $Df\colon U \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Kadangi $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ yra tiesiškai izomorfiška euklidinei erdvei $\mathbb{R}^{nm}$ su euklidine norma (2.33), tai galima kalbėti apie funkcijų su reikšmėmis šioje erdvėje diferencijavimą ankstesne prasme. Taigi jei savo ruožtu išvestinės funkcija Df yra diferencijuojama, tai jos išvestinė funkcija yra $D(Df)\colon U \to L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$. Tačiau antrosios eilės išvestine vadinsime kitą funkciją, gautą pasinaudojus toliau apibrėžiamu tiesiniu izomorfizmu.

Funkcija $L = L(\cdot,\cdot)$ iš Dekarto sandaugos $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ į $\mathbb{R}^m$ vadinama *bitiesine*, jei funkcijos $L(\cdot, x)$ ir $L(x, \cdot)$ yra tiesinės iš $\mathbb{R}^n$ į $\mathbb{R}^m$ kiekvienam $x \in \mathbb{R}^n$. Aibę visų bitiesinių funkcijų tarp $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ir $\mathbb{R}^m$ žymėsime $L(^2\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Nesunku įsitikinti, kad $L(^2\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ yra realioji tiesinė erdvė.

2.89 teiginys. *Tarp $L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$ ir $L(^2\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ egzistuoja tiesinis izomorfizmas φ, funkcijai $T \in L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$ priskiriantis tokią funkciją $S := \varphi(T) \in L(^2\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, kad*

$$S(x_1, x_2) = (Tx_1)(x_2) \quad \textit{bet kuriems } x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n. \tag{2.51}$$

Įrodymas. Tegul $T \in X := L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$ ir

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (x_1, x_2) \mapsto \varphi(T)(x_1, x_2) := (Tx_1)(x_2) \in \mathbb{R}^m.$$

Galima įsitikinti, kad $\varphi(T) \in Y := L(^2\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Tegul $S \in Y$ ir

$$\mathbb{R}^n \ni x \mapsto \psi(S)(x) := S(x, \cdot) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m).$$

Taip pat galima įsitikinti, kad $\psi(S) \in X$. Jei $T \in X$, tai

$$((\psi\circ\varphi)(T)(x_1))(x_2) = (\psi(\varphi(T))(x_1))(x_2) = \varphi(T)(x_1, x_2) = (Tx_1)(x_2)$$

bet kuriems $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, t. y. $(\psi\circ\varphi)(T) = T$. Taigi $1_X = \psi\circ\varphi$. Panašiai gauname lygybę $1_Y = \varphi\circ\psi$. Tada remiantis 2.42 teorema $\varphi\colon X \to Y$ yra bijekcija. Kadangi φ yra ir tiesinė, tai pirmoji 2.89 teiginio dalis yra teisinga. □

Naudodamiesi 2.89 teiginiu apie tiesinį izomorfizmą, antrosios eilės išvestinę tapatinsime su atitinkamu bitiesinių funkcijų erdvės elementu.

2.90 apibrėžimas. Tarkime, kad $U \subset \mathbb{R}^n$ yra atvira aibė ir $f\colon U \to \mathbb{R}^m$. Sakysime, kad f yra *du kartus diferencijuojama taške* $a \in U$, jei f yra diferencijuojama aibėje U, ir taške a yra diferencijuojama jos išvestinė funkcija $Df\colon U \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, t. y. egzistuoja tokia tiesinė funkcija $L \equiv D(Df)(a) \in L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$, kad

$$|Df(a + x) - Df(a) - L(x)| = o(|x|), \quad \text{kai } |x| \to 0.$$

Funkciją $D^2f(a) := \varphi(D(Df)(a)) \in L(^2\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ vadinsime *antrosios eilės išvestine.* Sakysime, kad f yra *du kartus diferencijuojama,* jei jos antrosios eilės išvestinė egzistuoja kiekviename aibės U taške.

Remiantis (2.51) sąryšiu, bet kuriems $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$

$$D^2f(a)(x_1, x_2) = (D(Df)(a)(x_1))(x_2) \in \mathbb{R}^m. \tag{2.52}$$

Prisiminus kryptinės išvestinės išraišką (2.43), pastaroji lygybė leidžia tikėtis, kad antrosios eilės išvestinę galima išreikšti antrosios eilės kryptinėmis išvestinėmis.

2.91 teiginys. *Tarkime, kad $U \subset \mathbb{R}^n$ yra atvira aibė ir $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ du kartus diferencijuojama. Bet kuriems $a \in U$ ir $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$*

$$D^2f(a)(x_1, x_2) = D_{x_1}(D_{x_2}f)(a).$$

Įrodymas. Tegul $a \in U$ ir $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$. Tegul $L\colon L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}^m$ yra tiesinė funkcija su reikšmėmis $L(S) := Sx_2$. Remiantis kompozicijos diferencijavimo taisykle (2.40) ir teiginiu 2.74(a) apie tiesinės funkcijos diferencijavimą, galioja lygybės

$$D(D_{x_2}f)(a) = D(L\circ Df)(a) = (L\circ D(Df))(a) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m).$$

Naudodamiesi šios funkcijos reikšme taške x_1 ir kryptinės išvestinės reikšme (2.43), gauname

$$\begin{aligned} D_{x_1}(D_{x_2}f)(a) &= D(D_{x_2}f)(a)(x_1) = (L(D(Df)(a))(x_1) \\ &= (D(Df)(a)(x_1))(x_2) \in \mathbb{R}^m, \end{aligned}$$

o tai dėka (2.52) įrodo teiginio lygybę. □

Kai funkcijos kryptinės išvestinės kryptis yra standartinės bazės vektorius, kalbama apie *antrosios eilės dalines išvestines*, t. y. $D_iD_jf(x) := D_{e_i}(D_{e_j}f)(x)$, $1 \le i,j \le n$. Antrosios eilės kryptinių išvestinių egzistavimą įrodėme tais atvejais, kai egzistuoja funkcijos antroji išvestinė. Tačiau jos gali egzistuoti ir tada, kai antrosios eilės išvestinė neegzistuoja. Be to, antrosios eilės dalinės išvestinės $D_iD_jf(a)$ ir $D_jD_if(a)$, vadinamos *mišriomis*, gali būti skirtingos, kaip rodo pavyzdys: jei $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x) = x_1x_2h(x), \quad \text{čia} \quad h(x) = \frac{x_1^2 - x_2^2}{|x|^2}, \quad \text{jei } x \neq 0 \text{ ir } h(0) = 0. \tag{2.53}$$

Toliau parodoma, kad mišrios antrosios eilės dalinės išvestinės sutampa, jei jos yra tolydžios.

2.92 teorema. *Tarkime, kad $U \subset \mathbb{R}^n$ yra atvira aibė, $a \in U$, o funkcija $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ yra tokia, kad D_iD_jf ir D_jD_if egzistuoja a aplinkoje ir yra tolydžios taške a $(1 \le i,j \le n)$. Tada*

$$D_jD_if(a) = D_iD_jf(a). \tag{2.54}$$

Įrodymas. Apibrėžę naują funkciją $(x_i, x_j) \mapsto f(x_1,\dots,x_i,\dots,x_j,\dots,x_n)$, galime tarti, kad $i = 1$, $j = 2$ ir $n = 2$. Be to, remiantis 2.74(b) teiginiu, galime tarti, kad $m = 1$. Parodysime, kad abi (2.54) lygybės pusės yra lygios tai pačiai ribai

$$\lim_{x\to a} r(x), \quad \text{kur} \quad r(x) := \frac{f(x) - f(a_1,x_2) - f(x_1,a_2) + f(a)}{(x_1-a_1)(x_2-a_2)}.$$

Tegul U yra tokia a aplinka, kurioje egzistuoja pirmosios eilės ir mišriosios antrosios eilės f išvestinės, ir tegul $x \in U$. Tada a_1 aplinkoje apibrėžkime funkciją g su reikšmėmis

$$g(t) := f(t,x_2) - f(t,a_2). \quad \text{Tada} \quad r(x) = \frac{g(x_1) - g(a_1)}{(x_1-a_1)(x_2-a_2)}.$$

Kadangi g yra diferencijuojama, tai remiantis vidurinių reikšmių teorema (2.46), egzistuoja toks $\xi_1 = \xi_1(x) \in \mathbb{R}$ tarp a_1 ir x_1, kad

$$r(x) = \frac{g'(\xi_1)}{x_2-a_2} = \frac{D_1f(\xi_1,x_2) - D_1f(\xi_1,a_2)}{x_2-a_2}.$$

Be to, a_2 aplinkoje apibrėžę diferencijuojamą funkciją h su reikšmėmis $h(t) := D_1 f(\xi_1, t)$, panašiai gauname tokį tašką $\xi_2 = \xi_2(x)$ tarp a_2 ir x_2, kad $r(x) = h'(\xi_2) = D_2 D_1 f(\xi)$. Kadangi taškui $\xi = \xi(x) = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$ galioja nelygybė $|\xi - a| \le |x - a|$ visiems $x \in \mathbb{R}^2$, remiantis mišriosios antrosios išvestinės $D_2 D_1 f$ tolydumu taške a gauname

$$\lim_{x \to a} r(x) = \lim_{\xi \to a} D_2 D_1 f(\xi) = D_2 D_1 f(a).$$

Sukeitę vietomis argumentus x_1 ir x_2, bei pakartoję tuos pačius samprotavimus, gauname

$$\lim_{x \to a} r(x) = D_1 D_2 f(a).$$

Tai ir reikėjo įrodyti. $\square$

Papildysime C^1 klasės funkcijų 2.87 apibrėžimą tolydžiosiomis antrosios eilės išvestinėmis. Normą bitiesinių funkcijų erdvėje $L(^2\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ apibrėšime naudodamiesi 2.89 teiginiu apie tiesinį izomorfizmą $\varphi\colon\ L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)) \to L(^2\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Kiekvienam $S \in L(^2\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $T := \varphi^{-1}(S) \in L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$ ir

$$|S| := \Big(\sum_{i=1}^{n} |T(e_i)|^2 \Big)^{1/2},$$

kur $\{e_i\}_{i=1}^n$ yra $\mathbb{R}^n$ standartinė bazė, o elemento $T(e_i) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ norma yra (2.33). Bet kuriems $x, y \in \mathbb{R}^n$, naudodamiesi (2.51), (2.34) ir Koši nelygybe, gauname

$$|S(x,y)| = |(Tx)(y)| \le |Tx|\,|y| \le |S|\,|x||y|. \tag{2.55}$$

2.93 apibrėžimas. Tarkime, kad $U \subset \mathbb{R}^n$ yra atvira aibė ir $f\colon\ U \to \mathbb{R}^m$. Sakoma, kad f yra *du kartus tolydžiai diferencijuojama arba f yra iš C^2 klasės,* jei f yra iš C^1 klasės ir išvestinė funkcija $Df\colon\ U \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ yra tolydžiai diferencijuojama, t. y. $D^2 f\colon\ U \to L(^2\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ yra tolydi funkcija.

Funkcijoms iš C^2 klasės galioja svarbi jų antrųjų išvestinių simetriškumo savybė.

2.94 išvada. *Tarkime, kad $U \subset \mathbb{R}^n$ yra atvira aibė ir $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ yra iš C^2 klasės. Kiekvienam $a \in U$, $D^2 f(a)$ yra simetrinė funkcija, t.y.*

$$D^2 f(a)(x_1, x_2) = D^2 f(a)(x_2, x_1), \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n.$$

Įrodymas. Tegul $a \in U$, $x_1 = (x_{1i})_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ ir $x_2 = (x_{2j})_{j=1}^n \in \mathbb{R}^n$. Remiantis (2.43) ir 2.92 teorema apie mišriąsias išvestines,

$$\begin{aligned} D_{x_1}(D_{x_2} f)(a) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{1i} x_{2j} D_i D_j f(a) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} x_{2j} x_{1i} D_j D_i f(a) \\ &= D_{x_2}(D_{x_1} f)(a). \end{aligned}$$

Tada išvada yra gaunama remiantis 2.91 teiginiu. $\square$

Toliau įrodytą formulę vadinsime *Teiloro formule*.

2.95 teorema. *Tarkime, kad $U \subset \mathbb{R}^n$ yra atvira ir iškila, o $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ yra iš C^2 klasės. Jei $a, a+x \in U$, tai*

$$f(a+x) = f(a) + Df(a)x + \frac{1}{2}D^2 f(a)(x,x) + \gamma(a,x), \tag{2.56}$$

kur $|\gamma(a,x)| = o(|x|^2)$, kai $x \to 0$.

Įrodymas. Tegul $t \in (0,1]$ ir $F(y) := Df(y)(tx)$, kai $y \in U \subset \mathbb{R}^n$. Nesunku patikrinti, kad $F\colon U \to \mathbb{R}^m$ yra diferencijuojama, ir $DF(y) = D^2 f(y)(tx,\cdot) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Pritaikę 2.88 teiginį funkcijai F vietoje f ir vektoriui tx vietoje x, gauname lygybes

$$\begin{aligned} Df(a+tx)(x) - Df(a)(x) &= t^{-1}[F(a+tx) - F(a)] \\ &= \int_0^t D^2 f(a+sx)(x,x)\,ds. \end{aligned}$$

Dar kartą pritaikę 2.88 teiginį ir pastarąją lygybę, turime sąryšį

$$T(a,x) := f(a+x) - f(a) - Df(a)(x) = \int_0^1 \big[Df(a+tx) - Df(a)\big](x)\,dt$$

$$= \int_0^1 \int_0^t D^2 f(a+sx)(x,x)\,ds\,dt.$$

Naudojantis integravimo dalimis ir keitimo formulėmis (atitinkamai (2.35) ir (2.36)), galima taip pratęsti lygybes:

$$T(a,x) = \int_0^1 D^2 f(a+sx)(x,x)\,ds - \int_0^1 t\,d\Big[\int_0^t D^2 f(a+sx)(x,x)\,ds\Big]$$

$$= \int_0^1 (1-t) D^2 f(a+tx)(x,x)\,dt.$$

Kadangi $\int_0^1 (1-t)\,dt = 1/2$, tai

$$\begin{aligned} \gamma(a,x) &:= T(a,x) - \frac{1}{2}D^2 f(a)(x,x) \\ &= \int_0^1 (1-t)\big[D^2 f(a+tx) - D^2 f(a)\big](x,x)\,dt. \end{aligned}$$

Naudodamiesi (2.37) integralo įverčiu ir bitiesinės funkcijos reikšmės įverčiu (2.55), gauname nelygybę

$$|\gamma(a,x)| \le \sup_{0 \le t \le 1} \big|D^2 f(a+tx) - D^2 f(a)\big|\,|x|^2.$$

Kadangi f yra iš C^2 klasės, tai $|\gamma(a,x)| = o(|x|^2)$, kai $x \to 0$; tai ir reikėjo įrodyti. □

Hesiano matrica

2.96 teiginys. *Tarkime, kad* $\psi(S) := [S(e_i, e_j)]_{1\le i,j\le n}$ *yra eilės* $n\times n$ *matrica, kur* $S \in L(^2\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ *ir* $\{e_i\}_{i=1}^n$ *yra standartinė* $\mathbb{R}^n$ *bazė. Šiomos reikšmėmis apibrėžta funkcija* $\psi\colon\ L(^2\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \to \mathbb{M}^{n\times n}$ *yra tiesinis izomorfizmas, ir*

$$S(x_1, x_2) = (\psi(S)x_1)\cdot x_2 \quad \text{bet kuriems } x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n. \tag{2.57}$$

Įrodymas. Naudodamiesi matricų erdvės tiesiškumu, įrodome funkcijos ψ tiesiškumo savybę. Tegul $x_1 = (x_{1i}) \in \mathbb{R}^n$, $x_2 = (x_{2j}) \in \mathbb{R}^n$ ir $S \in L(^2\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Tada, x_1 ir x_2 vektorius reikšdami baziniais vektoriais, gauname lygybes

$$S(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{1i}x_{2j}S(e_i, e_j) = (\psi(S)x_1)\cdot x_2,$$

kurios leidžia įsitikinti, kad funkcija ψ yra bijekcija. □

Naudodami erdvių $L(^2\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ir $\mathbb{M}^{n\times n}$ tiesinį izomorfizmą, apibrėšime du kartus tolydžiai diferencijuojamos funkcijos hesiano matricą.

2.97 apibrėžimas. Tegul $U \subset \mathbb{R}^n$ yra atvira aibė, $a \in U$ ir $f\colon\ U \to \mathbb{R}$ yra iš C^2 klasės. Matrica $Hf(a) := \psi(D^2f(a))$ vadinama funkcijos f *hesiano matrica* taške a.

Taigi remiantis (2.57) lygybe, bet kuriems $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$,

$$D^2f(a)(x_1, x_2) = (Hf(a)x_1)\cdot x_2.$$

Remiantis 2.94 išvada ir skaliarinės sandaugos simetriškumu, bet kuriems $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$

$$(Hf(a)x_1)\cdot x_2 = x_1\cdot(Hf(a)x_2).$$

Be to, remiantis (2.51) lygybe, $D^2f(a)(e_i, e_j) = (D(Df)(a)e_i)e_j = D_jD_if(a)$ kiekvienam $1 \le i, j \le n$, t. y.

$$Hf(a) = \begin{bmatrix} D_1D_1f(a) & D_1D_2f(a) & \cdots & D_1D_nf(a) \\ D_2D_1f(a) & \cdots & \cdots & D_2D_nf(a) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_nD_1f(a) & D_nD_2f(a) & \cdots & D_nD_nf(a) \end{bmatrix}.$$

Jei atviroji aibė $U \subset \mathbb{R}^n$, kurioje apibrėžta C^2 klasės funkcija f, yra iškila, $a \in U$ ir $a + x \in U$, tai Teiloro formulės (2.56) dėka

$$f(a+x) = f(a) + (\nabla f(a))\cdot x + \frac{1}{2}(Hf(a)x)\cdot x + \gamma(a, x), \tag{2.58}$$

kur $\gamma(a, x) = o(|x|^2)$, kai $|x| \to 0$.

Pratimai

1. Jei išvestinė $Df(a)$ egzistuoja, tai ji yra vienintelė.

2. Įrodyti kryptinės išvestinės (2.43) formulę.

3. Įrodyti 2.74(a) teiginį.

4. Įrodyti, kad bitiesinė forma $K\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferencijuojama su išvestine $DK(x,y)(u,v) = K(u,y) + K(x,v)$ kiekvienam $(x,y),(u,v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

5. Tegul A yra n-tosios eilės simetrinė kvadratinė matrica ir q_A yra kvadratinė forma su reikšmėmis $q_A(x) := x^t A x$, $x \in \mathbb{R}^n$. Įrodyti, kad q_A yra visur diferencijuojama su išvestine $Dq_A(x)h = 2x^t A h$, $x, h \in \mathbb{R}^n$.

6. Įrodyti, kad (2.53) lygybe apibrėžtos funkcijos $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mišriosios antrosios eilės dalinės išvestinės $D_1D_2f(0)$ ir $D_2D_1f(0)$ yra skirtingos.

2.7 Iškilumas

Iškilos aibės Euklidinės erdvės $\mathbb{R}^d$ aibė C vadinama *iškila*, jei iškilas darinys $\lambda x + (1-\lambda)y \in C$ visiems $x, y \in C$ ir $\lambda \in (0,1)$. Tuščioji aibė ir aibė, sudaryta iš vieno elemento, yra iškilos visada.

Kito teiginio įrodymas si$\overline{\text{u}}$lomas skaitytojui kaip pratimas, prisiminus aibių sumos ir skirtumo (1.21) apibrėžimą.

2.98 teiginys. *Euklidinės erdvės aibėms galioja teiginiai*:

(a) *Jei A ir B yra iškilosios aibės, tai jų suma $A + B$, skirtumas $A - B$, sankirta $A \cap B$ ir Dekarto sandauga $A \times B$ yra iškilos aibės.*

(b) *Jei A yra iškila aibė ir $\lambda \in \mathbb{R}$, tai aibė $\lambda A := \{\lambda a\colon\ a \in A\}$ iškila.*

Toliau įrodysime *Carathéodory* teoremą, kuri naudojama 4.3 skyriuje įrodant *Kakutani* nejudamojo taško teoremą. *C. Carathéodory*[11] savo teoremą įrodė 1911 metais.

Jei $C := \{x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{R}^d$ ir $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+$ yra tokie, kad $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, tai vektorius $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ vadinamas *baigtinio rinkinio C iškiluoju dariniu*. Aibės $A \subset \mathbb{R}^d$ *iškiluoju apvalkalu* vadinama visų baigtinių rinkinių iš A iškilųjų darinių aibė, t. y. coA yra aibė, sudaryta iš visų tų vektorių $x \in \mathbb{R}^d$, kurie išreiškiami baigtine suma $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$, $x_i \in A$, $\lambda_i \in \mathbb{R}_+$ ir $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Akivaizdu, kad $A \subseteq coA$.

2.99 teorema. *Tegul $A \subset \mathbb{R}^d$ ir $x \in coA$. Tada x yra ne daugiau kaip $d+1$ aibės A elementų rinkinio iškiluoju dariniu, t. y. egzistuoja tokie $z_0, \ldots, z_d \in A$ ir $\lambda_0, \ldots, \lambda_d \in \mathbb{R}$, kad $\sum_{i=0}^d \lambda_i = 1$ ir $x = \sum_{i=0}^d \lambda_i z_i$.*

[11] Constantin Carathéodory – Konstantinas Karateodoris (1873–1950), graikų matematikas.

Įrodymas. Tegul $x \in coA$. Tada egzistuoja tokie $\{x_1, \dots, x_n\} \subset A$, kad

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, \qquad \lambda_i \geq 0,\ \forall i, \qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1. \tag{2.59}$$

Galima tarti, kad $n > d + 1$; priešingu atveju įrodymas baigtas. Šiuo atveju vektoriai $x_2 - x_1, \dots, x_n - x_1$ yra tiesiškai priklausomi, ir todėl (žr. 2.44 teiginį) egzistuoja tokie realūs skaičiai, $\mu_2, \dots, \mu_n$, ne visi jų lygūs nuliui, kad

$$\sum_{i=2}^{n} \mu_i (x_i - x_1) = 0.$$

Tegul $\mu_1 := -\sum_{i=2}^{n} \mu_i$. Tada

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i = 0 \qquad \text{ir} \qquad \sum_{i=1}^{n} \mu_i = 0. \tag{2.60}$$

Bent vienas iš skaičių μ_i yra teigiamas. Jei būtina, pakeitę indeksus, galime tarti, kad $\mu_1 > 0, \dots, \mu_k > 0 \geq \mu_{k+1}, \dots, 0 > \mu_n$ kuriam nors $1 \leq k < n$. Panašiai galime tarti, kad kiekvienam $i = k+1, \dots, n-1$,

$$\lambda_i / (-\mu_i) \geq \lambda_n / (-\mu_n).$$

Pirmoje (2.60) sumoje išskyrę paskutinį narį, gauname

$$x_n = \Big[\sum_{i=1}^{k} \mu_i x_i - \sum_{i=k+1}^{n-1} (-\mu_i) x_i \Big] / (-\mu_n).$$

Įstatę šią x_n išraišką į (2.59, gauname

$$x = \sum_{i=1}^{k} \Big(\lambda_i - \mu_i \frac{\lambda_n}{-\mu_n} \Big) x_i + \sum_{i=k+1}^{n-1} \Big(\lambda_i - (-\mu_i) \frac{\lambda_n}{-\mu_n} \Big) x_i.$$

Nesunku patikrinti, kad koeficientai prie x_i, $i = 1, \dots, n-1$, yra neneigiami ir visų jų suma yra 1. Parodėme, kad x yra baigtinio rinkinio $\{x_, \dots, x_{n-1}\}$ iškilas darinys Jei $n - 1 = d + 1$, tai įrodymas baigtas. Jei $n - 1 > d + 1$, tai kartodami ankstesnius samprotavimus ir naudodami indukciją įrodome, kad yra x išreiškiamas rinkinio $\{x_1, \dots, x_{d+1}\}$ iškilu dariniu. $\square$

Atskyrimo teorema Tokia teorema iškiloms nesikertančioms aibėms teigia, kad egzistuoja jas skirianti hiperplokštuma, t. y. viena iš aibių yra vienoje hiperplokštumos pusėje, o antra yra kitoje pusėje. Tiksliau, tegul A ir B yra dvi nesikertančios iškilos aibės euklidinėje erdvėje $\mathbb{R}^d$. Tuomet egzistuoja toks nenulinis vektorius $p \in \mathbb{R}^d$ ir realusis skaičius α, kad

$$\sup\{p{\cdot}x\colon\ x \in B\} \le \alpha \le \inf\{p{\cdot}x\colon\ x \in A\}.$$

Šiuo atveju aibes A ir B skiriančioji hiperplokštuma yra $\{x \in \mathbb{R}^d\colon\ p{\cdot}x = \alpha\}$.

Šios atskyrimo teoremos įrodymą pradėsime pagalbiniu teiginiu.

2.100 lema. *Tarkime, kad $C \subset \mathbb{R}^d$ yra netuščia uždara ir iškila aibė. Tuomet egzistuoja toks $x_0 \in C$, kad*

$$x_0{\cdot}x \ge |x_0|^2 \textit{ kiekvienam } x \in C. \tag{2.61}$$

Įrodymas. Jei $0 \in C$, tai (2.61) galioja su $x_0 = 0$. Tarkime, kad $0 \notin C$. Tegul B yra toks uždaras rutulys su centru nulyje, kurio sankirta su C yra netuščia. Tuomet $B \cap C$ yra netuščias kompaktas. Kadangi funkcija $x \mapsto |x|$, $x \in \mathbb{R}^d$, tolydi, tai ji įgyja minimumą aibėje $B \cap C$, t. y. egzistuoja toks $x_0 \in C \cap B$, kad $|x| \ge |x_0|$ visiems $x \in C \cap B$ (2.65 teorema). Tuo labiau ši nelygybė galioja visiems $x \in C$.

Kadangi C yra iškila, tai kiekvienam $x \in C$ ir $\lambda \in [0,1]$, $\lambda x + (1-\lambda)x_0 \in C$ ir todėl

$$|x_0|^2 \le |x_0 + \lambda(x - x_0)|^2 = |x_0|^2 + 2\lambda x_0{\cdot}(x - x_0) + \lambda^2|x - x_0|^2.$$

Pertvarkę šią nelygybę, gauname, kad

$$x_0{\cdot}(x - x_0) \ge -\lambda|x - x_0|^2/2$$

kiekvienam $x \in C$ ir $\lambda \in [0,1]$. Jei egzistuoja $x \in C$ toks, kad $x_0{\cdot}(x - x_0) < 0$, tai pasirinkę pakankamai mažą $\lambda \in (0,1]$ gauname prieštarą pastarajai nelygybei. Todėl $x_0{\cdot}(x - x_0) \ge 0$ kiekvienam $x \in C$, kas ir įrodo (2.61). $\square$

Dabar jau galime įrodyti minėtąją atskyrimo teoremą.

2.101 teorema. *Tarkime, kad aibės $A, B \subset \mathbb{R}^d$ yra netuščios, iškilos ir nesikerta. Tuomet egzistuoja toks vektorius $p \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, kad*

$$\sup\{p{\cdot}x\colon\ x \in B\} \le \inf\{p{\cdot}x\colon\ x \in A\}. \tag{2.62}$$

Įrodymas. Teoremą įrodyti pakanka tuo atveju, kai $B = \{0\}$. Iš tikro, aibė $A - B$ yra iškila ir nesikerta su aibe $\{0\}$. Jei egzistuoja $p \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ toks, kad $p{\cdot}(x - y) \ge p{\cdot}0 = 0$ visiems $x \in A$ ir $y \in B$, tai galioja (2.62).

Taigi tarkime, jog A yra tokia iškila aibė, kad $0 \notin A$. Kiekvienam $x \in A$ aibė

$$F_x := \{p \in \mathbb{R}^d\colon\ |p| = 1 \quad \text{ir} \quad p{\cdot}x \ge 0\}$$

yra netuščia ir uždara. Tegul $\{x_1, \ldots, x_k\} \subset A$. Tada aibė

$$C := \Big\{x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i\colon\ \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \quad \text{ir} \quad \lambda_i \ge 0\Big\}$$

yra uždara iškila ir $0 \notin C$. Remiantis 2.100 lema, egzistuoja toks $p \in \mathbb{R}^d$, kad $|p| = 1$ ir $p{\cdot}x_i > 0$ kiekvienam $i \in \{1, \ldots, k\}$. Todėl $p \in \bigcap\{F_{x_i} \colon i = 1, \ldots, k\}$. Kadangi kiekvienas F_x yra kompaktinės aibės $\{p \in \mathbb{R}^d \colon |p| = 1\}$ poaibis ir šeima $\{F_x \colon x \in A\}$ turi baigtinės sankirtos savybę, tai $\bigcap\{F_x \colon x \in A\} \neq \varnothing$ (2.59 teorema). Bet kuriam šios sankirtos elementui p galioja savybės $p \neq 0$ ir $p{\cdot}x \geq 0$ kiekvienam $x \in A$; tai ir reikėjo įrodyti. □

Šiame vadovėlyje naudojamas toks atskyrimo teoremos variantas.

2.102 išvada. *Tarkime, kad aibė* $W \subset \mathbb{R}^d$ *yra iškila ir* $W \cap \mathbb{R}^d_{++} = \varnothing$. *Tada egzistuoja toks* $p \in \mathbb{R}^d_+ \setminus \{0\}$, *kad* $p{\cdot}w \leq 0$ *kiekvienam* $w \in W$.

Įrodymas. Tegul $A := \mathbb{R}^d_+ - W$. Remiantis 2.7 teiginiu, A yra iškila aibė ir jai nepriklauso nulis. Remiantis 2.101 teorema su $B = \{0\}$, egzistuoja toks vektorius $p \in \mathbb{R}^d$, kad $p \neq 0$ ir $p{\cdot}x \geq 0$ kiekvienam $x \in A$. Pastaroji savybė reiškia, kad

$$p{\cdot}v \geq p{\cdot}w \quad \text{bet kuriems } v \in \mathbb{R}^d_+ \text{ ir } w \in W.$$

Kai $v = 0$, gauname $p{\cdot}w \leq 0$ kiekvienam $w \in W$. Kai $v = \lambda e_i$, $\lambda > 0$, $i \in \{1, \ldots, d\}$ ir $w \in W$, tai $\lambda p_i = \lambda p{\cdot}e_i \geq p{\cdot}w$ bet kuriam $\lambda > 0$ ir todėl $p_i \geq 0$. Tokiu būdu $p \in \mathbb{R}^d_+ \setminus \{0\}$; tai ir reikėjo įrodyti. □

Funkcijos iškilumas ir įgaubtumas

2.103 apibrėžimas. Tarkime, kad X – netuščia iškiloji euklidinės erdvės aibė. Funkcija $f \colon X \to \mathbb{R}$ vadinama

(a) *iškiląja*, jei bet kuriems skirtingiems $x, y \in X$ ir kiekvienam $\lambda \in (0, 1)$ galioja

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2);$$

(b) *griežtai iškila*, jei iškilumo savybėje nelygybė yra griežta;

(c) *įgaubtąja*, jei bet kuriems skirtingiems $x, y \in X$ ir kiekvienam $\lambda \in (0, 1)$ galioja

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2); \tag{2.63}$$

(d) *griežtai įgaubta*, jei įgaubtumo savybėje nelygybė yra griežta.

Kvazi–iškilosios ir kvazi–įgaubtosios funkcijos Dar labiau nei iškilosios ir įgaubtosios funkcijos ekonominėje analizėje yra svarbios kvazi–iškilosios ir kvazi–įgaubtosios funkcijos.

2.104 apibrėžimas. Tarkime, kad X – netuščia iškiloji euklidinės erdvės aibė. Funkcija $f \colon X \to \mathbb{R}$ vadinama

(a) *kvazi–iškiląja,* jei bet kuriems skirtingiems $x, y \in X$ ir kiekvienam $\lambda \in (0,1)$

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \max\{f(x_1), f(x_2)\};$$

(b) *griežtai kvazi–iškila,* jei kvazi–iškilumo savybė galioja su griežta nelygybe;

(c) *kvazi–įgaubtąja,* jei bet kuriems skirtingiems $x, y \in X$ ir kiekvienam $\lambda \in (0,1)$

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min\{f(x_1), f(x_2)\};$$

(d) *griežtai kvazi–įgaubta,* jei kvazi–įgaubtumo savybė galioja su griežta nelygybe.

Jei funkcija yra įgaubta, tai ji yra kvazi–įgaubta (2.4.2 pratimas). Teiginys priešinga kryptimi nėra teisingas. Pavyzdžiui, funkcija $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}_+$, yra kvazi–įgaubta, bet nėra įgaubta.

2.105 teiginys. *Tarkime, kad X – netuščia iškiloji euklidinės erdvės aibė. Funkcija $f\colon X \to \mathbb{R}$ yra*

(a) *įgaubta tada ir tik tada, kai aibė $C := \{(x,\alpha) \in X \times \mathbb{R}\colon\ f(x) \geq \alpha\}$ iškila;*

(b) *iškila tada ir tik tada, kai aibė $K := \{(x,\alpha) \in X \times \mathbb{R}\colon\ f(x) \leq \alpha\}$ iškila;*

(c) *kvazi–įgaubta tada ir tik tada, kai aibė $C_\alpha := \{x \in X\colon\ f(x) \geq \alpha\}$ iškila kiekvienam $\alpha \in \mathbb{R}$;*

(d) *kvazi–iškila tada ir tik tada, kai aibė $K_\alpha := \{x \in X\colon\ f(x) \leq \alpha\}$ iškila kiekvienam $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Įrodymas. Tegul C yra iškila, $x_1, x_2 \in X$ ir $\lambda \in (0,1)$. Kadangi $(x_1, f(x_1)) \in C$ ir $(x_2, f(x_2)) \in C$, tai

$$\lambda\big(x_1, f(x_1)\big) + (1-\lambda)\big(x_2, f(x_2)\big) = \big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)\big) \in C,$$

t. y. galioja (2.63). Atvirkščiai, tegul f yra įgaubta, $(x_k, \alpha_k) \in C$, $k = 1, 2$, ir $\lambda \in (0,1)$. Tada

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda_1 f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \geq \lambda\alpha_1 + (1-\lambda)\alpha_2,$$

t. y. $\lambda(x_1, \alpha_1) + (1-\lambda)(x_2, \alpha_2) \in C$. Taigi teiginys (a) įrodytas. Likusių teiginių (b), (c) ir (d) įrodymas panašus ir paliekamas skaitytojui. □

Kiekviena iškiloji funkcija yra tolydi (2.7.4 pratimas). Kaip rodo pavyzdys $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$, iškiloji funkcija neprivalo būti diferencijuojama. Tačiau intervale J apibrėžtos funkcijos iškilumo savybė garantuoja jos vienpusį diferencijuojamumą kiekviename vidiniame J taške. Priminsime, kad funkcijos $f\colon J \to \mathbb{R}$ kairinė ir dešininė išvestinės taške $x \in J$ (galinčiu būti intervalo galu) apibrėžtos atitinkamai lygybėmis

$$f'_-(x) := \lim_{u \uparrow 0} \frac{f(x+u) - f(x)}{u} \quad \text{ir} \quad f'_+(x) := \lim_{v \downarrow 0} \frac{f(x+v) - f(x)}{v},$$

jei egzistuoja nurodytos ribos, kur $u \uparrow 0$, kai $u < 0$ ir $u \to 0$, o $v \downarrow 0$, kai $v > 0$ ir $v \to 0$. Nesunku patikrinti, kad f yra diferencijuojama taške x tada ir tik tada, kai taške x egzistuoja abi vienpusės išvestinės ir jos yra lygios (žr. (2.39) sąryšį). Be to, $f'(x) = f'_-(x) = f'_+(x)$.

2.106 lema. *Tegul J yra intervalas ir $f\colon J \to \mathbb{R}$ yra iškila funkcija. Tada galioja teiginiai*:

(a) *jei $r, s, t \in J$ ir $r < s < t$, tai*

$$\frac{f(s) - f(r)}{s - r} \le \frac{f(t) - f(r)}{t - r} \le \frac{f(t) - f(s)}{t - s};$$

(b) *jei x yra vidinis J taškas, tai egzistuoja dešininė išvestinė $f'_+(x)$, kairinė išvestinė $f'_-(x)$ ir galioja nelygybė $f'_-(x) \le f'_+(x)$;*

(c) *jei f yra diferencijuojama taške $y \in J$, tai visiems $x \in J$ galioja nelygybė*

$$f'(y)(x - y) \le f(x) - f(y);$$

(d) *jei x ir y yra vidiniai J taškai ir $x < y$, tai $f'_+(x) \le f'_-(y)$.*

Įrodymas. Naudodamiesi tapatybe

$$s = \frac{t - s}{t - r} r + \frac{s - r}{t - r} t,$$

ir funkcijos f iškilumu, gauname nelygybę

$$f(s) \le \frac{t - s}{t - r} f(r) + \frac{s - r}{t - r} f(t),$$

iš kurios ir išplaukia teiginys (a).

Teiginio (b) įrodymui imkime vidinį J tašką x. Egzistuoja toks $\epsilon > 0$, kad $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset J$. Tegul $-\epsilon < u_1 < u_2 < 0 < v_2 < v_1 < \epsilon$. Tada remdamiesi (a), gauname

$$\frac{f(x+u_1) - f(x)}{u_1} \le \frac{f(x+u_2) - f(x)}{u_2} \le \frac{f(x+v_2) - f(x)}{v_2} \le \frac{f(x+v_1) - f(x)}{v_1}.$$

Tai reiškia, kad funkcija $u \mapsto [f(x+u) - f(x)]/u$, $u \in (-\epsilon, 0)$, nemažėja ir aprėžta iš viršaus, kai $u \uparrow 0$, o funkcija $v \mapsto [f(x+v) - f(x)]/v$, $v \in (0, \epsilon)$, nedidėja ir aprėžta iš apačios, kai $v \downarrow 0$. Todėl egzistuoja vienpusės išvestinės $f'_-(x)$ ir $f'_+(x)$, bei galioja teiginio (b) nelygybė.

Įrodykime (c). Jei $x > y$, tai remdamiesi (a) su $r = y$, $t = x$ ir kintančiu $s \downarrow y$, gauname

$$f'(y) \leq \frac{f(x) - f(y)}{x - y}.$$

Analogiškai, jei $y > x$, tai remdamiesi (a) su $r = x$, $t = y$ ir kintančiu $s \uparrow y$, gauname

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'(y).$$

Teiginys (c) dabar išplaukia iš pastarųjų dviejų nelygybių.

Paskutiniam lemos teiginiui įrodyti remsimės nelygybe

$$\frac{f(s) - f(r)}{s - r} \leq \frac{f(s) - f(t)}{s - t},$$

lengvai gaunama iš (a). Kai $r = x$, $t = y$ ir $x < s < y$, tai pažymėję $v := s - x$ ir $u := s - y$ turime

$$\frac{f(x + v) - f(x)}{v} \leq \frac{f(y + u) - f(y)}{u}.$$

Be to, remiantis teiginio (b) įrodymu, kairė šios nelygybės pusė yra $\geq f'_+(x)$, o dešinė yra $\leq f'_-(y)$. Taigi galioja teiginys (d). Lema visiškai įrodyta. □

2.107 teorema. *Tegul J yra atviras intervalas ir $f\colon\ J \to \mathbb{R}$. Tada galioja teiginiai*:

(a) *jei f diferencijuojama intervale J, tai ji iškila tada ir tik tada, kai išvestinė f' nemažėja intervale J*;

(b) *jei f yra iš C^2 klasės intervale J, tai ji iškila tada ir tik tada, kai antroji išvestinė f'' neneigiama intervale J.*

Įrodymas. Įrodysime (a). Tegul f yra diferencijuojama ir iškila intervale J. Tada $f' = f'_- = f'_+$. Remiantis 2.106 lemos (d) teiginiu, $f'(x) \leq f'(y)$ kai tik $x < y$, t. y. išvestinė f' nemažėja intervale J. Tarkime atvirkščiai, kad f' nemažėja intervale J. Funkcijos f iškilumui įrodyti pakanka patikrinti, kad su bet kuriais $u, v \in J$, $u < v$, visas funkcijos f grafikas, esantis virš intervalo $[u, v]$, yra žemiau atkarpos, jungiančios taškus $(u, f(u))$ ir $(v, f(v))$, t. y. visiems $x \in (u, v)$

$$f(x) \leq \frac{f(v) - f(u)}{v - u}(x - u) + f(u). \tag{2.64}$$

Kadangi diferencijuojama funkcija f yra tolydi, tai remiantis vidurinių reikšmių teorema (2.46), galima rasti tokį $\theta \in (u, v)$, kad

$$f'(\theta) = \frac{f(v) - f(u)}{v - u}.$$

Pirma tarkime, kad $u < x \le \theta$. Dar kartą remdamiesi vidurinių reikšmių teorema, randame tokį $\theta_x \in (u, x)$, kad

$$f(x) - f(u) = f'(\theta_x)[x-u] \le f'(\theta)[x-u],$$

nes f' nemažėja pagal prielaidą. Pastaroji nelygybė sutampa su norima nelygybe (2.64). Kitu atveju, kai $\theta \le x < v$, taip pat randame tokį $\theta_x \in (x, v)$, kad

$$f(x) - f(u) = f(v) - f(u) - f'(\theta_x)[v-x] \le f(v) - f(u) - f'(\theta)[v-x].$$

Pastaroji nelygybė taip pat sutampa su norima nelygybe (2.64). Teiginio (a) įrodymas baigtas.

Įrodysime teiginį (b). Pirmiausia tarkime, kad f yra iš C^2 klasės ir iškila intervale J. Šiuo atveju naudosimės Taeioro formule (2.56) atveju $n = m = 1$ ir $U = J$. Tegul $x \in J$, ir $u > 0$ yra toks, kad $x + u$ ir $x - u$ priklauso J. Tada

$$f(x+u) - f(x) = f'(x)u + \frac{1}{2}f''(x)u^2 + o(u^2)$$

ir

$$f(x-u) - f(x) = -f'(x)u + \frac{1}{2}f''(x)u^2 + o(u^2).$$

Sudėję ir pertvarkę gautą išraišką, turime

$$f''(x) = \lim_{u\to 0}\big[f(x+u) - 2f(x) + f(x-u)\big]/u^2.$$

Kadangi f yra iškila, tai

$$\begin{aligned} & f(x+u) - 2f(x) + f(x-u) \\ = \;\; & 2\Big[\frac{1}{2}f(x+u) + \frac{1}{2}f(x-u) - f\Big(\frac{1}{2}(x+u) + \frac{1}{2}(x-u)\Big)\Big] \ge 0 \end{aligned}$$

kiekvienam leistinam $u > 0$. Perėję prie ribos, gauname $f''(x) \ge 0$. Dabar tarkime atvirkščiai, kad f'' neneigiama intervale J. Tegul $u, v \in J$, $u < v$, $\lambda \in (0, 1)$ ir $x := \lambda u + (1 - \lambda)v$. Remiantis vidurinių reikšmių teorema (2.46), randame tokius $\theta_1 \in (u, x)$, $\theta_2 \in (x, v)$ ir $\theta_3 \in (\theta_1, \theta_2)$, kad

$$\begin{aligned} & \lambda f(u) + (1-\lambda)f(v) - f(x) \\ = \;\; & \lambda[f(u) - f(x)] + (1-\lambda)[f(v) - f(x)] \\ = \;\; & \lambda f'(\theta_1)(u-x) + (1-\lambda)f'(\theta_2)(v-x) \\ = \;\; & \lambda f'(\theta_1)(1-\lambda)(u-v) + (1-\lambda)f'(\theta_2)\lambda(v-u) \\ = \;\; & \lambda(1-\lambda)(v-u)[f'(\theta_2) - f'(\theta_1)] \\ = \;\; & \lambda(1-\lambda)(v-u)(\theta_2 - \theta_1)f''(\theta_3) \ge 0, \end{aligned}$$

t. y. $f(\lambda u + (1-\lambda)v) \le \lambda f(u) + (1-\lambda)f(v)$. Taigi f yra iškila; tai ir reikėjo įrodyti. $\square$

2.108 teorema. *Tegul $U \subset \mathbb{R}^n$ yra atvira ir iškila aibė, $f\colon U \to \mathbb{R}$ yra iš C^2 klasės, o $Hf(x)$ yra funkcijos f hesiano matrica taške $x \in U$. Tada funkcija f yra*

(a) *įgaubta aibėje U tada ir tik tada, kai $Hf(x)$ yra neigiamai pusapibrėžtė kiekvienam $x \in U$;*

(b) *griežtai įgaubta aibėje U tada ir tik tada, kai $Hf(x)$ yra neigiamai apibrėžta kiekvienam $x \in U$;*

(c) *iškila aibėje U tada ir tik tada, kai $Hf(x)$ yra teigiamai pusapibrėžtė kiekvienam $x \in U$;*

(d) *griežtai iškila aibėje U tada ir tik tada, kai $Hf(x)$ yra teigiamai apibrėžta kiekvienam $x \in U$.*

Įrodymas. Įrodysime tik teiginį (a), nes kitų trijų įrodymai panaš$\overline{\text{u}}$s. Funkcija f yra įgaubta aibėje U tada ir tik tada, kai f yra įgaubta kiekvienoje aibės U atkarpoje. Pastaroji sąlyga ekvivalenti tam, kad įgaubta yra funkcija $g(\lambda) := f(y + \lambda z)$ atvirame intervale $\{\lambda \in \mathbb{R}\colon y + \lambda z \in U\}$ kiekvienam $y \in U$ ir $z \in \mathbb{R}^n$. Du kartus pasinaudoję kompozicijos diferencijavimo taisykle (2.44), gauname lygybę

$$g''(\lambda) = z \cdot \big(Hf(x)z\big) = z^t Hf(x)z, \quad x = y + \lambda z,\ y \in U,\ z \in \mathbb{R}^n.$$

Funkcija g yra įgaubta tada ir tik tada, kai funkcija $-g$ yra iškila. Todėl remiantis 2.107(b) teorema, kiekvienam $y \in U$ ir $z \in \mathbb{R}^n$, g yra įgaubta tada ir tik tada, kai $z \cdot \big(Hf(g(\lambda))z\big) \leq 0$, o tai pagal 2.49 apibrėžimą reiškia, kad teorema yra įrodyta. □

Dar reikia nuspręsti, ką daryti su kita teorema.

2.109 teorema. *Tegul $U \subset \mathbb{R}^n$ yra atvira aibė, $f\colon U \to \mathbb{R}$ yra iš C^2 klasės, $f''(x)$ yra funkcijos f hesiano matrica taške $x \in U$, o $D_k(x)$ ir $\widetilde{D}_k(x)$, $k = 1, \ldots, n$, yra $f''(x)$ successive principal minors and principal minors. Tada galioja teiginiai*

(a) *Funkcija f yra įgaubta tada ir tik tada, kai $\widetilde{D}_1(x) \leq 0$, $\widetilde{D}_2(x) \geq 0, \ldots, (-1)^n \widetilde{D}_n(x) \geq 0$ visiems $x \in U$;*

(b) *Funkcija f yra griežtai įgaubta tada ir tik tada, kai $D_1(x) < 0$, $D_2(x) > 0, \ldots,$ $(-1)^n D_n(x) > 0$ visiems $x \in U$;*

(c) *Funkcija f yra iškila tada ir tik tada, kai $\widetilde{D}_1(x) \geq 0$, $\widetilde{D}_2(x) \geq 0, \ldots, \widetilde{D}_n(x) \geq 0$ visiems $x \in U$;*

(d) *Funkcija f yra griežtai iškila tada ir tik tada, kai $D_1(x) > 0$, $D_2(x) > 0, \ldots,$ $D_n(x) > 0$ visiems $x \in U$.*

Pratimai

1. Įrodyti 2.98 teiginį.
2. Įrodyti: jei funkcija yra įgaubta, tai ji yra kvazi–įgaubta.
3. Įrodyti 2.105(b), (c) ir (d) teiginius.
4. Tegul $X \subset \mathbb{R}^n$ yra iškila aibė, o $f\colon X \to \mathbb{R}$ yra iškila funkcija. Įrodyti, kad f yra tolydi kiekviename vidiniame X aibės taške.
5. Įrodyti, kad funkcija $f(x) = x^p$, $x > 0$, yra iškila, jei $1 \leq p < \infty$.
6. Įrodyti, kad funkcija $f(x) = x^p$, $x > 0$, yra įgaubta, jei $0 < p \leq 1$.
7. Įrodyti, kad funkcija $f(x) = \log x$, $x > 0$, yra įgaubta.

2.8 Optimizavimas

Besąlyginiai ekstremumai

2.110 apibrėžimas. Sakykime, kad $X \subset \mathbb{R}^d$ ir $f\colon X \to \mathbb{R}$. Taškas $x^* \in X$ vadinamas funkcijos f *lokaliojo maksimumo tašku,* jei egzistuoja toks atvirasis rutulys $B(x^*, \epsilon)$ su spinduliu $\epsilon > 0$, kad $f(x^*) \geq f(x)$ visiems $x \in B(x^*, \epsilon) \cap X$. Funkcijos f *lokaliojo minimumo taško* apibrėžimą gausime, nelygybę tarp $f(x)$ ir $f(x^*)$ pakeitę priešinga. Lokaliojo maksimumo ir lokaliojo minimumo taškai vadinami *lokaliojo ekstremumo* taškais.

B$\overline{\text{u}}$tina funkcijos, jei tik ji diferencijuojama, ekstremumo egzistavimo sąlyga formuluojama remiantis gradientu (2.72 apibrėžimas ir 2.77 išvada).

2.111 teorema. *Sakykime, kad $X \subset \mathbb{R}^d$ yra atvira ir $f\colon X \to \mathbb{R}$. Jei x^* yra funkcijos f lokaliojo ekstremumo taškas ir f yra diferencijuojama taške x^*, tai*

$$\nabla f(x^*) = (D_1 f(x^*), \ldots, D_d f(x^*)) = 0.$$

Įrodymas. Atveju $d = 1$ tai yra 2.83 lemos teiginys. Tarkime, kad $d > 1$, $x^* = (x_i^*)$ ir prisiminkime dalinės išvestinės apibrėžimą 2.75. Kiekvienam $i \in \{1, \ldots, d\}$ ir $t \in \mathbb{R}$ iš nulio aplinkos tegul

$$g_i(t) := f(x_1^*, \ldots, x_{i-1}^*, t, x_{i+1}^*, \ldots, x_d^*).$$

Tada g_i yra diferencijuojama taške x_i^* ir $g_i(x_i^*) = D_i f(x^*)$. Jei x^* yra f lokalusis ekstremumas, tai x_i^* yra g_i lokalusis ekstremumas ir todėl pagal pimąją įrodymo dalį $D_i f(x^*) = 0$. Kadangi tai galioja kiekvienam i, $\nabla f(x^*) = 0$. $\square$

2.111 teoremoje suformuluota būtinoji ekstremumo egzistavimo sąlyga nėra pakankama, kaip rodo toks pavyzdys: $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$, $f'(0) = 0$ bet 0 nėra funkcijos f lokaliojo ekstremumo taškas. Tačiau kiekvienas taškas, kuriame funkcijos gradientas lygus nuliui, vadinamas *kritiniu*.

Pakankamoms ekstremumo egzistavimo sąlygoms formuluoti naudosimės toliau apibrėžiamomis sąvokomis.

2.112 apibrėžimas. Tarkime, kad matrica $A \in \mathbb{M}^{n\times n}$ yra savijungė, t. y.

$$(Ax)\cdot y = x\cdot(Ay), \quad \text{visiems } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Sakoma, kad matrica A yra *teigiamai apibrėžta* arba *neigiamai apibrėžta,* jei kiekvienam $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, atitinkamai,

$$(Ax)\cdot x > 0 \quad \text{arba} \quad (Ax)\cdot x < 0.$$

Be to, sakoma, kad matrica A yra *neapibrėžta,* jei skaičiai $(Ax)\cdot x$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, gali įgyti tiek teigiamų tiek ir neigiamų reikšmių.

Pakankamos lokalaus ekstremumo egzistavimo sąlygos formuluojamos hesiano matricos (2.97 apibrėžimas) pagalba.

2.113 teorema. *Tarkime, kad $U \subset \mathbb{R}^n$ yra atvira ir iškila aibė, $f\colon U \to \mathbb{R}$ yra iš C^2 klasės ir $x^* \in U$ yra f kritinis taškas, t. y. $\nabla f(x^*) = 0$. Jei hesiano matrica $Hf(x^*)$ yra*

(a) *teigiamai apibrėžta, tai x^* yra f lokaliojo minimumo taškas*;

(b) *neigiamai apibrėžta, tai x^* yra f lokaliojo maksimumo taškas*;

(c) *neapibrėžta, tai x^* nėra f lokaliojo ekstremumo taškas.*

Įrodymas. Įrodysime teiginį (a). Tarkime, kad hesiano matrica $Hf(x^*)$ yra teigiamai apibrėžta. Pagal Teiloro formulę (2.58), bet kuriam $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, jei tik $x^* + x \in U$, tai

$$f(x^* + x) - f(x^*) = |x|^2 \left(\frac{1}{2}\big(Hf(x^*)\frac{x}{|x|}\big)\cdot\frac{x}{|x|} + \frac{\gamma(x^*, x)}{|x|^2} \right). \tag{2.65}$$

Be to, $|\gamma(x^*, x)|/|x|^2 \to 0$, kai $|x| \to 0$. Kadangi $x/|x| \in S^{d-1}$ priklauso sferai S^{d-1}, o S^{d-1} yra kompaktas, tai tolydžioji funkcija $S^{d-1} \ni s \mapsto (Hf(x^*)s)\cdot s$ įgyja minimalią reikšmę (2.65 teorema). Remiantis teigiamo apibrėžtumo prielaida egzistuoja toks $m > 0$, kad $(Hf(x^*)s)\cdot s \geq m$ kiekvienam $s \in S^{d-1}$. Kadangi x pakankamai mažiems, $|\gamma(x^*, x)|/|x|^2 < m/2$, tai visiems tokiems x dešinė lygybės (2.65) pusė yra teigiama, t. y. x^* yra f lokaliojo minimumo taškas.

Teiginio (b) įrodymas simetriškas ir todėl praleidžiamas. Įrodydami teiginį (c) imkime tokius vektorius x_1 ir x_2 iš $\mathbb{R}^d$, kad $(Hf(x^*)x_1)\cdot x_1 > 0$ ir $(Hf(x^*)x_2)\cdot x_2) < 0$. Dar kartą pagal Teiloro formulę (2.58) kiekvienam $t > 0$ galioja toks sąryšis:

$$f(x^* + tx_k) - f(x^*) = t^2 \left(\frac{1}{2}\big(Hf(x^*)x_k\big)\cdot x_k + |x_k|^2 \frac{\gamma(x^*, tx_k)}{|tx_k|^2} \right).$$

Kadangi $|\gamma(x^*, tx_k)|/|tx_k|^2 \to 0$, kai $t \downarrow 0$, tai pakankamai mažam $t > 0$ dešinė šio sąryšio pusė yra teigiama, kai $k = 1$, ir neigiama, kai $k = 2$. Taigi x^* nėra f lokaliojo ekstremumo taškas. □

RN: dar reikia nuspręsti, ką daryti su kita teorema. Ši teorema naudojama po (1.6).

2.114 teorema. *Tarkime, kad $U \subset \mathbb{R}^n$ yra atvira aibė, $f\colon U \to \mathbb{R}$ yra iš C^2 klasės ir $x^* \in U$ yra f lokaliojo ekstremumo taškas. Tada*

(a) *jei x^* yra f lokaliojo maksimumas taškas, tai $f''(x^*) \le 0$ (yra negative semidefinite);*

(b) *atvirkščiai, jei $f''(x^*) < 0$ (yra negative definite), tai egzistuoja tokie atvirasis rutulys $B(x^*, \epsilon)$ ir skaičius $\theta > 0$, kad visiems $x \in B(x^*, \epsilon)$*

$$f(x^*) \ge f(x) + \theta|x - x^*|^2.$$

Šioje besąlyginio ekstremumo charakterizacijoje $f''(x^*) \le 0$ vadinama *b$\overline{u}$tinąja antrosios eilės sąlyga*, o $f''(x^*) < 0$ vadinama *pakankamąja antrosios eilės sąlyga*.

Globalieji ekstremumai

2.115 teorema. *Tarkime, kad $X \subset \mathbb{R}^d$ yra iškila aibė ir funkcija $f\colon X \to \mathbb{R}$ yra įgaubta. Jei $x^* \in X$ yra f lokaliojo maksimumo taškas, tai jis yra ir globaliojo maksimumo taškas aibėje X.*

Įrodymas. Tarkime, kad x^* nėra funkcijos f globaliojo maksimumo taškas aibėje X. Tada egzistuoja toks $\hat{x} \in X$, kad $f(\hat{x}) > f(x^*)$. Be to, kiekvienam $\lambda \in (0, 1)$, iškilasis darinys $x_\lambda := \lambda\hat{x} + (1 - \lambda)x^* \in X$, ir

$$f(x_\lambda) \ge \lambda f(\hat{x}) + (1 - \lambda)f(x^*) > f(x^*).$$

Kai $\lambda \to 0$, tai $x_\lambda \to x^*$, ir todėl x_λ priklausys bet kuriai kiek norint mažai x^*-o aplinkai, kas prieštarauja x^*-o lokaliajam maksimalumui. Ši prieštara įrodo teoremą. □

Sąlyginiai ekstremumai

2.116 teorema (Atvirkštinės funkcijos). *Tarkime, kad $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ yra iš C^1 klasės tokioje atvirojoje aibėje, kuriai priklauso a ir Jakobiano $Jf(a)$ determinantas nėra lygus nuliui. Tada egzistuoja tokia atviroji aibė U, kuriai priklauso a, ir egzistuoja tokia atviroji aibė V, kuriai priklauso $f(a)$, kad funkcija $f\colon U \to V$ turi diferencijuojamą atvirkštinę $f^{-1}\colon V \to U$, ir*

$$Df^{-1}(y) = [Df(f^{-1}(y))]^{-1}, \qquad y \in V. \tag{2.66}$$

Įrodymas. Tegul $L := Df(a)\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$. Kadangi jakobiano $Jf(a)$ determinantas nėra lygus nuliui, tai egzistuoja atvirkštinė tiesinė funkcija $L^{-1}\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ (2.48 teorema). Remiantis kompozicijos diferencijavimo taisykle ir teiginiu 2.74(a), galioja lygybės

$$D(L^{-1}\circ f)(a) = DL^{-1}(f(a))\circ Df(a) = L^{-1}\circ Df(a) = 1_{\mathbb{R}^d}.$$

Kadangi $f = L\circ(L^{-1}\circ f)$, tai remiantis 2.41 išvada teoremą pakanka įrodyti funkcijai $L^{-1}\circ f$. Todėl neprarasdami bendrumo galime laikyti, kad $L = Df(a) = 1_{\mathbb{R}^d}$.

Jei x yra toks, kad $f(a+x) = f(a)$, tai

$$\big|f(a+x) - f(a) - L(x)|/|x| = |x|/|x| = 1.$$

Tačiau kairė šių lygybių pusė privalo artėti į nulį, jei $|x| \to 0$. Todėl egzistuoja tokia atvira ir iškila aibė W, kuriai priklauso a, ir

$$f(x) \neq f(a), \quad \text{jei} \quad x \in U \setminus \{a\}. \tag{2.67}$$

Kadangi f yra iš C^1 klasės, tai galime tarti, kad

$$\det Jf(x) \neq 0, \quad \text{jei } x \in W. \tag{2.68}$$

Remiantis vidurinių reikšmių teorema 2.86, bet kuriems $x_1, x_2 \in W$, pažymėjus $h := x_1 - x_2$,

$$\begin{aligned} &\big|f(x_1) - x_1 - [f(x_2) - x_2]\big| \\ &\leq \big|f(x_2+h) - f(x_2) - Df(x_2)(h)\big| + \big|Df(x_2)(h) - L(h)\big| \\ &\leq |h| \sup_{y\in[x_2,x_1]} \big|Df(x_2) - Df(y)\big| + |h|\big|Df(x_2) - L\big| \end{aligned}$$

Kadangi išvestinė Df tolydi, tai galime tarti, kad bet kuriems $x_1, x_2 \in W$

$$\big|f(x_1) - x_1 - [f(x_2) - x_2]\big| \leq (1/2)|x_1 - x_2|.$$

Iš čia, naudodamiesi euklidinės normos subadityvumu, gauname nelygybę

$$|x_1 - x_2| \leq 2\big|f(x_1) - f(x_2)\big| \tag{2.69}$$

bet kuriems $x_1, x_2 \in W$.

Kadangi a yra atvirosios aibės W vidinis taškas, tai egzistuoja toks $s > 0$, kad uždaras rutulys $\overline{R}(a,s) \subset W$. Tegul $R := R(a,s)$, ir $S := \{y \in \mathbb{R}^d \colon |y-a| = s\}$ yra to rutulio paviršius. Remiantis 2.64 teorema, kompaktiškos aibės vaizdas $K := f[S]$ tolydžiosios funkcijos atžvilgiu yra kompaktiška aibė. Aibei K nepriklauso vektorius $f(a)$ atsižvelgiant į (2.67) pasirinkimą. Todėl atstumas $r := d(f(a), K) := \inf\{y \in K \colon |y - f(a)|\} > 0$. Tegul $V := R(f(a), r/2)$ – atvirasis rutulys. Tada

$$|f(a) - y| < |f(x) - y|, \quad \text{jei } y \in V \text{ ir } x \in S. \tag{2.70}$$

Įrodysime, kad kiekvienam $y \in V$ egzistuoja toks vienintelis $x \in R$, kad $f(x) = y$.

Tegul $y = (y_i) \in V$ ir kiekvienam $x \in \overline{R}(a,s)$ tegul

$$\varphi(x) := |f(x) - y|^2 = \sum_{i=1}^{d} |f_i(x) - y_i|^2.$$

Šiomis reikšmėmis apibrėžta funkcija $\varphi \colon \overline{R}(a,s) \to \mathbb{R}$ yra tolydi kompaktiškoje aibėje, ir todėl joje įgyja bent vieną minimumą (2.65 teorema). Tegul $x \in \overline{R}(a,s)$ yra minimumo taškas. Jei $x \in S$, tai $\varphi(a) < \varphi(x)$ remiantis (2.70). Todėl $x \in R$ ir, remiantis 2.111 teorema, $\nabla\varphi(x) = 0$, t. y.

$$\sum_{i=1}^{d} 2(f_i(x) - y_i) D_j f_i(x) = 0$$

kiekvienam $j \in \{1, \ldots, d\}$. Kadangi matricos $[D_j f_i(x)]$ determinantas nelygus nuliui remiantis (2.68), tai $f_i(x) = y_i$ su kiekvienu i, t. y. $f(x) = y$. Tai, kad toks x yra vienintelis, rodo (2.69). Be to, 2.63(b) teiginio dėka, $f^{-1}[V]$ yra atviroji aibė (čia f^{-1} yra atitiktis). Tegul $U := R \cap f^{-1}[V]$. Taigi įrodėme, kad funkcijos $f \colon U \to V$ atvirkštinė atitiktis yra funkcija $f^{-1} \colon V \to U$ (2.38 teorema).

Liko įrodyti, kad f^{-1} yra diferencijuojama aibėje V. Tegul $y \in V$, $x = f^{-1}(y) \in U$ ir $L := Df(x) = Df(f^{-1}(y))$. Įrodysime, kad f^{-1} yra diferencijuojama taške y ir jos išvestinė yra L^{-1}. Kadangi f yra diferencijuojama taške x, tai

$$\Delta_f(x_1 - x) := f(x_1) - f(x) - L(x_1 - x) = o(x_1 - x), \quad \text{kai } x_1 \in V \text{ ir } x_1 \to x.$$

Kadangi L^{-1} yra tiesinė funkcija (2.48 teorema), tai jos reikšmė taške $\Delta_f(x_1 - x)$ yra

$$L^{-1}\big(\Delta_f(x_1 - x)\big) = L^{-1}\big(f(x_1) - f(x)\big) - (x_1 - x).$$

Ši lygybė, kai joje x ir x_1 atitinkamai pakeičiame $f^{-1}(y) = x$ ir $f^{-1}(y_1) = x_1$, virsta tokia:

$$\Delta_{f^{-1}}(y_1 - y) := f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y) - L^{-1}(y_1 - y) = -L^{-1}\big(\Delta_f(f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y))\big).$$

Panašiai iš (2.69) gauname nelygybę: $|f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y)| \le 2|y_1 - y|$, iš kurios, be kita ko, išplaukia, kad f^{-1} yra tolydi funkcija. Todėl išraiškos

$$\frac{|\Delta_{f^{-1}}(y_1 - y)|}{|y_1 - y|} = \frac{|L^{-1}\big(\Delta_f(f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y))\big)|}{|f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y)|}\,\frac{|f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y)|}{|y_1 - y|}$$

dešinėje pusėje pirmasis santykis, kai $y_1 \to y$, artėja į nulį, remiantis (2.34) funkcijai L^{-1}, o antrasis yra aprėžtas dvejetu. Taigi f^{-1} yra diferencijuojama kiekviename taške $y \in V$ su išvestine (2.66); tai ir reikėjo įrodyti. □

2.117 teorema (Neišreikštinės funkcijos). *Tarkime, kad $g\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ yra iš C^1 klasės tokioje atviroje aibėje, kuriai priklausantis vektorius (u, v) yra toks, kad $g(u, v) = 0$, ir determinantas matricos, sudarytos iš jakobiano $Jg(u, v)$ pirmųjų m stulpelių, nėra lygus nuliui. Tada egzistuoja atviroji aibė $V \subset \mathbb{R}^k$, kuriai priklauso v, egzistuoja atviroji aibė $U \subset \mathbb{R}^m$, kuriai priklauso u, ir kiekvienam $y \in V$ egzistuoja toks vienintelis $h(y) \in U$, kad $g(h(y), y) = 0$, o funkcija h yra diferencijuojama.*

Įrodymas. Kiekvienam $x \in \mathbb{R}^m$ ir $y \in \mathbb{R}^k$ tegul $G(x, y) := (g(x, y), y)$. Funkcija $G\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ yra diferencijuojama, o jos jakobiano $JG(u, v)$ determinantas yra lygus determinantui, sudarytam iš $Jg(u, v)$ pirmųjų m stulpelių, taigi nėra lygus nuliui. Remiantis atvirkštinės funkcijos teorema (2.116 teorema), egzistuoja tokia atviroji aibė $A \times V \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$, kuriai priklauso $G(u, v) = (0, v)$, ir egzistuoja tokia atviroji aibė $U \times B \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$, kuriai priklauso (u, v), kad funkcija $G\colon U \times B \to A \times V$ turi diferencijuojamą atvirkštinę funkciją $F\colon A \times V \to U \times B$. Nesunku patikrinti, kad $F(x, y) = (f(x, y), y)$, kai $(x, y) \in A \times V$, ir $f\colon A \times V \to U$ yra diferencijuojama funkcija. Tegul $\pi\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ yra projekcija į $\mathbb{R}^m$. Tada $\pi \circ G = g$ ir

$$g(f(x, y), y) = g \circ F(x, y) = (\pi \circ G) \circ F(x, y) = \pi \circ (G \circ F)(x, y) = \pi(x, y) = x$$

kiekvienam $(x, y) \in A \times V$. Kadangi $(0, v) \in A \times V$, gauname $g(f(0, y), y) = 0$ visiems $y \in V$. Reikšmės $h(y) := f(0, y) \in U$, kai $y \in V$, apibrėžia norimą funkciją $h\colon V \to U$. □

Tarkime, kad $X \subset \mathbb{R}^d$, $f\colon X \to \mathbb{R}$ ir $g = (g_1, \ldots, g_m)\colon X \to \mathbb{R}^m$. Jei aibė

$$M_g := \{x \in X\colon g(x) = 0\} = g^{-1}[0] \tag{2.71}$$

netuščia, tai ji vadinama *apribojimų aibe*. Sąlyginio ekstremumo uždaviniu vadinama paieška tokio taško x^*, kuris yra funkcijos f lokalus ekstremumas apribojimų aibėje M_g. Nurodysime būtinas sąlyginio ekstremumo egzistavimo sąlygas tuo atveju, kai funkcijos f ir g yra tolydžiai diferencijuojamos.

2.118 teorema. *Sakykime, kad aibė $X \subset \mathbb{R}^d$ yra atvira, $f\colon X \to \mathbb{R}$ yra iš C^1 klasės, $g = (g_1, \ldots, g_m)\colon X \to \mathbb{R}^m$, $1 \le m < d$, yra iš C^1 klasės ir apribojimų aibė* (2.71) *yra netuščia. Jei M_g aibėje funkcija f turi ekstremumo tašką x^* ir vektoriai*

$\nabla g_1(x^*), \ldots, \nabla g_m(x^*)$ *yra tiesiškai nepriklausomi, tai egzistuoja tokie realieji skaičiai* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$*, kad*

$$\nabla f(x^*) = \lambda_1 \nabla g_1(x^*) + \cdots + \nabla g_m(x^*). \tag{2.72}$$

Įrodymas. Funkcijos g komponenčių gradientų tiesinio nepriklausomumo sąlyga ekvivalenti tam, kad jakobiano

$$Jg(x^*) = \begin{bmatrix} D_1 g_1(x^*) & \cdots & D_n g_1(x^*) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ D_1 g_m(x^*) & \cdots & D_n g_m(x^*) \end{bmatrix}$$

rangas yra m. Teoremą įrodysime tuo atveju, kai tiesiškai nepriklausomi yra šio jakobiano pirmieji m stulpeliai. Įrodymą papildyti kitais atvejais paliekame skaitytojui.

Tiesinė lygčių sistema

$$D_j f(x^*) = \sum_{i=1}^m \lambda_i D_j g_i(x^*), \qquad j = 1, \ldots, m, \tag{2.73}$$

λ_i atžvilgiu turi vienintelį sprendinį $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$. Tai reiškia, kad (2.72) vektorių lygybėje, pirmos m koordinačių yra lygios. Parodysime, kad galioja likusios $j = m+1, \ldots, d$ lygybės.

Remiantis neišreikštinės funkcijos teorema (2.117 teorema) funkcijai g, egzistuoja atviroji aibė $V \subset \mathbb{R}^k$, $k := d - m$, kuriai priklauso $v^* := (x^*_{m+1}, \ldots, x^*_{m+k})$, ir tokia diferencijuojama funkcija $h\colon V \to \mathbb{R}^m$, kad $g(h(v), v) = 0$ kiekvienam $v \in V$. Tegul $H(v) := (h(v), v) \in \mathbb{R}^d$, $v \in V$. Tada kompozicija $g_i \circ H \equiv 0$ aibėje V kiekvienam $i = 1, \ldots, m$. Taikydami kompozicijos diferencijavimo taisyklę (2.41), gauname

$$\sum_{l=1}^m D_l g_i(x^*) D_j h_l(v^*) + D_j g_i(x^*) = 0 \tag{2.74}$$

kiekvienam $i = 1, \ldots, m$ ir $j = m+1, \ldots, m+k = d$. Kadangi $H(v) \in M_g$ kiekvienam $v \in V$, tai v^* yra funkcijos $f \circ H$ besąlyginis ekstremumas aibėje V. Remiantis 2.111 teorema, $\nabla (f \circ H)(v^*) = 0$. Dar kartą taikydami kompozicijos diferencijavimo taisyklę (2.41), gauname, kad lygybės

$$0 = D_j (f \circ H)(v^*) = \sum_{l=1}^m D_l f(x^*) D_j h_l(v^*) + D_j f(x^*) \tag{2.75}$$

galioja kiekvienam $j = m+1, \ldots, d$. Vietoje $D_l f(x^*)$, $l = 1, \ldots, m$, pastarojoje sumoje įstatę (2.73), po to sukeitę vietomis sumavimo tvarką ir įstatę (2.74), gauname, kad lygybės

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^m D_l f(x^*) D_j h_l(v^*) &= \sum_{l=1}^m \sum_{i=1}^m \lambda_i D_l g_i(x^*) D_j h_l(v^*) \\ &= \sum_{i=1}^m \lambda_i \sum_{l=1}^m D_l g_i(x^*) D_j h_l(v^*) = -\sum_{i=1}^m \lambda_i D_j g_i(x^*) \end{aligned}$$

galioja kiekvienam $j = m + 1, \dots, d$. Kartu su (2.75) šios lygybės rodo, kad (2.73) taip pat galioja, kai $j = m + 1, \dots, d$; tai ir reikėjo įrodyti. $\square$

Pastarosios teoremos būtinosios sąlyginio ekstremumo egzistavimo sąlygos dažnai formuluojamos kitaip. Bet kuriems vektoriams $x = (x_1, \dots, x_d) \in X \subset \mathbb{R}^d$ ir $\lambda := (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ tegul

$$L_\lambda(x) \equiv L(x, \lambda) := f(x) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(x).$$

Kiekvienam $\lambda \in \mathbb{R}^m$ šiomis reikšmėmis apibrėžta funkcija $L_\lambda \colon X \to \mathbb{R}$ vadinama *Lagranžo funkcija*. Esant išpildytoms 2.118 teoremos prielaidoms, $d+m$ lygčių sistemos

$$\begin{cases} D_1 L(x, \lambda) = D_1 f(x) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j D_1 g_j(x) = 0, \\ \dots \\ D_d L(x, \lambda) = D_d f(x) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j D_d g_j(x) = 0, \\ D_{d+1} L(x, \lambda) = -g_1(x) = 0, \\ \dots \\ D_{d+m} L(x, \lambda) = -g_m(x) = 0 \end{cases} \tag{2.76}$$

sprendimas leidžia rasti f funkcijos sąlyginio ekstremumo tašką x^* su apribojimų aibe M_g. Būtent sprendinys $(x^*, \lambda) = (x_1^* \dots, x_d^*, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$ apibrėžia x^* koordinates. Šio sprendinio skaičiai $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ vadinami *Lagranžo daugikliais*, o pats ekstremumo radimo metodas sprendžiant (2.76) sistemą vadinamas *Lagranžo daugiklių metodu*.

Jei funkcijos f ir g yra du kartus tolydžiai diferencijuojamos, tai ekstremumo tipą galima nustatyti pagal kitą teoremą.

2.119 teorema. *Sakykime, kad aibė $X \subset \mathbb{R}^d$ atvira, $f\colon X \to \mathbb{R}$ yra iš C^2 klasės, $g\colon X \to \mathbb{R}^m$, $1 \le m < d$, yra iš C^2 klasės, $x^* \in M_g$, vektoriai $\nabla g_1(x^*), \dots, \nabla g_m(x^*)$ yra tiesiškai nepriklausomi, ir vektorius $\lambda \in \mathbb{R}^m$ yra toks, kad*

$$\nabla L_\lambda(x^*) = \Big(D_i f(x^*) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j D_i g_j(x^*) \Big) = 0.$$

Jei aibėje $Z := \{x \in \mathbb{R}^d \colon \; Jg(x^*)x = 0\}$ Lagranžo funkcijos hesiano matrica $H\, L_\lambda(x^*)$ yra

(a) *teigiamai apibrėžta, tai x^* yra f lokalusis minimumas aibėje M_g;*

(b) *neigiamai apibrėžta, tai x^* yra f lokalusis maksimumas aibėje M_g;*

(c) *neapibrėžta, tai x^* nėra f lokalusis ekstremumas aibėje M_g.*

Kvadratinė forma Likusioje šio skyriaus dalyje apibūdinsime teigiamai apibrėžtas kvadratines formas (2.49 apibrėžimas).

2.120 teorema. *Tarkime, kad $n \in \mathbb{N}_+$ ir A yra simetrinė n-tosios eilės kvadratinė matrica. Egzistuoja tokia euklidinės erdvės $\mathbb{R}^n$ ortonormuota bazė $(v_1, \dots, v_n)$ ir vektorius $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, kad kiekvienam $k = 1, \dots, n$,*

$$Av_k = \lambda_k v_k.$$

Be to, galioja lygybės

$$\min_k \lambda_k = \min\{q_A(x)/|x|^2 \colon x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\} = \min\{q_A(x) \colon x \in S^{n-1}\},$$

kur S^{n-1} yra erdvės $\mathbb{R}^n$ vienetinė sfera. Analogiškos lygybės galioja, kai $\min$ yra pakeistas $\max$.

Įrodymas. Jei $n = 1$, tai $A = [\lambda]$ ir $q_A(x) = \lambda x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Šiuo atveju teoremos teiginys akivaizdžiai teisingas. Teiginį bet kuriam n įrodysime naudodami indukciją. Tarkime, kad $n \geq 2$, teiginys teisingas bet kuriai $n-1$-osios eilės simetrinei kvadratinei matricai, ir tegul A yra simetrinė n-tosios eilės kvadratinė matrica.

Reikšmės $R(x) := q_A(x)/|x|^2$ bet kuriems $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ apibrėžia funkciją $R\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$. Kadangi $R(tx) = R(x)$ kiekvienam $t > 0$ ir $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (R yra pirmos eilės teigiamai homogeninė funkcija), visos funkcijos R reikšmės įgyjamos ant sferos $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \colon |x| = 1\}$. Nesunku patikrinti, kad R tolydi ir S^{n-1} kompaktiška, ir todėl funkcija R įgyja minimalią reikšmę kuriame nors taške $v_n \in S^{n-1}$ (2.65 teorema). Dar kartą remiantis homogeniškumu, vektorius v_n yra funkcijos R ekstremumo taškas visoje jos apibrėžimo srityje $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, kuri yra atvira aibė. Naudojantis 2.6.5 pratimo teiginiu ir 2.111 teorema, galima įsitikinti, kad R yra diferencijuojama ir

$$0 = \nabla R(v_n) = 2Av_n - 2(Av_n \cdot v_n)v_n,$$

t. y. $Av_n = \lambda_n v_n$ su $\lambda_n := Av_n \cdot v_n = R(v_n) = \inf\{R(x) \colon x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}$.

Tegul $V := \{x \in \mathbb{R}^n \colon x \cdot v_n = 0\}$. Nesunku įsitikinti tuo, kad V yra $(n-1)$-matavimo tiesinis $\mathbb{R}^n$ poaibis. Tegul $\{u_1, \dots, u_{n-1}\}$ yra ortonormuota bazė erdvėje V ir $Q(u_j) := e'_j$ kiekvienam $j \in \{1, \dots, n-1\}$, kur (e'_j) yra standartinė bazė euklidinėje erdvėje $\mathbb{R}^{n-1}$. Tada funkcija $Q\colon V \to \mathbb{R}^{n-1}$ yra tiesinė ir bet kuriems $x, y \in V$, $x \cdot y = Q(x) \cdot Q(y)$; tokia funkcija vadinama ortogonalia. Kadangi A yra simetrinė matrica, kiekvienam $x \in V$, galioja

$$Ax \cdot v_n = x \cdot Av_n = \lambda_n (x \cdot v_n) = 0,$$

ir todėl reikšmės $L(x) := Ax$, $x \in V$, apibrėžia tiesinę funkciją $L\colon V \to V$. Vėl nesunku įsitikinti tuo, kad kompozicija $K := Q \circ L \circ Q^{-1} \colon \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^{n-1}$ yra savijungė funkcija, ir todėl ją atitinkanti $(n-1)$-eilės matrica $B := [K]$ yra simetrinė.

Pagal indukcijos prielaidą egzistuoja tokia euklidinės erdvės $\mathbb{R}^{n-1}$ ortonormuota bazė $(\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_{n-1})$ ir vektorius $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, kad kiekvienam $k = 1, \dots, n-1$,

$$B\tilde{v}_k = \lambda_k \tilde{v}_k.$$

Be to, galioja lygybė

$$\min_{1\le k\le n-1} \lambda_k = \min\big\{q_B(u)/|u|^2\colon\ u \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}\big\} = \min\big\{q_B(u)\colon\ u \in S^{n-2}\big\}.$$

Kiekvienam $k = 1, \dots, n-1$, tegul $v_k := Q^{-1}(\tilde{v}_k)$. Tada $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ yra ortonormuota bazė tiesinėje erdvėje V ir

$$Av_k = L \circ Q^{-1}(\tilde{v}_k) = Q^{-1}(B\tilde{v}_k) = \lambda_k Q^{-1}(\tilde{v}_k) = \lambda_k v_k.$$

Tegul $u \in \mathbb{R}^{n-1}$ ir $x := Q^{-1}(u) \in V$. Kadangi $Q^{-1} = Q^t$, $|u| = |x|$ ir galioja lygybės

$$q_B(u) = u \cdot K(u) = x \cdot L(x) = q_A(x).$$

Gauname, kad teoremos teiginys galioja bet kuriai n-tosios eilės simetrinei kvadratinei matricai. Remiantis indukcija, teorema galioja kiekvienam $n \in \mathbb{N}_+$. $\square$

2.121 apibrėžimas. Tarkime, kad $n \in \mathbb{N}_+$ ir A yra simetrinė n-tosios eilės kvadratinė matrica. Nenulinis vektorius $v \in \mathbb{R}^n$ vadinamas matricos A *tikriniu vektoriumi* ir skaičius $\lambda \in \mathbb{R}$ vadinamas matricos A *tikrine reikšme*, jei $Av = \lambda v$.

2.122 išvada. *Tarkime, kad $n \in \mathbb{N}_+$, A yra simetrinė n-tosios eilės kvadratinė matrica ir $v_1, \dots, v_n$ yra matricos A ortogonalūs vienetiniai tikriniai vektoriai. Bet kuriam vektoriui $x \in \mathbb{R}^n$, kurio koordinatatės atžvilgiu $v_1, \dots, v_n$ yra $x_1, \dots, x_n$, galioja lygybė*

$$q_A(x) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2;$$

čia $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ yra vektorius $v_1, \dots, v_n$ atitinkančios tikrinės reikšmės.

2.123 lema. *Tarkime, kad $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ yra n-tosios eilės kvadratinės simetrinės matricos A tikrinės reikšmės atitinkančios ortogonalius vienetinius tikrinius vektorius $v_1, \dots, v_n$. Tada*

$$\mathit{det} A = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n.$$

Įrodymas. Tarkime, kad vektoriai v_i išreiškiami koordinatėmis $(v_{1i}, \dots, v_{ni})$ kiekvienam $i = 1, \dots, n$. Tegul $V := [v_{ji}]$. Kadangi $Av_i = \lambda_i v_i$, tai $AV = [\lambda_i v_{ji}]$. Tada

$$\mathrm{det} A \cdot \mathrm{det} V = \lambda_1 \cdots \lambda_n \,\mathrm{det} V.$$

Kadangi vektoriai $v_1, \dots, v_n$ tiesiškai nepriklausomi, tai $\det V \neq 0$. Tai įrodo lemą. $\square$

Su bet kuria n-tosios eilės kvadratine matrica $A = [a_{ji}]$ ir kiekvienam $k \in \{1, \ldots, n\}$, tegul

$$A_k := \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix}. \tag{2.77}$$

A_k yra k-tosios eilės kvadratinė matrica, sudaryta iš matricos A kairiojo viršutinio kampo elementų ir $A_n \equiv A$. Skaičiai detA_k, $k = 1, \ldots, n$ vadinami matricos A *pagrindiniais minorais*.

2.124 teorema. *Tarkime, kad $n \in \mathbb{N}_+$ ir A yra simetrinė neišsigimusi n-tosios eilės kvadratinė matrica. Atitinkama kvadratinė forma q_A yra*

(a) *teigiamai apibrėžta tada ir tik tada, kai det$A_k > 0$ kiekvienam $k = 1, \ldots, n$;*

(b) *neigiamai apibrėžta tada ir tik tada, kai $(-1)^k$det$A_k > 0$ kiekvienam $k = 1, \ldots, n$;*

(c) *neapibrėžta, jei (a) ir (b) teiginių sąlygos negalioja.*

Įrodymas. Teiginį (a) įrodysime su indukcijos pagalba. Kai $n = 1$, teiginys yra akivaizdus. Tarkime, kad teiginys teisingas bet kurios $(n-1)$-osios eilės kvadratinėms matricoms.

Pirmiausia tarkime, kad det$A_k > 0$ kiekvienam $k = 1, \ldots, n$. Remiantis 2.120 teorema, egzistuoja matricos A ortogonalūs vienetiniai tikriniai vektoriai $v_1, \ldots, v_n$ su atitinkamomis tikrinėmis reikšmėmis $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Dėka 2.123 lemos, $\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n =$ det$A =$ det$A_n > 0$, ir todėl visos reikšmės $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ nelygios nuliui. Tada arba visos tikrinės reikšmės teigiamos, arba lyginis jų skaičius yra neigiamos. Pirmuoju atveju, remiantis 2.120 teorema ir jos 2.122 išvada, q_A ir A yra teigiamai apibrėžtos. Antruoju atveju tarkime, kad λ_i ir λ_j yra neigiamos tikrinės reikšmės, o v_i ir v_j jas atitinkantys tikriniai vektoriai. Tegul $\mathbb{R}^n$ dvimatis tiesinis poerdvis V yra aibės $\{v_i, v_j\}$ tiesinis apvalkalas. Tada bet kuriems $x = x_i v_i + x_j v_j \in V$, galioja

$$\begin{aligned} q_A(x) &= x \cdot Ax = (x_i v_i + x_j v_j) \cdot (\lambda_i x_i v_i + \lambda_j x_j v_j) \\ &= \lambda_i x_i^2 + \lambda_j x_j^2 < 0, \end{aligned}$$

t. y. q_A yra neigiama aibėje $V \setminus \{0\}$.

Tegul $q_{n-1} \colon \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ yra q_A susiaurinimas aibėje $\mathbb{R}^{n-1}$, t. y. bet kuriam $x = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$,

$$q_{n-1}(x) := q_A(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) = x^t A^* x = q_{A^*}(x);$$

čia $A^* := A_{n-1}$ yra matrica (2.77) su $k = n-1$. Kadangi det$A_1^* =$ det$A_1 > 0, \ldots,$ det $A_{n-1}^* =$ det$A_{n-1} > 0$, remiantis indukcine prielaida, $q_{n-1} \equiv q_{A^*}$ yra teigiamai apibrėžta kvadratinė forma. Bet tai yra prieštara, nes aibių $\mathbb{R}^{n-1}$ ir V sankirtoje, kuriai priklauso bent jau tiesė, q_{n-1} turėtų būti ir teigiama ir neigiama. Remiantis šia prieštara, kvadratinė forma q_A neturi neigiamų tikrinių reikšmių, ir todėl yra teigiamai apibrėžta.

Atvirkščiai, tarkime, kad kvadratinė forma q_A yra teigiamai apibrėžta; reikia įrodyti, kad $\det A_k > 0$ kiekvienam k. Tegul $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \colon |x| = 1\}$ yra sfera, o M yra skaičių aibės $\{q_A(x) \colon x \in S^{n-1}\}$ didžiausias apatinis rėžis. Tada $M > 0$ (kodėl?). Tegul $q_k \colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ yra q_A susiaurinimas aibėje $\mathbb{R}^k$, t. y. bet kuriam $x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$,

$$q_k(x) := q_A(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0) = x^t A_k x = q_{A_k}(x);$$

čia A_k yra matrica (2.77). Tegul $\mu_1, \dots, \mu_k$ yra matricos A_k tikrinės reikšmės, egzistuojančios dėka 2.120 teoremos. Remiantis ta pačia teorema, kiekvienas $\mu_i \geq M$, ir

$$\det A_k = \mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k \geq M^k > 0$$

remiantis 2.123 lema. Teiginio (a) įrodymas baigtas.

Teiginio (b) įrodymui tegul $q^*(x) := -q_A(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Aišku, kad $q^* = q_{-A}$ yra simetrinė kvadratinė forma, o q_A yra neigiamai apibrėžta tada ir tik tada, kai q^* yra teigiamai apibrėžta. Remiantis pirmąja šios teoremos dalimi, pastaroji sąlyga išpildoma tada ir tik tada, kai

$$0 < \det(-A)_k = (-1)^k \det A_k$$

kiekvienam $k = 1, \dots, n$. Tai įrodo teiginį (b).

Galiausiai tarkime, kad (a) ir (b) teiginių sąlygos negalioja. Remiantis 2.120 teorema, matrica A turi tikrines reikšmes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Tada remiantis 2.123 lema ir tuo, kad matrica A yra neišsigimusi $\det A = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n \neq 0$, ir todėl kiekviena tikrinė reikšmė nėra nulis. Jei visos tikrinės reikšmės yra teigiamos, tai remiantis 2.120 teorema ir teiginiu (a), galioja sąlyga $\det A_k > 0$ kiekvienam $k = 1, \dots, n$. Tuo tarpu jei visos tikrinės reikšmės yra neigiamos, tai remiantis 2.120 teorema ir teiginiu (b), galioja sąlyga $(-1)^k \det A_k > 0$ kiekvienam $k = 1, \dots, n$. Kadangi matrica A privalo turėti tiek teigiamų, tiek neigiamų tikrinių reikšmių, dar kartą remiantis 2.120 teorema, galima teigti, jog kvadratinė forma q_A neapibrėžta. Teoremos įrodymas baigtas. □

Pratimai

1. Įrodyti 2.122 išvadą.

2.9 Pastabos ir papildoma literatūra

2.1 skyrius Šiame skyriuje išdėstytas realiųjų skaičių apibrėžimas, naudojant racionaliųjų skaičių Koši sekas, buvo pasiūlytas *Méray*[12] 1869 metais ir *Cantor*o[13] 1872 metais. Tuo pačiu metu, bet šiek tiek kitokį realiųjų skaičių apibrėžimą pasiūlė *Dedekind*as[14] naudodamas tai, kas dabar vadinama *Dedekind*o pjūviais (žr. *Rudin*o (1978) pirmą skyrių).

[12] Charles Méray (1835–1911), prancūzų matematikas.

[13] Georg Cantor – Georgas Kantoras (1845–1918), vokiečių matematikas

[14] Richard Dedekind – Ričardas Dedekindas (1831–1916), vokiečių matematikas

Abu šie apibrėžimai yra panašūs tuo, kad nurodo realaus skaičiaus gavimo metodą žinant racionaliuosius skaičius. Visiškai kitokį, aksiomomis grindžiamą realiųjų skaičių aibės su tam tikromis savybėmis, apibrėžimą 1900 metais pasiūlė *Hilbert*as[15].

Aibių teorijos aksiomatika ir skaičių apibrėžimas remiantis aibių konstrukcijomis dėstomas *Enderton*o knygoje. *Protter*is savo knygoje aptaria šiuolaikinę aibių teoriją ir jos problemas.

2.2 skyrius Atitiktis $f \subset X \times Y$ yra apibrėžta tik aibėje $\mathcal{A}(f) \times \mathcal{R}(f)$. Jei $X \neq \mathcal{A}(f)$, tai aibę X galima pakeisti nekeičiant pačios atitikties. Norint išvengti tokio aibės X nevienareikšmiškumo, galima atitikties f apibrėžimą papildyti $f(x) := \varnothing$ taškuose $x \in X \setminus \mathcal{A}(f)$. Daugiau įvairių faktų taip apibrėžtoms atitiktims galima rasti *Berge* [4] knygoje.

Pagrindinės šiuolaikinės matematikos sąvokas išsamiai nagrinėjamos *Šichanovič*iaus knygoje.

2.4 skyrius Bet kuri aibės X poaibių klasė, kuriai galioja 2.53 teiginio (a), (b) ir (c) savybės, vadinama *topologija*, arba *topologine struktūra*. Vadinasi aibės X atžvilgiu atvirų poaibių klasė $\mathcal{O}_X$ yra X aibės topologija. Ji dar vadinama metrine topologija, nes apibrėžta remiantis euklidine metrika. Tačiau topologija padeda nagrinėti artumą aibėse, kuriose nėra metrikos, arba toje pačioje aibėje nagrinėti nemetrizuojamą topologiją. Tokios struktūros taip pat naudojamos matematinėje ekonomikoje ir apžvelgiamos *Aliprantis*o ir *Border*io knygoje.

2.8 skyrius Tikrinti matricos teigiamą ar neigiamą apibrėžtumą specialioje aibėje naudojamas šiek tiek sudėtingesnis kriterijus. Tegul $A = [a_{ji}] \in \mathbb{M}^{d\times d}$ ir $B = [b_{ji}] \in \mathbb{M}^{m\times d}$. Kiekvienam $k = 1, \ldots, d$, tegul

$$A_k := \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix} \quad \text{ir} \quad B_{mk} := \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ b_{m1} & \cdots & b_{mk} \end{bmatrix}.$$

Tegul $1 \leq m < d$. Iš nulių sudarytą eilės $m \times m$ matricą pažymėję 0, kiekvienam $k = 1, \ldots, d-m$, apibrėžkime naują matricą

$$C_{m+k} := \begin{bmatrix} 0 & B_{mk} \\ B_{mk}^t & A_k \end{bmatrix} \in \mathbb{M}^{(m+k)\times(m+k)}. \tag{2.78}$$

Toliau suformuluotas kriterijus taikomas nustatant sąlyginio ekstremumo pobūdį Lagranžo daugiklių metodu (2.119 teorema). Tuo atveju matrica A yra Lagranžo funkcijos hesianas, o matricą B sudaro ekstremumą ribojančios funkcijos gradientas. Todėl apibrėžtoji matrica C_{m+k} vadinama *apribotuoju hesianu* (angl. bordered Hessian).

[15] David Hilbert – Davidas Hilbertas (1862–1943), vokiečių matematikas.

2.125 teorema. *Tarkime, kad* $1 \leq m < d$*, matrica* $A \in \mathbb{M}^{d \times d}$ *yra simetrinė, o* $B \in \mathbb{M}^{m \times d}$ *yra tokia, kad matrica* B_{mm} *neišsigimusi. Tada aibėje* $\{x \in \mathbb{R}^d\colon\ Bx = 0\}$ *matrica* A *yra*

(a) *teigiamai apibrėžta tada ir tik tada, kai* $(-1)^m \det C_{m+k} > 0$, $k = 1, \ldots, d-m$;

(b) *neigiamai apibrėžta tada ir tik tada, kai* $(-1)^k \det C_{m+k} > 0$, $k = 1, \ldots, d-m$.

Šią teoremą įrodė *Debreu* (1952).

1. Ch. D. Aliprantis and K. C. Border (1999). *Infinite Dimensional Analysis. A Hitchhikers's Guide.* Second edition. Springer.

2. G. Debreu (1952). Definite and Semidefinite Quadratic Forms. *Econometrica*, **20**.

3. H. B. Enderton (1977). *Elements of Set Theory*. Academic Press.

4. M. Protter (2004). *Set Theory and Its Philosophy: A Critical Introduction*. Oxford University Press.

5. V. Rudinas (1978). *Matematinės analizės pagrindai*. Mokslas, Vilnius.

6. Ju. A. Šichanovič (1965). *Įvadas į šiuolaikinę matematiką. Pradinės sąvokos*. Nauka. (rusų kalba)

3 Skyrius

Individualus alternatyvų pasirinkimas

> Keliai, kuriuos šis skaičiavimas nueina, yra tikrumo vieškelis, kuriame negalima sutikti nieko abejotino nei klaidingo, kas galėtų protą nukreipti nuo tiesos kelio. Kita didelė gėrybė, skirta vien matematikai!
>
> Janas Sniadeckis, 1818.

Šiame skyriuje nagrinėjamas pasirinkimas tarp galimų alternatyvų. Alternatyvomis gali būti prekės, darbo jėga, paslaugos, akcijos ir kitos gėrybės. Skyriaus rezultatai toliau naudojami pasirinkimams prekių rinkoje analizuoti. Pasirinkimą tarp alternatyvų lemia jų naudingumas tam, kuris renkasi. Alternatyvų suteikiamas naudingumas gali būti skirtingas kiekvienam individui, todėl ir nagrinėjamas atskiro individo alternatyvų pasirinkimas.

Ekonomikoje naudingumo sąvoka išreiškia gėrybių žmonėms suteikiamo malonumo vertinimą. Naudingumas gali būti vertinamas arba absoliučiais dydžiais, arba santykiniu lyginimu. Pirmuoju atveju naudingumas vadinamas kiekiniu (angl. cardinal utility), o antruoju – santykiniu (angl. ordinal utility). 3.1 skyrelyje nagrinėjamas santykinis naudingumas išreiškiamas preferencijos sąvoka. 3.2 skyrelyje pereinama prie naudingumo funkcijos, kuri atitinka kiekinį naudingumą.

Prieš pradedant skaityti šį skyrių rekomenduojama susipažinti su aibių teorijos elementais, išdėstytais 2.1 skyrelyje.

3.1 Alternatyvų laukas

Racionalioji preferencija Tarkime, kad X yra aibė, kurios elementus vadinsime alternatyvomis. Ekonomikoje postuluojama, jog vartotojas gali pasirinkti tarp bet kurių aibės X alternatyvų, t. y. apie bet kurias dvi alternatyvas jis gali pasakyti, kad viena iš jų yra ne blogesnė už kitą, arba viena iš jų yra geresnė už kita, arba kad alternatyvos yra tiesiog lygiavertės. Toks pasirinkimas yra išreiškiamas aibės binariuoju sąryšiu. Priminsime, jog binariuoju sąryšiu vadinama bet kuri sutvarkytųjų porų (x, y), $x, y \in X$, aibė (2.1 skyrelis).

Alternatyvų aibėje X nagrinėsime keletą binariųjų sąryšių, iš kurių vienas bus laikomas pagrindiniu, o kiti išvedami naudojant pagrindinį. Pagrindinis binarusis sąryšis alternatyvų aibėje X toliau vadinamas *preferencijos sąryšiu*[1] (angl. preference relation) arba tiesiog *preferencija*, ir jį žymime simboliu $\succeq$. Tai reiškia, kad $\succeq$ yra sutvarkytųjų porų aibė, arba $\succeq \subset X \times X$. Paprastai vietoje $(x, y) \in \succeq$ yra rašoma $x \succeq y$ ir sakoma, kad „x yra ne blogesnis už y“ arba galioja preferencija $x \succeq y$. Siekdami išvengti galimos painiavos, mes nenaudosime simbolio $\preceq$. Pavyzdžiui, tarkime, kad aibė $X = \{1, 2, 3\}$, o preferenciją $x \succeq y$ apibrėžia savybė $x \leq y$, t. y. mažas skaičius x yra ne blogiau už didelį y. Tada

$$\succeq = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\} \subset X \times X.$$

Aibė X ir preferencija $\succeq$ joje sudaro struktūrą $(X, \succeq)$.

Kaip jau minėta, vartotojo pasirinkimų ekonominėje analizėje tariama, kad preferencijos sąryšiui galioja pilnumo ir tranzityvumo savybės (2.17 apibrėžimas). Šios pasirinkimo savybės priskiriamos „racionaliam“ žmogaus elgesiui.

3.1 apibrėžimas. Alternatyvų aibės X preferencijos sąryšis $\succeq$ vadinamas *racionaliuoju* (angl. rational preference relation), jei jis yra pilnas ir tranzityvus binarusis sąryšis aibėje X, t. y. galioja aksiomos $A.1$ ir $A.2$:

$(A.1)$ bet kuriems $x, y \in X$ arba $x \succeq y$, arba $y \succeq x$, arba abi kartu;

$(A.2)$ bet kuriems $x, y, z \in X$, jei $x \succeq y$ ir $y \succeq z$, tai $x \succeq z$.

Jei alternatyvų aibės X preferencijos sąryšis $\succeq$ yra racionalus, tai struktūra $(X, \succeq)$ vadinama *alternatyvų lauku*.

Nelygybė $\geq$ realiųjų skaičių aibėje yra racionalus preferencijos sąryšis, o tai reiškia, kad struktūra $(\mathbb{R}, \geq)$ yra alternatyvų laukas. Tuo tarpu griežta nelygybė $>$ ir lygybė $=$ realiųjų skaičių aibėje neapibrėžia racionaliosios preferencijos (kodėl?). Euklidinėje erdvėje $\mathbb{R}^\ell$, $\ell > 1$, pakoordinačiui apibrėžta nelygybė $\geq$ (žr. (2.29)) taip pat nėra racionalus preferencijos sąryšis. Tačiau šioje aibėje racionalus yra abėcėlinis preferencijos sąryšis (3.1.1 pratimas):

3.2 apibrėžimas. Tarkime, kad X yra euklidinės erdvės $\mathbb{R}^\ell$, $\ell \geq 1$, poaibis. Aibės X preferencijos sąryšis $\succeq_L$ vadinamas *abėcėliniu* (angl. lexicographical), jei bet kuriems

[1] Kitas binariajam sąryšiui nusakyti ekonomikoje naudojamas terminas yra *pirmenybė*.

$x = (x_1, \dots, x_\ell) \in X$ ir $y = (y_1, \dots, y_\ell) \in X$, $x \succeq_L y$ tada ir tik tada, kai galioja

$$\begin{array}{l} x_1 > y_1 \quad \text{arba} \\ x_1 = y_1 \text{ ir } x_2 > y_2 \quad \text{arba} \\ \dots \\ x_1 = y_1 \text{ ir } \cdots \text{ ir } x_{\ell-1} = y_{\ell-1} \text{ ir } x_\ell > y_\ell \quad \text{arba} \\ x = y. \end{array}$$

Abėcėlinė preferencija atitinka tvarką, naudojamą rikiuojant bibliografinį literatūros sąrašą abėcėlės tvarka. Tačiau ji gali turėti ir ekonominę prasmę, kaip rodo toks pavyzdys. Tarkime, kad alternatyvų aibė yra $X = \mathbb{R}^2_+$, o vektorius $x \in X$ nurodo prekių poros kiekį; tiksliau, jo pirmoji koordinatė nurodo degtinės kiekį, o antroji duonos kiekį. Tokiu atveju preferencija $x \succeq_L y$ tarp x ir y reiškia, kad prioritetas teikiamas degtinei, o jei degtinės yra tas pats kiekis tai tada renkamasi daugiau duonos.

Kitas pavyzdys rodo, jog bet kuri funkcija su realiosiomis reikšmėmis natūraliai nusako tvarką savo apibrėžimo srityje.

3.3 apibrėžimas. Tarkime, kad X yra alternatyvų aibė, o $u\colon X \to \mathbb{R}$ yra funkcija. Bet kuriems $x, y \in X$ sakysime, kad $x \succeq_u y$, jei $u(x) \geq u(y)$. Tokiu atveju funkciją u vadinsime *naudingumo funkcija*, savo apibrėžimo aibėje nusakančia preferenciją $\succeq_u$.

Remiantis tuo, kad $\geq$ nelygybė realiųjų skaičių aibėje $\mathbb{R}$ yra tiesinė pustvarkė, nesunku patikrinti (3.1.2 pratimas), jog naudingumo funkcijos nusakyta preferencija $\succeq_u$ yra racionali.

Alternatyvų aibėje X turint preferencijos sąryšį $\succeq$, matematikoje įprastu būdu apibrėžiami kiti du susiję binarieji sąryšiai.

3.4 apibrėžimas. Tegul X yra aibė, kurioje apibrėžta preferencija $\succeq$.

(i) *Griežtosios preferencijos* sąryšiu vadinamas toks binarusis sąryšis $\succ \subset X \times X$, kad visiems $x, y \in X$

$$x \succ y, \qquad \text{jei} \qquad x \succeq y \quad \text{ir} \quad \neg[y \succeq x]. \tag{3.1}$$

Griežtoji preferencija $x \succ y$ taip pat išreiškiama žodžiais „x yra geresnis už y“;

(ii) *Indiferentiškumo* sąryšiu vadinamas toks binarusis sąryšis $\sim \subset X \times X$, kad visiems $x, y \in X$

$$x \sim y, \qquad \text{jei} \qquad x \succeq y \quad \text{ir} \quad y \succeq x. \tag{3.2}$$

Indiferentiškumas $x \sim y$ taip pat išreiškiamas žodžiais „x ir y yra lygiaverčiai“ arba „x-as yra pakeičiamas y-u“.

Pastebėsime, kad $x \succ y$ ir $x \sim y$ kartu nėra galimi bet kuriems $x, y \in X$. Remiantis šio skyrelio 8 pratimu, racionaliajai preferencijai $\succeq$ sąryšis $x \succeq y$ galioja tada ir tik tada, kai arba $x \succ y$, arba $x \sim y$. Kitaip tariant, racionalioji preferencija reiškia arba griežtą preferenciją, arba indiferentiškumą.

Nesunku įsitikinti (3.1.3 pratimas), kad plokštumoje $\mathbb{R}^2$ abėcėlinė griežtoji preferencija $x \succ_L y$ galioja tada ir tik tada, kai teisinga viena iš dviejų sąlygų: (1) $x_1 > y_1$ arba (2) $x_1 = y_1$ ir $x_2 > y_2$; o abėcėlinis indiferentiškumas $x \sim_L y$ galioja tada ir tik tada, kai $x = y$.

Tarkime, kad $(X, \succeq)$ yra alternatyvų laukas, t. y. $\succeq$ yra alternatyvų aibės X racionalusis preferencijos sąryšis. Remiantis šio skyrelio 6 ir 4 pratimais, indiferentiškumo sąryšis $\sim$ yra refleksyvus, tranzityvus ir simetrinis. Toks binarusis sąryšis vadinamas *ekvivalentumo* sąryšiu (2.18 apibrėžimas). Kiekvienam $x \in X$ ekvivalentumo klasę $[x] := \{y \in X\colon\ y \sim x\}$ vadinsime *indiferentiškumo aibe*. Remiantis 2.19 teiginiu, bet kurios dvi indiferentiškumo aibės arba nesikerta, arba sutampa. Jei preferencijos sąryšis $\succeq$ yra antisimetriškas, tai $[x] = \{x\}$ kiekvienam $x \in X$. Išvengiant trivialaus atvejo, toliau tariama, kad egzistuoja tokie $x, y \in X$, kad $x \succ y$.

Kitas teiginys papildo racionaliojo preferencijos sąryšio tranzityvumo savybę.

3.5 teiginys. *Tarkime, kad $(X, \succeq)$ yra alternatyvų laukas, ir alternatyvoms x, y, z iš X galioja preferencijos $x \succeq y$ ir $y \succeq z$. Griežta preferencija $x \succ z$ galioja, jei galioja bent viena iš griežtųjų preferencijų $x \succ y$ arba $y \succ z$.*

Įrodymas. Tarkime priešingai: galioja bent viena iš griežtųjų preferencijų $x \succ y$ arba $y \succ z$, bet griežtoji preferencija $x \succ z$ negalioja. Tokiu atveju, remiantis 3.1.7 pratimu, galioja preferencija $z \succeq x$. Remiantis preferencijos sąryšio tranzityvumu ir lemos prielaidomis galime tvirtinti, kad yra galimos preferencijos $y \succeq x$ ir $z \succeq y$. Kartu su lemos prielaida tai reiškia, kad galioja $y \sim x$ ir $z \sim y$. Vadinasi, nėra galima nei $x \succ y$, nei $y \succ z$ (kodėl?). Ši prieštara įrodo, kad galioja griežta preferencija $x \succ z$; tai ir reikėjo įrodyti. □

Pasirinkimo aibė Sakykime, kad $\succeq$ yra alternatyvų aibės X preferencijos sąryšis ir $B \subset X$. Aibės B alternatyvą vadinsime *optimalia*, jei ji yra ne blogesnė už kiekvieną kitą šios aibės alternatyvą. Aibės B optimalios alternatyvos sudaro aibę

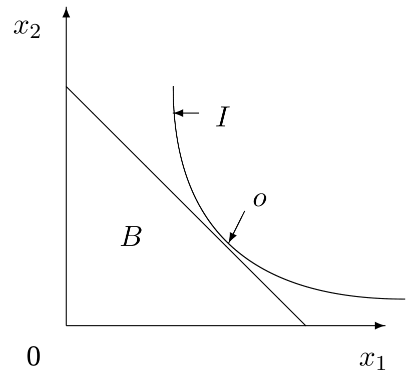
$$C(B) := C(B; \succeq) := \{x \in B\colon\ (\forall\, z \in B)[x \succeq z]\}. \tag{3.3}$$

Ši aibė gali būti ir tuščia. Toliau šiame skyrelyje nurodysime keletą pakankamų sąlygų, kada optimalių alternatyvų aibė yra netuščia. Jei $C(B) \neq \varnothing$, tai optimalių alternatyvų aibę $C(B)$ vadinsime *pasirinkimo aibe*.

Kitame skyriuje, spręsdami vartotojo optimalaus pasirinkimo problemą, naudosime pasirinkimo aibes iš biudžeto aibių (1.15), t. y. naudosime aibes

$$D(p, w) := C(\beta(p, w); \succeq) = \{x \in \beta(p, w)\colon\ (\forall\, z \in \beta(p, w))[x \succeq z]\}, \tag{3.4}$$

kai p yra prekių kainų sistema, o w yra vartotojo pradinio turto kaina. Pavyzdžiui, mus domins pasirinkimas iš biudžeto aibės $B = \beta(p, w) = \{x \in \mathbb{R}^2_+\colon\ p{\cdot}x \leq w\} \subset \mathbb{R}^2_+ =$



3.1 . Pasirinkimas iš biudžeto aibės

X, kurios piešinys pavaizduotas 3.1 paveiksle. Šiame piešinyje taip pat pavaizduota indiferentiškumo aibė I, liečianti biudžeto aibę B viename taške o, kuris ir yra vienintelis optimalus pasirinkimas: $C(B) = \{o\}$.

Netrukus parodysime, kad optimalios alternatyvos visada guli ant aibės krašto, jei kiekvienos alternatyvos bet kurioje aplinkoje galima rasti geresnę alternatyvą. Kitaip tariant, jei alternatyvų laukas turi tokią savybę:

3.6 apibrėžimas. Sakykime, kad X yra euklidinės erdvės aibė, o $|\cdot|$ yra euklidinės erdvės norma. Alternatyvų laukas $(X, \succeq)$ vadinamas *lokaliai nepasotinamu* (angl. local nonsatiation), jei duotiems $x \in X$ ir $\epsilon > 0$ egzistuoja toks alternatyvų vektorius $y \in X$, kad $|x - y| < \epsilon$ ir $y \succ x$. Alternatyvų laukas $(X, \succeq)$ vadinamas *nepasotinamu*, jei kiekvienam $x \in X$ egzistuoja toks alternatyvų vektorius $y \in X$, kad $y \succ x$.

Dabar galime įrodyti keletą svarbių pasirinkimo aibės elementų savybių.

3.7 teiginys. *Tarkime, kad $\succeq$ yra preferencija aibėje X, ir B yra netuščias X poaibis.*

(a) *Visi pasirinkimo aibės $C(B; \succeq)$ elementai priklauso tai pačiai indiferentiškumo aibei.*

(b) *Jei $(X, \succeq)$ yra alternatyvų laukas, tai aibėje B nėra alternatyvų, kurios būtų geresnės už pasirinkimo aibės $C(B; \succeq)$ alternatyvas.*

(c) *Jei X yra euklidinės erdvės aibė ir alternatyvų laukas $(X, \succeq)$ yra lokaliai nepasotinamas, tai B aibės vidiniai X atžvilgiu taškai nepriklauso pasirinkimo aibei $C(B; \succeq)$.*

Įrodymas. (a): Tegul $x, y \in C(B; \succeq)$. Tada $x \succeq y$ ir $y \succeq x$, t. y. $x \sim y$.

(b): Jei $z \in B$, $x \in C(B)$ ir $z \succ x$, tai $x \succeq z \succ x$. Remiantis 3.5 teiginiu, $x \succ x$, o to negali būti (3.1.5 pratimas).

(c): Tegul $x \in B$ yra vidinis X atžvilgiu taškas. Tada egzistuoja toks atviras X aibėje rutulys B_x su centru taške x, kuris yra B poaibis. Remiantis lokaliuoju nepasotinamumu, egzistuoja toks $y \in B_x$, kad $y \succ x$. Remiantis ką tik įrodytu teiginiu (b), $x \notin C(B; \succeq)$. $\square$

Preferencijos sąryšis įgalina rinktis optimalias alternatyvas iš bet kurio alternatyvų poaibio. Tačiau realiame gyvenime preferencijos sąryšis nėra žinomas. Todėl svarbu aprašyti procedūrą, įgalinančią nustatyti patį preferencijos sąryšį. Kitas teiginys rodo, kad preferencijos sąryšio žinojimas yra ekvivalentus visų pasirinkimo aibių iš dviejų elementų žinojimui.

3.8 teiginys. *Sakykime, kad $\succeq$ yra alternatyvų aibės X pilnasis preferencijos sąryšis ir $x, y \in X$. Tada yra teisinga*:

(a) *griežtoji preferencija $x \succ y$ galioja tada ir tik tada, kai pasirinkimo aibė $C(\{x, y\}) = \{x\}$;*

(b) *indiferentiškumas $x \sim y$ galioja tada ir tik tada, kai pasirinkimo aibė $C(\{x, y\}) = \{x, y\}$;*

(c) *pasirinkimo aibė $C(\{x, y\})$ yra netuščia.*

Įrodymas. Įrodysime tik (a) teiginį. Kitų dviejų teiginių įrodymas toks pat elementarus ir paliekamas skaitytojui. Taigi tarkime, kad galioja griežtoji preferencija $x \succ y$. Remiantis griežtosios preferencijos apibrėžimu ir preferencijos pilnumu, $x \succeq y$ ir $x \succeq x$, t. y. $x \in C(\{x, y\})$. Jei $y \in C(\{x, y\})$, tai $y \succeq x$, kas prieštarauja prielaidai $x \succ y$. Todėl $C(\{x, y\}) = \{x\}$.

Dabar tarkime atvirkščiai, kad $C(\{x, y\}) = \{x\}$. Pagal prielaidas $y \notin C(\{x, y\})$ ir $y \succeq y$. Todėl $\neg[y \succeq x]$. Kadangi, be to, $x \succeq y$, tai $x \succ y$. Teiginio įrodymas baigtas. $\square$

Kaip minėta, šis teiginys rodo, kad pasirinkimo aibių iš dviejų elementų žinojimas įgalina nustatyti preferencijos sąryšį. Savo ruožtu, preferencijos sąryšis įgalina anksčiau minėtu būdu nustatyti pasirinkimo aibes iš bet kurių alternatyvų poaibių. Tačiau iš esmės neatsakyta į klausimą: kada pasirinkimo aibėmis nustatomas preferencijos sąryšis yra racionalus? Šio klausimo nagrinėjamas atidedamas iki 3.4 skyrelio.

Tolydus alternatyvų laukas Viena iš savybių, naudojamų bendrosios pusiausvyros egzistavimui įrodyti, yra alternatyvų lauko tolydumas. Tolydumo apibrėžimui reikalinga aibės metrinė struktūra, kurią turi euklidinė erdvė. Todėl toliau nagrinėsime euklidinės erdvės alternatyvų aibes. Tokiu atveju atstumas tarp vektorių apibrėžiamas euklidinės normos pagalba. Tačiau tradiciškai vietoje metrikos naudojamos atvirųjų ir uždarųjų aibių šeimos. Šios tradicijos laikysimes ir mes, nes ji įgalina, reikalui esant, pereiti prie bendresnių alternatyvų aibių.

Bazinė atvira aibė euklidinėje erdvėje $\mathbb{R}^\ell$ yra atviras rutulys:

$$B(x,r) := \{y \in \mathbb{R}^\ell \colon\ |y-x| < r\} \quad \text{su centru } x \in \mathbb{R}^\ell \text{ ir spinduliu } r > 0.$$

Tegul alternatyvų aibė X yra euklidinės erdvės $\mathbb{R}^\ell$ poaibis ir tegul $x \in X$. Aibė

$$B_x := B(x,r) \cap X = \{y \in X \colon\ |x-y| < r\}$$

yra atviras rutulys aibėje X su centru x. Aibės X poaibis A vadinamas *atviru aibės X atžvilgiu*, arba *atviru aibėje X*, jei kiekvienam $x \in A$ galima rasti tokį atvirąjį rutulį B_x aibėje X su centru x, kuris yra A poaibis. Bet kuris atviras X atžvilgiu poaibis, kuriam priklauso $x \in X$, vadinamas *x aplinka aibės X atžvilgiu*. Aibės X poaibis B vadinamas *uždaru aibės X atžvilgiu*, arba *uždaru aibėje X*, jei jo papildinys aibėje X yra atviras X atžvilgiu. Priminsime, kad aibės X poaibis B yra uždaras tada ir tik tada, kai jam priklauso visi X aibės ribiniai taškai (2.55 teiginys), t. y. $z \in B$, jei $z = \lim_{k\to\infty} z_k$ $z \in X$ ir $z_k \in B$ visiems k.

Svarbu suvokti, jog apibrėžtos sąvokos priklauso nuo alternatyvų aibės X. Tai iliustruoja pavyzdys su intervalu $A = [0,1)$. Jei $X = \mathbb{R}_+ = [0,+\infty)$ yra neneigiamųjų realiųjų skaičių aibė, tai A yra atvira X aibės atžvilgiu. Jei $X = \mathbb{R}$ yra visa realiųjų skaičių aibė, tai X atžvilgiu A nėra nei atvira, nei uždara. Šiuos skirtumas galima ignoruoti tuo atveju, kai alternatyvų aibė yra visa euklidinė erdvė.

Dabar jau esame pasiruošę apibrėžti tolydųjį alternatyvų lauką.

3.9 apibrėžimas. Sakykime, kad alternatyvų aibė X yra euklidinės erdvės poaibis su preferencija $\succeq$. Šią preferenciją vadinsime *tolydžia*, jei kiekvienam $x \in X$, aibės

$$L(x) := \{y \in X \colon\ y \succeq x\} \quad \text{ir} \quad R(x) := \{y \in X \colon\ x \succeq y\} \tag{3.5}$$

yra uždaros aibėje X. Jei papildomai preferencija $\succeq$ yra racionali, tai struktūrą $(X, \succeq)$ vadinsime *tolydžiuoju alternatyvų lauku.*

Tegul alternatyvų aibės X preferencija $\succeq$ yra pilna. Naudojantis 3.1.7 pratimu galima įsitikinti, kad aibės $L(x) = \{y \in X \colon\ y \succeq x\}$ papildinys aibėje X yra aibė $\{y \in X \colon\ x \succ y\}$, o aibės $R(x) = \{y \in X \colon\ x \succeq y\}$ papildinys aibėje X yra aibė $\{y \in X \colon\ y \succ x\}$. Todėl pilnoji preferencija $\succeq$ yra tolydi tada ir tik tada, kai kiekvienam $x \in X$ aibės

$$\{y \in X \colon\ y \succ x\} \quad \text{ir} \quad \{y \in X \colon\ x \succ y\}$$

yra atviros aibėje X. Alternatyvų lauko $(X, \succeq)$ tolydumas yra preferencijos savybė, kuri reiškia tokį faktą: jei $x, y \in X$ yra ribos tokių X elementų sekų (x_k) ir (y_k), kad $x_k \succeq y_k$ kiekvienam k, tai $x \succeq y$. Tai išplaukia iš toliau įrodomos 3.10 teoremos (b) teiginio ir 2.55 teiginio apie uždarosios aibės ribinius taškus.

3.10 teorema. *Tarkime, kad X aibės preferencija $\succeq$ yra pilna. Teiginiai (a), (b) ir (c) yra ekvivalentūs.*

(a) *preferencija* $\succeq$ *yra tolydi;*

(b) *aibė* $F := \{(x, y) \in X \times X\colon\ x \succeq y\}$ *yra uždara Dekarto sandaugoje* $X \times X$*;*

(c) *jei* $x, y \in X$ *ir* $x \succ y$*, tai egzistuoja tokia* x *aplinka* U_x *atžvilgiu* X *ir* y *aplinka* U_y *atžvilgiu* X*, kad* $U_x \cap U_y = \varnothing$ *ir* $u \succ v$ *visiems* $u \in U_x$ *ir* $v \in U_y$*.*

Įrodymas. Implikacijai $(c) \Rightarrow (b)$ įrodyti tarkime, kad teisingas (c) teiginys, o G yra aibė tokių porų $(x, y) \in X \times X$, kurioms galioja griežtoji preferencija $x \succ y$. Jei $(x, y) \in G$, tai remiantis (c) teiginiu egzistuoja tokia (x, y) aplinka V atžvilgiu $X \times X$, kad $u \succ v$ visiems $(u, v) \in V$, t. y. $V \subset G$. Tai reiškia, kad G yra atvira aibėje $X \times X$. Remiantis šio skyrelio 7 pratimu, F yra G papildinys aibėje $X \times X$, ir todėl galioja (b).

Įrodysime, kad $(b) \Rightarrow (a)$. Tarkime, kad galioja (b) teiginys ir $x \in X$. Nesunku pastebėti, kad $L(x) = \{y \in X\colon\ (y, x) \in F\}$ ir $R(x) = \{y \in X\colon\ (x, y) \in F\}$. Jei $y_n \in L(x)$, $y \in X$ ir $y_n \to y$, tai $(y_n, x) \in F$ ir $(y_n, x) \to (y, x)$. Kadangi F yra uždara, tai remiantis 2.55 teiginiu $(y, x) \in F$, ir todėl $y \in L(x)$, t. y. $L(x)$ yra uždara aibėje X. Simetriškai įrodoma, kad $R(x)$ yra uždara aibėje X. Kadangi $x \in X$ yra laisvai pasirinktas elementas, tai (a) teiginys yra teisingas.

Liko įrodyti, kad $(a) \Rightarrow (c)$. Tarkime, kad $x, y \in X$ ir $x \succ y$. Jei egzistuoja toks $z \in X$, kad $x \succ z \succ y$, tai tegul $U_x := \{u \in X\colon\ u \succ z\}$ ir $U_y := \{v \in X\colon\ z \succ v\}$. Tada $x \in U_x$ ir U_x yra atvira aibėje X, nes ji yra uždaros aibės $\{u \in X\colon\ z \succeq u\}$ papildinys aibėje X (3.1.7 pratimas). Tas pats argumentas galioja ir aibei U_y. Jei aibės U_x ir U_y turėtų bendrą elementą w, tai jam galiotų sąryšis $w \succ w$ (3.1.6 pratimas), kuris yra neįmanomas (3.1.5 pratimas). Dabar tarkime, kad aibė $A := \{z \in X\colon\ x \succ z \succ y\}$ yra tuščia. Tuo atveju tegul $U_x := \{u \in X\colon\ u \succ y\}$ ir $U_y := \{v \in X\colon\ x \succ v\}$. Aišku, kad $x \in U_x$ ir $y \in U_y$. Kadangi preferencija $\succeq$ tolydi pagal prielaidą, abi aibės U_x ir U_y yra atviros aibėje X. Tegul $u \in U_x$ ir $v \in U_y$. Tarkime, kad $\neg[u \succ v]$. Tada, remiantis 3.1.7 pratimu, $x \succ v \succeq u \succ y$, kas prieštarauja tam, kad $A = \varnothing$. Taigi galioja $u \succ v$. Tas pats argumentas įrodo, kad $U_x \cap U_y = \varnothing$, ir baigia (c) teiginio įrodymą. $\square$

Remiantis šios teoremos (c) teiginiu lengva pastebėti, kad abėcėlinis preferencijos sąryšis (3.2 pavyzdys) nėra tolydus. Iš tikro, atveju $\ell = 2$, $(1, 1) \succ_L (1, 0)$, bet kiekvienas rutulys su centru $(1, 1)$ turi vektorių $u \in \mathbb{R}^2$, kuriam $(1, 0) \succ_L u$.

Toliau parodoma, kad kompaktiškoje alternatyvų aibėje egzistuoja optimali alternatyva jei preferencija yra racionali ir tolydi.

3.11 teorema. *Sakykime, kad* $(X, \succeq)$ *yra tolydus alternatyvų laukas ir* B *yra netuščias kompaktinis* X *poaibis. Tada pasirinkimo aibė* $C(B)$ *yra netuščia ir kompaktiška.*

Įrodymas. Naudojantis (3.5) žymėjimu, pasirinkimo aibė

$$C(B) = \bigcap_{x \in B} \{y \in B\colon\ y \succeq x\} = \bigcap_{x \in B} [L(x) \cap B]. \tag{3.6}$$

Kadangi bet kurios uždarųjų aibių šeimos sankirta yra uždara (2.54 teiginys), o $L(x) \cap B$ yra uždara kiekvienam x, tai $C(B)$ yra uždara aibėje X. Be to, $C(B)$ yra kompaktiška, nes ji yra kompaktiškos aibės B uždaras poaibis. Įrodysime, kad $C(B)$ yra netuščia.

Tarkime, kad $x_1, \ldots, x_p \in B$. Remiantis preferencijos sąryšio racionalumu ir baigtine matematine indukcija pasirinkimo aibė $C(\{x_1, \ldots, x_p\})$ yra netuščia, t. y. tarp alternatyvų $x_1, \ldots, x_p$ egzistuoja bent viena neblogesnė už visas kitas alternatyvas (3.1.11 pratimas). Tarkime, kad optimali yra alternatyva x_p, t. y. $x_p \succeq x_i$ visiems $i = 1, \ldots, p$. Remiantis preferencijos tranzityvumu $L(x_p) \subset L(x_i)$ visiems $i = 1, \ldots, p$. Tada aibių sankirta $\cap_{i=1}^{p}[L(x_i) \cap B] = L(x_p) \cap B$ yra netuščia. Kadangi alternatyvos $x_1, \ldots, x_p \in B$ yra laisvai pasirinktos, tai uždarųjų aibių šeimos $\{L(x) \cap B\colon\ x \in B\}$ bet kuri baigtinė sankirta yra netuščia, t. y. šeima $\{L(x) \cap B\colon\ x \in B\}$ turi baigtinės sankirtos savybę. Remiantis 2.59 teorema ir aibės B kompaktiškumu, iš to išplaukia, kad (3.6) lygybės dešinė pusė yra netuščia, kas ir įrodo, kad $C(B)$ yra netuščia. □

Pratimai

1. Įrodyti, kad abėcėlinė preferencija $\succeq_L$ yra racionali (3.2 apibrėžimas).

2. Įrodyti, kad naudingumo funkcija u nusakoma preferencija $\succeq_u$ yra racionali (3.3 apibrėžimas).

3. Charakterizuoti abėcėlinę griežtą preferenciją $\succ_L$ ir abėcėlinį indiferentiškumą $\sim_L$ alternatyvų aibėje $\mathbb{R}^2$, kaip tai yra teigiama po 3.4 apibrėžimo.

4. Tarkime, kad aibės X preferencijos santykis $\succeq$ yra pilnas. Įrodyti, kad indiferentiškumo santykis $\sim$ yra refleksyvus ir simetrinis.

5. Įrodyti, kad bet kuriam $x \in X$ nėra galima griežta preferencija $x \succ x$.

6. Jei aibės X preferencijos santykis $\succeq$ yra tranzityvus, tai tranzityv$\overline{\text{u}}$s yra griežtos preferencijos santykis $\succ$ ir indiferentiškumo santykis $\sim$.

7. Tarkime, kad aibės X preferencijos santykis $\succeq$ yra pilnas. Įrodyti, kad bet kuriems $x, y \in X$, griežta preferencija $x \succ y$ teisinga tada ir tik tada, kai $\neg[y \succeq x]$.

8. Tarkime, kad aibės X preferencijos santykis $\succeq$ yra pilnas. Įrodyti, kad bet kuriems $x, y \in X$ preferencija $x \succeq y$ teisinga tada ir tik tada, kai arba $x \succ y$, arba $x \sim y$.

9. Tarkime, kad aibės X preferencijos santykis $\succeq$ yra pilnas. Įrodyti, kad bet kuriems $x, y \in X$ indiferentiškumas $x \sim y$ teisingas tada ir tik tada, kai $\neg[x \succ y]$ ir $\neg[y \succ x]$.

10. Tarkime, kad aibės X preferencijos santykis $\succeq$ yra pilnas. Įrodyti, kad bet kuriems $x, y \in X$ arba $x \succeq y$, arba $y \succ x$.

11. Alternatyvų lauko $(X, \succeq)$ bet kurioje baigtinėje alternatyvų aibėje $\{x_1, \ldots, x_p\}$ egzistuoja optimali alternatyva, t. y. pasirinkimo aibė $C(\{x_1, \ldots, x_p\})$ yra netuščia.

3.2 Naudingumo funkcija

Šiame skyrelyje nagrinėjamas kiekinis naudingumas, t. y. nagrinėjamas preferencijos sąryšis $\succeq_u$, nusakomas naudingumo funkcija u (3.3 apibrėžimas). Kai kuriais atvejais patogiau tirti skaitines reikšmes įgyjančią funkciją u, negu tiesiogiai tirti šia funkcija nusakomą preferenciją $\succeq_u$. Todėl svarbu nustatyti, kada preferencijos sąryšis yra išreiškiamas naudingumo funkcija, ir jei taip yra, nustatyti atitikimą tarp naudingumo funkcijos u ir ja nusakomo preferencijos sąryšio $\succeq_u$ savybių.

Kadangi naudingumo funkcijos $u\colon X \to \mathbb{R}$ nusakoma preferencija $\succeq_u$ yra visada racionali (3.1.2 pratimas), toliau bus kalbama tik apie alternatyvų laukus.

3.12 apibrėžimas. Tegul $(X, \succeq)$ yra alternatyvų laukas ir $u\colon X \to \mathbb{R}$ yra naudingumo funkcija. Jei $\succeq = \succeq_u$, tai sakysime, kad $(X, \succeq)$ yra *išreiškiamas naudingumo funkcija* u, arba kad u yra alternatyvų lauko $(X, \succeq)$ naudingumo funkcija.

Tarkime, kad alternatyvų aibėje turime racionalųjį preferencijos sąryšį. Klausimas: ar toks sąryšis visada išreiškiamas naudingumo funkcija? Bendru atveju atsakymas į šį klausimą yra neigiamas. Tai išplaukia iš kito teiginio, prisimenant, kad abėcėlinis preferencijos sąryšis yra racionalus (3.1.1 pratimas).

3.13 teiginys. *Tarkime, kad $\succeq_L$ yra alternatyvų aibės $\mathbb{R}^2$ abėcėlinis preferencijos sąryšis. Neegzistuoja tokia funkcija $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, kad $\succeq_u = \succeq_L$.*

Įrodymas. Tarkime priešingai: $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ yra tokia funkcija, kad $\succeq_u = \succeq_L$. Tada bet kuriems $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$

$$u(x) > u(y) \quad \Leftrightarrow \quad x \succ_L y \quad \Leftrightarrow \quad x_1 > y_1 \ \text{ arba } \ \big[\, x_1 = y_1 \ \text{ ir } \ x_2 > y_2 \,\big].$$

Tada kiekvienam $t \in \mathbb{R}$, $u(t, 1) > u(t, 0)$. Atsižvelgiant į racionaliųjų skaičių aibės tirštumą realiųjų skaičių aibėje (2.26 lema), aibė $J_t := (u(t, 0), u(t, 1)) \cap \mathbb{Q}$ yra netuščia kiekvienam $t \in \mathbb{R}$. Remiantis rinkimo aksioma (2.8 aksioma), egzistuoja tokia funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$, kad $f(t) \in J_t$ kiekvienam $t \in \mathbb{R}$. Funkcija f yra injekcija. Iš tikro, bet kuriems $s, t \in \mathbb{R}$, jei $s > t$, tai $(s, 0) \succ_L (t, 1)$ ir $u(s, 0) > u(t, 1)$. Kadangi aibės J_s ir J_t nesikerta, tai $f(s) \neq f(t)$. Tokiu būdu nustatėme bijekciją tarp realiųjų skaičių aibės $\mathbb{R}$ ir racionaliųjų skaičių poaibio $f[\mathbb{R}] \subset \mathbb{Q}$, o tai prieštarauja tam, kad realiųjų skaičių aibės galia yra didesnė už racionaliųjų skaičių aibės galią. Ši prieštara įrodo teiginį. $\square$

Jei alternatyvų laukas išreiškiamas tolydžiąja naudingumo funkcija, tai jis yra tolydus. Iš tikro, sakykime, kad u yra alternatyvų lauko $(X, \succeq)$ naudingumo funkcija.

Kiekvienam $x \in X$ ir $r := u(x) \in \mathbb{R}$, turime lygybes

$$\begin{cases} u^{-1}\big[[r,+\infty)\big] = \{z \in X\colon\ u(z) \geq r\} = \{z \in X\colon\ z \succeq x\} = L(x) \\ u^{-1}\big[(-\infty,r]\big] = \{z \in X\colon\ u(z) \leq r\} = \{z \in X\colon\ x \succeq z\} = R(x). \end{cases} \tag{3.7}$$

Kadangi intervalai $[r,+\infty)$ ir $(-\infty,r]$ yra uždari realiųjų skaičių aibėje, tai remiantis 2.63(c) teiginiu, jei funkcija u yra tolydi, tai visos šios aibės yra uždaros kiekvienam $x \in X$, ir todėl alternatyvų laukas $(X,\succeq)$ yra tolydus.

Alternatyvų aibei X esant euklidinės erdvės aibe teisingas atvirkščias teiginys, vadinamas *Debreu teorema*:

3.14 teorema. *Sakykime, kad X yra euklidinės erdvės poaibis, o alternatyvų laukas $(X,\succeq)$ yra tolydus. Tada jis yra išreiškiamas tolydžiąja naudingumo funkcija.*

Šios Debreu teoremos įrodymas nėra lengvas, jis pateikiamas 3.5 skyrelyje. Todėl verta pradėti nuo paprastesnio teiginio įrodymo. Būtent įrodysime, kad *baigtinės* alternatyvų aibės racionalusis preferencijos sąryšis visada išreiškiamas naudingumo funkcija.

3.15 teiginys. *Sakykime, kad X yra baigtinė alternatyvų aibė. Tada kiekvienas alternatyvų laukas $(X,\succeq)$ yra išreiškiamas naudingumo funkcija.*

Įrodymas. Sakykime, kad $\succeq$ yra alternatyvų aibės X racionalusis preferencijos sąryšis. Kiekvienam $x \in X$ aibė $R(x) = \{z \in X\colon\ x \succeq z\}$ yra baigtinė; jos elementų skaičių pažymėkime $u(x) := \#R(x)$. Tai, kad šiomis reikšmėmis apibrėžta funkcija $u\colon\ X \to \mathbb{R}$ yra alternatyvų lauko $(X,\succeq)$ naudingumo funkcija įrodysime naudodamiesi 3.2.3 pratimu. Tegul $x, y \in X$.

Iš pradžių tarkime, kad $x \succeq y$. Parodysime, kad $u(x) \geq u(y)$. Jei $z \in R(y)$ yra bet kuris elementas, tai remiantis preferencijos tranzityvumu $x \succeq z$, t. y. $z \in R(x)$. Tokiu būdu $R(x) \supset R(y)$, ir todėl $u(x) \geq u(y)$.

Dabar tarkime, kad $x \succ y$. Parodysime, kad $u(x) > u(y)$. Kaip ir ankstesniame žingsnyje gauname, kad $R(x) \supset R(y)$. Remiantis 3.1.7 pratimu, galioja $\neg[y \succeq x]$. Todėl $x \in R(x)$ bet $x \notin R(y)$. Kitaip tariant $u(x) = \#R(x) > \#R(y) = u(y)$. Tokiu būdu lygybė $\succeq = \succeq_u$ teisinga remiantis 3.2.3 pratimu; tai ir reikėjo įrodyti. □

Bet kurią preferenciją išreiškianti naudingumo funkcija nėra vienintelė. Pavyzdžiui, jei u yra alternatyvų lauko naudingumo funkcija, tai tą pačią preferenciją išreiškia ir funkcijos $u+1$, u^3, e^u ir t. t. Toliau apibūdinsime visas tas funkcijas, kurios nusako tą patį preferencijos sąryšį.

Tegul u yra alternatyvų lauko $(X,\succeq)$ naudingumo funkcija, o reikšmių aibėje $u[X] \subset \mathbb{R}$ apibrėžta funkcija $\varphi\colon\ u[X] \to \mathbb{R}$ yra didėjanti, t. y. griežtai monotoninė funkcija. Tada kompozicija $\varphi \circ u$ yra to paties alternatyvų lauko $(X,\succeq)$ naudingumo funkcija (3.2.4 pratimas). Teisingas ir atvirkščias teiginys, jog bet kurios dvi tą patį alternatyvų lauką išreiškiančios naudingumo funkcijos yra susijusios funkcijų kompozicija. Tiksliau, galioja teiginys:

3.16 teiginys. *Sakykime, kad* $u, v\colon X \mapsto \mathbb{R}$ *yra funkcijos, ir* u *yra alternatyvų lauko* $(X, \succeq)$ *naudingumo funkcija. Tada* v *taip pat yra* $(X, \succeq)$ *naudingumo funkcija tada ir tik tada, kai egzistuoja tokia didėjanti funkcija* $\varphi\colon u[X] \mapsto \mathbb{R}$*, kad* $v = \varphi \circ u$*.*

Įrodymas. Tarkime, kad u ir v yra dvi to paties alternatyvų lauko $(X, \succeq)$ naudingumo funkcijos. Tada egzistuoja tokia didėjanti funkcija $\varphi\colon u[X] \mapsto \mathbb{R}$, kad $v = \varphi \circ u$. Iš tikrųjų, kiekvienam $r \in u[X] \subset \mathbb{R}$, tegul $\varphi(r) := v(x)$; čia x yra bet kuris aibės $u^{-1}[r] := \{x \in X\colon u(x) = r\}$ elementas. Toks apibrėžimas yra korektiškas, kadangi $u^{-1}[r]$ yra alternatyvų lauko $(X, \succeq)$ indiferentiškumo aibė (patikrinti). Be to, funkcija φ yra didėjanti: jei $s, t \in u[X]$ ir $s > t$, tai $x \succ y$ bet kuriems $x \in u^{-1}[s]$, $y \in u^{-1}[t]$, ir todėl $\varphi(s) = v(x) > v(y) = \varphi(t)$. Pagaliau, lygybė $v(x) = \varphi(u(x))$ teisinga visiems $x \in X$ pagal φ apibrėžimą, kas įrodo teiginį. $\square$

3.14 teorema sako, jog tolydus euklidinės erdvės alternatyvų laukas išreiškiamas tolydžia naudingumo funkcija. Bet ne visos naudingumo funkcijos, išreiškiančios tolydų alternatyvų lauką, yra tolydžios. Tolydžiosios funkcijos kompozicija su didėjančia, bet trūkia funkcija išreiškia tą patį alternatyvų lauką, bet neprivalo būti tolydi.

Dažniausiai ekonominėje analizėje naudojama Kobo–Duglaso[2] naudingumo funkcija: tegul α_i, $i = 1, \ldots, \ell$, yra teigiamieji skaičiai ir kiekvienam $x = (x_1, \ldots, x_\ell) \in \mathbb{R}^\ell_+$

$$u(x) := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_\ell^{\alpha_\ell}. \tag{3.8}$$

Pasinaudoję 3.16 teiginiu didėjančiai funkcijai $\varphi(u) = u^{1/\alpha}$, $\alpha := \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i$, galime tarti, kad (3.8) išraiškoje $\sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i = 1$. Aibėje vektorių $x \in \mathbb{R}^\ell_{++}$, kurių visos koordinatės teigiamos, galima logaritmuoti (3.8) dešinę pusę. Gauta funkcija

$$v(x) := \alpha_1 \ln x_1 + \cdots + \alpha_\ell \ln x_\ell, \qquad x = (x_1, \ldots, x_\ell) \in \mathbb{R}^\ell_{++},$$

išreiškia tą patį alternatyvų lauką, kaip ir Kobo–Duglaso naudingumo funkcija remiantis ką tik įrodytu 3.16 teiginiu, nes logaritmas yra griežtai monotoniška funkcija.

Pratimai

1. Tegul $u\colon X \to \mathbb{R}$ yra X aibės naudingumo funkcija. Įrodyti, kad bet kuriems $x, y \in X$, $x \succ_u y$ tada ir tik tada, kai $u(x) > u(y)$, o $x \sim_u y$ tada ir tik tada, kai $u(x) = u(y)$.

2. Funkcija $u\colon X \mapsto \mathbb{R}$ yra alternatyvų lauko $(X, \succeq)$ naudingumo funkcija tada ir tik tada, kai galioja teiginys: visiems $x, y \in X$, $y \succ x$ tada ir tik tada, kai $u(y) > u(x)$.

3. Funkcija $u\colon X \mapsto \mathbb{R}$ yra alternatyvų lauko $(X, \succeq)$ naudingumo funkcija tada ir tik tada, kai išpildyta (a) ir (b):

[2] Paul Howard Douglas buvo XX amžiaus Čikagos universiteto ekonomistas, o Charles W. Cobb buvo vieno Amerikos koledžo matematikas.

(a) visiems $x, y \in X$, jei $y \succeq x$ tai $u(y) \geq u(x)$;

(b) visiems $x, y \in X$, jei $y \succ x$ tai $u(y) > u(x)$.

4. Tegul u yra alternatyvų lauko $(X, \succeq)$ naudingumo funkcija, o $\varphi\colon u[X] \mapsto \mathbb{R}$ yra didėjanti funkcija. Įrodyti, kad kompozicija $\varphi \circ u$ yra to paties alternatyvų lauko $(X, \succeq)$ naudingumo funkcija.

3.3 Iškilumas ir monotoniškumas

Kaip ir anksčiau, šiame skyrelyje tariama, kad alternatyvų aibė X yra euklidinės erdvės $\mathbb{R}^\ell$ poaibis.

Iškilumas. Šiame vadovėlyje aptariamas ekonomikos pusiausvyros egzistavimo įrodymas remiasi toliau apibrėžiama preferencijos iškilumo savybe. Priminsime, kad aibė X vadinama *iškila* jei kartu su bet kuriais šios aibės elementais x ir y, aibei X taip pat priklauso jų iškilieji dariniai $\lambda x + (1 - \lambda)y$ kiekvienam $\lambda \in (0, 1)$. Greta alternatyvų aibės iškilumo kartais bus naudojamos ir kitos, toliau apibrėžiamos, alternatyvų lauko savybės.

3.17 apibrėžimas. Tarkime, kad aibė $X \subset \mathbb{R}^\ell$ yra iškila. Alternatyvų laukas $(X, \succeq)$ vadinamas

(a) *iškilu*, jei bet kuriems $x, y, z \in X$ iš to, kad $y \succeq x$ ir $z \succeq x$, gauname $\lambda y + (1 - \lambda)z \succeq x$ visiems $\lambda \in (0, 1)$;

(b) *griežtai iškilu*, jei bet kuriems $x, y, z \in X$ iš to, kad $y \succeq x$, $z \succeq x$ ir $y \neq z$, gauname $\lambda y + (1 - \lambda)z \succ x$ visiems $\lambda \in (0, 1)$.

Nesunku matyti, kad alternatyvų laukas $(X, \succeq)$ yra iškilas tada ir tik tada, kai aibė $L(x) = \{z \in X\colon\ z \succeq x\}$ yra iškila visiems $x \in X$. Be kita ko, alternatyvų lauko iškilumas reiškia, kad dviejų indiferentiškų alternatyvų iškilasis darinys yra ne blogesnis už kiekvieną jų atskirai. Tai išplaukia iš kitos lemos (b) savybės.

3.18 lema. *Tarkime, kad aibė $X \subset \mathbb{R}^\ell$ yra iškila. Alternatyvų lauko $(X, \succeq)$ savybės (a), (b) ir (c) yra ekvivalenčios*:

(a) $(X, \succeq)$ *yra iškilas*;

(b) *bet kuriems $x, y \in X$, jei $y \succeq x$, tai $\lambda y + (1 - \lambda)x \succeq x$ kiekvienam $\lambda \in [0, 1]$*;

(c) *aibė $\{z \in X\colon\ z \succ x\}$ yra iškila visiems $x \in X$.*

Įrodymas. $(a) \Rightarrow (b)$: Jei $x, y \in X$ ir $y \succeq x$, tai $x, y \in \{z \in X\colon\ z \succeq x\} = L(x)$. Kadangi $L(x)$ aibė yra iškila, tai $\lambda y + (1-\lambda)x \in L(x)$ kiekvienam $\lambda \in [0,1]$. Iš čia ir išplaukia (b) savybė.

$(b) \Rightarrow (c)$: Tegul $\lambda \in [0,1]$. Įrodysime, kad iš $y \succ x$ ir $z \succ x$ išplaukia $\lambda y + (1-\lambda)z \succ x$. Remiantis pilnumo aksioma $A.1$, galioja arba $z \succeq y$, arba $y \succeq z$. Pirmu atveju (b) sąlygos dėka $\lambda z + (1-\lambda)y \succeq y$. Remiantis 3.5 teiginiu, iš pastarojo sąryšio ir $y \succ x$ gauname, kad $\lambda z + (1-\lambda)y \succ x$. Antru atveju ta pati išvada išplaukia analogiškai pasinaudojus tuo, kad $z \succ x$. Taigi įrodėme savybę (c).

$(c) \Rightarrow (a)$: Tarkime, kad savybė (a) neteisinga. Tada egzistuoja tokios alternatyvos $x, y, z \in X$ ir $\lambda \in (0,1)$, kad $z \succeq x$, $y \succeq x$, bet $\lambda z + (1-\lambda)y \succeq x$ neteisinga. Tada naudojantis 3.1.7 pratimo teiginiu, teisingas $x \succ \lambda z + (1-\lambda)y$ sąryšis. Remiantis 3.5 teiginiu, iš šio sąryšio kartu su $z \succeq x$ išplaukia sąryšis $z \succ \lambda z + (1-\lambda)y$. Tas pats argumentas su y vietoje z leidžia tvirtinti, kad $y \succ \lambda z + (1-\lambda)y$. Remiantis savybe (c), tada yra teisingas sąryšis $\lambda z + (1-\lambda)y \succ \lambda z + (1-\lambda)y$, kuris prieštarauja 3.1.5 pratimo teiginiui. Vadinasi savybė (a) teisinga. 3.18 lemos įrodymas baigtas. □

Neretai alternatyvų lauko savybes galima apib$\overline{\text{u}}$dinti jį išreiškiančios naudingumo funkcijos savybėmis. Taip yra ir su alternatyvų lauko iškilumu; tokia jį išreiškiančios naudingumo funkcijos savybė yra kvazi–įgaubtumas (žr. 2.104(c) apibrėžimą).

3.19 teiginys. *Sakykime, kad aibė $X \subset \mathbb{R}^\ell$ yra iškila ir alternatyvų laukas $(X, \succeq)$ yra išreiškiamas naudingumo funkcija $u\colon\ X \to \mathbb{R}$. Tada galioja (a) ir (b):*

(a) $(X, \succeq)$ *yra iškilas tada ir tik tada, kai u yra kvazi–įgaubta*;

(b) $(X, \succeq)$ *yra griežtai iškilas tada ir tik tada, kai u yra griežtai kvazi–įgaubta.*

Įrodymas. Įrodysime tik pirmąjį teiginį, o antrojo teiginio įrodymas paliekamas skaitytojui. Tegul alternatyvų laukas $(X, \succeq)$ yra iškilas, tegul $x, y \in X$ ir $\lambda \in (0,1)$. Remiantis preferencijos pilnumu galioja arba $x \succeq y$, arba $y \succeq x$. Pirmu atveju, kadangi $y \succeq y$ (kodėl?), gauname $\lambda x + (1-\lambda)y \succeq y$. Kadangi laukas išreiškiamas naudingumo funkcija, iš čia išplaukia nelygybės

$$u(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq u(y) \geq \min\{u(x), u(y)\}.$$

Antru atveju panašiai gauname tą pačią nelygybę tarp pastarosios išnašos kairiosios ir dešiniosios pusių. Taigi naudingumo funkcija yra kvazi–įgaubta.

Atvirkščiai, tegul u yra kvazi–įgaubta, $x, y, z \in X$, $y \succeq x$, $z \succeq x$ ir $\lambda \in (0,1)$. Kadangi laukas išreiškiamas naudingumo funkcija u, gauname

$$u(\lambda y + (1-\lambda)z) \geq \min\{u(y), u(z)\} \geq u(x)$$

ir $\lambda y + (1-\lambda)z \succeq x$, t. y. preferencija yra iškila. □

Pirmajame skyrelyje parodėme, kad pasirinkimo aibė (3.3) tam tikrais atvejais yra netuščia ir kompaktiška (3.11 teorema). Dabar parodysime, kad ją sudaro vienintelis elementas, jei alternatyvų laukas yra griežtai iškilas.

3.20 teiginys. *Tarkime, kad alternatyvų laukas* $(X, \succeq)$ *yra tolydus ir iškilas. Taip pat tarkime, kad* B *yra netuščias, kompaktiškas ir iškilas aibės* X *poaibis. Tada galioja* (a) *ir* (b):

- (a) *Pasirinkimo aibė* $C(B)$ *yra netuščia, kompaktiška ir iškila.*
- (b) *Jei, be to,* $(X, \succeq)$ *yra griežtai iškilas, tai pasirinkimo aibę sudaro vienintelis elementas.*

Įrodymas. 3.11 teoremos dėka jau žinome, kad pasirinkimo aibė $C(B)$ yra netuščia ir kompaktiška. Parodysime, kad ji yra iškila. Tegul $x, y \in C(B)$ ir $\lambda \in (0, 1)$. Kadangi B yra iškila, tai iškilas darinys $x_\lambda := \lambda x + (1 - \lambda)y \in B$. Kadangi y optimalus, tai remiantis 3.18(b) lema $x_\lambda \succeq x$. Remiantis x optimalumu $x \succeq z$ kiekvienam $z \in B$. Preferencijos tranzityvumas leidžia teigti, kad $x_\lambda \succeq z$ kiekvienam $z \in B$, t. y. $x_\lambda \in C(B)$, kas įrodo teiginį (a).

(b) teiginio įrodymui tegul $(X, \succeq)$ yra griežtai iškilas. Tarkime, kad egzistuoja dvi skirtingos alternatyvos $x, y \in C(B)$. Tada iškilasis darinys $x_{1/2} = (1/2)x + (1/2)y \in B$ ir $x_{1/2} \succ x$ remiantis preferencijos griežtojo iškilumu, o tai prieštarauja 3.7(b) teiginiui. Taigi teiginys (b) taip pat įrodytas. □

Monotoniškumas Toliau aptariama preferencijos sąryšio savybė turi akivaizdžią ekonominę interpretaciją. Ypač, kai alternatyvomis yra gėrybės – kuo jų daugiau, tuo geriau.

Alternatyvų *kiekio* (o ne suteikiamo naudingumo) lyginimas euklidinėje erdvėje gali būti išreikštas įprasta nelygybe tarp vektorių. Būtent, tarp euklidinės erdvės $\mathbb{R}^\ell$ vektorių $x = (x_1, \ldots, x_\ell)$ ir $y = (y_1, \ldots, y_\ell)$ yra apibrėžtas binarusis sąryšis $x \geq y$, jei $x_i \geq y_i$ visiems $i = 1, \ldots, \ell$ (šis sąryšis nėra pilnas, jei $\ell > 1$).

3.21 apibrėžimas. Aibės $X \subset \mathbb{R}^\ell$ alternatyvų laukas $(X, \succeq)$ vadinamas *silpnai monotonišku*, jei bet kuriems $x, y \in X$ iš nelygybės $x \geq y$ išplaukia preferencija $x \succeq y$. Jei iš nelygybių $x \geq y$ ir $x \neq y$ išplaukia griežta preferencija $x \succ y$, tai alternatyvų laukas $(X, \succeq)$ vadinamas *stipriai monotonišku*.

Nesunku pastebėti, kad stipriai monotoniškas alternatyvų laukas taip pat yra silpnai monotoniškas. Tačiau atvirkščiai nebūtinai yra teisinga. Pavyzdžiui, tegul $u(x) = x_1 x_2$, kai $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+$. Jei $x = (x_1, x_2) \geq y = (y_1, y_2)$, tai

$$u(x) = x_1 x_2 \geq y_1 y_2 = u(y).$$

Tai rodo, kad alternatyvų laukas išreiškiamas naudingumo funkcija u yra silpnai monotoniškas. Kita vertus, $(2, 0) \geq (1, 0)$ ir $(2, 0) \neq (1, 0)$, bet $u(2, 0) = 0 = u(1, 0)$. Taigi šis laukas nėra stipriai monotoniškas.

Kaip jau buvo minėta, preferencijos sąryšio stipriojo monotoniškumo savybę galima interpretuoti kaip individo godumą: nepriklausomai nuo esamo gerovės lygmens, bet koks alternatyvų rinkinio padidėjimas suteikia griežtai stipresnį pasitenkinimą.

Tarkime, kad $\succeq$ yra alternatyvų aibės $\mathbb{R}^\ell_+$ preferencijos sąryšis ir $e := (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^\ell_+$ yra vienetinis vektorius. Kiekvienam $x \in \mathbb{R}^\ell_+$ tegul

$$u_{\succeq}(x) := \sup \bigl\{ r \geq 0 \colon \; x \succeq re = (r, \dots, r) \bigr\}; \tag{3.9}$$

čia naudojamas supremumo (2.17) apibrėžimas. Parodysime, kad $u_{\succeq}$ yra alternatyvų lauką $(\mathbb{R}^\ell_+, \succeq)$ išreiškianti naudingumo funkcija, jei šis yra tolydus ir stipriai monotoniškas.

3.22 teorema. *Sakykime, kad alternatyvų laukas $(\mathbb{R}^\ell_+, \succeq)$ yra tolydus ir stipriai monotoniškas. Tada* (3.9) *apibrėžia funkciją $u_{\succeq} \colon \; \mathbb{R}^\ell_+ \to \mathbb{R}_+$, kuri yra tolydi alternatyvų lauko $(\mathbb{R}^\ell_+, \succeq)$ naudingumo funkcija.*

Įrodymas. Pirmiausia parodysime, kad aibė $U(x) := \{r \geq 0 \colon \; x \succeq re\}$ yra netuščia ir aprėžta. Tarkime, kad $x \in \mathbb{R}^\ell_+$. Kadangi $x \geq 0$ $(= 0e)$, tai remiantis alternatyvų lauko silpnuoju monotoniškumu $x \succeq 0$. Todėl aibė $U(x)$ yra netuščia. Parodysime, kad ši aibė yra aprėžta. Jei ne, tai kiekvienam n, $n \in U(x)$, t. y. $x \succeq ne$. Be to, visiems n pakankamai dideliems, $ne \geq x$ ir $ne \neq x$. Todėl $ne \succ x$ remiantis griežtuoju monotoniškumu. Taigi egzistuoja toks n, kad $x \succeq ne \succ x$. Bet remiantis 3.5 teiginiu, gauname prieštarą $x \succ x$ (3.1.5 pratimas), įrodantį, kad $U(x)$ aibė aprėžta. Todėl $u_{\succeq}(x) = \sup U(x) \in \mathbb{R}_+$ ir (3.9) korektiškai apibrėžia funkciją $u_{\succeq} \colon \; \mathbb{R}^\ell_+ \to \mathbb{R}_+$.

Pirmiausia parodysime, kad kiekvienam $x \in \mathbb{R}^\ell_+$

$$u_{\succeq}(x)e \sim x. \tag{3.10}$$

Iš tikro, tegul $x \in \mathbb{R}^\ell_+$. Kadangi aibė $R(x) = \{y \in \mathbb{R}^\ell_+ \colon \; x \succeq y\}$ uždara, $u_{\succeq}(x)e \in R(x)$, t. y. $x \succeq u_{\succeq}(x)e$. Iš kitos pusės, kiekvienam $\epsilon > 0$, $[u_{\succeq}(x) + \epsilon]e \notin R(x)$. Remiantis 3.1.7 pratimu, $[u_{\succeq}(x)+\epsilon]e \succ x$. Tuo labiau kiekvienam $\epsilon > 0$, $[u_{\succeq}(x)+\epsilon]e \in L(x) = \{y \in \mathbb{R}^\ell_+ \colon \; y \succeq x\}$. Dabar atsižvelgiant į aibės $L(x)$ uždarumą $u_{\succeq}(x)e \in L(x)$, t. y. $u_{\succeq}(x)e \succeq x$, kas įrodo (3.10).

Tai, kad $u_{\succeq}$ yra alternatyvų lauko $(\mathbb{R}^\ell_+, \succeq)$ naudingumo funkcija, parodysime naudodamiesi 3.2.2 pratimu. Tegul $x, y \in \mathbb{R}^\ell_+$. Jei $u_{\succeq}(x) > u_{\succeq}(y)$, tai remiantis (3.10) ir lauko stipriojo monotoniškumu, turime

$$x \succeq u_{\succeq}(x)e \succ u_{\succeq}(y)e \succeq y.$$

Iš čia gauname $x \succ y$, remiantis 3.5 teiginiu. Atvirkščiai, jei $x \succ y$, tai remiantis (3.10), turime

$$u_{\succeq}(x)e \succeq x \succ y \succeq u_{\succeq}(y)e.$$

Iš čia gauname $u_{\succeq}(x)e \succ u_{\succeq}(y)e$, vėlgi remiantis tuo pačiu 3.5 teiginiu. Jei būtų $u_{\succeq}(x) \leq u_{\succeq}(y)$, tai gautume prieštarą paskutinei išvadai atsižvelgiant į lauko silpną monotoniškumą. Todėl $u_{\succeq}(x) > u_{\succeq}(y)$ atsižvelgiant į realiųjų skaičių aibės trichotomijos savybes. Remiantis 3.2.2 pratimu, $u_{\succeq}$ yra alternatyvų lauko $(\mathbb{R}^{\ell}_{+}, \succeq)$ naudingumo funkcija.

Liko įrodyti funkcijos $u_{\succeq}$ tolydumą. Remiantis šios funkcijos apibrėžimu, kiekvienam $t \in \mathbb{R}$ galioja lygybės

$$\{x \in \mathbb{R}^{\ell}_{+} :\ u_{\succeq}(x) \geq t\} = \{x \in \mathbb{R}^{\ell}_{+} :\ x \succeq te\} = L(te)$$

ir

$$\{x \in \mathbb{R}^{\ell}_{+} :\ u_{\succeq}(x) \leq t\} = \{x \in \mathbb{R}^{\ell}_{+} :\ te \succeq x\} = R(te)$$

Kaip ir (3.7) sąryšių atveju, remiantis lauko tolydumu gauname funkcijos $u_{\succeq}$ tolydumą. Teoremos įrodymas baigtas. □

Praeito skyrelio pabaigoje pasiūlėme Kobo–Duglaso naudingumo funkcijos pavyzdį. Toliau apžvelgsime šį ir keletą kitų naudingumo funkcijos pavyzdžių, iliustruodami įvairias alternatyvų lauko savybes.

Tobulieji pakaitai Sakykime, kad realieji skaičiai $a > 0$ ir $b > 0$. Naudingumo funkcija

$$u(x) = ax_1 + bx_2, \qquad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_{+}, \tag{3.11}$$

apibrėžtas alternatyvų laukas $(\mathbb{R}^2_{+}, \succeq_u)$ vadinamas *tobulaisiais pakaitais*. Šio alternatyvų lauko indiferentiškumo aibė

$$I(c) := \{x \in \mathbb{R}^2_{+} :\ u(x) = c\} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_{+} :\ ax_1 + bx_2 = c\}, \quad c > 0,$$

yra atkarpa, kurios nuolydis (angl. slope) yra pastovus dydis $-(a/b)$ nes $x_2 = c/b - (a/b)x_1$. Alternatyvos, priklausančios tai pačiai indiferentiškumo aibei, yra vienodai vertinamos naudingumo prasme, ir todėl gali būti viena pakeičiama kita. Alternatyvas interpretuojant gėrybėmis, dviejų gėrybių kiekiai sudaro tobulųjų pakaitų lauką, jei vartotojas sutinka vieną iš jų keisti kitu *pastoviu* santykiu. Šiuo atveju jei $x, y \in I(c)$, tai $x_2 - y_2 = -(a/b)(x_1 - y_1)$, t. y. vienos gėrybės pasikeitimas atstoja kitos pasikeitimą tuo pačiu santyku a/b. Pavyzdžiui, kai $a = b = 1$, vienodai geistinamomis alternatyvomis galėtų būti skirtingų spalvų pieštukų poros, t. y. nesvarbu jų spalva, bet svarbu jų kiekis. Šio alternatyvų lauko indiferentiškumo aibę sudaro tokios alternatyvos $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_{+}$, kad $x_1 + x_2 = const$. Apskritai, tobulieji pakaitai yra iškilas bet ne griežtai iškilas alternatyvų laukas.

Tobulieji papildiniai Sakykime, kad realieji skaičiai $a > 0$ ir $b > 0$. Naudingumo funkcija

$$u(x) = \min\{ax_1, bx_2\}, \qquad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_{+}, \tag{3.12}$$

apibrėžtas alternatyvų laukas $(\mathbb{R}^2_{+}, \succeq_u)$ vadinamas *tobulaisiais papildiniais*. Alternatyvas interpretuojant gėrybėmis, tobulieji papildiniai yra gėrybės, kurios visada vartojamos kartu ir pastoviu santykiu. Kai $a = b = 1$, tokių gėrybių pavyzdžiu galėtų būti dešiniosios ir kairiosios kojos batai. Šiuo atveju (3.12) naudingumo funkcija išreiškiamas preferencijos sąryšis nurodo, kad vartotoją domina tik maksimalus iš x_1 ir x_2 sudarytų porų skaičius. Apskritai tobulieji papildiniai taip pat yra iškilas, bet ne griežtai iškilas alternatyvų laukas. Kaip vėliau matysime, (3.12) taip pat naudojama gamybos funkcijai apibrėžti vadinamosios Leontief'o technologijos atveju.

Kobo–Duglaso naudingumo funkcija Sakykime, kad realieji skaičiai $c > 0$ ir $d > 0$. Naudingumo funkcija

$$u(x) = x_1^c x_2^d, \qquad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2, \tag{3.13}$$

apibrėžtas alternatyvų laukas $(\mathbb{R}_+^2, \succeq_u)$ vadinamas *Kobo–Duglaso* alternatyvų lauku. Kaip žinome (3.16 teiginys), monotoniška naudingumo funkcijos transformacija nekeičia alternatyvų lauko. Pakėlę naudingumo funkciją laipsniu $1/(c + d)$ ir pažymėję $\epsilon := c/(c+d) \in (0, 1)$, gauname tą patį alternatyvų lauką, išreikštą tokia naudingumo funkcija:

$$v(x) = x_1^{\epsilon} x_2^{1-\epsilon}, \qquad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2. \tag{3.14}$$

Tai reiškia, kad naudingumo funkcijos (3.13) išraiškoje laipsnius galima taip pakeisti, kad jų suma būtų lygi 1. (3.13) naudingumo funkcija taip pat yra naudojama gamybos funkcijai apibrėžti vadinamosios Kobo–Duglaso technologijos atveju.

CES naudingumo funkcija Sakykime, kad realieji skaičiai $a > 0$, $b > 0$ ir $0 < \rho < \infty$. Pastovios transformacijos elastingumo, arba CES naudingumo, funkcija (angl. the constant elasticity of substitution) yra

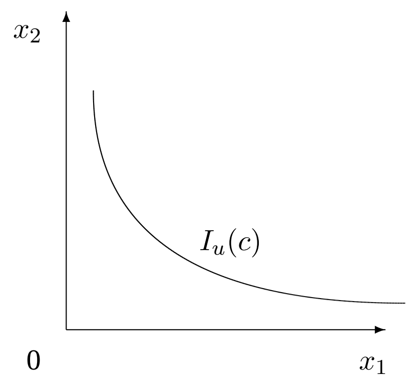
$$u(x) = \left[a x_1^{\rho} + b x_2^{\rho}\right]^{1/\rho}, \qquad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2. \tag{3.15}$$

Kai $\rho = 1$, gauname tobulųjų pakaitų naudingumo funkciją (3.11).

Ribinė pakeitimo norma Tarkime, kad alternatyvų laukas $(X, \succeq)$ yra atviroji euklidinės erdvės aibė, t. y. atviroji aibė vektorių $x = (x_1, \ldots, x_\ell)$, kurių koordinatės interpretuojamos kaip prekių kiekiai, ir skirtingos koordinatės atitinka skirtingas prekes. Tarkime, kad, šį lauką išreiškianti naudingumo funkcija u yra C^1 klasės funkcija aibėje X. Bet kuriam $i \in \{1, \ldots, \ell\}$ ir bet kuriam prekių vektoriui $x \in X$, i-tąją prekę atitinkančiu *ribiniu naudingumu* (angl. marginal utility) vadinsime naudingumo funkcijos i-tąją dalinę išvestinę taške x (2.75 apibrėžimas)

$$MU_i(x) := (D_i u)(x).$$

Pagal ekonominę interpretaciją šis dydis yra papildomas naudingumas, gaunamas iš prekės papildomo vieneto. Bet kuriems skirtingiems $i, j \in \{1, \ldots, \ell\}$ ir bet kuriam



3.2 . Vienodo naudingumo aibė

prekių vektoriui $x \in X$, i-tąją ir j-tąją prekes atitinkančia *ribine pakeitimo norma* (angl. marginal rate of substitution) vadinsime atitinkamų prekių ribinių naudingumų santykį

$$RPN_{ij}(x) := \frac{MU_i(x)}{MU_j(x)} = \frac{(D_i u)(x)}{(D_j u)(x)}. \tag{3.16}$$

Interpretuojant šį dydį sakoma, kad jis apibūdina i-tosios prekės kiekį, reikalingą kompensuoti vartotojui už atsisakymą j-tosios prekės kiekio taip, kad naudingumo lygis išliktų nepakites.

Įdomus yra ribinės pakeitimo normos $RPN_{ij}(x)$ elgesys vektoriui x kintant taip, kad naudingumas $u(x)$ išlieka pastovus, o kinta tik koordinatės x_i ir x_j. Todėl paprastumo dėlei toliau tarsime, kad $\ell = 2$ ir $X = \mathbb{R}^2_{++}$ yra aibė vektorių su teigiamomis koordinatėmis. Bet kuriam $c \in u[X] \subset \mathbb{R}$ aibė

$$I_u(c) := \{x \in X\colon\ u(x) = c\}$$

vadinama *vienodo naudingumo aibe*, arba *indiferentiškumo aibe*. Tegul $c \in u[X]$. Jei egzistuoja tokia funkcija $f_c\colon\ \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}_{++}$, kad $u(t, f_c(t)) = c$ kiekvienam $t > 0$, tai ją vadinsime naudingumo funkcijos u *vienodo naudingumo kreive*, arba *indiferentiškumo kreive*, atitinkantčia lygį c. Sąlygas kada tokia funkcija egzistuoja, nurodo globaliosios neišreikštinės funkcijos teorema. Pavyzdžiui, jei u yra Kobo–Duglaso naudingumo funkcija

$$u(x) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}, \qquad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_{++}, \quad \alpha \in (0,1),$$

tai jos vienodo naudingumo kreivė, atitinkanti lygį $c > 0$, yra funkcija

$$f_c(t) = c^{1/(1-\alpha)} t^{\alpha/(1-\alpha)}, \qquad t > 0.$$

Taigi vienodo naudingumo kreivė f_c išreiškia priklausomybę tarp koordinačių x_1 ir x_2, vektoriui $x = (x_1, x_2) \in X$ kintant taip, kad $u(x) = c$.

Tarkime, kad vienodo naudingumo kreivės yra diferencijuojamos savo apibrėžimo srityje, ir tegul $x(t) := (t, f_c(t))$, $t > 0$. Kadangi $u(x(t)) = (u\circ x)(t) \equiv c$, tai remiantis kompozicijos diferencijavimo taisykle (2.44), gauname

$$0 = D(u\circ x)(t) = (D_1u)(x(t)) + (D_2u)(x(t))Df_c(t)$$

su kievienu $t > 0$. Išreiškę $Df_c(t)$ ir prisiminę ribinę pakeitimo normą (3.16)

$$Df_c(t) = -\frac{(D_1u)(x(t))}{(D_2u)(x(t))} = -RPN_{12}(x(t)). \tag{3.17}$$

Dabar tarkime, kad vienodo naudingumo kreivės yra du kartus diferencijuojamos savo apibrėžimo srityje. Remiantis gauta formule (3.17), antroji išvestinė $D^2 f_c \geq 0$ intervale $(0, \infty)$, tada ir tik tada, kai funkcijos $t \mapsto RPN(x(t))$ pirmoji išvestinė yra neteigiama, t. y. didėjant argumentui, funkcija $RNP(x(\cdot))$ mažėja. Ekonomikoje šis ribinės pakeitimo normos kitimas vadinamas *ribinės pakeitimo normos mažėjimu* (angl. decreasing marginal rate of substitution). Šis faktas interpretuojamas taip: didėjant pirmosios prekės kiekiui, vartotojas yra linkęs atsisakyti vis mažesnio jo kiekio tam, kad jo naudingumas būtų kompensuojamas antrosios prekės kiekiu. Tai paaiškinama tuo, kad vis daugiau vartojant tos pačios prekės, santykinai ji suteikia vis mažiau naudingumo.

Taigi ribinės pakeitimo normos mažėjimas vyksta tada ir tik tada, kai vienodo naudingumo kreivės antroji išvestinė yra neneigiama. Remiantis 2.107(b) išvada, taip yra tada ir tik tada, kai vienodo naudingumo kreivė yra iškila. Kitas teiginys sako, jog tai yra ekvivalentu alternatyvų lauko iškilumui. Būtent visi šie faktai sieja vadovėlyje naudojamą preferencijos iškilumo sąlygą su intuityviai suprantamu vartotojo elgesiu.

3.23 teiginys. *Tarkime, kad $(X, \succeq)$ yra silpnai monotoniškas alternatyvų laukas, išreiškiamas naudingumo funkcija $u\colon X \to \mathbb{R}$, o $\{f_c\colon c \in u[X]\}$ yra jos indiferentiškumo kreivių šeima. Alternatyvų laukas $(X, \succeq)$ yra iškilas tada ir tik tada, kai kiekvienam c, f_c yra iškila.*

Įrodymas. Tegul f_c yra iškila kiekvienam $c \in u[X]$. Remiantis 3.19 teiginiu, pakanka parodyti, kad u yra kvazi–įgaubta. Tegul $z_1 = (x_1, y_1) \in X$, $z_2 = (x_2, y_2) \in X$ ir $c := \min\{u(z_1), u(z_2)\}$. Galime tarti, kad $u(z_1) = c$ ir $u(z_2) \geq c$. Tuo atveju $y_1 = f_c(x_1)$ ir $y_2 \geq f_c(x_2)$ (kodėl?). Naudodami preferencijos silpnąjį monotoniškumą ir f_c iškilumą, kiekvienam $\lambda \in (0, 1)$, gauname

$$\begin{aligned} u(\lambda z_1 + (1-\lambda)z_2) &\geq u(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda f_c(x-1) + (1-\lambda)f_c(x_2)) \\ &\geq u(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, f_c(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)) = c = \min\{u(z_1), u(z_2)\}. \end{aligned}$$

Taigi u yra kvazi–įgaubta.

Atvirkščiai, tegul dabar alternatyvų laukas $(X, \succeq)$ yra iškilas, bet egzistuoja toks $c \in u[X]$, kad f_c nėra iškila funkcija. Tada galima rasti tokius $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$ ir $\lambda \in (0, 1)$, kad

$$f_c(x_\lambda) > \lambda f_c(x_1) + (1-\lambda)f_c(x_2);$$

čia $x_\lambda := \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$. Remiantis preferencijos griežtuoju monotoniškumu, naudingumo funkcijos kvazi–įgaubtumu ir 3.2.2 pratimu, gauname

$$c = u(x_\lambda, f_c(x_\lambda)) > u(x_\lambda, \lambda f_c(x_1) + (1-\lambda) f_c(x_2))$$
$$\geq \min\{u(x_1, f_c(x_1)), u(x_2, f_c(x_2))\} = c.$$

Ši prieštara įrodo f_c iškilumą bet kuriam $c \in u[X]$ ir tuo pačiu visą teiginį. □

Pratimai

1. Įrodyti 3.19(b) teiginį.
2. Parodyti, kad tobulųjų pakaitų alternatyvų laukas $(\mathbb{R}^2_+, \succeq)$ yra tolydus, stipriai monotoniškas, iškilas, bet ne griežtai iškilas.
3. Parodyti, kad tobulųjų papildinių alternatyvų laukas $(\mathbb{R}^2_+, \succeq)$ yra tolydus, silpnai monotoniškas, bet ne stipriai monotoniškas, iškilas, bet ne griežtai iškilas.
4. Parodyti, kad Kobo–Duglaso alternatyvų laukas $(\mathbb{R}^2_+, \succeq_u)$ yra tolydus, stipriai monotoniškas, lokaliai nepasotinamas ir griežtai iškilas. (Įrodant pastarąją savybę galima naudotis (3.14) išraiška, funkcijos $u \mapsto u^\epsilon$, $0 < \epsilon < 1$, įgaubtumu ir tuo, kad iš $ab \geq 1$ išplaukia $a + b \geq 2$.)
5. Parodyti, kad CES naudingumo funkcijos (3.15) parametrui $\rho \to 0$ riboje gaunama Kobo–Duglaso naudingumo funkcija (3.14) su $\epsilon = a/(a+b)$.
6. Parodyti, kad CES naudingumo funkcija (3.15) apibrėžtas alternatyvų laukas $(\mathbb{R}^2_+, \succeq)$ yra tolydus, stipriai monotoniškas, lokaliai nepasotinamas ir griežtai iškilas, kai $0 < \rho \leq 1$.
7. Alternatyvų aibės $X \subset \mathbb{R}^l$ preferencijos sąryšis $\succeq$ vadinamas *monotonišku*, jei bet kuriems $x, y \in X$ ir $y > x$ galioja griežta preferencija $y \succ x$; čia $y = (y_i) > (x_i) = x$ reiškia $y_i > x_i$ su kievienu i. Parodyti, jog tranzityvus, lokaliai nepasotinamas ir silpnai monotoniškas preferencijos sąryšis yra monotoniškas.

3.4 Atskleistoji preferencija

Ankstesniuose skyreliuose apibrėžėme ir nagrinėjome racionalųjį preferencijos sąryšį. Žinant individo preferencijas, nesunku apibūdinti jo pasirinkimus. Kaip ir dauguma kitų ekonomikos teorijos sąvokų, preferencijos sąryšis išreikšta forma tikrovėje neegzistuoja. Dėl to prasminga klausti: kaip nustatyti preferencijos sąryšį stebint individo elgesį? Be to, koks turi būti pasirinkimas, kad jį atitinkanti preferencija būtų racionali?

Atsakant į šiuos klausimus naudosimės tuo, kad iš principo galima stebėti individo pasirinkimus iš įvairių alternatyvų rinkinių. Žinant tokių pasirinkimų rezultatus, galima tikėtis nustatyti stebėtąjį pasirinkimą atitinkantį preferencijos sąryšį. Tokia preferencijos rekonstrukcija yra vadinama *atskleistosios preferencijos analize* (angl. revealed preference analysis).

Toliau šiame skyrelyje parodysime, jog įmanoma apibūdinti tokius pasirinkimus, kad atskleistoji preferencija būtų racionali.

Pasirinkimo struktūra Iš pradžių tarkime, kad alternatyvų laukas $(X, \succeq)$ yra žinomas, o pasirinkimo aibė $C(B; \succeq)$ apibrėžta (3.3) lygybe. Norėdami išskirti atvejus, kai preferencija žinoma iš anksto, toliau šią aibę žymėsime su žvaigždute:

$$C^*_{\succeq}[B] := C^*(B; \succeq) := \{x \in B \colon (\forall\, y \in B)[x \succeq y]\} \subset B \tag{3.18}$$

su bet kuria alternatyvų aibe $B \subset X$. Remiantis 3.11 teorema, jei alternatyvų laukas $(X, \succeq)$ yra tolydus, o aibė $B \subset X$ yra netuščia ir kompaktinė, tai pasirinkimo aibė $C^*_{\succeq}[B]$ yra netuščia. Sakykime, kad $\mathcal{B}^*$ žymi alternatyvų aibės X visų netuščiųjų kompaktiškųjų poaibių klasę, kuri yra laipsninės aibės $\mathcal{P}(X)$ poaibis (2.5 aksioma), o $(X, \succeq)$ yra tolydusis alternatyvų laukas. Tada (3.18) pasirinkimo aibės apibrėžia vadinamąjį pasirinkimą $C^*_{\succeq}$. Tiksliau kalbant, *pasirinkimas* yra atitiktis iš $\mathcal{P}(X)$ į X:

$$C^*_{\succeq} = C^*_{\succeq}[\,\cdot\,] \colon\ B \mapsto C^*_{\succeq}[B] = C^*(B; \succeq) \subset X, \qquad B \in \mathcal{B}^*. \tag{3.19}$$

Priminsime, jog atitiktimi vadiname bet kurį aibių Dekarto sandaugos, šiuo atveju $\mathcal{P}(X) \times X$, netuščiąjį poaibį, o $\mathcal{B}^*$ yra šios atitikties apibrėžimo srities dalis (2.2 skyrelis). Jei kiekvienam $B \in \mathcal{B}^*$ aibę $C^*_{\succeq}[B]$ sudaro tik vienas X elementas, tai atitiktis $C^*_{\succeq}$ yra funkcija, apibrėžta aibėje $\mathcal{B}^*$, o teiginys 3.20(b) formuluoja sąlygas, kada taip yra.

Kitame apibrėžime jau nėra reikalaujama, kad preferencija būtų žinoma iš anksto.

3.24 apibrėžimas. Sakykime, kad X yra alternatyvų aibė, o $\mathcal{B}$ – netuščių X poaibių klasė. *Pasirinkimu* (angl. choice) vadinsime tokią atitiktį C iš $\mathcal{P}(X)$ į X su apibrėžimo sritimi $\mathcal{B}$, kurios vaizdas $C[B] \subset B$ kiekvienam $B \in \mathcal{B}$. Tokia pora $(\mathcal{B}, C)$ vadinama X *pasirinkimo struktūra* (angl. choice structure).

Atskleistieji preferencijos sąryšiai. Tarkime, kad alternatyvų aibės X pasirinkimo struktūra $(\mathcal{B}, C)$ yra žinoma. Yra keletas būdų X aibėje apibrėžti preferencijos sąryšį naudojantis duotąja pasirinkimo struktūra.

Pirmuoju būdu preferencijos sąryšis apibrėžiamas taip. Aibės X alternatyvų porą x, y ir poaibį $B \in \mathcal{B}$ susiesime sąryšiu, žymimu $x \succeq^*_B y$, jei $x, y \in B$ ir $x \in C[B]$. Sakysime, kad alternatyvoms $x, y \in X$ pasirinkimo struktūra $(\mathcal{B}, C)$ *atskleidžia preferencijos sąryšį*, žymimą $x \succeq^* y$, jei egzistuoja tokia aibė $B \in \mathcal{B}$, kad $x \succeq^*_B y$. Kitaip tariant, alternatyvoms $x, y \in X$

$$x \succeq^* y \quad \text{tada ir tik tada, kai} \quad (\exists\, B \in \mathcal{B})[x \succeq^*_B y].$$

Žodžiais šį sąryšį išreikšime taip: „atskleista x esant neblogesniu už y“.

Kitas preferencijos sąryšio atskleidimo būdas gaunamas prisiminus 3.8 teiginį. Būtent, alternatyvoms $x, y \in X$ pasirinkimo struktūra $(\mathcal{B}, C)$ *atskleidžia preferencijos sąryšį* $x \succeq_2^* y$, jei $\{x, y\} \in \mathcal{B}$ ir $x \in C[\{x, y\}]$. Kitaip tariant, alternatyvoms $x, y \in X$

$$x \succeq_2^* y \quad \text{tada ir tik tada, kai} \quad B := \{x, y\} \in \mathcal{B} \quad \text{ir} \quad x \succeq_B^* y.$$

Žymėjimas $\succeq_2^*$ atspindi tai, kad preferencijos sąryšį atskleidžia pasirinkimas tik iš dviejų alternatyvų. Ar pastarieji du preferencijos apibrėžimo būdai sutampa?

Bandant atsakyti į šį klausimą, pirmiausia tarkime, kad alternatyvų aibėje X yra apibrėžtas racionalus preferencijos sąryšis $\succeq$, o tai reiškia, kad turime pasirinkimo struktūrą $(\mathcal{B}^*, C_{\succeq}^*)$, kuri atskleidžia kitus du preferencijos sąryšius $\succeq_2^*$ ir $\succeq^*$. Remiantis minėtuoju 3.8 teiginiu, $\succeq_2^* = \succeq$ (kodėl?). Be to, nesunku matyti, kad jei $x \succeq_2^* y$, tai $x \succeq^* y$ bet kuriems $x, y \in X$. Atvirkščiai, tarkime, kad pasirinkimo struktūra $(\mathcal{B}^*, C_{\succeq}^*)$ atskleidžia preferencijos sąryšį $x \succeq^* y$. Tada egzistuoja tokia aibė $B \in \mathcal{B}^*$, kad $x, y \in B$ ir $x \in C_{\succeq}^*[B]$, o iš to gauname, kad $x \succeq y$. Todėl apriori turint racionalų preferencijos sąryšį, visi trys nagrinėti preferencijos sąryšiai sutampa.

Tačiau bendru atveju, abiem būdais apibrėžti atskleistieji preferencijos sąryšiai yra skirtingi, kaip rodo toks pavyzdys. Sakykime, kad $X = \{x, y, z\}$ ir pasirinkimas C apibrėžiamas lygybėmis:

$$\begin{aligned} \{x\} &= C[\{x, y\}], \quad \{y\} = C[\{y, z\}], \\ \{x\} &= C[\{x, z\}], \quad \{y\} = C[\{x, y, z\}]. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Taigi pasirinkimas C apibrėžtas X aibės keturių poaibių klasėje $\mathcal{B}$. Remiantis griežtos preferencijos ir indiferentiškumo apibrėžimais (3.1) ir (3.2), kiekvienu iš dviejų būdų atskleidžiami tokie sąryšiai:

$$x \sim^* y, \qquad y \succ^* z \quad \text{ir} \quad x \succ^* z$$

$$x \succ_2^* y, \qquad y \succ_2^* z \quad \text{ir} \quad x \succ_2^* z.$$

Tačiau nagrinėjami du preferencijos atskleidimo būdai sutampa, jei juos atskleidžianti pasirinkimo struktūra yra normali toliau siūloma prasme.

Normalioji pasirinkimo struktūra Sakykime, kad $(\mathcal{B}, C)$ yra alternatyvų aibės X pasirinkimo struktūra. Jei $B \in \mathcal{B}$ ir $x \in C[B]$, tai $x \succeq^* z$ kiekvienam $z \in B$ ir todėl $x \in C^*(B; \succeq^*)$. Kitaip tariant, kiekvienai aibei $B \in \mathcal{B}$ galioja sąryšis

$$C[B] \subset C^*(B; \succeq^*).$$

Pagal tolesnį apibrėžimą, pasirinkimo struktūrą vadinsime normaliąja, jei galioja priešingas sąryšis.

3.25 apibrėžimas. Alternatyvų aibės X pasirinkimo struktūra $(\mathcal{B}, C)$ vadinama *normaliąja*, arba pasirinkimas C vadinamas *normaliuoju*, jei $C[B] = C^*(B; \succeq^*)$ su kiekviena $B \in \mathcal{B}$.

Taigi, ekonomikos kontekste, pasirinkimas vadinamas normaliuoju, jei jis vykdomas taip, lyg būtų pasirenkamos tik atskleistosios preferencijos prasme optimalios alternatyvos. Pavyzdžiui, (3.20) lygybėmis apibrėžta pasirinkimo struktūra nėra normali. Tai yra kito teiginio išvada.

3.26 teiginys. *Sakykime, kad $(\mathcal{B}, C)$ yra alternatyvų aibės X normalioji pasirinkimo struktūra. Tada teisingos savybės (a) ir (b):*

(a) *jei visi vieno ir dviejų elementų X aibės poaibiai priklauso klasei $\mathcal{B}$, tai atskleistieji preferencijos sąryšiai $\succeq^*$ ir $\succeq_2^*$ sutampa;*

(b) $C[C[B]] = C[B]$ *su kiekviena $B \in \mathcal{B}$.*

Įrodymas. (a). Tarkime, kad $x, y \in X$ ir $x \succeq^* y$. Kadangi $x \in C[\{x\}]$, tai $x \succeq^* x$. Taip gauname, kad $x \in C^*(\{x, y\}; \succeq^*)$. Remiantis pasirinkimo struktūros normalumu $x \in C(\{x, y\}) = C^*(\{x, y\}; \succeq^*)$, t. y. $x \succeq_2^* y$. Kadangi priešinga implikacija teisinga visada, atskleistieji preferencijos sąryšiai $\succeq^*$ ir $\succeq_2^*$ sutampa.

(b). Tarkime, kad $B \in \mathcal{B}$ ir $x \in C[B] = C^*(B; \succeq^*)$. Tada $x \succeq^* z$ su kiekviena $z \in B$. Kadangi $C[B] \subset B$, tai $x \succeq^* z$ su kiekviena $z \in C[B]$, t. y. $x \in C^*(C[B]; \succeq^*) = C[C[B]]$. Iš čia išplaukia, kad $C[B] \subset C[C[B]]$. Kadangi priešingas sąryšis teisingas visada pasirinkimo C apibrėžimo dėka, tai $C[B] = C[C[B]]$. □

Tačiau pasirinkimo struktūros normalumas neišplaukia nei iš savybės (a), nei iš savybės (b), kaip rodo toks pavyzdys. Sakykime, kad $X = \{x, y, z\}$, ir pasirinkimas C apibrėžiamas lygybėmis:

$$\begin{aligned} \{x\} &= C[\{x, y\}], \qquad \{z\} = C[\{y, z\}], \\ \{x, z\} &= C[\{x, z\}], \quad \{x\} = C[\{x, y, z\}]. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Šiame pavyzdyje pasirinkimas C vėl yra apibrėžtas aibės X keturių poaibių klasėje $\mathcal{B}$. Remiantis griežtosios preferencijos ir indiferentiškumo apibrėžimais (3.1) ir (3.2), kiekvienu iš dviejų būdų atskleidžiami tokie sąryšiai:

$$x \succ^* y, \qquad z \succ^* y \quad \text{ir} \quad x \sim^* z$$

$$x \succ_2^* y, \qquad z \succ_2^* y \quad \text{ir} \quad x \sim_2^* z.$$

Be to, nesunku patikrinti, kad (3.21) apibrėžtam pasirinkimui C galioja $C[C[B]] = C[B]$ su kiekviena aibe $B \in \mathcal{B}$. Tačiau $C^*(\{x, y, z\}; \succeq^*) = \{x, z\} \neq \{x\} = C[\{x, y, z\}]$, t. y. pasirinkimo struktūra (X, C) nėra normalioji.

Silpnoji atskleistosios preferencijos aksioma Toliau formuluojama pasirinkimo struktūros sąlyga garantuoja atskleistosios preferencijos sąryšio racionalumą.

3.27 apibrėžimas. Sakysime, kad alternatyvų aibės X pasirinkimo struktūrai $(\mathcal{B}, C)$ galioja *silpnoji atskleistosios preferencijos aksioma*, arba SAPA (angl. weak axiom of revealed preference), jei, galiojant atskleistajam preferencijos sąryšiui $x \succeq^* y$, su bet kuria aibe $B' \in \mathcal{B}$ iš sąlygų $x \in B'$ ir $y \in C[B']$ išplaukia sąlyga $x \in C[B']$.

Pirmiausia kyla klausimas: jei alternatyvų aibėje X apibrėžtas preferencijos sąryšis $\succeq$ yra racionalus, tai ar SAPA galioja pasirinkimo struktūrai $(\mathcal{B}^*, C^*_{\succeq})$? Anksčiau jau matėme, kad tokiu atveju atskleistasis preferencijos sąryšis $\succeq^*$ sutampa su $\succeq$. Todėl jei $x \succeq^* y$, tai $x \succeq y$. Be to, jei $B' \in \mathcal{B}^*$, $x \in B'$ ir $y \in C^*_{\succeq}[B']$, tai $y \succeq z$ kiekvienam $z \in B'$. Iš čia, remiantis tranzityvumu, $x \succeq z$ kiekvienam $z \in B'$, t. y. $x \in C^*_{\succeq}(B')$. Taigi atsakymas į klausimą yra teigiamas.

Nesunku matyti, kad pasirinkimai $C[\{x, y\}] = \{x\}$ ir $C[\{x, y, z\}] = \{y\}$ (3.20) pavyzdyje nesuderinami su SAPA.

3.28 teorema. *Sakykime, kad $\mathcal{B}$ yra tokia alternatyvų aibės X poaibių klasė, kuriai priklauso visos vieno, dviejų ir trijų elementų aibės, o atitiktis C iš $\mathcal{P}(X)$ į X su apibrėžimo sritimi $\mathcal{B}$ yra pasirinkimas. Pasirinkimo struktūrai $(\mathcal{B}, C)$ galioja SAPA tada ir tik tada, kai šios pasirinkimo struktūros atskleistasis preferencijos sąryšis $\succeq^*$ yra racionalus ir pasirinkimas C yra normalus.*

Įrodymas. Sakykime, kad $(\mathcal{B}, C)$ struktūros atskleistas preferencijos sąryšis $\succeq^*$ yra racionalus ir pasirinkimas C yra normalus. Tarkime, kad $x, y \in X$, $x \succeq^* y$, $B' \in \mathcal{B}$, $y \in C[B']$ ir $x \in B'$. Kadangi pasirinkimas C yra normalus, tai $C[B'] = C^*(B'; \succeq^*)$. Gauname, kad $y \succeq^* z$ visiems $z \in B'$. Remiantis $\succeq^*$ tranzityvumu $x \succeq^* z$ visiems $z \in B'$. Todėl $x \in C^*(B'; \succeq^*) = C[B']$, t. y. galioja SAPA.

Dabar sakykime, kad pasirinkimo struktūrai $(\mathcal{B}, C)$ galioja SAPA. Bet kuriems $x, y \in X$, $B := \{x, y\} \in \mathcal{B}$ ir todėl $C[B] \neq \varnothing$. Tai reiškia, kad arba $x \in C[B]$, arba $y \in C[B]$, t. y. atskleistajam preferencijos sąryšiui $\succeq^*$ galioja pilnumo aksioma. Tarkime, kad $x \succeq^* y$ ir $y \succeq^* z$. Tada $B' := \{x, y, z\} \in \mathcal{B}$. Remiantis SAPA, jei $z \in C[B']$, tai $y \in C[B']$, ir jei $y \in C[B']$, tai $x \in C[B']$. Kadangi $C[B'] \neq \varnothing$, tai $x \in C[B']$ bet kuriuo atveju ir todėl $x \succeq^* z$, t. y. atskleistajam preferencijos sąryšiui $\succeq^*$ galioja tranzityvumo aksioma. Liko parodyti, kad pasirinkimas C yra normalus. Kaip buvo minėta, sąryšis $C[B] \subset C^*(B; \succeq^*)$ galioja visada atskleisto preferencijos sąryšio apibrėžimo dėka. Įrodysime priešingo sąryšio teisingumą. Tarkime, kad $B \in \mathcal{B}$ ir $x \in C^*(B; \succeq^*)$, t. y. $x \succeq^* z$ visiems $z \in B$. Kadangi $C[B] \neq \varnothing$, egzistuoja $y \in C[B] \subset B$. Tada $x \succeq^* y$ ir $x \in C[B]$ remiantis SAPA, t. y. pasirinkimas C yra normalusis. $\square$

Kad prielaidos apie pasirinkimą iš vieno, dviejų ir trijų elementų aibių pastarojoje teoremoje gali būti svarbios, rodo kitas pavyzdys. Sakykime, kad $X = \{x, y, z\}$ ir $\mathcal{B} = \{\{x, y\}, \{x, y, z\}\}$. Apibrėžkime pasirinkimą C_1:

$$C_1[\{x, y\}] = \{x\} \quad \text{ir} \quad C_1[\{x, y, z\}] = \{x\}.$$

Pasirinkimas C_1 atskleidžia $x \succeq^* y$ ir $x \succeq^* z$, bet C_1 neatskleidžia preferencijos sąryšio tarp y ir z. Tačiau pasirinkimo struktūrai $(\mathcal{B}, C_1)$ galioja SAPA. Apibrėžkime pasirinkimą C_2:

$$C_2[\{x, y\}] = \{x\} \quad \text{ir} \quad C_2[\{x, y, z\}] = \{x, y\}.$$

Dabar atskleistas preferencijos sąryšis $y \succeq^* x$ (kaip ir kiti sąryšiai $y \succeq^* z$, $x \succeq^* y$ ir $x \succeq^* z$). Tačiau $x \in C_2[\{x, y\}]$ ir $y \notin C_2[\{x, y\}]$, t. y. pasirinkimo struktūrai $(\mathcal{B}, C_2)$ negalioja SAPA.

Pratimai

1. Sakykime, kad $X = \{x, y, z\}$, $\mathcal{B} = \{\{x, y\}, \{x, y, z\}\}$ ir $C[\{x, y\}] = \{x\}$. Rasti visus tuos pasirinkimus iš X, kad gautai pasirinkimo struktūrai $(\mathcal{B}, C)$ galiotų SAPA.

2. Pasirinkimo struktūrai $(\mathcal{B}, C)$ galioja SAPA tada ir tik tada, kai galioja savybė: sakykime, kad $B, B' \in \mathcal{B}$ ir $x, y \in B \cap B'$; jei $x \in C[B]$ ir $y \in C[B']$, tai $\{x, y\} \subset C[B]$ ir $\{x, y\} \subset C[B']$.

3. Sakykime, kad $(\mathcal{B}, C)$ yra alternatyvų aibės X pasirinkimo struktūra. Apibrėžkime du atskleistuosius griežtos preferencijos sąryšius:

$$\begin{aligned} x \succ^* y \quad &\Leftrightarrow \quad x \succeq^* y \quad \text{ir} \quad \neg[\, y \succeq^* x \,]; \\ x \succ^{**} y \quad &\Leftrightarrow \quad [\, \exists\, B' \in \mathcal{B} \,]: \quad x, y \in B', \ x \in C[B'] \ \text{ ir } \ y \notin C[B']. \end{aligned}$$

   Įrodyti, kad preferencijos sąryšiai $\succ^*$ ir $\succ^{**}$ sutampa, jei pasirinkimo struktūrai $(\mathcal{B}, C)$ galioja SAPA.

3.5 Pastabos ir papildoma literatūra

3.1 skyrelis Šiame vadovėlyje naudojama preferencijos samprata yra viena iš kelių galimų. Pavyzdžiui, Kreps (1990) naudoja kitokį aibės X binarųjį sąryšį P, žodžiais vadindamas jį griežtai vertingesnis (angl. strictly preferred), apibrėžiamą savybėmis:

(a) *asimetrija*: bet kuriems $x, y \in X$ kartu negalimi xPy ir yPx;

(b) *neigiamasis tranzityvumas*: bet kuriems $x, y, z \in X$, jei xPy, tai arba xPz, arba zPy, arba abu.

3.2 skyrelis Naudingumo (angl. utility) sąvoka susijusi ne tik su ekonomika. Naudingumas, arba utilitarizmas, taip pat išreiškia doktriną, pagal kurią naudingumo maksimizavimas yra moralinis kriterijus, naudojamas visuomenės organizavime. Utilitarizmo doktrina gimė mokslo apie visuomenę, tiksliau – visuomenės pasirinkimo (angl. social choice) teorijos kontekste. Šios doktrinos pradininkai Jeremy Bentham (1748–1832) ir John Stuart Mill (1806–1876) manė, kad visuomenė turėtų siekti visų jos narių visuminio naudingumo maksimizavimo: „daugumai žmonių daugiausia laimės“. Ilgainiui utilitarizmo doktrina ekonomikos teorijoje tapo tuo, ką 3.1 skyrelyje vadiname racionaliąja preferencija.

Debreu teorema Čia pateikiama 3.14 teoremos įrodymo schema. Tarkime, kad X yra euklidinės erdvės $\mathbb{R}^\ell$ poaibis, o alternatyvų laukas $(X, \succeq)$ yra tolydus. Šį lauką išreiškiančią tolydžiąją naudingumo funkciją konstruosime dviem žingsniais. Pirmiausia parodysime, kad laukas išreiškiamas didėjančia funkcija $v\colon X \to \mathbb{R}$, o po to parodysime, kaip pakeisti ją, norint gauti tolydžiąją naudingumo funkciją.

Sakykime, kad $\mathbb{R}^\ell$ erdvės vektorius yra racionalus, jei visos jo koordinatės yra racionalieji skaičiai. Visų atvirųjų rutulių, kurių centras yra racionalusis vektorius ir spindulys yra racionalus, aibė yra skaiti. Tegul $U_1, U_2, \ldots$ yra visi šie atvirieji rutuliai. Kiekvienam $x \in X$, apibrėžkime

$$N(x) := \{n \in \mathbb{N}\colon\ (\forall\, z \in U_n)\,[x \succ z]\} \quad \text{ir} \quad v(x) := \sum_{n \in N(x)} \frac{1}{2^n},$$

kur suma lygi nuliui jei $N(x) = \varnothing$. Jei $y \succeq x$, tai $N(y) \supseteq N(x)$ remiantis preferencijos tranzityvumu (3.5 teiginys). Todėl $v(y) \geq v(x)$. Tarkime, kad $y \succ x$. Kadangi aibė $G(y) = \{z \in X\colon\ y \succ z\}$ yra atvira, tai egzistuoja tokia atviroji aibė U_n, kad $x \in U_n$ ir $U_n \subset G(y)$. Todėl $v(y) > v(x)$, kadangi $n \in N(y)$, bet $n \notin N(x)$. Remiantis 3.2.3 pratimu, v yra naudingumo funkcija.

Pagal apibrėžimą funkcija v neprivalo būti tolydi. Tačiau v yra didėjanti, o tokios funkcijos tolydumą galima apibūdinti atsižvelgiant į jos kitimo sritį $v[X]$. Antru žingsniu parodysime, jog galima pakeisti funkciją v taip, kad nauja funkcija būtų tolydi. Tuo tikslu įrodysime papildomą teiginį. Realiųjų skaičių aibės intervalas vadinamas *išsigimusiu*, jei jį sudaro vienintelis skaičius. Realiųjų skaičių aibės S *spraga* (angl. lacuna) vadinamas toks su S neturintis bendrų taškų ir neišsigimęs realiųjų skaičių intervalas, kurio galai (t. y. mažiausias viršutinis ir didžiausias apatinis rėžiai) priklauso S. Tarp visų S aibės spragų, didžiausios iš jų vadinamos *plyšiais* (angl. gaps).

3.29 lema. *Tolydžiojo alternatyvų lauko $(X, \succeq)$ naudingumo funkcija $u\colon X \to \mathbb{R}$ yra tolydi jei visi jos kitimo srities $u[X]$ plyšiai yra atviri.*

Įrodymas. Funkcija u yra tolydi tada ir tik tada, kai bet kuriam $r \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \text{aibė} \quad U(r) := \{z \in X\colon\ u(z) \leq r\} \quad \text{yra uždara ir} \\ \text{aibė} \quad V(r) := \{z \in X\colon\ u(z) \geq r\} \quad \text{yra uždara.} \end{cases}$$

Parodysime tik aibės $U(r)$ uždarumą bet kuriam $r \in \mathbb{R}$, nes šios savybės įrodymas aibei $V(r)$ yra simetriškas. Išskirsime tris atvejus.

I atvejis: $r \in u[X]$, t. y. $r = u(x)$ su kuriuo nors $x \in X$. Tada aibė $U(r)$ yra uždara (3.7) sąryšių dėka ir atsižvelgiant į $(X, \succeq)$ alternatyvų lauko tolydumą.

II atvejis: r priklauso atviram $u[X]$ plyšiui, t. y. $r \in (a, b)$ ir $a, b \in u[X]$. Tada

$$U(r) = \{z \in X\colon\ u(z) \leq r\} = \{z \in X\colon\ u(z) \leq a\}.$$

Ši aibė yra uždara remiantis I atveju, nes $a \in u[X]$.

III atvejis: $r \notin u[X]$ ir r nepriklauso plyšiui, kas yra ekvivalentu tam, kad galioja viena iš alternatyvų: (a) $r \leq \inf u[X]$, (b) $r \geq \sup u[X]$, arba (c) r liečia $u[X]$. Jei (a), (b) ar (c), tai $U(r)$ yra atitinkamai $\varnothing$, X, ar $\cap_{s<r, s\in u[X]} U(s)$ ir visos šios aibės yra uždaros. Lemos įrodymas baigtas. $\square$

Remiantis įrodyta lema, pakanka rasti tokią funkciją $f\colon\ v[X] \to \mathbb{R}$, kuri didėtų, o jos reikšmių sritis galėtų turėti tik atviruosius plyšius. Tada kompozicija $u := f \circ v$ bus didėjanti funkcija, jos reikšmių sritis turės tik atviruosius plyšius, taigi bus tolydi. Vadinasi, 3.14 teoremos įrodymui baigti pakanka pasinaudoti teiginiu:

3.30 lema. *Sakykime, kad S yra realiųjų skaičių aibė. Egzistuoja tokia didėjanti funkcija $f\colon\ S \to \mathbb{R}$, kurios reikšmių srities $f[S]$ visi plyšiai yra atviri intervalai.*

Pirmas šio teiginio įrodymas priklauso *Debreu* [10, 12 skyrius]. Matematinės ekonomikos literatūroje šis teiginys vadinamas *plyšio lema* (angl. gap lemma). Plyšio lema yra fundamentalus naudingumo funkcijų teorijos rezultatas, iš kurio išplaukia daug gilių šios teorijos išvadų ir taikymų. Iki šiol buvo rasta daug šios lemos apibendrinimų ir įrodymų, kurių apžvalgą galima rasti Herden ir Mehta (2004).

3.3 skyrelis Šiame skyrelyje aptariama keletas pagrindinių preferencijos savybių, naudojamų įrodyti pusiausvyros egzistavimui. Be to, preferencija yra vienas iš keliu parametrų, nuo kurių priklauso *Arrow–Debreu* ekonomika, apibrėžiama (1.18) rinkiniu. Dėl šių priežasčių yra prasminga klausti: kaip keičiasi preferencijos savybės, jei keičiama pati preferencija? Natūralu manyti, kad ekonomikos modelis yra stabilus, jei mažas parametro pasikeitimas tik nežymiai keičia modelio savybes.

Tam, kad įvertinti preferencijos „mažą pasikeitimą“, reikalingas atstumas tarp preferencijų. Paminėsime vieną tokį apibrėžimą.

3.31 apibrėžimas. Tarkime, kad $\mathcal{P}_m$ yra racionalių, tolydžių ir monotoniškų preferencijų euklidinėje erdvėje $\mathbb{R}^\ell_+$ aibė, o $\succeq$ ir seka $(\succeq_n)$ yra preferencijos iš $\mathcal{P}_m$. Sakoma, kad $\succeq_n$ konverguoja į $\succeq$, jei su bet kuriais $x, y \in \mathbb{R}^\ell_+$ tokiais, kad $x \succ y$, su bet kuria į x konverguojančia seka (x_n) ir su bet kuria į y konverguojančia seka (y_n) egzistuoja toks $N \in \mathbb{N}$, kad $x_n \succ_n y_n$ kiekvienam $n \geq N$.

Jei preferencijos $\succeq$ ir $\succeq_n$ yra atitinkamai išreiškiamos tolydžiosiomis naudingumo funkcijomis u ir u_n, atitinkamai, tai $\succeq_n$ konverguoja į $\succeq$ tada ir tik tada, kai $u_n(x_n) \to u(x)$ kiekvienam $x \in \mathbb{R}^\ell_+$ ir su kiekviena į x konverguojančia seka (x_n). Šios preferencijų konvergavimo sampratos iliustravimui suformuluosime tokį faktą:

3.32 teiginys. *Tarkime, kad* $(\mathbb{R}^\ell_+, \succeq)$ *yra tolydusis alternatyvų laukas, o preferencija* $\succeq \in \mathcal{P}_m$ *yra iškila. Tada aibėje* $\mathcal{P}_m$ *egzistuoja griežtai iškilų preferencijų seka* $\succeq_n$*, konverguojanti į* $\succeq$.

Teiginio įrodymą ir tolesnį preferencijų konvergavimo klausimo aptarimą galima rasti *Hildenbrand*o ir *Kirman*o knygoje [13, p. 57–63].

3.4 skyrelis Be šiame skyrelyje minėtų dviejų preferencijos sąryšių galimi ir kiti preferencijos atskleidimo būdai (žr. Sen, 1971).

Racionalus pasirinkimas ir psichologija Ypač stipri opozicija racionalaus pasirinkimo teorijai kyla iš žmogaus elgesio tyrinėjimų srities. Jos pagrindą sudaro eksperimentų rezultatai, rodantys, jog ekonominio racionalumo prielaidos ne tik dažnai neišpildomos, bet yra sistemingo kitokio elgesio paaiškinimai ir priežastys.

Labiausiai žinomi yra *Tversky* ir *Kahneman*o eksperimentų rezultatai. Pavyzdžiui, savo 1986 metų darbe jie aprašo eksperimentą, kurio rezultatai rodo, jog tų pačių alternatyvų pasirinkimas priklauso nuo to, kaip jos formuluojamos. Tiriamiesiems buvo pasiūlyta tokia pasirinkimo galimybė: prognozuojamas epidemijos aukų skaičius 600; reikia pasirinkti tarp dviejų viena kitą atmetančių veikimo programų, kurių rezultatai yra

(a) 400 žmonių mirs.

(b) su tikimybe $1/3$ mirs 0 žmonių ir su tikimybe $2/3$ mirs 600 žmonių.

Visiškai kitai žmonių grupei buvo pasiūlyta ta pati užduotis tik kitais žodžiais formuluojamos veikimo programų pasekmės:

(c) 200 žmonių išgyvens.

(d) su tikimybe $1/3$ išgyvens visi 600 žmonių ir su tikimybe $2/3$ niekas neišgyvens.

Iš pirmosios apklausiamųjų grupės 22% pasirinko (a), o iš antrosios (kitų) apklausiamųjų grupės 72% pasirinko (c). Nors (a) ir (c) bei atitinkamai (b) ir (d) alternatyvos reiškia tas pačias pasekmes, rezultatai rodo, jog pasirinkimas priklauso nuo to, kaip pasekmės formuluojamos.

1. Arrow, K.J. Social Choice and Individual Values. Second edition. Cowles Foundation, Yale University Press, 1963.

2. Herden, G. and G. B. Mehta (2004). The Debreu Gap Lemma and Some Generalizations. *Journal of Mathematical Economics*, **40**, 747–769.

3. Tversky, A. and D. Kahneman (1986). Rational choice and the framing of decisions. *Journal of Business*, **59**, 261–278.

4. Kreps D. (1990). *A Course in Microeconomic Theory*. Princeton University Press, Princeton.

5. Morkeliūnas, A.*Alternatyvos, preferencijos ir pasirinkimas*. Vilniaus universiteto leidykla, 1997.

6. Sen, A. Choice functions and revealed preference. *Review of Economic Studies*, **38** (July 1971), 307–317.

4 Skyrius

Matematika II

> Atsidėjus ir supratingai sudarytas skaičiavimo mechanizmas protui teikia greitesnį dalyko matymą ir, dažnai jį atliekant, pasiūlo naujus ir lengvesnius kelius bei metodus.
>
> Janas Sniadeckis, 1818.

Bendrosios pusiausvyros egzistavimas paprastai įrodomas remiantis *Brouwer*io nejudamojo taško teorema, arba jos apibendrinimu atitiktims - *Kakutani* nejudamojo taško teorema. Atvirkščiai, bendrosios pusiausvyros egzistavimo faktas įgalina įrodyti *Brouwer*io nejudamojo taško teoremą. Ši aplinkybė rodo bendrosios pusiausvyros egzistavimo fakto fundamentalumą, lygiant jį su kitomis pusiausvyros savybėmis.

4.1 Brouwerio nejudamojo taško teorema

Sakoma, kad funkcija f, vaizduojanti aibę K į savę, turi *nejudamąjį tašką* (angl. fixed point), jei egzistuoja toks $x \in K$, kad $f(x) = x$. Tuo atveju, kai K yra euklidinės erdvės vienetinis rutulys, o funkcija f yra tolydi, nejudamo taško egzistavimą įrodė *Brouwer*is 1912 metais. Įrodysime šiek tiek bendresnį teiginį, taip pat vadinamą *Brower*io nejudamojo taško teorema:

4.1 teorema. *Tegul $K \subset \mathbb{R}^d$ yra iškilasis kompaktas, o $f\colon\ K \to K$ tolydi. Tada f turi nejudamąjį tašką.*

*Brouwer*io teoremą galima laikyti *Bolzano* vidurinių reikšmių teoremos tolydžiosioms funkcijoms, įrodytos dar 1817 metais, apibendrinimu.

4.2 teorema. *Tarkime, kad $g\colon\ [a, b] \to \mathbb{R}$ yra tolydžioji funkcija ir $g(a) \le 0 \le g(b)$. Tada egzistuoja toks $c \in [a, b]$, kad $g(c) = 0$.*

Įrodymas. Jei $g(a) = 0$ arba $g(b) = 0$, tai įrodymas baigtas. Todėl galime tarti, kad $g(a) < 0 < g(b)$. Tegul $S := \{x \in [a, b] \colon g(x) < 0\}$. Kadangi $a \in S$ ir $S \subset [a, b]$, tai realiųjų skaičių aibė S yra netuščia ir aprėžta. Remiantis 2.30 teorema, egzistuoja šios aibės mažiausias viršutinis rėžis $c := MVR_S$. Remiantis realiųjų skaičių trichotomijos savybe, galimi trys atvejai: $g(c) < 0$, $g(c) > 0$ ir $g(c) = 0$.

Tegul $g(c) < 0$. Remiantis g funkcijos tolydumu, egzistuoja toks $\delta > 0$, kad $g(x) < 0$ kiekvienam $x \in (c - \delta, c + \delta)$. Taigi $c + \delta/2 \in S$ – prieštara tam, kad c yra S aibės mažiausias viršutinis rėžis. Jei $g(c) > 0$, tai prieštara gaunama samprotaujant simetriškai. Lieka vienintelė galimybė $g(c) = 0$, ką ir reikia įrodyti. $\square$

Įrodysime nejudamojo taško egzistavimą, kai tolydi funkcija vaizduoja realiųjų skaičių aibės uždarąjį intervalą į save. Tarkime, kad funkcija $f \colon [a, b] \to [a, b]$ yra tolydi ir $a < b$. Tada funkcija g su reikšmėmis $g(x) := x - f(x)$, $x \in [a, b]$, taip pat yra tolydi, $g(a) = a - f(a) \le 0$ ir $g(b) = b - f(b) \ge 0$. Remiantis *Bolzano* vidurinių reikšmių teorema, egzistuoja toks $c \in [a, b]$, kad $g(c) = 0$, t. y. $f(c) = c$. Taigi c yra funkcijos f nejudamasis taškas.

*Brouwer*io nejudamojo taško teoremos funkcijai euklidinėje erdvėje įrodymas gerokai sudėtingesnis. Toliau pateikiame keletą teoremos įrodymų. Pirmasis jų remiasi toliau įrodoma kombinatorine *Sperner*io[1] lema (4.5 lema).

Spernerio lema Euklidinės erdvės $\mathbb{R}^d$ vektoriai $w^0, w^1, \ldots, w^n$ vadinami *geometriškai nepriklausomais*, jei vektoriai $w^1 - w^0, \ldots, w^n - w^0$ yra tiesiškai nepriklausomi. Taip gali būti tik atveju $1 \le n \le d$ remiantis 2.44 teiginiu.

4.3 lema. *Erdvės* $\mathbb{R}^d$ *vektoriai* $w^0, w^1, \ldots, w^n$ *yra geometriškai nepriklausomi tada ir tik tada, kai kiekvienam realiųjų skaičių rinkiniui* $\{\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ *iš sąlygų* $\sum_{i=0}^n \lambda_i w^i = 0$ *ir* $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 0$ *išplaukia* $\lambda_i = 0$ *kiekvienam* $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Įrodymas. Vektoriai $w^1 - w^0, \ldots, w^n - w^0$ yra tiesiškai nepriklausomi tada ir tik tada, kai kiekvienam realiųjų skaičių rinkiniui $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ lygybė

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (w^i - w^0) = 0$$

galioja su sąlyga, kad $\lambda_i = 0$ kiekvienam $i \in \{1, \ldots, n\}$. Iš čia išplaukia lemos tvirtinimas su $\lambda_0 := -\sum_{i=1}^n \lambda_i$. $\square$

Euklidinės erdvės $\mathbb{R}^d$ poaibis H^n vadinamas n*-mate hiperplokštuma* erdvėje $\mathbb{R}^d$, jei egzistuoja tokie tiesiškai nepriklausomi $\mathbb{R}^d$ erdvės vektoriai $v^1, \ldots, v^n$ ir vektorius $v^0 \in \mathbb{R}^d$, kad visi H^n elementai x yra išreiškiami suma $x = v^0 + \sum_{j=1}^n t_j v^j$, kur $t_1, \ldots, t_n$ yra realieji skaičiai. Jei vektorių $v^1, \ldots, v^n$ tiesinį apvalkalą žymėsime V, tai hiperplokštuma H^n yra tiesinės erdvės V postūmis $H^n = v^0 + V = \{v^0 + v \colon v \in V\}$.

[1]Emanuel Sperner – Emanuelis Sperneris (1905–1980), vokiečių matematikas

4.4 teiginys. *Tarkime, kad $\mathbb{R}^d$ erdvės vektoriai $w^0, w^1, \ldots, w^n$ yra geometriškai nepriklausomi. Tada egzistuoja vienintelė n-matė hiperplokštuma H^n, talpinanti savyje aibę $\{w^0, \ldots, w^n\}$. Be to, H^n sudaro visi tie $\mathbb{R}^d$ erdvės vektoriai x, kurie išreiškiami suma*

$$x = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j w^j, \qquad \sum_{j=0}^{n} \lambda_j = 1. \tag{4.1}$$

Įrodymas. Tegul $H^n := w^0 + \{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j (w^j - w^0) \colon (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n\}$. Aibė H^n yra n-matė hiperplokštuma H^n, talpinanti savyje aibę $\{w^0, \ldots, w^n\}$. Jei $x \in H^n$, tai egzistuoja toks $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, kad

$$x = (1 - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j) w^0 + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j w^j.$$

Pažymėję $\lambda_0 := 1 - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j$, gauname (4.1) išraišką. Atvirkščiai, kiekvienas $\mathbb{R}^d$ erdvės vektorius x išreiškiamas (4.1) suma, priklauso H^n. Hiperplokštumos H^n vienatinumas įrodomas remiantis 4.3 lema. $\square$

Tegul $w^0, w^1, \ldots, w^n$ yra geometriškai nepriklausomi $\mathbb{R}^d$ erdvės vektoriai. Vektorių $w^0, w^1, \ldots, w^n$ *n-simpleksu* $\sigma = [w^0, w^1, \ldots, w^n]$ erdvėje $\mathbb{R}^d$ vadinamas iškilas apvalkalas *co* $\{w^0, w^1, \ldots, w^n\}$, t. y.

$$\sigma = [w^0, w^1, \ldots, w^n] := \left\{ \sum_{j=0}^{n} \lambda_j w^j \colon \lambda_j \geq 0,\ j = 0, \ldots, n,\ \sum_{j=0}^{n} \lambda_j = 1 \right\}.$$

Nesunku pastebėti, kad bet kurie du skirtingi vektoriai w^0, w^1 yra geometriškai nepriklausomi erdvėje $\mathbb{R}^d$. Šiuos vektorius jungianti (uždara) atkarpa $[w^0, w^1] = \{\lambda w^0 + (1 - \lambda) w^1 \colon \lambda \in [0, 1]\}$ yra paprasčiausias 1-simpleksas erdvėje $\mathbb{R}^d$. Erdvės $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, trys vektoriai w^0, w^1, w^2 yra geometriškai nepriklausomi tada ir tik tada, kai jie yra trikampio viršūnės; šio trikampio vidus kartu su kraštinėmis yra 2-simpleksas $[w^0, w^1, w^2]$ erdvėje $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$. Panašiai erdvės $\mathbb{R}^d$, $d \geq 3$, keturi vektoriai w^0, w^1, w^2, w^3 yra geometriškai nepriklausomi tada ir tik tada, kai jie yra tetraedro viršūnės, o jo vidus kartu su visais šonais yra 3-simpleksas $[w^0, w^1, w^2, w^3]$ erdvėje $\mathbb{R}^d$, $d \geq 3$.

Taigi n-simpleksas erdvėje $\mathbb{R}^d$ yra apibrėžtas kai $n \in \{1, \ldots, d\}$. Toliau bus patogu 0-simpleksu vadinti bet kurį euklidinės erdvės $\mathbb{R}^d$ vektorių. n-simplekso $[w^0, w^1, \ldots, w^n]$ vektoriai w^j, $j = 0, \ldots, n$, vadinami jo *viršūnėmis*. Kiekvienam indeksų poaibiui $\{j_0, \ldots, j_k\} \subset \{0, \ldots, n\}$, k-simpleksas $[w^{j_0}, \ldots, w^{j_k}]$ vadinamas n-simplekso $[w^0, \ldots, w^n]$ *k-siena*. Pagal šiuos apibrėžimus, kiekviena n-simplekso viršūnė yra 0-siena, o pats n-simpleksas yra n-siena. Kiekvienam $n \in \{1, \ldots, d\}$, n-simplekso $(n-1)$-sieną vadinsime *briauna* (angl. face).

Remiantis 4.4 teiginiu, kiekvienam n-simpleksui σ egzistuoja vienintelė n-matė hiperplokštuma H^n, talpinanti savyje σ. Kiekvienam $x \in H^n$ realieji skaičiai $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$

(4.1) išnašoje yra vieninteliai ir vadinami x-o *baricentrinėmis koordinatėmis* simplekso σ viršūnių atžvilgiu. Hiperplokštumos vektorius x priklauso simpleksui σ tada ir tik tada, kai visos x baricentrinės koordinatės $\lambda_j = \lambda_j(x)$ yra neneigiamos. Kiekvienas simplekso $\sigma = [w^0, \ldots, w^n]$ elementas x vieninteliu būdu išreiškiamas suma $\sum_{j=0}^n \lambda_j w^j$. Teigiamų baricentrinių koordinačių indeksai sudaro vektoriaus x *pagrindą* $\chi(x)$, t.y.

$$\chi(x) := \{j \colon \lambda_j(x) > 0\} \subset \{0, \ldots, n\}.$$

Vėlgi pagal apibrėžimą, jei $\chi(x) = \{j_0, \ldots, j_k\}$, tai vektorius $x \in [w^{j_0}, \ldots, w^{j_k}]$.

n-simplekso σ erdvėje $\mathbb{R}^d$ *vidumi* vadinsime aibę tų σ vektorių, kurių visos baricentrinės koordinatės yra teigiamos, t. y. aibę $\{x \in \sigma \colon \chi(x) = \{0, \ldots, n\}\}$. Simplekso vidus yra atviras ją talpinančios hiperplokštumos poaibis. Be to, σ yra jos vidaus ir jos $n+1$ briaunos sąjunga.

Tarkime, kad σ yra n-simpleksas. n-simpleksų $\{\sigma_i\}_{i=1}^m$ rinkinys vadinamas σ-os *trianguliacija*, jei $\cup_{i=1}^m \sigma_i = \sigma$ ir kiekviena sankirta $\sigma_i \cap \sigma_j$ yra arba tuščia, arba sutampa su bendra siena. Trianguliacijos $\{\sigma_i\}$ elementai σ_i vadinami *elementariaisiais n-simpleksais*.

Tegul W yra elementariųjų simpleksų viršūnių aibė. Trianguliacija vadinamas *taisyklingai žymėta*, jei egzistuoja funkcija $h \colon W \to \{0, \ldots, n\}$ su reikšmėmis $h(v) \in \chi(v)$ visiems $v \in W$. Bet kuris k-simpleksas vadinamas *pilnai žymėtu*, jei jo viršūnių aibėje V apibrėžta funkcija $h \colon V \to \{0, \ldots, k\}$ įgyja skirtingas reikšmes, t. y. funkcija h yra siurjekcija.

Dabar jau esame pasiruošę suformuluoti ir įrodyti *Sperner*io lemą:

4.5 lema. *Tarkime, kad $1 \le n \le d$ ir n-simplekso erdvėje $\mathbb{R}^d$ trianguliacija yra taisyklingai žymėta. Tarp visų elementariųjų n-simpleksų, pilnai žymėtų yra nelyginis skaičius.*

Įrodymas. Tegul $\sigma = [w^0, \ldots, w^n]$ yra n-simpleksas erdvėje $\mathbb{R}^d$ ir $\{\sigma_i\}_{i=1}^m$ yra taisyklingai žymėta σ-os trianguliacija. Apibrėšime keturias simpleksų aibes:

A yra pilnai žymėtų elementariųjų n-simpleksų aibė;

B yra aibė tų elementariųjų n-simpleksų, kurių viršūnės pažymėtos skaičiais $\{0, \ldots, n-1\}$;

C yra aibė tų pilnai žymėtų trianguliacijos briaunų, kurios sutalpinamos σ-os viduje;

D yra aibė tų pilnai žymėtų trianguliacijos briaunų, kurios sutalpinamos σ-os briaunoje.

Čia trianguliacijos briaunomis vadiname elementariųjų n-simpleksų briaunų vidų jei $n \ge 2$ ir pačią briauną-viršūnę jei $n = 1$. Kiekvienam elementariajam n-simpleksui σ_i, $F(\sigma_i)$ yra jo pilnai žymėtų briaunų skaičius. Tvirtiname, kad

$$|A| + 2|B| = \sum_{i=1}^m F(\sigma_i) = 2|C| + |D| \quad \text{ir } |D| \text{ yra nelyginis skaičius.} \tag{4.2}$$

Jei šis teiginys teisingas, tai $|A|$ privalo būti nelyginis skaičius, t.y. iš šio teiginio išplaukia lemos tvirtinimas.

Lemos tvirtinimą įrodysime indukcija pagal n. Tarkime, kad $n = 1$. Šiuo paprasčiausiu atveju, σ yra tiesiog uždaras intervalas $[w_0, w_1] = \{tw_0 + (1-t)w_1\colon\ 0 \leq t \leq 1\}$, o σ-os trianguliacija yra jo suskaidymas intervalais $\sigma_i = [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, m$, $w_0 = x_0$ ir $w_1 = x_m$. Pagal lemos prielaidą, šios trianguliacijos viršūnių aibėje $W = \{x_i\}_{i=0}^m$ yra apibrėžta funkcija h su reišmėmis aibėje $\{0, 1\}$. Šiuo atveju trianguliacija yra tinkamai žymėta tada ir tik tada, kai intervalo $[w_0, w_1]$ galai žymėti skirtingai, t.y. kai $h(x_0) \neq h(x_m)$. Kiekvieno intervalo $\sigma_i = [x_{i-1}, x_i]$ briauna yra to intervalo galai x_{i-1} ir x_i, ir briauna yra pilnai žymėta jei h joje įgyja reikšmę 0. Šiuo atveju funkcijos reikšmė $F(\sigma_i)$ yra intervalo $\sigma_i = [x_{i-1}, x_i]$ galų, pažymėtų nuliumi, skaičius ir todėl

$$F(\sigma_i) = \begin{cases} 0, & \text{jei } h(x_{i-1}) = h(x_i) = 1, \\ 1, & \text{jei } h(x_{i-1}) \neq h(x_i), \text{ t. y. jei } \sigma_i \in A, \\ 2, & \text{jei } h(x_{i-1}) = h(x_i) = 0, \text{ t. y. jei } \sigma_i \in B. \end{cases}$$

Tokiu būdu galioja pirmoji (4.2) teiginio lygybė. Iš kitos pusės, σ-os vidui priklausančių briaunų, šiuo atveju viršūnių $x_i \in (w^0, w^1)$, indėlis į sumą $\Sigma_i F(\sigma_i)$ yra 2 jei $h(x_i) = 0$ (jų yra $|C|$) ir tas indėlis yra 0 priešingu atveju. Likusi šios sumos dalis yra 1, gaunama iš to intervalo $[w^0, w^1]$ galo, kuriame h įgyja 0. Todėl galioja antroji (4.2) išnašos lygybė ir $|D| = 1$, įrodantys visą (4.2) teiginį, o tuo pačiu ir lemos tvirtinimą kai $n = 1$.

Tarkime, kad $1 < n \leq d$ ir lemos teiginys teisingas visiems $\mathbb{R}^d$ erdvės $(n-1)$-simpleksams. Parodysime, kad teiginys teisingas bet kuriam n-simpleksui. Tuo tikslu pastebėsime, kad taisyklingai žymėta σ-os trianguliacija $\{\sigma_i\}_{i=1}^m$ sankirtoje su bet kuria σ-os briauna savo ruožtu sudaro tos briaunos taisyklingai žymėtą trianguliaciją, kuriai galioja lemos teiginys pagal indukcijos prielaidą.

Jei elementarusis n-simpleksas yra pilnai žymėtas, tai tarp visų jo briaunų yra tik viena žymėta pilnai; ji yra ta briauna, kuriai nepriklauso viršūnė su žyme n. Kitaip tariant, jei $\sigma_i \in A$, tai $F(\sigma_i) = 1$. Jei $\sigma_i \in B$, tai jo $n+1$ viršūnės pažymėtos vienu iš rinkinių $\{0, 0, 1, \ldots, n-1\}$, $\{0, 1, 1, \ldots, n-1\}, \ldots, \{0, 1, \ldots, n-1, n-1\}$. Kiekvienas toks elementarusis n-simpleksas turi lygiai dvi pilnai žymėtas briaunas. Visais kitais elementariųjų n-simpleksų viršūnių žymėjimo atvejais nėra pilnai žymėtos briaunos ir todėl galioja pirmoji (4.2) išnašos lygybė.

Tam, kad įrodyti likusią (4.2) teiginio dalį, pirmiausia nagrinėkime tas pilnai žymėtas trianguliacijos briaunas, kurios sutalpinamos σ viduje. Remiantis trianguliacijos apibrėžimu kiekvienas toks $(n-1)$-simpleksas (briauna) yra lygiai dviejų elementariųjų n-simpleksų bendra siena. Todėl tokių briaunų indėlis į sumą $\Sigma_i F(\sigma_i)$ yra $2|C|$. Kadangi σ yra pilnai žymėtas, jis turi tik vieną pilnai žymėta briauną su trianguliacijos pėdsaku, kuris yra taisyklingai žymėtas. Pagal indukcijos prielaidą, ši briauna turi nelyginį skaičių $|D|$ pilnai žymėtų trianguliacijos briaunų, kurių indėlis į $\Sigma_i F(\sigma_i)$ yra $|D|$. Tokiu būdu galioja antroji (4.2) teiginio dalis ir tuo pačiu lema yra įrodyta remiantis indukcijos principu. $\square$

Dabar esame pasiruošę įrodyti atskirą Brouwerio teoremos atvejį.

4.6 teorema. *Tarkime, kad f yra tolydus euklidinės erdvės $\mathbb{R}^d$ n-simplekso atvaizdavimas į save. Tada f turi nejudamą tašką.*

Įrodymas. Tegul $\sigma \subset \mathbb{R}^d$ yra n-simpleksas, kurį f atvaizduoja į save, ir tegul x_i, $f_i(x)$, $i \in \{0, \ldots, n\}$, yra taškų $x, f(x) \in \sigma$ baricentrinės koordinatės. Tvirtiname, kad kiekvienam $x \in \sigma$,

$$\chi(x) \cap \{i\colon\ f_i(x) \leq x_i\} \neq \varnothing. \tag{4.3}$$

Primenam, kad $\chi(x)$ yra x-o pagrindas, t. y. teigiamų baricentrinių koordinačių indeksų aibė. Tegul priešingai, egzistuoja toks $x \in \sigma$, kad $f_i(x) > x_i$ kiekvienam $i \in \chi(x)$. Tada teisinga nelygybė

$$1 = \sum_{i=0}^{n} f_i(x) > \sum_{i \in \chi(x)} x_i = \sum_{i=0}^{n} x_i = 1.$$

Ši prieštara įrodo (4.3). Kiekvienam $x \in \sigma$, tegul $h(x)$ yra minimalus (4.3) netuščios aibių sankirtos elementas. Tada $h(x) \in \chi(x)$ kiekvienam $x \in \sigma$ ir bet kuri σ-os trianguliacija yra taisyklingai žymėta. Todėl remiantis Spernerio lema, kiekviena σ-os trianguliacija turi bent vieną pilnai žymėtą elementarųjį n-simpleksą. Tegul $[v^0, \ldots, v^n]$ yra kurios nors trianguliacijos pilnai žymėtas elementarusis n-simpleksas. Galime tarti, kad $h(v^i) = i$ visiems $i = 0, \ldots, n$. Tada, remiantis h apibrėžimu,

$$f_i(v^i) \leq v_i^i \quad \text{visiems } i = 0, \ldots, n. \tag{4.4}$$

Bet kuriam $\epsilon > 0$, galima parinkti tokią σ-os trianguliaciją, kurioje kiekvieno elementaraus n-simplekso diametras neviršija ϵ (pavyzdžiui, baricentrinę trianguliaciją). Keisdami ϵ taip, kad $\epsilon = 1/k \downarrow 0$ ir pažymėję $v^i(k) := v^i$, $i = 0, \ldots, n$, vektorius, kuriems galioja (4.4), gauname $n+1$ begalinę seką $\{v^i(k)\}_{k \geq 1}$. Kadangi σ yra kompaktas, remiantis 2.60 teorema, iš kiekvienos begalinės sekos galima išrinkti konverguojantį posekį. Be to, kadangi elementariųjų n-simpleksų, kurių viršūnėmis yra sekų $\{v^i(k)\}_{k \geq 1}$ nariai, diametrai konverguoja į nulį, tai visų konverguojančių posekių ribos privalo sutapti; tegul z yra bendra jų riba. Atsižvelgiant į σ uždarumą ir funkcijos f tolydumą, $z \in \sigma$ ir $f_i(z) \leq z_i$ visiems $i = 0, \ldots, n$. Remiantis tuo, kad kiekvieno vektoriaus baricentrinių koordinačių suma yra 1, gauname $f(z) = z$, t.y. z yra f nejudamas taškas.

$\square$

4.1 Teoremos įrodymas. Kadangi $K \subset \mathbb{R}^d$ yra aprėžta aibė, ją galima patalpinti į pakankami didelį n-simpleksą σ su kuriuo nors $1 \leq n \leq d$. Kadangi K yra uždara ir iškila, kiekvienam $x \notin K$ egzistuoja toks vienintelis taškas $x_K \in K$, kad $|x - x_K| = \inf\{|x - y|\colon\ y \in K\}$. Be to, apibrėžę $g(x) := x_K$ jei $x \in \sigma \setminus K$ ir $g(x) := x$ jei $x \in K$ gauname tolydžią funkciją g iš aibės σ į K. Todėl kompozicija $f \circ g$ yra tolydi funkcija iš σ į $K \subset \sigma$. Remiantis 4.6 Teorema, egzistuoja toks $z \in \sigma$, kad $f(g(z)) = z$. Atsižvelgiant į pastarąją lygybę z privalo priklausyti K ir todėl $g(z) = z$, t. y. $f(z) = z$. Taigi $z \in K$ yra nejudamas f taškas. $\square$

Kitas Brouwerio teoremos įrodymas

4.7 teorema (Brouwer). *Tarkime, kad f yra tolydus Euklidinės erdvės $\mathbb{R}^k$ vienetinio rutulio atvaizdavimas į save. Tada f turi nejudamą tašką.*

Šiuo metu egzistuoja labai daug skirtingų Brouwer'io teoremos įrodymų. Čia pateikiame vieną iš paprasčiausių įrodimų, pasiskolintą iš Dunford ir Schwartz (1958) knygos. Šios teoremos įrodyme remsimės tokiu pagalbiniu teiginiu:

4.8 lema. *Tegul $\mathbb{R}^{n+1} \ni \mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \mapsto g(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$ yra be galo diferencijuojama funkcija, ir tegul D_i yra determinantas, kurio stulpeliai yra sudaryti iš n dalinių išvestinių $g_{x_0}, \ldots, g_{x_{i-1}}, g_{x_{i+1}}, \ldots, g_{x_n}$. Tada*

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{\partial}{\partial x_i} D_i = 0. \tag{4.5}$$

Įrodymas. Kiekvienai porai skirtingų indeksų $i, j \in \{0, 1, \ldots, n\}$, tegul $C_{i,j}$ yra toks determinantas, kurio pirmas stulpelis yra mišri išvestinė $g_{x_i x_j}$, o likę stulpeliai yra dalinės išvestinės $g_{x_0}, \ldots, g_{x_n}$ išdėstytos indeksų didėjimo tvarka ir tarp kurių nėra g_{x_i} ir g_{x_j}. Aišku, kad $C_{i,j} = C_{j,i}$. Remdamiesi determinantų diferencijavimo ir stulpelių sukeitimo taisyklėmis, bet kuriam $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ gauname lygybę

$$\frac{\partial}{\partial x_i} D_i = \sum_{j<i} (-1)^j C_{i,j} + \sum_{j>i} (-1)^{j-1} C_{i,j}.$$

Todėl pažymėjus $\sigma(i,j) := 1$ jei $j < i$, $\sigma(i,j) := 0$ jei $j = i$ ir $\sigma(i,j) := -1$ jei $j > i$, lygybė

$$(-1)^i \frac{\partial}{\partial x_i} D_i = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{i+j} C_{i,j} \sigma(i,j).$$

yra teisinga kiekvienam $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Sudėję gauname

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{\partial}{\partial x_i} D_i = \sum_{i,j=0}^{n} (-1)^{i+j} C_{i,j} \sigma(i,j).$$

Sukeitę indeksus vietomis ir pastebėję, kad $\sigma(i,j) = -\sigma(j,i)$ gauname, kad

$$\sum_{i,j=0}^{n} (-1)^{i+j} C_{i,j} \sigma(i,j) = \sum_{i,j=0}^{n} (-1)^{j+i} C_{j,i} \sigma(j,i) = (-1) \sum_{i,j=0}^{n} (-1)^{i+j} C_{i,j} \sigma(i,j)$$

Todėl kiekviena iš trijų sumų privalo būti lygi nuliui. Iščia išplaukia trokštama formulė (4.5). □

4.7 Teoremos įrodymas. Tegul $B(0) \equiv B_1(0) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k\colon |\mathbf{x}| \leq 1\}$ yra Euklidinės erdvės $\mathbb{R}^k$ vienetinis rutulys ir tegul funkcija $f\colon B(0) \mapsto B(0)$ yra tolydi. Iš pradžių parodysime, jog teoremą pakanka įrodyti tuo atveju, kai f yra begalo diferencijuojama. Iš tikro, remiantis Weierstrass'o teorema, tolydžią funkciją f galima tolygiai aproksimuoti begalo diferencijuojamomis funkcijomis, kurios vienetinį rutulį atvaizduoja į savę. Tarkime, kad $\{f_n\}$ yra tokia funkcijų seka. Tada kiekvienam $n \geq 1$, egzistuoja toks $\mathbf{x}_n \in B(0)$, kad $f_n(\mathbf{x}_n) = \mathbf{x}_n$. Kadangi Euklidinės erdvės vienetinis rutulys $B(0)$ yra kompaktas, egzistuoja sekos $\{\mathbf{x}_n\}$ posekis $\{\mathbf{x}_{n_k}\}$, konverguojantis į vienetinio rutulio elementą $\mathbf{x}$, kuris ir yra funkcijos f nejudamas taškas.

Toliau galime tarti, kad funkcija f yra be galo diferencijuojama. Tačiau tarkime, kad $f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{x}$ visiems $\mathbf{x} \in B(0)$. Tegul realus skaičius $a = a(\mathbf{x})$ yra kvadratinės lygties

$$1 = |\mathbf{x} + a(\mathbf{x} - f(\mathbf{x}))|^2 = a^2|\mathbf{x} - f(\mathbf{x})|^2 + 2a(\mathbf{x}, \mathbf{x} - f(\mathbf{x})) + |\mathbf{x}|^2$$

didesnioji šaknis, čia $(\cdot, \cdot)$ žymi skaliarinę sandaugą Euklidinėje erdvėje $\mathbb{R}^k$. Todėl

$$|\mathbf{x} - f(\mathbf{x})|^2 a = (\mathbf{x}, f(\mathbf{x}) - \mathbf{x}) + \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x} - f(\mathbf{x}))^2 + (1 - |\mathbf{x}|^2)|\mathbf{x} - f(\mathbf{x})|^2}. \qquad (4.6)$$

Kadangi $|\mathbf{x} - f(\mathbf{x})| \neq 0$ visiems $\mathbf{x} \in B(0)$, (4.6) išnašoje esantis pošaknis yra teigiamas visiems $|\mathbf{x}| \neq 1$. Jei $|\mathbf{x}| = 1$, tai $(\mathbf{x}, \mathbf{x} - f(\mathbf{x})) \neq 0$, kadangi priešingu atveju $(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) = 1$, o dviejų vektorių, kurių ilgiai neviršija 1, skaliarinė sandauga gali būti lygi 1 tada ir tik tada, kai jie yra lygūs. Tokiu būdu (4.6) išnašoje esantis pošaknis yra teigiamas visiems $\mathbf{x} \in B(0)$. Kadangi funkcija $(0, \infty) \ni t \mapsto \sqrt{t}$ yra be galo diferencijuojama, ir kadangi $|\mathbf{x} - f(\mathbf{x})| \neq 0$ visiems $\mathbf{x} \in B(0)$, tai (4.6) apibrėžia be galo diferencijuojamą funkciją $a\colon B(0) \mapsto \mathbb{R}$. Pagal apibrėžimą, $a(\mathbf{x}) = 0$ jei $|\mathbf{x}| = 1$. Kiekvienam $t \in \mathbb{R}$, tegul $g(t, \mathbf{x}) := \mathbf{x} + ta(\mathbf{x})(\mathbf{x} - f(\mathbf{x}))$. Tada g yra begalo diferencijuojama funkcija iš aibės $\mathbb{R} \times B(0) \subset \mathbb{R}^{k+1}$ į $\mathbb{R}^k$. Kadangi $a(\mathbf{x}) = 0$ visiems $|\mathbf{x}| = 1$, tai dalinė išvestinė pagal t, $g_t(t, \mathbf{x}) = 0$ visiems $|\mathbf{x}| = 1$. O pagal a apibrėžimą gauname, kad $|g(1, \mathbf{x})| = 1$ visiems $\mathbf{x} \in B(0)$.

Tarkime, kad $D_0(t, \mathbf{x})$ yra determinantas, kurio stulpelius sudaro dalinių išvestinių vektoriai $g_{x_1}(t, \mathbf{x}), \ldots, g_{x_n}(t, \mathbf{x})$, ir tegul

$$I(t) := \int_{B(0)} \int D_0(t, x)\, dx_1 \cdots dx_n.$$

Kadangi $D_0(0, x) \equiv 1$, $I(0)$ yra lygus rutulio tūriui ir todėl $I(0) \neq 0$. Be to $I(1) = 0$, kadangi $D_0(1, x) \equiv 0$ dėl tapatybės $|g(1, x)| \equiv 1$ (determinanto eilués yra tiesiškai priklausomos, nes normos išvestinė lygi nuliui). Norimą prieštarą gausime parodę, kad I yra konstanta, tai yra $I'(t) = 0$ visiems t.

Diferencijuodami $I(t)$ po integralo ženklu ir naudodamiesi (4.5) lygybe gauname, kad $I'(t)$ yra lygi sumai n dėmenų

$$\pm \int_{B(0)} \int \frac{\partial}{\partial x_i} D_i(t, \mathbf{x}) dx_1 \ldots dx_n, \qquad i = 1, \ldots, n, \qquad (4.7)$$

čia $D_i(t,\mathbf{x})$ yra determinantas, kurio stulpeliai yra sudaryti iš vektorių

$$g_t(t,\mathbf{x}),\ g_{x_1}(t,\mathbf{x}),\dots,g_{x_{i-1}}(t,\mathbf{x}),\ g_{x_{i+1}}(t,\mathbf{x}),\dots,g_{x_n}(t,\mathbf{x}).$$

Tegul B_i žymi vienetinį rutulį sudarytą iš $n-1$ kintamojo $x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n$, ir tegul

$$x_i^+ := +\sqrt{1-(x_1^2+\cdots+x_{i-1}^2+x_{i+1}^2+\cdots+x_n^2)}, \quad \text{o} \quad x_i^- := -x_i^+.$$

Taip pat, tegul $\mathbf{y}_i^+,\mathbf{y}_i^-\in\mathbb{R}^n$ yra tokie vektoriai, kurių j-toji koordinatė yra x_j jei $j\neq i$, o i-toji koordinatė yra atitinkamai x_i^+ arba x_i^-. Tada kiekvienas iš (4.7) išnašos n integralų yra lygus

$$\pm\int_{B_i}\int D_i(t,\mathbf{y}_i^+)dx_1\dots dx_{i-1}dx_{i+1}\dots dx_n \mp\int_{B_i}\int D_i(t,\mathbf{y}_i^-)dx_1\dots dx_{i-1}dx_{i+1}\dots dx_n.$$

Tačiau $|\mathbf{y}_i^+|=|\mathbf{y}_i^-|=1$, ir todėl $D_i(t,\mathbf{y}_i^+)=D_i(t,\mathbf{y}_i^-)=0$, nes $g_t(t,\mathbf{x})=0$ jei $|x|=1$. Todėl $I'(t)=0$; tai ir reikėjo įrodyti.

Toliau parodoma, kad 4.7 Teorema yra teisinga bendresnei klasei aibių negu Euklidinės erdvės vienetinis rutulys.

4.9 išvada. *Tarkime, kad f yra tolydus Euklidinės erdvės netuščio iškilo kompakto atvaizdavimas į savę. Tada f turi nejudamą tašką.*

Įrodymas. Tegul $B_r(0)$ žymi rutulį, kurios centras yra nulis o spindulys yra $r>0$, ir tegul f yra tolydus $B_r(0)$ atvaizdis į savę. Akivaizdu, kad $(1/r)f(r(\cdot))$ yra tolydus vienetinio rutulio atvaizdis į savę. Remiantis 4.7 Teorema, egzistuoja toks $x\in B_1(0)$, kad $f(rx)=rx$. Kadangi $rx\in B_r(0)$, funkcija f turi nejudamą tašką.

Tegul K yra netuščia, iškila ir kompakti Euklidinės erdvės $\mathbb{R}^k$ aibė, o f yra tolydus K atvaizdis į savę. Sukonstruosime funkcijos f tolydų tęsinį $\tilde f$ į visą Euklidinę erdvę. Kadangi K yra kompaktas, egzistuoja tirštas ir skaitus aibės K elementų poaibis $\{z_1,z_2,\dots\}$. Pažymėję $d(x,K)$ atstumą tarp x ir K, visiems $i\geq 1$ ir $x\notin K$, apibrėžkime

$$\gamma_i(x) := \max\{2-\frac{|x-z_i|}{d(x,K)},0\}.$$

Tada funkcija $\tilde f$ įgyjanti reikšmes

$$\tilde f(x) := \begin{cases} f(x) & \text{jei } x\in K,\\ \Big(\sum_{i\geq 1}2^{-i}\gamma_i(x)\Big)^{-1}\sum_{i\geq 1}2^{-1}\gamma_i(x)f(z_i) & \text{jei } x\notin K,\end{cases}$$

yra funkcijos f tolydus tęsinys į visą Euklidinę erdvę $\mathbb{R}^k$. Kadangi suma

$$\left(\sum_{i=1}^m 2^{-i}\gamma_i(x)\right)^{-1}\sum_{i=1}^m 2^{-1}\gamma_i(x)f(z_i)$$

yra apibrėžta visiems pakankamai dideliems $m = m(x)$, $x \notin K$, ir priklauso aibės $f(K)$ iškilam apvalkalui $conv f(K)$, tai $\tilde{f}(\mathbb{R}^k) \subset \overline{conv f(K)} \subset K$. Tarkime, kad $r > 0$ yra toks, kad $K \subset B_r(0)$. Remiantis pirmąja įrodymo dalimi, egzistuoja funkcijos $\tilde{f}$ nejudamas taškas $x \in B_r(0)$, tai yra $\tilde{f}(x) = x$. Kadangi $\tilde{f}(x) \in K$, tai $x \in K$ ir $f(x) = \tilde{f}(x) = x$, tai yra egzistuoja funkcijos f nejudamas taškas; tai ir reikėjo įrodyti. □

4.2 Atitikties tolydumas

Čia toliau nagrinėjama, 2.2 skyrelyje apibrėžta, atitiktis tarp aibių. Kadangi mus domina atitikties tolydumo sąvoka, aibėse reikalinga atstumo sąvoka. Todėl nagrinėsime atitiktis iš euklidinės erdvės $\mathbb{R}^m$ aibės T į euklidinės erdvės $\mathbb{R}^n$ aibę S. Netrukus apibrėšime atitikties tolydumą iš išorės (4.10 apibrėžimas) ir iš vidaus (4.12 apibrėžimas). Tada atitiktis vadinama tolydžia, jei ji yra tolydi iš išorės ir tolydi iš vidaus (4.14 apibrėžimas).

4.10 apibrėžimas. Tarkime, kad S ir T yra euklidinės erdvės aibės ir ψ yra atitiktis iš S į T su apibrėžimo sritimi $\mathcal{A}(\psi) \subset S$. Sakysime, kad ψ yra *tolydi iš išorės taške* $s \in \mathcal{A}(\psi)$ (angl. upper hemicontinuous), jei kiekvienam aibės $\psi[s]$ atviru viršaibiu U egzistuoja tokia s aplinka V, kurios vaizdas $\psi[V] \subset U$. Jei atitiktis ψ yra tolydi iš išorės taške s kiekvienam $s \in \mathcal{A}(\psi)$, tai ją vadinsime *tolydžia iš išorės* savo apibrėžimo srityje. Taip pat sakysime, kad atitikčiai ψ galioja *išorinis tolydumas* taške arba aibėje.

Pagal tokią tolydumo sąvoką aibė $\psi[s]$ negali tapti per daug didele – „sprogti į išorę“ – lyginant ją su $\psi[s_0]$ kai s yra arti s_0. Tačiau toje pačioje situacijoje $\psi[s]$ gali staiga sumažėti, t. y. „sprogti į vidų“. Nesunku pastebėti, kad atitikčiai ψ esant funkcija, jos išorinis tolydumas yra ekvivalentus (funkcijos) tolydumui. Dėl šios priežasties atitiktims nėra tinkamas kartais vartojamas pusiautolydumo (angl. semicontinuous) terminas.

Atitikties tarp euklidinės erdvės poaibių tolydumui iš išorės patikrinti naudosimės tokiu kriterijumi:

4.11 teorema. *Sakykime, kad S ir T yra euklidinių erdvių poaibiai ir ψ yra tokia atitiktis iš S į T, kurios vaizdas $\psi[s]$ taške $s \in \mathcal{A}(\psi) \subset S$ yra kompaktiška aibė. Atitiktis ψ yra tolydi iš išorės taške s tada ir tik tada, kai su kiekviena į s konverguojančia seka (s_n) ir su kiekviena seka (t_n), sudaryta iš $t_n \in \psi[s_n]$, egzistuoja posekis (t_{n_k}) konverguojantis į kurį nors aibės $\psi[s]$ elementą, arba trumpai formuluojant, galioja*:

$$\textit{jei} \quad s_n \to s,\ t_n \in \psi[s_n]\ \forall n \quad \textit{tai} \quad \exists\ (t_{n_k}):\ t_{n_k} \to t \in \psi[s]. \tag{4.8}$$

Įrodymas. Tarkime, kad atitiktis ψ yra tolydi iš išorės taške s, seka $s_n \to s$, o seka (t_n) sudaryta iš $t_n \in \psi[s_n]$. Kadangi kompaktinė aibė yra aprėžta (2.60 teorema), o aibė $\psi[s]$ yra kompaktinė, tai egzistuoja aprėžtas ir atviras jos viršaibis U. Remiantis 4.10 apibrėžimu, egzistuoja tokia s aplinka V, kad $\psi[t] \subset U$ visiems $t \in V$. Turėdami s aplinką V, galime rasti tokį indeksą $N \in \mathbb{N}_+$, kad visiems $n \geq N$, $s_n \in V$ ir todėl

$t_n \in \psi[s_n] \subset U$. Iš čia gauname išvadą, kad (t_n) yra aprėžta seka. Kadangi iš aprėžtos sekos galima išrinkti konverguojantį posekį (2.62 išvada), egzistuoja vektorius t ir į jį konverguojantis sekos (t_n) posekis (t_{n_k}). Tarkime, kad $t \notin \psi[s]$. Tada atstumas tarp vektoiaus t ir aibės $\psi[s]$ yra

$$\epsilon := d(\psi[s], t) := \inf\{|u - t|\colon\ u \in \psi[s]\} > 0$$

(kodėl?). Nesunku matyti, kad aibė

$$G_\epsilon := \{u \in T\colon\ d(\psi[s], u) < \epsilon/2\}$$

yra atviras $\psi[s]$ viršaibis. Dar kartą remdamiesi 4.10 apibrėžimu, gauname išvadą, kad egzistuoja toks $K \in \mathbb{N}_+$, kad $t_{n_k} \in G_\epsilon$ visiems $k \geq K$. Naudodami euklidinės normos subaditivumą, kiekvienam $u \in \psi[s]$ ir $k \geq K$, gauname nelygybes

$$|t - t_{n_k}| \geq |t - u| - |u - t_{n_k}| \geq \epsilon - \epsilon/2 = \epsilon/2,$$

kas prieštarauja tam, kad $t_{n_k} \to t$ kai $k \to \infty$. Todėl $t \in \psi[s]$.

Teoremos teiginio įrodymui priešinga linkme tarkime, kad galioja (4.8) bet ψ nėra tolydi iš išorės taške s. Tada egzistuoja toks aibės $\psi[s]$ atviras viršaibis U, jog kiekvienos s aplinkos V vaizdas $\psi[V]$ turi elementų, nepriklausančių aibei U, t. y. $\psi[V] \setminus U \neq \varnothing$. Tarkime, kad (B_n) yra seka, sudaryta iš atvirų rutulių $B_n = B(s, 1/n)$ su centru taške s ir spinduliu $1/n$. Egzistuoja seka (t_n), kurios elementai $t_n \in \psi[B_n] \setminus U$ (kodėl?). Kadangi $\psi[B_n] = \cup_{r \in B_n} \psi[r]$ kiekvienam n, taip pat turime tokią seką (s_n), kad $s_n \in B_n$ ir $t_n \in \psi[s_n]$. Tada $s_n \to s$ ir (4.8) prielaidos dėka privalo egzistuoti į aibės $\psi[s]$ elementą t konverguojantis posekis (t_{n_k}). Tačiau aibė $T \setminus U$ yra uždara, $(t_{n_k}) \subset T \setminus U$ ir todėl riba t negali priklausyti aibei $\psi[s]$ – prieštara, įrodantis ψ išorinį tolydumą taške s. $\square$

Atitikties kompaktumo prielaida taške įrodytoje teoremoje nėra suvaržanti, kaip rodo šie argumentai. Tarkime, kad atitiktis ψ iš S į T yra tolydi iš išorės aibėje S ir tegul $s \in S$. Pirma, pagal apibrėžimą, $\psi(s)$ yra aprėžta. Antra, (4.8) kriterijuje paėmę trivialią seką $\{s_n \equiv s\} \in S$, gauname, kad aibė $\psi(s)$ yra uždara. Todėl $\psi(s)$ yra kompaktas Euklidinės erdvės poaibyje T.

4.12 apibrėžimas. Tarkime, kad S ir T yra euklidinės erdvės aibės ir ψ yra atitiktis iš S į T su apibrėžimo sritimi $\mathcal{A}(\psi)$. Sakysime, kad ψ yra *tolydi iš vidaus taške* $s \in \mathcal{A}(\psi)$ (angl. lower hemicontinuous), jei su kiekviena atvira aibe U, turinčia netuščią sankirtą su aibe $\psi[s]$, egzistuoja tokia s aplinka V, kad sankirta $\psi[t] \cap U \neq \varnothing$ visiems $t \in V$. Jei ψ yra tolydi iš vidaus taške s kiekvienam $s \in \mathcal{A}(\psi)$, tai ją vadinsime *tolydžia iš vidaus* savo apibrėžimo srityje. Taip pat sakysime, kad ψ galioja *vidinis tolydumas* taške arba aibėje.

4.13 teorema. *Tarkime, kad S ir T yra euklidinių erdvių poaibiai, ψ yra atitiktis iš S į T ir $s \in \mathcal{A}(\psi)$. Atitiktis ψ yra tolydi iš vidaus taške s tada ir tik tada, kai su kiekviena į s konverguojančia seka $(s_n) \subset S$ ir kiekvienam $t \in \psi[s]$, egzistuoja tokia į t konverguojanti seka $(t_n) \subset T$, kurios elementai $t_n \in \psi[s_n]$ kiekvienam n, arba trumpai formuluojant, galioja*:

$$\textit{jei} \quad s_n \to s,\ t \in \psi[s] \quad \textit{tai} \quad \exists\ (t_n)\colon\ \ t_n \to t,\ t_n \in \psi[s_n]. \tag{4.9}$$

Įrodymas. Tarkime, kad ψ yra tolydi iš vidaus taške s, seka $s_n \to s$ kai $n \to \infty$ ir $t \in \psi[s]$. Taip pat tarkime, kad kiekvienam $k \in \mathbb{N}_+$, $B_k := B(t, 1/k)$ yra atviras rutulys su centru taške t ir spinduliu $1/k$. Aišku, kad $B_k \cap \psi(s) \neq \varnothing$ kiekvienam k. Kadangi ψ yra tolydi iš vidaus taške s, su kiekvienu $k \in \mathbb{N}_+$, egzistuoja tokia s aplinka V_k, kad $\psi[r] \cap B_k \neq \varnothing$ kiekvienam $r \in V_k$. Kadangi $s_n \to s$, kiekvienam k, egzistuoja toks $n_k \in \mathbb{N}_+$, kad $s_n \in V_k$ kiekvienam $n \geq n_k$. Galima tarti, kad $n_k < n_{k+1}$ visiems k. Tada egzistuoja tokia seka (t_n), kad kiekvienam $n \geq n_1$, $t_n \in \psi[s_n] \cap B_k$ jei $n \in [n_k, n_{k+1})$ (kodėl?). Taip sudaryta seka (t_n) išpildo (4.9).

Teoremos teiginio įrodymui priešinga linkme tarkime, kad galioja (4.9) bet ψ nėra tolydi iš vidaus taške s. Tada egzistuoja tokia atvira aibė U, kad $U \cap \psi[s] \neq \varnothing$ ir bet kurioje s aplinkoje V yra toks taškas s_V, kad $\psi[s_V] \cap U = \varnothing$. Todėl egzistuoja tokia į s konverguojanti seka (s_n), kad $\psi[s_n] \cap U = \varnothing$. Dabar tarkime, kad $t \in U \cap \psi[s]$. Pagal prielaidą (4.9) egzistuoja tokia į t konverguojanti seka (t_n), kad $t_n \in \psi[s_n] \subset U^c$ kiekvienam n. Kadangi $U^c := T \setminus U$ uždara, tai riba t taip pat turėtų priklausyti U^c – prieštara tam, kad $t \in U$. Prieštara įrodo, kad ψ yra tolydi iš vidaus taške s. □

Galiausiai atitikties tolydumas suprantamas tokiu būdu:

4.14 apibrėžimas. Tarkime, kad S ir T yra euklidinės erdvės aibės ir ψ yra atitiktis iš S į T. Sakysime, kad ψ yra *tolydi taške* $s \in S$, jei taške s ji yra tolydi iš išorės ir tolydi iš vidaus. Jei ψ yra tolydi taške s kiekvienam $s \in S$, tai ją vadinsime *tolydžia aibėje* S.

Tolydumo stabilumas Toliau suformuluosime keletą faktų apie tolydumo savybės išlaikymą, pereinant nuo vienų atitikčių prie jų standartinių transformacijų.

Prisiminę aibės uždarinį (2.56 apibrėžimas) galime taip pat apibrėžti atitikties φ iš S į T *uždarinį*:

$$\overline{\varphi}\colon\ s \mapsto \overline{\varphi[s]} \subset T, \qquad s \in \mathcal{A}(\varphi).$$

4.15 teiginys. *Jei atitiktis φ iš S į T yra tolydi iš išorės taške $s \in \mathcal{A}(\varphi)$, tai jos uždarinio atitiktis $\overline{\varphi}$ iš S į T taip pat tolydi iš išorės taške s.*

Įrodymas. Siūlome tai padaryti skaitytojui, parodant ir naudojantis tuo, kad bet kurios dvi uždaros ir nesikertančios euklidinės erdvės aibės turi nesikertančias atviras aplinkas. □

Tarkime, kad φ_i, $i = 1, \dots, n$, yra atitiktys iš S į T. Jei $\bigcap_{i=1}^n \mathcal{A}(\varphi_i) \neq \varnothing$, tai atitikčių *sąjunga* yra atitiktis

$$\bigcup_{i=1}^n \varphi_i\colon \ s \mapsto \bigcup_{i=1}^n \varphi[s] \subset T, \qquad s \in \bigcap_{i=1}^n \mathcal{A}(\varphi_i).$$

Kito teiginio įrodymas paliekamas skaitytojui.

4.16 teiginys. *Jei kiekvienam $i = 1, \dots, n$ atitiktis φ_i iš S į T yra tolydi iš išorės taške $s \in \mathcal{A}(\varphi_i)$ ir $s \in \bigcap_{i=1}^n \mathcal{A}(\varphi_i)$, tai jų sąjunga taip pat tolydi iš išorės taške s.*

Tarkime, kad ψ yra atitiktis iš S į T ir φ yra atitiktis iš T į U, čia U yra taip pat euklidinės erdvės aibė. Priminisme (žr. (2.21)), kad kompozicijos atitiktimi vadinama aibė

$$\varphi{\circ}\psi = \{(s,u) \in S \times U\colon \ \exists\, t \in T, \ \ t \in \psi[s] \quad \text{ir} \quad u \in \varphi[t]\}, \tag{4.10}$$

jei ji yra netuščia. Pavyzdžiui, taip yra, jei $\mathcal{R}(\psi) = \mathcal{A}(\varphi)$. Nesunku matyti, kad

$$\mathcal{A}(\varphi{\circ}\psi) \ni s \mapsto \varphi{\circ}\psi[s] = \bigcup_{t \in \psi[s]} \varphi[t] \subset U.$$

4.17 teiginys. *Tarkime, kad ψ yra atitiktis iš S į T, φ yra atitiktis iš T į U ir yra apibrėžta kompozicijos atitiktis $\varphi{\circ}\psi$. Tada galioja (a) ir (b); čia*

(a) *jei ψ ir φ yra tolydžios iš išorės, tai $\varphi{\circ}\psi$ yra tolydi iš išorės;*

(b) *jei ψ ir φ yra tolydžios iš vidaus, tai $\varphi{\circ}\psi$ yra tolydi iš vidaus.*

Įrodymas. Įrodysime tik (a) teiginį; (b) teiginį įrodyti si ūlome sakitytojui. Tegul$\{s, s_1, s_2, \dots\} \subset \mathcal{A}(\varphi{\circ}\psi)$, $s_n \to s$ kai $n \to \infty$ ir $u_n \in \varphi{\circ}\psi[s_n]$ kiekvienam n. Tada kiekvienam n, egzistuoja toks $t_n \in T$, kad $t_n \in \psi[s_n]$ ir $u_n \in \varphi[t_n]$. Kadangi ψ yra tolydi iš išorės, remiantis (4.8), egzistuoja toks sekos (t_n) posekis (t_{n_k}) ir $t \in \psi[s]$, kad $t_{n_k} \to t$ kai $n_k \to \infty$. Kadangi $u_{n_k} \in \varphi[t_{n_k}]$ ir φ yra tolydi iš išorės, tai egzistuoja sekos (u'_k), kurios nariai yra $u'_k := u_{n_k}$, posekis (u'_{k_l}) ir $u \in \varphi[t]$, kad $u'_{k_l} \to u$ kai $l \to \infty$. Kadangi $u \in \varphi{\circ}\psi[s]$, $\varphi{\circ}\psi$ yra tolydi iš išorės taške $s \in \mathcal{A}(\varphi{\circ}\psi)$, remiantis 4.11 teorema. Kadangi $s \in \mathcal{A}(\varphi{\circ}\psi)$ yra laisvai pasirinktas, $\varphi{\circ}\psi$ yra tolydi iš išorės savo apibrėžimo srityje. □

Toliau ne kartą naudosime atitiktis, kurių vaizdams galioja apibrėžime nurodomos savybės. Priminsime, jog atitikties vaizdai apibrėžti 2.2 skyrelio pradžioje.

4.18 apibrėžimas. Sakysime, kad atitiktis φ iš S į T *turi iškilus vaizdus,* jei atitikties vaizdas $\varphi[x]$ yra iškilas aibėje T kiekvienam $x \in \mathcal{A}(\varphi) \subset S$. Analogiškai apibrėžiamas atitiktis *turinti kompaktiškus vaizdus* ir atitiktis *turinti uždarus vaizdus.*

Pratimai

1. Įrodyti 4.17(b) teiginį.

4.3 Kakutanio nejudamojo taško teorema

Tarkime, kad S yra euklidinės erdvės aibė ir μ yra atitiktis iš S į pačią savę. Aibės S elementas x vadinamas μ *nejudamuoju tašku*, jei $x \in \mathcal{A}(\mu)$ ir $x \in \mu[x]$. Akivaizdu, jog μ esant funkcija, t. y. kai $\mu[s] = \{\mu(s)\}$ kiekvienam $s \in \mathcal{A}(\mu) \subset S$, tai atitikties nejudamasis taškas x tampa funkcijos nejudamuoju tašku, nes tuo atveju $\mu(x) = x \in \{x\} = \mu[x]$ (žr. 2.36 apibrėžimą ir komentarą po jo).

4.19 teorema (Kakutani). *Tarkime, kad S yra euklidinės erdvės netuščias, kompaktiškas ir iškilas poaibis, o μ yra tolydi iš išorės atitiktis iš $\mathcal{A}(\mu) = S$ į S, turinti iškilus vaizdus. Tada μ turi bent vieną nejudamąjį tašką.*

Šią *Kakutanio*[2] teoremą įrodysime (kaip yra jau įprasta) atitiktį aproksimuodami tolydžia funkcija ir naudodami Brouwerio teoremą funkcijoms. Priminsime, kad $B(x, \epsilon)$ yra euklidinės erdvės atviras rutulys su centru x ir spinduliu ϵ, o $d(x, G) = \inf\{|x - y|\colon\ y \in G\}$ yra atstumas tarp taško $x \in \mathbb{R}^\ell$ ir aibės $G \subset \mathbb{R}^\ell$. Tada aibės G ϵ-aplinka yra

$$N_\epsilon(G) := \{x \in \mathbb{R}^\ell\colon\ d(x, G) < \epsilon\} = \bigcup_{y \in G} B(y, \epsilon).$$

Kai $G = \mu \subset \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^k$, atstumo apibrėžime $d((u, v), G)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^k$ naudojama euklidinė $\mathbb{R}^{\ell+k}$ erdvės norma, remiantis 2.3 skyrelio pradžioje nustatytu susitarimu.

4.20 teiginys. *Tegul $S \subset \mathbb{R}^\ell$ yra kompaktiška aibė, $T \subset \mathbb{R}^k$ yra iškila aibė ir μ yra iškila, kompaktiška ir tolydi iš viršaus atitiktis iš S į T. Tada, kiekvienam $\epsilon > 0$, egzistuoja tokia (nuo ϵ priklausanti) tolydi funkcija $f\colon\ S \to T$, kuriai galioja $f \subset N_\epsilon(\mu)$.*

Įrodymas. Kiekvienam $\delta > 0$ ir $x \in S$, rutulio $B(x, \delta)$ vaizdo atžvilgiu μ iškilą apvalkalą pažymėkime taip:

$$\mu^\delta[x] := conv\big(\mu[B(x, \delta)]\big). \tag{4.11}$$

Šios aibės apibrėžia atitiktį $\mu^\delta\colon\ x \mapsto \mu^\delta[x] \subset T$, $x \in S$. Pirmiausia įrodysime pagalbinį teiginį.

4.21 lema. *Kiekvienam $\epsilon > 0$, egzistuoja toks $\delta > 0$, kad $\mu^\delta \subset N_\epsilon(\mu)$.*

Lemos įrodymui tarkime, kad taip nėra. Tada egzistuoja toks $\epsilon > 0$, kad kiekvienam $n \in \mathbb{N}_+$, galime rasti tokią sutvarkytą porą $(x_n, y_n) \in \mu^{1/n}$, kuriai galioja nelygybė

$$d((x_n, y_n), \mu) \geq \epsilon. \tag{4.12}$$

[2] Shizuo Kakutani [..] (1911–2004) japonų matematikas

Kiekvienam n, kadangi $y_n \in \mu^{1/n}[x_n] \subset \mathbb{R}^k$, remiantis (4.11) su $\delta = 1/n$ ir Carathéodory teorema (2.99 teorema), egzistuoja tokie

$$y_n^0, \ldots, y_n^k \in \mu[B(x_n, 1/n)], \tag{4.13}$$

ir $\lambda_n^0, \ldots, \lambda_n^k \in \mathbb{R}_+$, kad $\sum_{i=0}^k \lambda_n^i = 1$ ir $y_n = \sum_{i=0}^k \lambda_n^i y_n^i$. Remiantis (4.13), kiekvienam n ir i galima rasti tokius $z_n^i \in B(x_n, 1/n)$, kad $y_n^i \in \mu[z_n^i]$. Kadangi aibė S yra kompaktiška ir norėdami supaprastinti žymėjimus galime tarti, kad pati seka (x_n) konverguoja į kurį nors $x \in S$, kai $n \to \infty$ ir todėl, kiekvienam i, z_n^i konverguoja į x kai $n \to \infty$. Kadangi μ yra tolydi iš viršaus, remiantis 4.11 teorema, vėl žymėjimo supaprastinimui galime tarti, kad kiekvienam i, y_n^i konverguoja į tokį $y^i \in T$, kuriam $y^i \in \mu[x]$. Be to, kadangi $\lambda_n^i \in [0, 1]$, galime tarti, jog kiekvienam i, egzistuoja tokie $\lambda^i \in [0, 1]$, kad $\sum_{i=0}^k \lambda^i = 1$ ir λ_n^i konverguoja į λ^i. Tokiu būdu, kai $n \to \infty$, sumos $y_n = \sum_{i=0}^k \lambda_n^i y_n^i$ konverguoja į sumą $y := \sum_{i=0}^k \lambda^i y^i$, kuri priklauso iškilai aibei T ir $y \in \mu[x]$, nes μ yra iškila. Taigi (x_n, y_n) konverguoja į $(x, y) \in \mu$, kas prieštarauja nelygybei (4.12). Ši prieštara įrodo lemą.

Grįžtant prie 4.20 teiginio įrodymo, tarkime, kad duotas $\epsilon > 0$. Remiantis 4.21 lema, egzistuoja toks $\delta > 0$, kad $\mu^\delta \subset N_\epsilon(\mu)$. Lieka sukonstruoti tokią tolydžią funkciją $f\colon S \to T$, kad $f \subset \mu^\delta$. Tai padarysime konstruodami vadinamąjį vieneto išskaidymą.

Kadangi S yra kompaktas, egzistuoja tokia baigtinė aibė $\{x_i\}_{i=1}^m \subset S$, kad atviri rutuliai $\{B(x_i, \delta)\}_{i=1}^m$ dengia S. Kiekvienam $i = 1, \ldots, m$, apibrėžkime funkciją $g_i\colon S \to \mathbb{R}_+$ su reikšmėmis $g_i(x) := d(x, S \setminus B(x_i, \delta))$. Kiekviena iš funkcijų g_i yra tolydi (4.3.1 pratimas) ir lygi nuliui už rutulio $B(x_i, \delta)$. Be to, nei viename S taške visos g_i kartu nėra lygios nuliui. Todėl galime apibrėžti funkcijas $\lambda_i := g_i / \sum_{j=1}^m g_j$, $i = 1, \ldots, m$, iš S į $[0, 1]$, kurios yra tolydžios ir $\sum_{i=1}^m \lambda_i \equiv 1$ (šeima $\{\lambda_i\}_{i=1}^m$ vadinama vieneto išskaidymu). Kiekvienam $i = 1, \ldots, m$, imkime $y_i \in \mu[x_i]$ ir, kiekvienam $x \in S$, pažymėkime

$$f(x) := \sum_{i=1}^m \lambda_i(x) y_i \in T.$$

Visų pirma, šios reikšmės apibrėžia tolydžią funkciją $f\colon S \to T$. Antra, kiekvienam i ir $x \in S$, jei $\lambda_i(x) > 0$, tai $x \in B(x_i, \delta)$ pagal g_i apibrėžimą ir todėl, prisiminę (4.11), gauname, kad $f(x) \in \mu^\delta[x]$, t.y. $f \subset \mu^\delta$; tai ir reikėjo įrodyti. $\square$

Kakutani teoremos įrodymas. Naudosimės 4.20 teiginiu kai $S = T \subset \mathbb{R}^\ell$ ir $\epsilon = 1/n$, $n \in \mathbb{N}_+$. Taigi kiekvienam n egzistuoja tokia tolydi funkcija $f_n\colon S \to S$, kuriai

$$\{(x, f_n(x))\colon x \in S\} = f_n \subset N_{1/n}(\mu) = \{(u, v) \in S \times S\colon d((u, v), \mu) < 1/n\}. \tag{4.14}$$

Remiantis Brouwerio teorema (4.1 teorema), kiekvienam n egzistuoja f_n nejudamas taškas, t.y. egzistuoja toks $x_n \in S$, kad $f_n(x_n) = x_n$. Remiantis (4.14), kiekvienam n galima rasti tokius $u_n, v_n \in S$, kad $v_n \in \mu(u_n)$, $|x_n - u_n| < \sqrt{2}/n$ ir $|x_n - v_n| = |f_n(x_n) - v_n| < \sqrt{2}/n$. Kadangi S yra kompaktas, seka (x_n) turi konverguojantį posekį.

Žymėjimo paprastumui tarkime, jog pati seka (x_n) konverguoja į $x \in S$. Todėl turime, kad $u_n \to x$ ir $v_n \in \mu[u_n]$. Kadangi μ yra tolydi iš viršaus atitiktis, remiantis 4.11 teorema, seka (v_n) turi posekį, konverguojantį į kurį nors $\mu[x]$ aibės elementą v. Dar kartą paprastumo dėlei tarkime, kad $v_n \to v$ kai $n \to \infty$. Kadangi $|x_n - v_n| \to 0$, tai $x = v \in \mu[x]$; tai ir reikėjo įrodyti. □

Pratimai

1. Atstumu tarp vektoriaus $x \in E \subset \mathbb{R}^\ell$ ir aibės $F \subset \mathbb{R}^\ell$ vadinamas infimumas $d(x, F) := \inf\{|x - y| \colon\ y \in F\}$. Įrodyti, kad funkcija $x \mapsto d(x, F)$, $x \in E$, yra tolydi. Taip pat, jei F yra uždara, tai egzistuoja toks $y \in F$, kad $d(x, F) = |x - y|$ kiekvienam $x \in E$.

4.4 Pastabos ir papildoma literatūra

Nejudamojo taško teorija Nejudamo taško teorija yra labai plati netiesinės analizės matematikoje sritis. Geriausiai matematikos specialybės studentams yra žinoma Banacho nejudamo taško teorema.

4.1 skyrelis Pateiksime dar vieną, bet labai trumpą *Brouwer*io nejudamojo taško teoremos įrodymas. Jis remiasi labai svarbia matematikoje ir jos taikymuose indekso ? teorija (angl. degree theory).

Tarkime, kad aibė $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ yra netuščia, aprėžta ir atvira, $\overline{\Omega}$ yra jos uždarinys, o funkcija $g \colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^d$ yra tolydi. Su šia funkcija susiesime sveiką skaičių (indeksą), kuris yra stabilus atžvilgiu funkcijos pokyčių ir išreiškia naudingą informaciją apie ją.

Galima būtų bandyti laikyti funkcijos indeksu jos nulių skaičių. Daugeliui funkcijų šis skaičius nekinta, nežymiai keičiant pačią funkciją. Tačiau, funkcija g su reikšmėmis $g(x) = x^2$ ir jų pokyčiai $x^2 + \epsilon$, gauti nežymiai kintant ϵ, keičia tokio „indekso“ reikšmes 0, 1 arba 2, priklausomai nuo to ar ϵ yra teigiamas, nulis ar neigiamas. Taip apibrėžtas „indeksas“ būtų stabilus tik negausiai funkcijų klasei.

Žymiai naudingesnis yra „algebrinis“ funkcijos nulių skaičiavimo metodas. Būtent, tarkime, kad funkcija $g \colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^d$ turi šias savybes:

(1) $0 \notin g(\partial\Omega)$;

(2) g yra tolydžiai diferencijuojama aibėje Ω;

(3) jei $x_0 \in \Omega$ yra toks, kad $g(x_0) = 0$, tai $\det Dg(x_0) \neq 0$.

Jei galioja (3) savybė, tai 0 vadinama funkcijos g *reguliaria reikšme*. Funkcijoms g, turinčioms savybes (1) – (3), indeksas apibrėžiamas skaičiumi

$$d(g, \Omega, 0) := \sum_{x_0 \in g^{-1}(0)} \operatorname{sign} \det Dg(x_0), \tag{4.15}$$

jei $g^{-1}(0) \neq \varnothing$, ir $d(g, \Omega, 0) := 0$ priešingu atveju. Funkcijos g savybes (1) – (3) leidžia įsitikinti, kad aibė $g^{-1}(0)$ yra baigtinė ir $d(g, \Omega, 0)$ yra sveikas skaičius. Svarbiausia šiame indekso apibrėžime yra tai, kad kiekvienos šaknies indėlis į suma priklauso nuo tiesinės aproksimacijos orientacijos tame taške. Gauta suma funkcijos pokyčių atžvilgiu yra pakankamai stabili. Nagrinėto pavyzdžio $g(x) = x^2 + \epsilon$ atveju, nepriklausomai nuo ϵ ženklo, indeksas visada lygus 0 (kai tik $0 \in \Omega$). Kaip tik atsižvelgiant į tokį stabilumą, galima pratęsti indekso apibrėžimą toms funkcijoms, kurioms neb$\overline{\text{u}}$tinai galioja(2) ir (3) savybės. Naudojant *Sard*o teoremą apie reguliarių reikšmių tirštumą, nulio reguliarumo sąlygą galima susilpninti ir apibrėžti indeksą riba

$$d(g, \Omega, 0) := \lim_{\epsilon \to 0} d(g_\epsilon, \Omega, 0),$$

kai nulis yra reguliari funkcijos g_ϵ reikšmė kiekvienam ϵ. Riba nepriklauso nuo funkcijų g_ϵ sekos parinkimo, nors šio fakto įrodymas yra netrivialus. Nudojant kitą aproksimaciją, tolydaus diferencijuojamumo sąlygą galima pakeisti funkcijos g tolydumu ir apibrėžti vienintelį skaičių $d(g, \Omega, 0)$, kai tik funkcija $g\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^d$ yra tolydi ir $0 \notin g(\partial\Omega)$. Taip apibrėžtas skaičius $d(g, \Omega, 0)$ vadinamas funkcijos *Brouwer*io indeksu ant Ω (nulio atžvilgiu). Šios konstrukcijos detales galima rasti Deimling (1985), Schmitt ir Thompson (1998), bei Browder (1983) darbuose. *Brouwer*io indeksas siejasi su *Kronecker*io charakteristika ir *Gauss*o atvaizdžiu. Apie tai ir kitas įdomias istorines detales galime paskaityti Siegberg (1981) straipsnyje.

*Brouwer*io indeksas turi daug įdomių savybių; pavyzdžiui šias savybes.

(1) **Normavimas**. Jei I yra tapatinga funkcija, tai

$$d(I, \Omega, 0) = \begin{cases} 1 & \text{jei } 0 \in \Omega, \\ 0 & \text{jei } 0 \notin \Omega. \end{cases}$$

(2) **Sprendinio savybė**. Jei $d(g, \Omega, 0) \neq 0$, tai egzistuoja toks $x \in \Omega$, kad $g(x) = 0$.

(3) **Homotopijos invariantiškumas**. Jei funkcija $H\colon [0,1] \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^d$ tolydi ir $H(t, x) \neq 0$ kiekvienam $x \in \partial\Omega$ ir $t \in [0,1]$, tai $d(H(t, \cdot), \Omega, 0)$ yra konstanta, t. y. nepriklauso nuo t.

(4) **Išpjovimas**. Jei K yra uždaras $\overline{\Omega}$ poaibis ir funkcija g joje neturi nulių, tai $d(g, \Omega, 0) = d(g, \Omega \setminus K, 0)$.

Šių savybių įrodymus galima rasti knygose Brown (1993), Lloyd (1978) ir Deimling (1985). Sprendinio savybė beveik akivaizdi toms funkcijoms g, kurių *Brouwer*io indeksas išreiškiamas (4.15) formule, tačiau ji visai neakivaizdi funkcijoms turinčioms tik tolydumo savybę. Sprendinio savybė kartu su homotopijos invariantiškumu yra vos ne naudingiausios indekso teorijos savybės; žinant vienos funkcijos *Brouwer*io indeksą galima jį surasti kitai funkcijai, jei tarp jų įmanoma sugalvoti homotopiją, tenkinančią (3) sąlygą.

Išvardytos *Brouwer*io indekso savybės įgalina pasiūlyti glaustą nejudamojo taško teoremos įrodymą.

4.22 teorema. *Tegul* $\overline{\Omega}$ *yra euklidinės erdvės* $\mathbb{R}^d$ *uždaras vienetinis rutulys su centru nulyje. Jei funkcija* $f\colon\ \overline{\Omega} \to \overline{\Omega}$ *yra tolydi, tai ji turi nejudamąjį tašką.*

Įrodymas. Galime tarti, kad f neturi nejudamojo taško ant rutulio sienos $\partial\Omega$ (sferos). Tegul $H\colon\ [0,1] \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^d$ yra funkcija su reikšmėmis

$$H(t,x) := x - tf(x), \quad t \in [0,1] \quad \text{ir} \quad x \in \overline{\Omega}.$$

Nesunku įsitikinti, kad H tolydi ir $H(t,x) \neq 0$ kiekvienam $x \in \partial\Omega$ ir $t \in [0,1]$. Remiantis homotopijos invariantiškumu ir normavimo savybėmis, galioja lygybės

$$d(I - f, \Omega, 0) = d(H(1,\cdot), \Omega, 0) = d(H(0,\cdot), \Omega, 0) = d(I, \Omega, 0) = 1.$$

Tada dėka sprendinio savybės, egzistuoja toks $x \in \Omega$, kad $x - f(x) = 0$, t. y. $f(x) = x$. □

4.2 skyrelis Atitikties tolydumo tyrimų pradininkais laikomi Kuratowski (1932) ir Bouligand (1932). Berge [4] ir Hildebrand (1974) knygose surinkti svarbiausi rezultatai apie atitikčių tolydumą. Literatūroje galima rasti skirtingus atitikties tolydumo apibrėžimus; tokie skirtumai ir jų pasekmės apžvelgti Moore (1968).

4.3 skyrelis 4.20 teiginį įrodė von Neumann (1937).

Papildoma literatūra.

1. G. Bouligand (1932). Sur la semi-continuité d'inclusion et quelques sujets connexes. *L'enseignement Mathématique*, 31, 14–22.

2. L. E. J. Brouwer (1912). Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten. *Mathematische Annalen*, 71, 97–115.

3. F. E. Browder (1983). Fixed point theory and nonlinear problems. *Bulletin American Mathematical Society* (N. S.), 9, No. 1, p. 1–39.

4. R. F. Brown (1993). *A topological introduction to nonlinear analysis*. Birkhäuser, Boston.

5. K. Deimling (1985). *Nonlinear functional analysis*. Springer, Berlin.

6. N. Dunford and J. T. Schwartz (1958). *Linear Operators*. Part I: General Theory. Intersience Publishers, New York.

7. W. Hildebrand (1974). *Core and Equilibria of a Large Economy*. Princeton University Press, Princeton.

8. K. Kuratowski (1932). Les fonctions semi-continues dans l'espace des ensembles fermés. *Fundamenta Mathematica*, 18, 148–159.

9. N. G. Lloyd (1978). *Degree theory*. Cambridge Tracts in Mathematics No. 73. Cambridge University Press.

10. J. Moore (1968). A Note on Point-Set Mappings. In: *Papers in Quantitative Economics I*. Eds. J. Quirk and A. Zarley, University of Kansas Press.

11. K. Schmitt and R. Thompson (1998). *Nonlinear analysis and differential equations: An Introduction*. Lecture Notes, University of Utah.

12. H. W. Siegberg (1981). Some historical remarks concerning degree theory. *American Mathematical Monthly*, 88, No. 2, p. 125–139.

13. J. von Neumann (1937). Über ein ökonomisches gleichungssystem und eine verallgemeinerung des brouwerschen fixpunktsatzes. *Ergebnisse eines mathematischen kolloquiums* 8 (1935–1936), 73–83. Vertimas: A Model of General Economic Equilibrium. *Review of Economic Studies* 13 (1945–1946).

5 Skyrius

Mainų rinka

> Skaičiavimo aiškinimui suteikti tai, ko jame neaptinkame, arba apsvarstyti pasitelkus metafiziką - tai klastoti mokslą ir protą nuvesti nuo tiesos bei tikrumo kelio.
>
> Janas Sniadeckis, 1818.

Šiame skyriuje grįžtame prie konkurencinės rinkos nagrinėjimo. Kol kas tarkime, kad rinkoje yra tik vartotojai ir nėra gamintojų. Tokia rinka vadinama mainų rinka (angl. exchange market). Vartotojo pasirinkimui tarp gėrybių charakterizuoti naudosime 3 skyriuje nagrinėtą alternatyvų lauką. Taigi mainų rinkoje yra ribotas kiekis gėrybių, kurias reikia optimaliai paskirstyti tarp vartotojų. Gamyba mainų rinkoje nevyksta ir todėl naujų gėrybių nesukuriama.

Gėrybių skirstymo mechanizmas mainų rinkoje grindžiamas gėrybių kaina. Skyriaus pabaigoje parodoma, kad egzistuoja tokia gėrybių kaina, kuriai esant visos gėrybės taip paskirstomos tarp visų mainų rinkos subjektų, kad maksimizuotų jų naudingumo funkcijas.

5.1 Vartotojo problema

Vartotoju vadinamas individas arba namų ūkis, kurio tikslas yra iš duotos gėrybių aibės pasirinkti, nusipirkti ir suvartoti geriausią jam įpirkti įmanomą gėrybių rinkinį. Vartotojo problema yra klausimas: žinant gėrybių kainas ir pradinį savo turtą, ar įmanoma iš įperkamų gėrybių aibės, vadinamos biudžeto aibe, pasirinkti sau naudingiausių gėrybių aibę. Šiame skyrelyje nustatomos sąlygos, kada ši problema turi sprendinį, kada jis yra vienintelis ir panašiai.

Biudžeto aibė Šiame skyrelyje nagrinėjamas vienas vartotojas. Kaip ir anksčiau tarkime, kad nagrinėjamoje mainų rinkoje yra ℓ gėrybių. Gėrybė tapatinama su indeksu $h \in$

$\{1,\ldots,\ell\}$, o jos kiekis charakterizuojamas realiuoju neneigiamu skaičiumi x_h. Tokiu būdu euklidinės erdvės vektorius $x = (x_1,\ldots,x_\ell) \in \mathbb{R}^\ell_+$ išreiškia tam tikrą *gėrybių rinkinio* kiekį. Gėrybių kiekis rinkoje yra ribotas, o rinkoje esamų gėrybių aibė X, vadinama *vartojimo aibe*, sudaro euklidinės erdvės $\mathbb{R}^\ell_+$ poaibį. Dažniausiai tarkime, kad vartojimo aibė X yra uždara, iškila ir aprėžta. Toliau visada yra tariama, kad $0 \in X$.

Kiekvienos iš gėrybių $h \in \{1,\ldots,\ell\}$ vieneto *kaina* yra realus neneigiamas skaičius p_h. Tokiu būdu $p = (p_1,\ldots,p_\ell)$ yra vektorius euklidinėje erdvėje $\mathbb{R}^\ell_+$, vadinamas *kainų sistema*, o gėrybių rinkinio $x = (x_1,\ldots,x_\ell)$ kaina yra vektorių skaliarinė sandauga $p{\cdot}x = \sum_{h=1}^{\ell} p_h x_h$. Toliau tariama, kad gėrybių kainos nepriklauso nuo vartotojo. Tokia prielaida pateisinama tais atvejais, kai kiekvieno vartotojo $i \in \{1,\ldots,n\}$ prekės poreikis sudaro tik mažą dalį tos prekės visuminės paklausos.

Greta gėrybių išteklių kiekio fizinio ribotumo, nusakomo vartojimo aibe X, vartotojo pasirinkimas yra ribojamas ir jo ekonominėmis galimybėmis. Būtent, vartotojo pasirinkimas yra ribojamas tomis gėrybėmis, kurias jis gali įpirkti. Ekonomines galimybes lemia gėrybių kainų sistema p ir vartotojo *pradinis turtas* e, kurio kaina $w = p{\cdot}e \geq 0$. Pora (p,w) vadinama *kainos–turto būsena* ir yra $\mathbb{R}^{\ell+1}_+$ aibės vektorius. Duotai kainos–turto būsenai (p,w), gėrybių rinkinys $x \in X$ yra *įperkamas*, jei jo kaina neviršija pradinio turto kainos w, t. y. jei galioja nelygybė $p{\cdot}x \leq w$. Tokiu būdu fizinis ir ekonominis gėrybių rinkinių ribotumas yra nusakomas aibe

$$B(p,w) = \{x \in X\colon\ p{\cdot}x \leq w\}, \tag{5.1}$$

vadinama *biudžeto aibe*. Aibė $B'(p,w) := \{x \in X\colon\ p{\cdot}x = w\}$ toliau vadinama *biudžeto kraštu*.

5.1 teiginys. *Tegul* $X \subset \mathbb{R}^\ell_+$ *ir* $(p,w) \in \mathbb{R}^{\ell+1}_+$. *Tada biudžeto aibė* $B(p,w)$ *yra*

(a) *iškila, jei* X *iškila*;

(b) *uždara, jei* X *uždara*;

(c) *aprėžta, jei arba* X *aprėžta, arba* $p > 0$.

Įrodymas. Visi teiginiai lengvai įrodomi naudojant tik apibrėžimus. Remiantis (c) teiginio antrąja dalimi pastebėkime, jei $c := \min_h p_h > 0$, tai $0 \leq x_h \leq w/c$ kiekvienam $h \in \{1,\ldots,\ell\}$ ir $x \in B(p,w)$. $\square$

Kaip buvo sakyta skyrelio pradžioje, esant duotai kainos–turto būsenai (p,w), *vartotojo problemą* sudaro galimumas pasirinkti prekių rinkinį x iš biudžeto aibės $B(p,w)$. Kadangi $0 \in X$, tai $0 \in B(p,w)$ kiekvienam $(p,w) \in \mathbb{R}^{\ell+1}_+$, t. y. biudžeto aibė visada netuščia[1]. Todėl biudžeto aibės priskyrimas kainos–turto būsenai,

$$\beta\colon\ (p,w) \mapsto B(p,w) \subset X, \quad (p,w) \in \mathbb{R}^{\ell+1}_+,$$

[1] matematine prasme

apibrėžia atitiktį β iš $\mathbb{R}_+^{\ell+1}$ į X, toliau vadinamą *biudžeto atitiktimi* (2.2 skyrelis). Dėl paprastumo, toliau naudosime elemento (p, w) vaizdo žymėjimą $\beta[p, w]$ vietoje $\beta[(p, w)]$.

5.2 apibrėžimas. Sakykime, kad $\alpha \geq 0$, o S ir T yra euklidinių erdvių poaibiai. Atitiktis ψ iš aibės S į aibę T yra α *eilės teigiamai homogeniška*, jei

$$\psi[\lambda s] = \lambda^\alpha \psi[s]$$

kiekvienam $\lambda > 0$ ir $s \in S$. Čia dešinė pusė lygi aibei $\{\lambda^\alpha t \colon\ t \in \psi[s]\}$, pagal, tiesinėse erdvėse įprastą, aibės dauginimo iš skaliaro taisyklę.

Pradėsime nuo to, kad nustatysime biudžeto atitikties homogeniškumą, tolydumą iš išorės (4.10 apibrėžimas) ir tolydumą iš vidaus (4.12 apibrėžimas).

5.3 teorema. *Sakykime, kad $X \subset \mathbb{R}_+^\ell$ yra vartojimo aibė. Biudžeto atitikčiai β iš $\mathbb{R}_+^{\ell+1}$ į X galioja (a), (b) ir (c) savybės; čia*

(a) *β yra nulinės eilės teigiamai homogeniška t. y. $\beta[\lambda p, \lambda w] = \beta[p, w]$ kiekvienam $\lambda > 0$ ir $(p, w) \in \mathbb{R}_+^{\ell+1}$;*

(b) *β yra tolydi iš išorės aibėje $\mathbb{R}_+^{\ell+1}$, jei aibė X yra kompaktiška;*

(c) *β yra tolydi iš vidaus tokioje kainos–turto būsenoje $(p, w) \in \mathbb{R}_+^{\ell+1}$, kur $w > 0$, o aibė X yra iškila.*

Įrodymas. Tarkime, kad $(p, w) \geq 0$ ir $\lambda > 0$. Naudojantis funkcijos $p \mapsto p{\cdot}x$ tiesiškumu, savybė (a) išplaukia iš lygybių

$$\beta[\lambda p, \lambda w] = \{x \in X \colon\ (\lambda p){\cdot}x \leq (\lambda w)\} = \beta[p, w].$$

(b) savybės įrodymui tarkime, kad $(p, w) \in \mathbb{R}_+^{\ell+1}$. Parodysime, kad β yra tolydi iš išorės taške (p, w). Kadangi X yra kompaktiška aibė, remiantis 2.61 lema ir 5.1(b) teiginiu, biudžeto aibė $\beta[p, w]$ taip pat kompaktiška ir todėl galima naudotis atitikties tolydumo iš išorės taške (4.8) kriterijumi. Tarkime, kad $(p_n, w_n) \to (p, w)$, kai $n \to \infty$, ir $x_n \in \beta[p_n, w_n]$ kiekvienam n. Reikia parodyti, kad egzistuoja gėrybių rinkinys $x \in \beta[p, w]$ ir sekos (x_n) posekis (x_{n_k}), konverguojantis į x. Remiantis 2.60 teorema, egzistuoja toks $x \in X$ ir posekis (x_{n_k}), kad $x_{n_k} \to x$, kai $k \to \infty$. Kadangi $p_{n_k}{\cdot}x_{n_k} \leq w_{n_k}$ kiekvienam k, o skaliarinė sandauga yra tolydi funkcija (2.4.7 pratimas), tai $p_{n_k}{\cdot}x_{n_k} \to p{\cdot}x$, kai $k \to \infty$. Iš čia ir išplaukia, kad $p{\cdot}x \leq w$, t. y. $x \in \beta[p, w]$. Remiantis 4.13 teorema, biudžeto atitiktis β yra tolydi iš išorės taške (p, w).

(c) savybės įrodymui tarkime, kad $(p, w) \geq 0$ yra kainos–turto būsena su teigiamu pradiniu turtu $w > 0$. Biudžeto atitikties β tolydumą iš vidaus taške (p, w) patikrinsime naudodamiesi (4.9) kriterijumi. Tarkime, kad $(p_n, w_n) \to (p, w)$ ir $x \in \beta[p, w]$, t. y. $p{\cdot}x \leq w$. Reikia rasti tokią X aibės elementų seką (x_n), kad $p_n{\cdot}x_n \leq w_n$ kiekvienam n ir $x_n \to x$, kai $n \to \infty$. Pirma tarkime, kad $p{\cdot}x < w$. Kadangi skaliarinė sandauga yra tolydi funkcija (2.4.7 pratimas), egzistuoja toks $N \in \mathbb{N}_+$, kad $p_n{\cdot}x < w_n$ visiems $n \geq N$. Kiekvienam $n < N$, paimkime bet kurį $x_n \in \beta[p_n, w_n]$, o kiekvienam $n \geq N$ paimkime $x_n := x$. Tada, atveju $p{\cdot}x < w$, seka (x_n) tenkina trokštamą savybę.

Dabar tarkime, kad $p{\cdot}x = w$, t. y. x priklauso biudžeto kraštui $B'(p, w)$. Kadangi $0 \in X$ ir $w > 0$, tai $0 \in \beta[p, w]$ Kadangi X yra iškila, visi atkarpos $[0, x] := \{\lambda x \colon \lambda \in [0, 1]\}$ taškai priklauso X. Kadangi $(p_n, w_n) \to (p, w)$, kai $n \to \infty$, egzistuoja toks numeris $N \in \mathbb{N}_+$, kad visiems $n \geq N$, biudžeto kraštas $B'(p_n, w_n)$ kerta tiesę, kurioje guli atkarpa $[0, x]$, vieninteliame taške $\tilde{x}_n$ ir toje jos pusėje nuo 0, kur yra x. Tegul $x_n := \tilde{x}_n$, jei $\tilde{x}_n \in [0, x]$ ir $x_n := x$, jei $\tilde{x}_n \notin [0, x]$. Tada $p_n{\cdot}x_n \leq p_n{\cdot}\tilde{x}_n = w_n$. Parodysime, kad $x_n \to x$, kai $n \to \infty$.

Iš tikrųjų, su kievienu n, $x_n = \lambda_n x_0$ su kuriuo nors $\lambda_n \in [0, 1]$. Pakanka parodyti, kad $\lambda_n \to 1$ kai $n \to \infty$. Tarkime, kad taip nėra. Tada egzistuoja $\lambda \in [0, 1)$ ir toks sekos (λ_n) posekis (λ_{n_k}), kuris konverguoja į λ, kai $k \to \infty$. Kadangi kiekvienam k,

$$w_{n_k} = p_{n_k}{\cdot}\tilde{x}_{n_k} = p_{n_k}{\cdot}x_{n_k} = \lambda_{n_k} p_{n_k}{\cdot}x,$$

perėję prie ribos kai $k \to \infty$, gauname $w = \lambda p{\cdot}x < p{\cdot}x = w$ - prieštara, įrodanti, kad $\lambda_n \to 1$. 5.3 teoremos įrodymas baigtas. □

Vartotojo paklausos aibė Vartotojo problema – pasirinkimas iš biudžeto aibės – sprendžiama naudojantis 3 skyriuje nagrinėtu preferencijos sąryšiu. Taigi, toliau tariama, kad gėrybių aibėje $X \subset \mathbb{R}^\ell_+$ yra apibrėžtas racionalusis preferencijos sąryšis $\succeq$, t. y. tariama, kad struktūra $(X, \succeq)$ yra alternatyvų laukas, kuris toliau šiame ir kitame skyriuose vadinamas gėrybių lauku. Dažniausiai bus tariama, kad gėrybių laukas $(X, \succeq)$ yra tolydus. Remiantis 3.14 teorema toks gėrybių laukas išreiškiamas tolydžia naudingumo funkcija $u \colon X \to \mathbb{R}$.

Tarkime, kad $(p, w) \in \mathbb{R}^{\ell+1}_+$ yra kainos–turto būsena. Kaip anksčiau aptarta, vartotojas renkasi iš biudžeto aibės $B(p, w)$, apibrėžtos (5.1) sąryšiu. Prisimenant paklausos aibės $C(B; \succeq)$ apibrėžimą (3.3) atveju $B = B(p, w)$ ir sąryšį (3.4), būseną (p, w) atitinkanti vartotojo *paklausos aibė* (angl. demand set) yra

$$D(p, w) = C(B(p, w); \succeq) = \{x \in B(p, w) \colon\ (\forall\, z \in B(p, w))[x \succeq z]\}.$$

Jei preferencija $\succeq$ yra išreiškiama naudingumo funkcija u, tai

$$\begin{aligned} D(p, w) &= \{x \in B(p, w) \colon\ u(x) \geq u(z) \text{ kiekvienam } z \in B(p, w)\} \\ &=: \operatorname{argmax}\big\{u(x) \colon\ x \in B(p, w)\big\}. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Sakysime, kad *vartotojo optimalaus pasirinkimo problema* turi sprendinį kainos–turto būsenoje $(p, w) \in \mathbb{R}^{\ell+1}_+$, jei paklausos aibė $D(p, w)$ yra netuščia.

Sąlygos garantuojančios, kad vartotojo optimalaus pasirinkimo problema turi sprendinį gali būti įvairios. Vienas tokių sąlygų rinkinys gaunamas naudojantis išvada:

5.4 išvada. *Sakykime, kad vartojimo aibė X yra kompaktiška, gėrybių laukas $(X, \succeq)$ yra tolydus ir $(p, w) \in \mathbb{R}_+^{\ell+1}$. Tada kainos–turto būsenoje (p, w) vartotojo optimalaus pasirinkimo iš biudžeto aibės $B(p, w)$ problema turi bent vieną sprendinį.*

Įrodymas. Remiantis 5.1 teiginiu, biudžeto aibė $B := B(p, w)$ yra kompaktiška. Tada galime naudoti 3.11 teoremą pasirinkimo aibei $C(B) = D(p, w)$, kuri ir įrodo išvadą. □

Pastarąją išvadą galima įrodyti ir kitu būdu. Kadangi tolydus gėrybių laukas išreiškiamas tolydžia naudingumo funkcija remiantis Debreu teorema (3.14 teorema), o biudžeto aibė yra kompaktiška, tai optimalus gėrybių rinkinys egzistuoja, jei funkcija šioje aibėje įgyja maksimumą. Taigi vietoje 3.11 teoremos galima naudotis Vejerštraso teorema.

Šia Vejerštraso teorema pasinaudosime pagrįsdami kitą išvadą apie optimalaus pasirinkimo problemos išsprendžiamumą. Skirtingai nuo praeitos išvados, dabar vartojimo aibė neprivalo būti kompaktiška, bet atitinkama kainų sistemą turi sudaryti tik teigiami skaičiai.

5.5 išvada. *Sakykime, kad vartojimo aibė X yra uždara, gėrybių laukas $(X, \succeq)$ yra tolydus, $p \in \mathbb{R}_{++}^{\ell}$ ir $w \geq 0$. Tada kainos–turto būsenoje (p, w) vartotojo optimalaus pasirinkimo iš biudžeto aibės $B(p, w)$ problema turi bent vieną sprendinį.*

Įrodymas. Kadangi $p > 0$, tai remiantis 5.1(c) teiginio antrąja dalimi, $B(p, w)$ yra kompaktiška aibė. Remiantis Debreu teorema (3.14 teorema), preferencija išreiškiama tolydžia naudingumo funkcija. Todėl, kaip ką tik buvo minėta, tolydi funkcija bent vieną maksimumą aibėje $B(p, w)$ įgyja remiantis Vejerštraso teorema (2.65 teorema). □

Vartotojo optimalaus pasirinkimo sprendinio vienatinumo sąlygos gaunamos naudojantis šia išvada:

5.6 išvada. *Tarkime, kad $X \subset \mathbb{R}_+^{\ell}$ yra iškila uždara aibė, o gėrybių laukas $(X, \succeq)$ yra tolydus ir iškilas. Su kiekviena kainos–turto būsena $(p, w) \in \mathbb{R}_{++}^{\ell+1}$, galioja*

(a) *paklausos aibė $D(p, w)$ yra netuščia, kompaktiška ir iškila*;

(b) *jei, be to, $(X, \succeq)$ yra griežtai iškila, tai paklausos aibė $D(p, w)$ turi vienintelį elementą.*

Įrodymas. Remiantis 5.1 teiginiu, biudžeto aibė $B(p, w)$ yra netuščia, kompaktiška ir iškila. Kitos išvados gaunamos pritaikius 3.20 teiginį. □

5.7 apibrėžimas. Tarkime, kad $(p, w) \in \mathbb{R}_+^{\ell+1}$ yra kainos–turto būsena. Sakysime, kad šią būseną atitinkančiai paklausos aibei $D(p, w)$ galioja *Walraso dėsnis*, jei $D(p, w)$ yra netuščia ir $p \cdot x = w$ kiekvienam $x \in D(p, w)$.

Kitaip tariant, Walraso dėsnis galioja, jei pasirinkimas iš biudžeto aibės priklauso biudžeto kraštui. Prisimindami lokalaus nepasotinamumo savybę (3.6 apibrėžimas), turime tokį faktą.

5.8 išvada. *Jei gėrybių laukas* $(X, \succeq)$ *lokaliai nepasotinamas ir kainos–turto būseną* $(p, w) \in \mathbb{R}_+^{\ell+1}$ *atitinkanti paklausos aibė* $D(p, w)$ *yra netuščia, tai jai galioja Walraso dėsnis.*

Įrodymas. Pakanka pasinaudoti 3.7(c) teiginiu biudžeto aibei $B = B(p, w)$ ir pastebėti, kad jos vidiniai X atžvilgiu taškai sudaro aibę $\{x \in X\colon\ p{\cdot}x < w\}$. □

Walraso paklausos atitiktis Tarkime, kad $X \subset \mathbb{R}_+^{\ell}$ yra vartojimo aibė, $(X, \succeq)$ yra gėrybių laukas ir $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}_+^{\ell+1}$ yra tokia kainos–turto būsenų (p, w) aibė, kurioms vartotojo optimalaus pasirinkimo problema turi sprendinį, t.y. (5.2) lygybe apibrėžta aibė $D(p, w)$ yra netuščia. Tada priskyrimas

$$\varphi\colon\ (p, w) \mapsto D(p, w) \subset X, \qquad (p, w) \in \mathcal{D}, \tag{5.3}$$

yra atitiktis iš $\mathbb{R}_+^{\ell+1}$ į X su apibrėžimo sritimi $\mathcal{A}(\varphi) = \mathcal{D}$, kuri toliau vadinama *Walraso paklausos atitiktimi*. Kaip ir biudžeto atitikties atveju, dėl paprastumo, toliau naudosime elemento (p, w) vaizdo žymėjimą $\varphi[p, w]$ vietoje $\varphi[(p, w)]$. Tuo atveju, kai kiekvienam $(p, w) \in \mathcal{D}$, paklausos aibę $D(p, w)$ sudaro vienintelis elementas $x = x(p, w)$, tai funkcija $\varphi\colon\ \mathcal{D} \to X$ vadinama *Walraso paklausos funkcija* su reikšmėmis

$$\varphi(p, w) = x \in \{x\} = D(p, w) \tag{5.4}$$

(žr. komentarus po 2.36 apibrėžimo).

Nustatysime pagrindines Walraso paklausos atitikties savybes.

5.9 teiginys. *Sakykime, kad* $X \subset \mathbb{R}_+^{\ell}$ *yra vartojimo aibė,* $(X, \succeq)$ *yra gėrybių laukas ir* φ *yra Walraso paklausos atitiktis iš* $\mathbb{R}_+^{\ell+1}$ *į* X. *Tada galioja* (a), (b), (c) *ir* (d); *čia*

(a) φ *yra nulinės eilės teigiamai homogeniška*;

(b) *jei* X *yra kompaktiška ir* $(X, \succeq)$ *yra tolydus, tai* φ *apibrėžimo sritis yra* $\mathbb{R}_+^{\ell+1}$;

(c) *jei* $(X, \succeq)$ *yra iškilas, tai* φ *yra iškila, t. y. aibė* $\varphi[p, w]$ *yra iškila su kiekviena kainos-turto būsena* $(p, w) \in \mathcal{D}$;

(d) *jei* X *yra iškila ir uždara, o* $(X, \succeq)$ *yra tolydus ir griežtai iškilas, tai* φ *yra funkcija iš* $\mathbb{R}_{++}^{\ell+1}$ *į* X.

Įrodymas. (a): Tarkime, kad $(p, w) \in \mathcal{D}$ ir $\lambda > 0$. Remiantis ta pačia savybe biudžeto atitikčiai β (žr. 5.3(a) teoremą) turime lygybes

$$\varphi[\lambda p, \lambda w] = \big\{x \in \beta[\lambda p, \lambda w]\colon\ (\forall\ z \in \beta[\lambda p, \lambda w]\,)[x \succeq z]\,\big\} = \varphi[p, w],$$

įrodančias nulinės eilės teigiamo homogeniškumo savybę atitikčiai φ.

(b): Remiantis 5.4 išvada, aibė $\varphi[p, w]$ yra netuščia su kiekviena būsena $(p, w) \in \mathbb{R}_+^{\ell+1}$.

(c): Tegul $(p,w) \in \mathcal{D}$, $x_1, x_2 \in D(p,w)$ ir $\lambda \in (0,1)$. Galime tarti, kad $x_1 \neq x_2$. Šių elementų iškilas darinys $x_\lambda := \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in B(p,w)$, remiantis 5.1$(a)$ teiginiu. Kadangi $x_1 \sim x_2$, remiantis 3.18(b) lema, $x_\lambda \succeq x_1$ ir $x_\lambda \in D(p,w)$, dėka preferencijos tranzityvumo.

(d): Remiantis 5.6(b) išvada, aibė $\varphi[p,w]$ turi vienintelį elementą su kiekviena būsena $(p,w) \in \mathbb{R}^{\ell+1}_{++}$. □

Toliau įrodomas svarbiausias faktas apie paklausos atitikties tolydumą iš išorės, kuris tiesiogiai naudojamas pusiausvyros egzistavimui įrodyti.

5.10 teorema. *Tarkime, kad vartojimo aibė $X \subset \mathbb{R}^\ell_+$ yra kompaktiška ir gėrybių laukas $(X, \succeq)$ yra tolydus. Walraso paklausos atitiktis φ iš $\mathbb{R}^{\ell+1}_+$ į X yra tolydi iš išorės aibėje $\mathbb{R}^{\ell+1}_{++}$.*

Įrodymas. Tegul $(p,w) \in \mathbb{R}^{\ell+1}_{++}$. Pasirinkimo aibė $\varphi[p,w] = D(p,w)$ yra netuščia remiantis 5.4 išvada. Išorinio tolydumo savybę taške (p,w) įrodysime naudodami 4.11 teoremą. Tarkime, kad seka $((p_n,w_n)) \subset \mathbb{R}^{\ell+1}_{++} \subset \mathcal{A}(\varphi)$,

$$\lim_{n\to\infty}(p_n,w_n) = (p,w) \quad \text{ir} \quad x_n \in D(p_n,w_n) \quad \text{kiekvienam } n. \tag{5.5}$$

Reikia rasti $x \in D(p,w)$ ir sekos (x_n) posekį (x_{n_k}), konverguojantį į x. Kadangi $D(p_n,w_n) \subset X$ kiekvienam n ir X yra kompaktas, tai 2.60 teoremos dėka egzistuoja vektorius $x \in X$ ir į jį konverguojantis posekis (x_{n_k}). Kadangi gėrybių laukas $(X,\succeq)$ yra tolydus, remiantis 3.14 teorema, preferencija išreiškiama tolydžia naudingumo funkcija u. Todėl pakanka parodyti, kad $u(x) \geq u(y)$ kiekvienam $y \in B(p,w)$. Imkime bet kurią gėrybę $y \in B(p,w)$ ir kiekvienam n, apibrėžkime skaičių

$$\sigma_n := \frac{w_n}{\max\{p_n \cdot y, w_n\}} \in (0,1].$$

Kadangi skaliarinė sandauga ir maksimumo funkcija yra tolydžios, tai

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n = \frac{w}{\max\{p\cdot y, w\}} = 1.$$

Todėl kiekvienam n, apibrėžę $y_n := \sigma_n y \in B(p_n,w_n)$, remiantis (5.5) prielaida, gauname $u(x_n) \geq u(y_n)$ ir $y_n \to y$ kai $n \to \infty$. Kadangi $x_{n_k} \to x$ kai $k \to \infty$, iš čia išplaukia, kad $u(x) \geq u(y)$. Todėl $x \in D(p,w)$ ir atitiktis φ yra tolydi iš išorės taške (p,w); tai ir reikėjo įrodyti. □

Paklausos aibių pavyzdžiai Sakykime, kad $(\mathbb{R}^2_+, \succeq_u)$ yra tobulųjų pakaitalų gėrybių laukas, apibrėžtas naudingumo funkcija (3.11), kurioje parametrai $a = b = 1$. Vartotojo su tokiu gėrybių lauku optimalaus pasirinkimo problemos sprendiniai sudaro aibę

$$D(p,w) = \begin{cases} \{(w/p_1, 0)\}, & \text{kai } p_2 > p_1, \\ \{x \in \mathbb{R}^2_+ \colon\ p\cdot c = w\}, & \text{kai } p_2 = p_1, \\ \{(0, w/p_2)\}, & \text{kai } p_2 < p_1, \end{cases} \tag{5.6}$$

su kiekviena kainos–turto būsena $(p, w) = (p_1, p_2, w) > 0$. Matome, kad ši optimalaus pasirinkimo problema visada turi sprendinį. Tačiau sprendinys nėra vienintelis kai abiejų gėrybių kainos yra lygios. Tai neprieštarauja 5.6(b) išvadai kadangi tobulųjų pakaitalų gėrybių laukas nėra griežtai iškilas. Paklausos aibė (5.6) rodo, kad bus pasirinkta ta gėrybė, kurios kaina yra mažesnė. Jei abiejų gėrybių kaina vienoda, tai optimalus pasirinkimas yra biudžeto kraštas.

Kitas pavyzdys. Sakykime, kad $(\mathbb{R}^2_+, \succeq_u)$ yra tobulųjų papildinių gėrybių laukas, apibrėžtas naudingumo funkcija (3.12), kurioje parametrai $a = b = 1$. Vartotojo su tokiu gėrybių lauku optimalaus pasirinkimo problemos sprendiniai sudaro vieno elemento aibę

$$D(p, w) = \{(w/(p_1 + p_2), w/(p_1 + p_2))\} \tag{5.7}$$

su kiekviena kainos–turto būsena $(p, w) = (p_1, p_2, w) > 0$. Pagal šį pasirinkimą abi gėrybės vartojamos kartu ir todėl vartotojas išleistų visus savo pinigus gėrybių poroms, kurių kaina yra $p_1 + p_2$.

Šiais konkrečiais dviem atvejais vartotojo optimalaus pasirinkimo problemos sprendimas yra paprastas. Kai kuriais kitais atvejais yra naudinga pasinaudoti funkcijų ekstremumų paieškos metodais.

Kobo-Duglaso gėrybių laukas Tarkime, kad $(\mathbb{R}^2_+, \succeq_u)$ yra gėrybių laukas išreiškiamas naudingumo funkcija

$$u(x) = x_1^{\epsilon} x_2^{1-\epsilon}, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+, \quad 0 < \epsilon < 1,$$

t.y. laukas, išreiškiamas (3.8) funkcija kai $\ell = 2$ ir $\alpha_1 = 1 - \alpha - 2 = \epsilon$. Tegul $p = (p_1, p_2) > 0$ ir $w \geq 0$. Kadangi Kobo–Duglaso gėrybių laukas yra tolydus, remiantis 5.5 išvada, Walraso paklausos aibė $D(p, w)$ yra netuščia. Remiantis 5.6 išvada, aibę $D(p, w)$ sudaro vienintelis elementas kadangi $(\mathbb{R}^2_+, \succeq_u)$ laukas yra griežtai iškilas pagal 3.3.4 pratimą. Be to, tuo pačiu pratimu buvo įsitikinta, kad šis laukas yra lokaliai nepasotinamas ir todėl, remiantis 5.9(b) teiginiu, vienintelis vartotojo problemos sprendinys guli ant biudžeto krašto (Walraso dėsnis).

Visos šios Kobo–Duglaso gėrybių lauko savybės rodo, kad vienintelis vartotojo problemos sprendinys $z = (z_1, z_2)$ yra aibės

$$\{z\} = D(p_1, p_2, w) = \text{argmax}\big\{u(x_1, x_2)\colon\ p_1x_1 + p_2x_2 = w,\ (x_1, x_2) \geq 0\big\} \tag{5.8}$$

vienintelis elementas z. Šio elemento radimas paprastai formuluojamas kaip sąlyginio esktremumo paieškos uždavinys, kurio sprendimui naudosime Lagranžo daugiklių metodą.

Suformuluosime 2.118 teoremą, kuria remiasi Lagranžo daugiklų metodas, atveju, kai $d = 2$ ir $m = 1$. Šiuo atveju, apribojimų aibę M_g sudarančių funkcijų gradientų tiesinio nepriklausomumo sąlyga yra ekvivalenti tam, kad vienintelis gradientas nelygus nuliui ir todėl gauname:

5.11 išvada. *Sakykime, kad $f, g\colon\ \mathbb{R}^2_{++} \mapsto \mathbb{R}$ yra tolydžiai diferencijuojamos funkcijos. Tarkime, kad funkcijos f ekstremumas yra tokiame taške $z \in M_g = \{x \in \mathbb{R}^2_{++}\colon\ g(x) = 0\}$, kuriame $\nabla g(z) \neq 0$, tada egzistuoja toks realusis skaičius λ, kad*

$$\nabla f(z) = \lambda \nabla g(z).$$

Šiuo teiginiu randamas skaičius λ ir yra vadinamas Lagranžo daugikliu. Lagranžo daugiklio metodas reiškia išsprendimą lygčių sistemos (2.76), kuri šiuo atveju virsta lygčių sistema

$$\begin{cases} D_1 L(z,\lambda) = D_1 f(z) - \lambda D_1 g(z) = 0, \\ D_2 L(z,\lambda) = D_2 f(z) - \lambda D_2 g(z) = 0, \\ D_3 L(z,\lambda) = -g(z) = 0, \end{cases} \tag{5.9}$$

čia $L_\lambda(z) \equiv L(z,\lambda) = f(z) - \lambda g(z)$ ir $z = (z_1, z_2)$. Išsprendę sistemą atžvilgiu z_1, z_2 ir λ, gauname ekstremumo taško koordinates.

Sprendžiant vartotojo problemą (5.8), tegul $f := u$ ir $g(z) := p_1 z_1 + p_2 z_2 - w$, $z = (z_1, z_2)$. Tada (5.9) lygčių sistema įgyja pavidalą:

$$\begin{cases} (\epsilon/z_1, (1-\epsilon)/z_2) = \lambda(p_1, p_2), \\ p_1 z_1 + p_2 z_2 = w. \end{cases}$$

Išsprendę šią sistemą kintamųjų z_1, z_2 ir λ atžvilgiu, gauname lokalaus ekstremumo tašką

$$x^* = (x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{\epsilon w}{p_1}, \frac{(1-\epsilon)w}{p_2}\right). \tag{5.10}$$

Norėdami nustatyti ekstremumo tipą, naudosime 2.119 teoremą ir 2.125 teoremą kai $d = 2$ ir $m = 1$. Be to, 2.125 teoremojee naudosime matricas

$$A = HL_\lambda(x^*) = \begin{bmatrix} D_{11} L_\lambda(x^*) & D_{12} L_\lambda(x^*) \\ D_{21} L_\lambda(x^*) & D_{22} L_\lambda(x^*) \end{bmatrix} \quad \text{ir} \quad B = Jg(x^*) = \big[D_1 g(x^*), D_2 g(x^*)\big].$$

Iš jų gauname (2.78) lygybe apibrėžtą apribotą Hessianą

$$C_3 = \begin{bmatrix} 0 & D_1 g(x^*) & D_2 g(x^*) \\ D_1 g(x^*) & D_{11} L_\lambda(x^*) & D_{12} L_\lambda(x^*) \\ D_2 g(x^*) & D_{21} L_\lambda(x^*) & D_{22} L_\lambda(x^*) \end{bmatrix}. \tag{5.11}$$

Naudodami šias matricas, 2.119 teoremą ir 2.125 teoremą gauname:

5.12 išvada. *Sakykime, kad $f, g\colon\ \mathbb{R}^2_{++} \mapsto \mathbb{R}$ yra tolydžiai diferencijuojamos funkcijos. Tarkime, kad $x^* \in M_g = \{x \in \mathbb{R}^2_{++}\colon\ g(x) = 0\}$ ir $\lambda \in \mathbb{R}$ yra tokie, kad $\nabla L_\lambda(x^*) = 0$. Tada x^* yra funkcijos f*

(a) *lokalus minimumas aibėje M_g, jei* $\det C_3 < 0$;

(b) *lokalus maksimumas aibėje M_g, jei* $\det C_3 > 0$, *čia C_3 yra apribotas Hessianas* (5.11).

Pritaikysime šį kreiterijų sprendžiant vartotojo problemą (5.8), kurioje $f = u$ ir $g(z) = p_1 z_1 + p_2 z_2 - w$, $z = (z_1, z_2)$. Ekstremumo taške x^* su koordinatėmis (5.10) apribotas Hessianas yra

$$C_3 = \begin{bmatrix} 0 & p_1 & p_2 \\ p_1 & -p_1^2/(\epsilon w^2) & 0 \\ p_2 & 0 & -p_2^2/((1-\epsilon)w^2) \end{bmatrix}.$$

Kadangi jo determinantas $\det C_3 = p_1^2 p_2^2/(\epsilon(1-\epsilon)w^2) > 0$, (5.10) yra naudingumo funkcijos u maksimumo taškas ant biudžeto krašto. Be to, $\mathbb{R}^3_{++}$ aibėje yra apibrėžta Walraso paklausos funkcija φ, visiems $(p_1, p_2, w) > 0$ įgyjanti reikšmę $\varphi(p_1, p_2, w) = x^* = x^*(p_1, p_2, w)$.

Pratimai.

1. Tarkime, kad $(\mathbb{R}^2_+, \succeq)$ yra gėrybių laukas apibrėžtas CES naudingumo funkcija (3.15). Rasti Walraso paklausos funkciją ir netiesioginio naudingumo funkciją. Suskaičiuoti gautų funkcijų ribas, kai $\rho \to 0$. Atsakymas: kiekvienam $(p_1, p_2, w) \in \mathbb{R}^3_{++}$ ir $0 < \rho < 1$

$$\varphi(p,w) = \left\{ \big(a/p_1\big)^{1/(1-\rho)}, \big(b/p_2\big)^{1/(1-\rho)} \right\} \frac{w}{p_1\big(a/p_1\big)^{1/(1-\rho)} + p_2\big(b/p_2\big)^{1/(1-\rho)}}$$

5.2 Išlaidų minimizavimo problema

Šiame skyrelyje parodoma, kad vartotojo optimalaus pasirinkimo problemą galima nagrinėti kitu būdu - minimizuojant vartotojo išlaidas. Tarkime, kad vartotojo aibėje X apibrėžta naudingumo funkcija $u\colon X \to \mathbb{R}$. Matysime, kad teiginiai:

x^* minimizuoja išlaidas atžvilgiu kainos p aibėje $\{x \in X\colon\ u(x) \geq u(x^*)\}$

ir

x^* maksimizuoja gėrybes atžvilgiu naudingumo u aibėje $\{x \in X\colon\ p{\cdot}x \leq p{\cdot}x^*\}$

yra dualūs.

Netiesioginio naudingumo funkcija. Kaip ir anksčiau, tarkime, kad vartojimo aibė $X \subset \mathbb{R}^\ell_+$ ir $(X, \succeq)$ yra gėrybių laukas, išreiškiamas naudingumo funkcija u. Duotai kainos-turto būsenai $(p, w) \in \mathbb{R}^{\ell+1}_+$, gėrybė $x \in \varphi[p, w]$ tada ir tik tada, kai $u(x) \geq u(y)$ su visomis gėrybėmis $y \in B(p, w)$. Tokiu būdu naudingumo funkcijos u maksimali biudžeto aibėje reikšmė, gėrybių naudingumą išreiškia priklausomai nuo kainos-turto būsenos, t. y. netiesiogiai.

5.13 apibrėžimas. Sakykime, kad $X \subset \mathbb{R}^{\ell}_{+}$ yra vartojimo aibė, $(X, \succeq)$ yra gėrybių laukas, išreiškiamas naudingumo funkcija u, ir vartotojo optimalaus pasirinkimo problema turi sprendinį aibėje $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^{\ell+1}_{+}$. Funkcija $v\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, apibrėžta reikšmėmis

$$\mathcal{D} \ni (p, w) \mapsto v(p, w) := \max\{u(x)\colon x \in B(p, w)\},$$

vadinama *netiesiogine naudingumo funkcija* (angl. indirect utility function).

Netiesioginė naudingumo funkcija yra apibrėžta aibėje $\mathcal{D}$, jei šioje aibėje yra apibrėžta Walraso paklausos atitiktis φ ir priklauso nuo naudingumo funkcijos u. Remiantis 3.7(a) teiginiu, $u(x_1) = u(x_2)$, jei $x_1, x_2 \in \varphi[p, w]$, $(p, w) \in \mathcal{D}$. Todėl $v(p, w) = u(\varphi[p, w])$ visiems $(p, w) \in \mathcal{D}$, t. y. netiesioginė naudingumo funkcija v yra Walraso paklausos atitikties φ ir naudingumo funkcijos u kompozicija, arba $v = u \circ \varphi$. Remiantis 5.5 išvada, galima nurodyti tokias pakankamas netiesioginės naudingumo funkcijos apibrėžtumo aibėje $\mathbb{R}^{\ell+1}_{++}$ sąlygas.

5.14 išvada. *Jei vartojimo aibė X yra uždara ir gėrybių laukas $(X, \succeq)$ yra tolydus, tai netiesioginė naudingumo funkcija v yra apibrėžta aibėje* $\mathbb{R}^{\ell+1}_{++} = \{(p, w) \in \mathbb{R}^{\ell+1}\colon (p, w) > 0\}$.

Toliau įrodoma keletas netiesioginio naudingumo funkcijos savybių.

5.15 teorema. *Sakykime, kad vartojimo aibė $X \subset \mathbb{R}^{\ell}_{+}$ yra iškilas kompaktas, o gėrybių laukas $(X, \succeq)$ yra lokaliai nepasotinamas ir išreiškiamas tolydžiąja naudingumo funkcija u. Aibėje $\mathbb{R}^{\ell+1}_{++}$ apibrėžta netiesioginė naudingumo funkcija $v = u \circ D$ yra*:

(a) *nedidėjanti koordinatės $p_h > 0$ atžvilgiu ir nemažėjanti koordinatės $w > 0$ atžvilgiu*;

(b) *nulinės eilės teigiamai homogeninė*;

(c) *tolydi*;

(d) *kvazi-iškila* (2.104(a) *apibrėžimas*).

Įrodymas. (a) ir (b) savybių įrodymai paliekami skaitytojui kaip pratimai. Įrodysime (c) savybę. Remiantis 5.10 teorema, atitiktis φ yra tolydi iš išorės aibėje $\mathbb{R}^{\ell+1}_{++}$. Jei φ yra funkcija, tai v yra tolydi kaip tolydžiųjų funkcijų kompozicija (2.4.10 pratimas). Jei ne, tarkime, kad $(p, w) > 0$, $c := v(p, w)$ ir U yra atviroji c aplinka. Kadangi u tolydi, kiekvienam $x \in \varphi[p, w] \subset X$, egzistuoja tokia atviroji x aplinka $V_x \subset X$, kad $u[V_x] \subset U$ (2.4.9 pratimas). Aibė $V := \cup\{V_x\colon x \in \varphi(p, w)\}$ yra atvira (2.53(b) teiginys), $\varphi[p, w] \subset V$ ir $u[V] \subset U$. Remiantis φ tolydumu iš išorės egzistuoja tokia (p, w) aplinka W, kad $\varphi[W] \subset V$ ir todėl $v[W] \subset u[V] \subset U$. Iš čia išplaukia v tolydumas taške (p, w).

Savybės (d) įrodymui naudosime 2.105(d) teiginį, kuriuo remiantis pakanka parodyti, kad kiekvienam $c \in \mathbb{R}$, aibė $K_c := \{(p, w) \in \mathbb{R}^{\ell+1}_{++}\colon v(p, w) \le c\}$ yra iškila. Tegul

$c \in \mathbb{R}$, $(p', w'), (p'', w'') \in K_c$, $\lambda \in (0,1)$ ir $(p, w) := \lambda(p', w') + (1-\lambda)(p'', w'')$. Parodysime, kad $u(x) \le c$ bet kuriam $x \in B(p, w)$. Tegul $x \in B(p, w)$. Tada

$$\lambda p' \cdot x + (1-\lambda) p'' \cdot x = p \cdot x \le w = \lambda w' + (1-\lambda) w''.$$

Palyginę kairę ir dešinę šios nelygybės puses, galime teigti, kad arba $p' \cdot x \le w'$, arba $p'' \cdot x \le w''$ (arba abu kartu). Pirmuoju atveju $u(x) \le v(p', w') \le c$ ir antruoju atveju $u(x) \le v(p'', w'') \le c$. Taigi $u(x) \le c$ bet kuriam $x \in B(p, w)$; tai ir reikėjo įrodyti. □

Išlaidų funkcija Tarkime, kad $X \subset \mathbb{R}^\ell_+$ yra vartojimo aibė ir $u\colon\ X \to \mathbb{R}$ yra naudingumo funkcija. Priminsime, kad $0 \in X$. Bet kuriems $p \in \mathbb{R}^\ell_{++}$ ir $c \ge u(0)$, tegul

$$\begin{aligned} E(p, c) \ &:= \ \{x \in X\colon\ p \cdot x \le p \cdot z \text{ kiekvienam } z \in u^{-1}[[c, \infty)]\} \\ &=: \ \text{argmin}\big\{p \cdot x\colon\ x \in X,\ u(x) \ge c\big\}. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Sakysime, kad *išlaidų minimizavimo problema* (angl. expenditure minimization problem) turi sprendinį kainos–naudingumo lygyje (p, c), jei aibė $E(p, c)$ yra netuščia. Jei išlaidų minimizavimo problema turi sprendinį $x^* \in E(p, c)$ kiekvienam $(p, c) \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^\ell_{++} \times [u(0), \infty)$, tai sakysime, kad srityje $\mathcal{D}$ apibrėžta *išlaidų funkcija* e su reikšmėmis

$$e(p, c) := p \cdot x^* = \inf\{p \cdot x\colon\ x \in X,\ u(x) \ge c\}. \tag{5.13}$$

5.16 teiginys. *Sakykime, kad vartojimo aibė $X \subset \mathbb{R}^\ell_+$ uždara, naudingumo funkcija $u\colon\ X \to \mathbb{R}$ tolydi ir $(p, c) \in \mathbb{R}^\ell_{++} \times [u(0), \infty)$. Išlaidų minimizavimo problema turi sprendinį kainos–naudingumo lygyje (p, c), jei egzistuoja toks gėrybių rinkinys $x_0 \in X$, kad $u(x_0) \ge c$.*

Įrodymas. Jei sprendinys egzistuoja, tai jis priklauso aibei $K := \{x \in X\colon\ p \cdot x \le p \cdot x_0\}$, kuri yra kompaktiška. Aibė $E(p, c)$ yra uždaras kompakčios aibės K poaibis ir todėl pati yra kompaktiška aibė dėka 2.61 lemos. Kadangi $x \mapsto p \cdot x$, $x \in E(p, c)$, yra tolydi, ji savo apibrėžimo srityje igyja minimalią reikšmę remiantis Vejerštraso teorema (2.65 teorema); tai ir reikėjo įrodyti. □

Jei naudingumo funkcija $u\colon\ X \to \mathbb{R}$ yra neaprėžta, tai pastarojo teiginio sąlyga apie gėrybių rinkinio x_0 egzistavimą visada išpildyta. Taigi tokioms naudingumo funkcijoms, išlaidų minimizavimo problema turi sprendinį kiekviename kainos–naudingumo lygyje.

Vartotojo optimalaus pasirinkimo problemos ir išlaidų minimizavimo problemos sprendiniai yra dual$\overline{\text{u}}$s toliau formuluojama prasme.

5.17 teorema. *Sakykime, kad $X \subset \mathbb{R}^\ell_+$ yra iškila vartojimo aibė, $(X, \succeq)$ yra lokaliai nepasotinamas gėrybių laukas, išreiškiamas tolydžiąja naudingumo funkcija $u\colon\ X \to \mathbb{R}$ ir $p > 0$.*

(a) *Jei* $x^* \in D(p, w)$ *su kuriuo nors* $w > 0$*, tai* $x^* \in E(p, u(x^*))$. *Be to,* $e(p, u(x^*)) = w$.

(b) *Jei* $x^* \in E(p, c)$ *su kuriuo nors* $c > u(0)$*, tai* $x^* \in D(p, p{\cdot}x^*)$. *Be to,* $u(x^*) = c$.

Įrodymas. (a): Tegul $w > 0$ ir $x^* \in D(p, w)$. Pakanka parodyti, kad $p{\cdot}x^* \le p{\cdot}x$ visiems tiems $x \in X$, kuriems $u(x) \ge u(x^*)$. Jei taip nėra, tai egzistuoja toks $x' \in X$, kad $u(x') \ge u(x^*)$ ir $p{\cdot}x' < p{\cdot}x^* \le w$. remiantis $(X, \succeq)$ lokaliu nepasotinamumu, tada galima rasti tokį $x'' \in X$, kad $u(x'') > u(x') \ge u(x^*)$ ir $p{\cdot}x'' < w$. Tai reiškia egzistavimą tokios gėrybės $x'' \in X$, kad $x'' \in B(p, w)$ ir $u(x'') > u(x^*)$, o tai prieštarauja tam, kad $x^* \in D(p, w)$ (3.7(b) teiginys). Ši prieštara įrodo pirmąją (a) dalį. Antroji dalis yra Walraso dėsnis $p{\cdot}x^* = w$, kuris galioja dėka 5.8 išvados, nes $(X, \succeq)$ yra lokaliai nepasotinamas gėrybių laukas.

(b): tegul $c > u(0)$ ir $x^* \in E(p, c)$. Kadangi $u(x^*) \ge c > u(0)$, $x^* \ne 0$ ir todėl $p{\cdot}x^* > 0$. Pakanka parodyti, kad $u(x^*) \ge u(x)$ kiekvienam $x \in B(p, p{\cdot}x^*)$. Jei taip nėra, tai galima rasti tokį $x' \in B(p, p{\cdot}x^*)$, kad $u(x') > u(x^*)$. Kadangi X iškila ir $0 \in X$, $\lambda x' \in X$ kiekvienam $\lambda \in (0, 1)$. Paėmę λ pakankamai arti 1, gauname tokį $x'' := \lambda x'$, kad $p{\cdot}x'' < p{\cdot}x^*$ ir $u(x'') > u(x^*) \ge c$ - prieštara tam, kad x^* yra naudingumo lygį c atitinkančios išlaidų minimizavimo problemos sprendinys. Ši prieštara įrodo pirmąją (b) dalį. Remiantis antrąja dalimi, jei $u(x^*) > c$, tai paėmę λ pakankamai arti 1, gautume $u(\lambda x^*) > c$ ir $p{\cdot}(\lambda x^*) < p{\cdot}x^*$ – prieštara, įrodanti teiginį. □

5.17 teorema įgalina nustatyti tokius sąryšius tarp išlaidų funkcijos e ir netiesioginio naudingumo funkcijos v (5.13 apibrėžimas): bet kuriems $p > 0$, $w > 0$ ir $c > u(0)$

$$e(p, v(p, w)) = w \qquad \text{ir} \qquad v(p, e(p, c)) = c. \tag{5.14}$$

Iš tikrųjų, pirmasis sąryšis išplaukia iš antrosios (a) savybės dalies bei to, kad $u(x^*) = v(p, w)$. Tuo tarpu antrasis sąryšis išplaukia iš antrosios (b) savybės dalies, nes $c = u(x^*) = v(p, p{\cdot}x^*)$ ir $p{\cdot}x^* = e(p, c)$. Be kita ko, (5.14) sąryšiai reiškia, kad fiksuotam $p > 0$, $e(p, \cdot)$ ir $v(p, \cdot)$ yra atvirkštinės viena kitai funkcijos.

Toliau įrodoma keletas išlaidų funkcijos savybių.

5.18 teorema. *Sakykime, kad* $X \subset \mathbb{R}^\ell_+$ *yra iškila ir uždara vartojimo aibė, o lokaliai nepasotinamas gėrybių laukas* $(X, \succeq)$ *yra išreiškiamas tolydžia ir neaprėžta naudingumo funkcija* $u\colon\ X \to \mathbb{R}$. *Tada išlaidų funkcija* e *yra apibrėžta srityje* $\mathbb{R}^\ell_{++} \times [u(0), \infty)$ *ir jai galioja savybės*:

(a) *pirmos eilės teigiamai homogeninė funkcija atžvilgiu* p;

(b) *didėjanti koordinatės* c *atžvilgiu ir nemažėjanti koordinatės* p_h *atžvilgiu*;

(c) *įgaubta* p *atžvilgiu, t. y. kiekvienam* $c \ge u(0)$,

$$e(\lambda p' + (1 - \lambda)p'', c) \ge \lambda e(p', c) + (1 - \lambda)e(p'', c),$$

jei $p', p'' > 0$ *ir* $\lambda \in (0, 1)$;

(d) *tolydi.*

Įrodymas. Išlaidų funkcija e apibrėžta nurodytoje srityje dėka 5.16 teiginio, nes naudingumo funkcija u yra neaprėžta.

(a): Tarkime, kad $p > 0$, $c \geq u(0)$ ir $\lambda > 0$. Kadangi $\lambda p > 0$, $E(\lambda p, c)$ yra netuščia aibė. Tegul $x^* \in E(\lambda p, c)$, t. y. $u(x^*) \geq c$, $e(\lambda p, c) = (\lambda p){\cdot}x^* \leq (\lambda p){\cdot}x$ visiems $x \in X$, kuriems $u(x) \geq c$. Suprastinę iš λ gauname, kad $p{\cdot}x^* \leq p{\cdot}x$ visiems tiems $x \in X$, kuriems $u(x) \geq c$. Taigi, $p{\cdot}x^* \leq e(p, c)$. Pastarojoje nelygybėje $\leq$ galima pakeisti $=$ nes $u(x^*) \geq c$. Gautą lygybę padauginę iš λ gauname $e(\lambda p, c) = \lambda e(p, c)$, t. y. galioja (a) savybė.

(b): Pirma, reikia parodyti, kad kiekvienam $p > 0$, $e(p, c') < e(p, c'')$, jei $c' < c''$. Tarkime priešingai, kad egzistuoja tokie $p > 0$ ir $c' < c''$, kad $e(p, c') \geq e(p, c'')$. Tegul $x' \in E(p, c')$ ir $x'' \in E(p, c'')$. Kiekvienam $\lambda \in (0, 1)$, tegul $x_\lambda := \lambda x''$. Kadangi $c'' > c'$ ir $p{\cdot}x' \geq p{\cdot}x''$ pagal prielaidą, tai λ esant pakankamai arti 1, $u(x_\lambda) > c'$ ir $p{\cdot}x' > p{\cdot}x_\lambda$ – prieštara tam, kad $x' \in E(p, c')$. Tai įrodo pirmąją (b) savybės dalį. Remiantis antrąja dalimi tarkime, kad $c \geq u(0)$, $p'_h < p''_h$, $p'_l = p''_l$ kiekvienam $l \neq h$ ir $x' \in E(p', c')$. Tada visiems tokiems $x \in X$, kad $u(x) \geq c$, $p'{\cdot}x' \leq p'{\cdot}x \leq p''{\cdot}x$, t. y. $p'{\cdot}x'$ yra aibės $\{p''{\cdot}x\colon\ x \in X,\ u(x) \geq c\}$ apatinis rėžis. Todėl $e(p', c) \leq e(p'', c)$.

(c): Tarkime, kad $c \geq u(0)$, $p', p'' > 0$, $p_\lambda := \lambda p' + (1-\lambda)p'' > 0$ su kuriuo nors $\lambda \in (0, 1)$, o $x_\lambda \in E(p_\lambda, c)$. Tada $u(x_\lambda) \geq c$ ir

$$e(p_\lambda, c) = p_\lambda{\cdot}x_\lambda = \lambda p'{\cdot}x_\lambda + (1-\lambda)p''{\cdot}x_\lambda \geq \lambda e(p', c) + (1-\lambda)e(p'', c),$$

t. y. galioja (c) savybė.

(d): Tarkime priešingai, kad $(p_n, c_n) \to (p, c)$, bet $e(p_n, c_n) \not\to e(p, c)$ kai $n \to \infty$. Remiantis jau įrodytu (b) teiginiu, seka $(e(p_n, c_n))$ yra aprėžta. Todėl egzistuoja konverguojantis jos posekis. Tarkime, kad pati seka konverguoja, t. y. su kuriuo nors $a \in \mathbb{R}$, $e(p_n, c_n) \to a$ kai $n \to \infty$. Tada arba $a < e(p, c)$, arba $a > e(p, c)$. Tarkime, kad galioja pirmasis atvejis. Antruoju atveju įrodymas yra simetriškas. Remiantis (5.14) ir v tolydumu (5.15(c) teorema), $c_n = v(p_n, e(p_n, c_n)) \to v(p, a)$ ir, pagal prielaidą, $c_n \to c = v(p, e(p, c))$ kai $n \to \infty$. Todėl $v(p, a) = v(p, e(p, c))$ arba, naudojantis v apibrėžimu,

$$u(\varphi[p, a]) = u(\varphi[p, e(p, c)]). \tag{5.15}$$

Tarkime, kad $x \in \varphi[p, a]$ ir $y \in \varphi[p, e(p, c)]$. Remiantis Walraso dėsniu ir prielaida, $p{\cdot}x = a < e(p, c) = p{\cdot}y$. Egzistuoja tokia x aplinka U, kad visiems $z \in U$, $p{\cdot}z < e(p, c)$, t. y. $U \subset B(p, e(p, c))$. Remiantis lokaliu nepasotinamumu randame tokį $z \in B(p, e(p, c))$, kuriam $u(z) > u(x) = u(y)$ dėka (5.15), o tai yra prieštara y optimalumui. Teoremos įrodymas baigtas. □

Hickso paklausos atitiktis Tarkime, kad $X \subset \mathbb{R}^\ell_+$ yra vartojimo aibė, $u\colon\ X \to \mathbb{R}$ yra naudingumo funkcija ir $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^\ell_+ \times [u(0), \infty)$ yra tokia kainos–naudingumo lygių (p, c)

aibė, kurioms išlaidų minimizavimo problema turi sprendinį, t. y. (5.12) aibė $E(p,c)$ yra netuščia. Tada priskyrimas

$$\psi\colon\ (p,c)\mapsto E(p,c)\subset X, \qquad (p,c)\in\mathcal{D},$$

yra atitiktis iš $\mathbb{R}^{\ell}_{++}\times[u(0),\infty)$ į X su apibrėžimo sritimi $\mathcal{D}$, kuri toliau vadinama *Hickso* (kompensuotos) *paklausos atitiktimi* (angl. Hicksian compensated demand correspondence). Kaip ir anksčiau panašiais atvejais (žr. Walraso paklausos atitiktis (5.3)), naudosime elemento (p,c) vaizdo žymėjimą $\psi[p,c]$ vietoje $\psi[(p,c)]$. Jei (5.12) aibės $E(p,c)$ sudarytos iš vieno elemento $x=x(p,c)$ visiems $(p,c)\in\mathcal{D}$, tai $\psi\colon\ \mathcal{D}\to X$, vadinama *Hickso paklausos funkcija* su reikšmėmis $\psi(p,c)=x\in\{x\}=E(p,c)$.

Pagal Hickso paklausos atitikties apibrėžimą, kiekvienam $x\in\psi[p,c]$, $p{\cdot}x=e(p,c)$. Jei ψ yra Hickso paklausos funkcija, tai pastarasis sąryšis išreiškiamas lygybe

$$e(p,c)=p{\cdot}\psi(p,c) \tag{5.16}$$

kiekvienam $(p,c)\in\mathcal{D}$.

Netrukus matysime, kad Hickso paklausos atitiktis yra duali Walraso paklausos atitikčiai su panašiomis savybėmis. Pavyzdžiui, Walraso dėsnis, teigiantis, kad pasirinkimas iš biudžeto aibės priklauso biudžeto kraštui, turi savo analogą Hickso paklausos atitikčiai.

5.19 apibrėžimas. Tarkime, kad $(p,c)\in\mathbb{R}^{\ell}_{+}\times[u(0),\infty)$ yra kainos–naudingumo lygis. Sakysime, kad šį lygį atitinkančiai aibei $E(p,c)$ galioja *beperteklinis naudingumas*, jei ji yra netuščia ir $u(x)=c$ kiekvienam $x\in E(p,c)$. Jei ψ yra Hickso paklausos atitiktis apibrėžta srityje $\mathcal{D}$ ir ši savybė galioja visiems pasirinkimams iš $\psi[p,c]$ kiekvienam $(p,c)\in\mathcal{D}$, tai sakoma, kad Hickso paklausos atitikčiai galioja *beperteklinio naudingumo savybė*.

Toliau įrodoma keletas Hickso paklausos atitikties savybių.

5.20 teorema. *Sakykime, kad $X\subset\mathbb{R}^{\ell}_{+}$ yra iškila ir uždara vartojimo aibė, o lokaliai nepasotinamas gėrybių laukas $(X,\succeq)$ yra išreiškiamas tolydžia ir neaprėžta naudingumo funkcija $u\colon\ X\to\mathbb{R}$. Hickso paklausos atitiktis ψ apibrėžta srityje $\mathcal{D}=\mathbb{R}^{\ell}_{++}\times[u(0),\infty)$ ir galioja savybės*:

(a) *ψ yra nulinės eilės teigiamai homogeninė atitiktis kainos p atžvilgiu*;

(b) *beperteklinis naudingumas*: *kiekvienam $(p,c)\in\mathcal{D}$ ir visiems $x^*\in\psi[p,c]$, $u(x^*)=c$*;

(c) *$\psi[p,c]$ yra iškila kiekvienam $(p,c)\in\mathcal{D}$, jei laukas $(X,\succeq)$ yra iškilas*;

(d) *ψ yra funkcija, jei laukas $(X,\succeq)$ yra griežtai iškilas.*

Įrodymas. Hickso paklausos atitiktis ψ apibrėžtumas srityje $\mathcal{D}$ galioja atsižvelgiant į 5.16 teiginį, nes naudingumo funkcija u yra neaprėžta.

(a): Tegul $p > 0$, $c \geq u(0)$ ir $\lambda > 0$. Kadangi $e(\lambda p, c) = \lambda e(p, c)$ remiantis 5.18 teoremos (a) teiginiu, jei $x \in \psi[\lambda p, c]$ tai $(\lambda p) \cdot x = e(\lambda p, c) = \lambda e(p, c)$ ir todėl $p{\cdot}x = e(p, c)$, t. y. $x \in \psi[p, c]$, nes $u(x) \geq c$. Taigi, $\psi[\lambda p, c] \subset \psi[p, c]$. Lygiai taip pat gauname $\psi[p, c] \subset \psi[\lambda p, c]$. O tai reiškia, kad $\psi[\lambda p, c] = \psi[p, c]$.

(b): Tegul $p \in \mathbb{R}^\ell_{++}$ ir $c = u(0)$. Tada $x^* = 0 \in \psi[p, c]$. Jei $x \in \mathbb{R}^\ell_+$ ir $x \neq 0$, tai $p{\cdot}x > 0 = p{\cdot}x^*$. Tai reiškia, kad $\psi[p, c]$ turi vienintelį elementą 0 ir todėl šiai aibei galioja beperteklinis naudingumas. Tegul $(p, c) \in \mathcal{D}$, $c > u(0)$ ir $x^* \in \psi[p, c]$. Tada $x^* \neq 0$. Jei $u(x^*) > c$, tai paėmę λ pakankamai arti 1 gauname $u(\lambda x^*) > c$ ir $p{\cdot}(\lambda x^*) < p{\cdot}x^*$ - prieštara, įrodanti, kad $u(x^*) = c$.

(c): Tarkime, kad $(X, \succeq)$ yra iškilas laukas. Tegul $(p, c) \in \mathcal{D}$, $x', x'' \in \psi[p, c]$, $x' \neq x''$ ir $x := \lambda x' + (1 - \lambda)x''$ su kuriuo nors $\lambda \in (0, 1)$. Remiantis 3.19(a) teiginiu, u yra kvazi-įgaubta funkcija ir todėl $u(x) \geq \min\{u(x'), u(x'')\} \geq c$. Be to, $p{\cdot}x = \lambda p{\cdot}x' + (1 - \lambda)p{\cdot}x'' \leq p{\cdot}y$ visiems tiems $y \in X$, kuriems $u(y) \geq c$. Iš čia išplaukia $x \in \psi[p, c]$.

(d): Dabar tarkime, kad $(X, \succeq)$ yra griežtai iškilas laukas. Tarkime, kad egzistuoja tokie $(p, c) \in \mathcal{D}$ ir $x', x'' \in \psi[p, c]$, kad $x' \neq x''$. Naudodami praeito paragrafo žymėjimus ir argumentus gauname, kad $x \in \psi[p, c]$ ir $u(x) > c$ remiantis gėrybių lauko griežtu iškilumu. Tada paėmę λ pakankamai arti 1 gauname $u(\lambda x) > c$ ir $p{\cdot}(\lambda x) < p{\cdot}x$. Tai prieštarauja x minimalumui ir todėl $x' = x'' = \psi(p, c)$; tai ir reikėjo įrodyti. □

5.17 teorema įgalina susieti Hickso paklausos atitiktį ψ ir Walraso paklausos atitiktį φ, apibrėžtą (5.3) priskyrimu, tokiais sąryšiais: bet kuriems $p > 0$, $w > 0$ ir $c > u(0)$, galioja

$$\psi[p, c] = \varphi[p, e(p, c)] \qquad \text{ir} \qquad \varphi[p, w] = \psi[p, v(p, w)]. \tag{5.17}$$

Iš tikrųjų, remiantis 5.17 teoremos (a) savybe, jei $x^* \in \varphi[p, w]$, tai $x^* \in \psi[p, u(x^*)]$ ir $w = e(p, u(x^*))$. Kadangi $u(x^*) = v(p, w)$, gauname

$$\varphi[p, w] \subset \psi[p, v(p, w)] \qquad \text{ir} \qquad \varphi[p, e(p, u(x^*))] \subset \psi[p, u(x^*)].$$

Remiantis tos pačios teoremos (b) savybe jei $x^* \in \psi[p, c]$, tai $x^* \in \varphi[p, p{\cdot}x^*]$ ir $c = u(x^*) = v(p, p{\cdot}x^*)$. Kadangi $p{\cdot}x^* = e(p, c)$, gauname

$$\psi[p, c] \subset \varphi[p, e(p, c)] \qquad \text{ir} \qquad \psi[p, v(p, p{\cdot}x^*)] \subset \varphi[p, p{\cdot}x^*].$$

Dar kartą remiantis abiejų savybių antrosiomis dalimis, $p{\cdot}x^* = w$ ir $u(x^*) = c$. Iš čia išplaukia (5.17) sąryšiai.

Pirmasis iš (5.17) sąryšių paaiškina terminą Hickso *kompensuotoji* paklausos atitiktis. Kintant kainai p ir esant fiksuotam naudingumo lygmeniui c, $\psi[p, c]$ išreiškia paklausą φ, atitinkančią pasikeitusią vartotojo turto vertę iš w į $e(p, c)$. Pereinant nuo kainos p prie kainos p', Hickso turto kompensacija vadinamas pokytis $\Delta w = e(p', c) - w$. Tokiu būdu, keičiantis kainai, Hickso kompensuotoji paklausos atitiktis išlaiko pastovų vartotojo naudingumo lygmenį c, o tuo tarpu Walraso paklausos atitiktis išlaiko pastovią vartotojo turto vertę w.

Gauti (5.14) ir (5.17) sąryšiai naudojami kitame skyrelyje, nagrinėjant vartotojo paklausos dėsnius.

Pratimai.

1. Įrodyti 5.15 Teoremos (a) ir (b) savybes.

2. Naudojantis Lagrange daugiklių metodu charakterizuoti aibės $E(p,c)$, $p \in \mathbb{R}^2_{++}$, $c \geq u(0)$ beperteklinio naudingumo elementus. Nuoroda: naudotis Lagrange funkcija $L(x,\lambda) := p{\cdot}x - \lambda(u(x) - c)$, $x = (x_1, x_2)$.

3. Kobo–Duglaso naudingumo funkcijos (3.14) atveju rasti Hickso funkciją $\psi(p,c)$ ir išlaidų funkciją $e(p,c)$. Atsakymas: pažymėjus $K := \left[\epsilon^{-\epsilon}(1-\epsilon)^{\epsilon-1}\right]$,
$$\psi(p,c) = cK \left\{ \epsilon \left[\frac{p_2}{p_1}\right]^{1-\epsilon}, (1-\epsilon)\left[\frac{p_1}{p_2}\right]^{\epsilon} \right\} \quad \text{ir} \quad e(p,c) = Kp_1^{\epsilon}p_2^{1-\epsilon}c. \tag{5.18}$$

4. CES naudingumo funkcijos (3.15) atveju rasti Hickso funkciją $\psi(p,c)$ ir išlaidų funkciją $e(p,c)$. Atsakymas:
$$\psi(p,c) = \left\{ p_1^{\frac{1}{\rho-1}} \left[p_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + p_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right]^{-\frac{1}{\rho}} c, p_2^{\frac{1}{\rho-1}} \left[p_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + p_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right]^{-\frac{1}{\rho}} c \right\}.$$

5. Sakykime, kad $(\mathbb{R}^2_+, \succeq)$ yra alternatyvų laukas apibrėžtas naudingumo funkcija
$$u(x) = x_1 + x_2, \qquad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+.$$
Rasti atitinkamą Hickso paklausos atitiktį ψ ir išlaidų funkciją e.

6. Sakykime, kad vartotojo netiesioginė naudingumo funkcija yra
$$v(p,w) = \frac{w}{\min\{p_1, p_2\}}, \qquad p = (p_1, p_2) > 0 \quad \text{ir} \quad w > 0.$$
Rasti išlaidų funkciją e. Kokia yra šio vartotojo naudingumo funkcija?

7. Sakykime, kad $(\mathbb{R}^2_+, \succeq)$ yra alternatyvų laukas apibrėžtas naudingumo funkcija
$$u(x) = \min\{x_1, x_2\}, \qquad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+.$$
Rasti atitinkamą Hickso paklausos atitiktį ψ ir išlaidų funkciją e.

8. Sakykime, kad vartotojo netiesioginė naudingumo funkcija yra
$$v(p,w) = \frac{w}{p_1 + p_2}, \qquad p = (p_1, p_2) > 0 \quad \text{ir} \quad w > 0.$$
Rasti išlaidų funkciją e. Kokia yra šio vartotojo naudingumo funkcija?

5.3 Vartotojo paklausos dėsnis

Vartotojo paklausos dėsniu vadinamas paklausos ir kainos kitimas priešingomis kryptimis, t. y. didėjant kainai paklausa mažėja ir atvirkščiai. Pirmiausia šiame skyrelyje parodoma, kad vartotojo paklausos dėsnis galioja Walraso paklausos funkcijai tam tikru būdu kompensuojant kainos pokyčius. Antroje skyrelio dalyje įrodomos Slutsky lygtys glodžioms naudingumo ir pasirinkimo funkcijoms. Šiems sąryšiams taip pat suteikiama vartotojo paklausos dėsnio interpretacija.

Silpnoji atskleistosios preferencijos aksioma 3.4 skyrelyje apie preferencijos atskleidimą parodėme, kad pasirinkimų struktūros savybė SAPA garantuoja tai, kad atskleisti pasirinkimai yra racionalūs. Be to, SAPA galioja pasirinkimo struktūrai $(\mathcal{B}^*, C^*_{\succeq})$, kurią apibrėžia racionalus preferencijos sąryšis $\succeq$. Tokią suderinamumo savybę pritaikysime tiriant vartotojo pasirinkimus nusakomus Walraso paklausos funkcija φ, apibrėžtą (5.4) priskyrimu.

5.21 apibrėžimas. Sakysime, kad Walraso paklausos funkcijai φ galioja *silpnoji atskleistosios preferencijos aksioma*, arba SAPA, jei su bet kuriomis dviem kainos–turto būsenomis (p, w) ir (p', w') teisinga implikacija:

$$\text{jei} \quad p{\cdot}\varphi(p', w') \le w \quad \text{ir} \quad \varphi(p, w) \ne \varphi(p', w') \quad \text{tai} \quad p'{\cdot}\varphi(p, w) > w'. \tag{5.19}$$

Ši savybė reiškia, kad vartotojo pasirinkimas turi būti suderintas. Būtent, pasirinkimo savybės $p{\cdot}\varphi(p', w') \le w$ ir $\varphi(p, w) \ne \varphi(p', w')$ rodo, jog kainos–turto būsenoje (p, w), $\varphi(p, w)$ yra vertingesnis už $\varphi(p', w')$. Šis atskleistas pasirinkimas ir SAPA savybė teigia tokio pasirinkimo suderinamumą tą prasme, kad kainos–turo būsenoje (p', w'), pasirinkus $\varphi(p', w')$, negalima pasirinkti $\varphi(p, w)$ ir šis negalimumas išreiškiamas tuo, kad $\varphi(p, w)$ neprieinamas būsenoje (p', w').

Parodysime, kad taip suformuluota SAPA Walraso paklausos funkcijai φ yra atskiras SAPA atvejis pasirinkimo struktūrai $(\mathcal{B}^*, C^*_{\succeq})$ (žr. 3.27 apibrėžimą). Tarkime, kad $X \subset \mathbb{R}^{\ell}_{+}$ yra vartojimo aibė ir $\varphi\colon \mathbb{R}^{\ell+1}_{++} \to X$ yra Walraso paklausos funkcija, apibrėžta (5.4) reikšmėmis. Taip pat tarkime, kad $\mathcal{B}^* = \{B(p, w)\colon (p, w) \in \mathbb{R}^{\ell+1}_{++}\}$ ir $C^*_{\succeq}[B(p, w)] = \varphi(p, w)$ su kiekviena kainos–turto būsena $(p, w) \in \mathbb{R}^{\ell+1}_{++}$. Patikrinsime, kad SAPA galioja pasirinkimo struktūrai $(\mathcal{B}^*, C^*_{\succeq})$ tada ir tik tada, kai SAPA galioja Walraso paklausos funkcijai φ.

Iš tikrųjų, tarkime, kad SAPA galioja Walraso paklausos funkcijai φ. Taip pat tarkime, kad $B = B(p, w)$, $B' = B(p', w')$, $x \succeq_B y$, $x \in B'$ ir $y \in C^*_{\succeq}[B']$. Tada

$$x = \varphi(p, w), \quad y = \varphi(p', w'), \quad p{\cdot}\varphi(p', w') \le w \quad \text{ir} \quad p'{\cdot}\varphi(p, w) \le w'. \tag{5.20}$$

Kadangi φ yra funkcija, tai $x \in C^*_{\succeq}(B')$ tada ir tik tada, kai $x = y$. Jei $x \ne y$, tai remiantis (5.19), teisinga griežta nelygybė $p'{\cdot}\varphi(p, w) > w'$ - prieštara (5.20), įrodanti, kad $x = y$ ir todėl SAPA galioja pasirinkimo struktūrai $(\mathcal{B}^*, C^*_{\succeq})$.

Dabar tarkime, kad SAPA galioja pasirinkimo struktūrai $(\mathcal{B}^*, C^*_{\succeq})$. Taip pat tarkime, kad $(p,w),(p',w') \in \mathbb{R}^{\ell+1}_{++}$, $x := \varphi(p,w)$, $y := \varphi(p',w')$, $x \neq y$ ir $p{\cdot}y \leq w$. Tada

$$x \in C^*_{\succeq}[B(p,w)], \qquad y \in B(p,w) \qquad \text{ir} \qquad y \in C^*_{\succeq}[B(p',w')].$$

Remiantis pirmais dviem sąryšiais, $x \succeq^* y$. Be to, remiantis SAPA pasirinkimo struktūrai $(\mathcal{B}^*, C^*_{\succeq})$, jei $x \in B(p',w')$, tai $x \in C^*_{\succeq}[B(p',w')]$. Todėl $x = y$ – prieštara, įrodanti, kad $x \notin B(p',w')$, t. y. $p'{\cdot}\varphi(p,w) > w'$. Tokiu būdu SAPA galioja Walraso paklausos funkcijai φ.

Toliau šiame skyrelyje Walraso paklausos funkciją $\varphi\colon \mathbb{R}^{\ell+1}_{++} \to \mathbb{R}^{\ell}_{+}$ galima pakeisti bet kuria kita funkcija, kuri yra nulinės eilės teigiamai homogeniška funkcija (5.9(a) teiginys) ir jai galioja Walraso dėsnis (5.7 išvada). Priminsime, kad funkcija φ, yra nulinės eilės teigiamai homogeniška, jei bet kuriems $(p,w) \in \mathbb{R}^{\ell+1}_{++}$ ir $\lambda > 0$,

$$\varphi(\lambda p, \lambda w) = \varphi(p,w).$$

Taip pat, funkcijai φ galioja Walraso dėsnis, jei bet kuriems $(p,w) \in \mathbb{R}^{\ell+1}_{++}$,

$$p{\cdot}\varphi(p,w) = w. \tag{5.21}$$

Keičiantis kainai, keičiasi kiekvieno vartotojo pradinio turto kaina. Gali atsitikti taip, kad, pasikeitus kainai, pradinis vartotojo pasirinkimas nepriklauso jo naujai biudžeto aibei. Toliau nagrinėsime tokius kainos pokyčius, kurie pradinį vartotojo pasirinkimą išlaiko įperkamu su nauja kaina. Sakysime, kad kainos pokytis iš būsenos (p,w) į būseną (p',w') yra *kompensuojamas* (Slutsky prasme), jei $w' = p'{\cdot}\varphi(p,w)$. Kitaip kalbant, kainos pokytis yra kompensuojamas Slutsky prasme, jei būsenoje (p,w) pasirinktas gėrybių rinkinys $\varphi(p,w)$ yra įperkamas būsenoje (p',w').

Toliau parodysime, kad SAPA priklauso tik nuo kompensuojamų kainos pokyčių.

5.22 lema. *Walraso paklausos funkcijai φ galioja SAPA tada ir tik tada, kai* (5.19) *galioja kompensuotiems kainos pokyčiams.*

Įrodymas. Pakanka parodyti, kad, negaliojant SAPA, egzistuoja tokie kompensuotieji kainos pokyčiai, kuriems SAPA taip pat negalioja. Tarkime, kad (p',w') ir (p'',w'') yra dvi tokios kainos–turto būsenos kurioms (5.19) negalioja, t. y. $\varphi(p',w') \neq \varphi(p'',w'')$,

$$p''{\cdot}\varphi(p',w') \leq w'' \qquad \text{ir} \qquad p'{\cdot}\varphi(p'',w'') \leq w'.$$

Jei bent viename iš šių sąryšių teisinga lygybė, tai abiem atvejais turime kompensuotą kainos pokytį, kuriam negalioja (5.19) ir lemos įrodymas tokiu atveju baigtas. Todėl tarkime, kad

$$p''{\cdot}\varphi(p',w') < w'' \qquad \text{ir} \qquad p'{\cdot}\varphi(p'',w'') < w'. \tag{5.22}$$

Tegul

$$\lambda := \frac{w'' - p''{\cdot}\varphi(p',w')}{[w' - p'{\cdot}\varphi(p'',w'')] + [w'' - p''{\cdot}\varphi(p',w')]} \in (0,1).$$

Tada, naudojant Walraso dėsnį, šiam λ gaunama lygybė

$$(\lambda p' + (1-\lambda)p'')\cdot\varphi(p', w') = (\lambda p' + (1-\lambda)p'')\cdot\varphi(p'', w'').$$

Pažymėkime $p := \lambda p' + (1-\lambda)p''$ ir $w := p\cdot\varphi(p', w') = p\cdot\varphi(p'', w'')$. Toliau naudojant Walraso dėsnį funkcijai φ, turime lygybę $w' = p'\cdot\varphi(p', w')$. Tada, naudojant pirmąją (5.22) nelygybę, gaunama

$$\begin{aligned}
\lambda w' + (1-\lambda)w'' &> \lambda p'\cdot\varphi(p', w') + (1-\lambda)p''\cdot\varphi(p', w') = w \\
\text{Walraso dėsnis} \quad &= p\cdot\varphi(p, w) \\
&= \lambda p'\cdot\varphi(p, w) + (1-\lambda)p''\cdot\varphi(p, w).
\end{aligned}$$

Todėl, arba $p'\cdot\varphi(p, w) < w'$, arba $p''\cdot\varphi(p, w) < w''$. Tarkime, kad galioja pirmoji alternatyva. Tada $\varphi(p, w) \neq \varphi(p', w')$, $p\cdot\varphi(p', w') = w$ ir $p'\cdot\varphi(p, w) < w'$, o tai prieštarauja SAPA kompensuotam kainos pokyčiui iš (p', w') į (p, w). Galiojant antrajai alternatyvai, prieštara gaunama simetriniu būdu; tai ir reikėjo įrodyti. $\square$

Toliau įrodoma, kad skyrelio pradžioje minėtasis vartotojo paklausos dėsnis galioja kompensuotiems kainos pokyčiams. Kainos pokytį pažymėjus $\Delta p := p' - p$, o paklausos pokytį pažymėjus $\Delta\varphi := \varphi(p', w') - \varphi(p, w)$, nelygybę $\Delta p\cdot\Delta\varphi \leq 0$ galima interpretuoti kaip kainos ir paklausos kitimą priešingomis kryptimis.

5.23 teorema. *Walras'o paklausos funkcijai φ galioja SAPA tada ir tik tada, kai kiekvienam kompensuotu kainos pokyčiu iš kainos–turto būsenos (p, w) į būseną (p', w'), galioja nelygybė*

$$\Delta p\cdot\Delta\varphi \;=\; (p' - p)\cdot\big[\varphi(p', w') - \varphi(p, w)\big] \leq 0 \tag{5.23}$$

ir ši nelygybė yra griežta jei $\varphi(p, w) \neq \varphi(p', w')$.

Įrodymas. Sakykime, kad funkcijai φ galioja SAPA ir kainos pokytis iš būsenos (p, w) į būseną (p', w') yra kompensuojamas. Pakanka įrodyti (5.23) su griežta nelygybe kai $\varphi(p, w) \neq \varphi(p', w')$, nes priešingu atveju akivaizdžiai teisinga lygybė. Taigi, tarkime, kad $\varphi(p, w) \neq \varphi(p', w')$. Kadangi nagrinėjamas kainos pokytis yra kompensuotas, tai $p'\cdot\varphi(p, w) = w'$. Be to, remiantis Walras'o dėsnio išvada, $p'\cdot\varphi(p', w') = w'$. Iš čia išplaukia, kad

$$p'\cdot\big[\varphi(p', w') - \varphi(p, w)\big] = 0. \tag{5.24}$$

Dar kartą pasinaudojus kompensuoto turto apibrėžimu $w' = p'\cdot\varphi(p, w)$ gauname, kad prekių rinkinys $\varphi(p, w)$ yra įperkamas esant (p', w') kainos–turto būsenai. Todėl, remiantis SAPA, kitas prekių rinkinys $\varphi(p', w')$ negali būti įperkamas esant (p, w) kainos–turto būsenai, t. y. $p\cdot\varphi(p', w') > w$. Pastaroji nelygybė kartu su kita Walraso dėsnio išvada $p\cdot\varphi(p, w) = w$, leidžia teigti, kad

$$p\cdot\big[\varphi(p', w') - \varphi(p, w)\big] > 0. \tag{5.25}$$

Iš (5.24) ir (5.25) išplaukia (5.23) su griežta nelygybe.

Dabar tarkime priešingai, kad (5.23) su griežta nelygybe galioja bet kuriam kompensuotam kainos pokyčiui iš (p, w) į (p', w') ir $\varphi(p, w) \neq \varphi(p', w')$. Jei funkcijai φ SAPA negalioja, tai, remiantis 5.22 Lema, egzistuoja toks kompensuotas kainos pokytis iš (p, w) į (p', w'), kad $\varphi(p, w) \neq \varphi(p', w')$, $p{\cdot}\varphi(p', w') \leq w$ ir $p'{\cdot}\varphi(p, w) = w'$. Iš čia ir Walraso dėsnio dėka, gauname

$$p{\cdot}\big[\varphi(p', w') - \varphi(p, w)\big] \leq 0 \qquad \text{ir} \qquad p'{\cdot}\big[\varphi(p', w') - \varphi(p, w)\big] = 0.$$

Tokiu būdu

$$\varphi(p, w) \neq \varphi(p', w') \qquad \text{ir} \qquad (p' - p){\cdot}\big[\varphi(p', w') - \varphi(p, w)\big] \geq 0,$$

o tai prieštarauja prielaidai (5.23) su griežta nelygybe. Todėl funkcijai φ galioja SAPA; tai ir reikėjo įrodyti. □

Slutsky lygtis Tuo atveju, kai naudingumo funkcija ir paklausos funkcijos yra glodžios, galima gauti tikslesnę informaciją apie paklausos kitimo struktūrą.

Toliau iki šio skyrelio pabaigos tarkime, kad vartojimo aibė $X \subset \mathbb{R}^{\ell}_{+}$ yra iškila ir uždara, o lokaliai nepasotinamas gėrybių laukas $(X, \succeq)$ yra griežtai iškilas ir išreiškiamas tolydžia neaprėžta naudingumo funkcija $u\colon X \to \mathbb{R}$. Tokiu atveju Walraso paklausos funkcija φ yra apibrėžta aibėje $\mathbb{R}^{\ell+1}_{++}$, o Hickso paklausos funkcija ψ yra apibrėžta aibėje $\mathbb{R}^{\ell}_{++} \times [u(0), \infty)$. Be to, pirmajai iš šių dviejų funkcijų galioja Walraso dėsnis (5.21), o antrajai galioja beperteklinis naudingumas: bet kuriems $(p, c) \in \mathbb{R}^{\ell}_{++} \times [u(0), \infty)$,

$$u(\psi(p, c)) = c.$$

Pradėsime nuo išlaidų funkcijos e ir Hickso paklausos funkcijos ψ, kurių reikšmės siejasi (5.16) sąryšiu.

5.24 teorema. *Sakykime, kad u yra C^1 funkcija su niekur nelygiu nuliui gradientu ∇u, o Hickso paklausos funkcija ψ yra diferencijuojama. Kiekvienam $(p, c) \in \mathbb{R}^{\ell}_{++} \times [u(0), \infty)$, išlaidų funkcija e yra diferencijuojama taške (p, c) ir jos gradientas atžvilgiu kainos vektoriaus yra*

$$\nabla_p e(p, c) = \psi(p, c). \tag{5.26}$$

Įrodymas. Jei $c = u(0)$, tai $\psi(p, c) = 0$ ir $e(p, c) = 0$ kiekvienam $p > 0$. Todėl (5.26) galioja atveju $c = u(0)$. Tegul $c > u(0)$ ir $p > 0$. Tada visos vektoriaus $\psi(p, c)$ koordinatės teigiamos. Jei ne, tai naudojant lauko lokalų nepasotinamumą ir beperteklinio naudingumo savybę, gauname prieštarą. Taigi $\psi(p, c) \in \mathbb{R}^{\ell}_{++}$.

Kadangi paklausos funkcijai ψ galioja beperteklinis naudingumas, $u(\psi(p, c)) = c$. Naudojant kompozicijos diferencijavimo taisyklę iš 2.78 teiginio funkcijai $\mathbb{R}_{+} \ni p_h \mapsto$

$(u\circ\psi)(p,c)$ (čia p_h yra p vektoriaus h-toji koordinatė), kiekvienam $h = 1,\dots,\ell$, gauname

$$D_h(u\circ\psi)(p,c) = \sum_{i=1}^{\ell} D_i u(\psi(p,c)) D_h\psi_i(p,c) = 0.$$

Kadangi $\psi(p,c)$ yra skaliarinės sandaugos sąlyginio ekstremumo taškas, remiantis 2.118 teorema su $d = \ell$ ir $m = 1$ funkcijoms $f(x) = p\cdot x$ ir $g(x) = u(x) - c$, $x \in \mathbb{R}^{\ell}_{++}$, egzistuoja toks Lagrange daugiklis λ, kad kiekvienam $i = 1,\dots,\ell$,

$$p_i = \lambda D_i u(\psi(p,c)).$$

Dar kartą naudodami kompozicijos diferencijavimo taisyklę šį kartą funkcijai $p_h \mapsto e(p,c) = p\cdot\psi(p,c)$, ir panaudoję gautasias išraiškas, gauname lygybes

$$D_h e(p,c) = \psi_h(p,c) + \sum_{i=1}^{\ell} p_i D_h\psi_i(p,c) = \psi_h(p,c)$$

kiekvienam $h = 1,\dots,\ell$. Iš čia ir išplaukia teoremos teiginys. $\square$

Tai, kad Hickso paklausos funkcija yra išlaidų funkcijos gradientas, galima panaudoti, nustatant Hickso paklausos funkcijos Jakobiano savybes, kurias toliau ir išvardinome.

5.25 išvada. *Sakykime, kad u yra C^1 funkcija su niekur nelygiu nuliui gradientu ∇u, o Hickso paklausos funkcija ψ yra C^1 funkcija. Tada išlaidų funkcija e yra C^2 funkcija atžvilgiu kainų–sistemos ir kiekvienam $(p,c) \in \mathbb{R}^{\ell}_{++} \times (u(0),\infty)$ galioja teiginiai*:

(a) $J_p\psi(p,c) = H_p e(p,c)$;

(b) $J_p\psi(p,c)$ *yra simetrinė matrica*;

(c) $J_p\psi(p,c)$ *yra neigiamai pusapibrėžtė matrica*;

(d) $J_p\psi(p,c)p = 0$.

Įrodymas. Remiantis 5.24 teorema, $\psi_i(p,c) = D_i e(p,c)$ kiekvienam $i \in \{1,\dots,\ell\}$, $p > 0$ ir $c > u(0)$. Toliau fiksuokime bet kurį naudingumo lygį $c > u(0)$. Kadangi ψ yra C^1 funkcija, remiantis 2.74(b) teiginiu, funkcija $p \mapsto De(p,c)$, $p > 0$, yra diferencijuojama ir funkcija $p \mapsto D^2 e(p,c)$, $p > 0$, yra tolydi. Taigi e yra C^2 funkcija atžvilgiu kainų sistemos ir jos antroji išvestinė yra simetrinė funkcija (2.94 išvada). Tokiu būdu kiekvienam $j,i \in \{1,\dots,\ell\}$ ir $p > 0$, galioja lygybės

$$D_j\psi_i(p,c) = D_j D_i e(p,c) = D_i D_j e(p,c) = D_i\psi_j(p,c).$$

Tai įrodo (a) ir (b) teiginius. Kadangi funkcija e yra įgaubta atžvilgiu p (5.18(c) teorema), remiantis 2.108(a) teorema, Hessiano matrica $H_p e(p,c)$ yra neigiamai pusapibrėžtė su kiekvienu $p > 0$, kas įrodo (c) teiginį. Paskutinis teiginys yra Eulerio teoremos (2.79 išvada) pasekmė, nes Hickso paklausos funkcija ψ yra nulinės eilės teigiamai homogeninė dėka 5.20(a) teoremos. $\square$

5.24 teoremoje nurodytomis sąlygomis parodyta, kad Hickso paklausos funkcijos ψ reikšmė lygi išlaidų funkcijos e gradientui atžvilgiu kainos. Jei manyti, kad išlaidų minimizavimo problema pilnai duali vartotojo optimalaus pasirinkimo problemai, tai toks pat sąryšis turėtų galioti tarp Walraso paklausos funkcijos φ ir netiesioginės naudingumo funkcijos v gradiento. Parodysime, kad taip nėra. To priežastimi yra tai, kad Walraso funkcija nepriklauso nuo naudingumo funkcijos keitimo jos monotonine transformacija, kuri nekeičia santykinės preferencijos (3.16 teiginys). Tuo tarpu netiesioginės naudingumo funkcijos reikšmė priklauso nuo tokios pačios transformacijos. Tačiau tarp funkcijų φ ir v galioja toliau įrodoma *Roy tapatybe* (angl. Roy's identity):

5.26 teorema. *Sakykime, kad u yra C^1 funkcija su niekur nelygiu nuliui gradientu ∇u, o Walraso paklausos funkcija φ yra diferencijuojama. Su kiekviena kainos–turto būsena $(p, w) \in \mathbb{R}^{\ell+1}_{++}$, netiesioginio naudingumo funkcija v yra diferencijuojama ir galioja lygybė*

$$\nabla_p v(p, w) = -D_w v(p, w)\varphi(p, w),$$

čia $D_w v(p, w) = D_{\ell+1} v(p, w)$ žymi kryptinę išvestinę taške (p, w) kryptimi $e_{\ell+1}$.

Įrodymas. Funkcija v, būdama diferencijuojamų funkcijų kompozicija, taip pat diferencijuojama. Tegul kainos–turto būsena $(\bar{p}, \bar{w}) > 0$ ir $\bar{c} := v(\bar{p}, \bar{w})$. Tada $\bar{c} > u(0)$ (kodėl?). Remiantis (5.14) antruoju sąryšiu, lygybė $\bar{c} = v(p, e(p, \bar{c}))$ galioja visiems $p \in \mathbb{R}^{\ell+1}_{++}$. Diferencijuodami pastarąją lygybę atžvilgiu kainų sistemos p taške $\bar{p}$, gauname

$$\nabla_p v(\bar{p}, e(\bar{p}, \bar{c})) + D_w v(\bar{p}, e(\bar{p}, \bar{c}))\nabla_p e(\bar{p}, \bar{c}) = 0. \tag{5.27}$$

Pirma, remiantis 5.24 teorema ir po to (5.17) pirmuoju sąryšiu, turime

$$\nabla_p e(\bar{p}, \bar{c}) = \psi(\bar{p}, \bar{c}) = \varphi(\bar{p}, e(\bar{p}, \bar{c})). \tag{5.28}$$

Antra, įstatę (5.28) į (5.27) ir po to įstatę reikšme $e(\bar{p}, \bar{c}) = \bar{w}$, gautą iš (5.14) pirmojo sąryšio, turime

$$\nabla_p v(\bar{p}, \bar{w}) + D_w v(\bar{p}, \bar{w})\varphi(\bar{p}, \bar{w}) = 0,$$

kas įrodo teoremos teiginį. □

Kadangi Hickso paklausos funkcija priklauso nuo naudingumo lygio, jos reikšmės nėra tiesiogiai įvertinamos. Tačiau Hickso paklausos funkcijos Jakobianą galima išreikšti per Walraso paklausos funkciją ir jos Jakobianą, kurių reikšmės priklauso nuo rinkoje stebimų dydžių. Toliau įrodoma šių funkcijų priklausomybė vadinama Slutsky lygtimi.

5.27 teorema. *Sakykime, kad u yra C^1 funkcija su niekur nelygiu nuliui gradientu ∇u, Walraso paklausos funkcija φ ir Hickso paklausos funkcija ψ yra diferencijuojamos. Su kiekviena kainos–turto būsena $(p, w) > 0$,*

$$J_p\psi(p, v(p, w)) = J_p\varphi(p, w) + D_w\varphi(p, w)\varphi(p, w)^t. \tag{5.29}$$

Įrodymas. Tegul kainos–turto būsena $(\bar{p}, \bar{w}) > 0$ ir $\bar{c} := v(\bar{p}, \bar{w})$. Tada $\bar{c} > u(0)$ (kodėl?). Remiantis (5.17) pirmuoju sąryšiu, lygybė $\psi(p, \bar{c}) = \varphi(p, e(p, \bar{c}))$ galioja visiems $p > 0$. Kadangi funkcija e yra diferencijuojama dėka 5.24 teoremos, diferencijuodami pastarosios lygybės i-tąją komponentę atžvilgiu kainų–sistemos p taške $\bar{p}$ j-tosios koordinatės kryptimi, gauname lygybes

$$D_j\psi_i(\bar{p}, \bar{c}) = D_j\varphi_i(\bar{p}, e(\bar{p}, \bar{c})) + D_w\varphi_i(\bar{p}, e(\bar{p}, \bar{c}))D_je(\bar{p}, \bar{c})$$

kiekvienam $i, j \in \{1, \ldots, \ell\}$. Pirma, remiantis (5.26) ir po to (5.17) pirmuoju sąryšiu, turime

$$D_je(\bar{p}, \bar{c}) = \psi_j(\bar{p}, \bar{c}) = \varphi_j(\bar{p}, e(\bar{p}, \bar{c}))$$

Antra, įstatę (5.28) į (5.27) ir po to įstatę reikšmę $e(\bar{p}, \bar{c}) = \bar{w}$, gautą iš (5.14) pirmojo sąryšio, turime

$$D_j\psi_i(\bar{p}, \bar{c}) = D_j\varphi_i(\bar{p}, \bar{w}) + D_w\varphi_i(\bar{p}, \bar{w})\varphi_j(\bar{p}, \bar{w})$$

kiekvienam $i, j \in \{1, \ldots, \ell\}$. Perrašę šias lygybes $\ell \times \ell$ matricų pagalba, gauname

$$\left[D_j\psi_i(\bar{p}, \bar{c})\right] = \left[D_j\varphi_i(\bar{p}, \bar{w})\right] + \begin{bmatrix} D_w\varphi_1(\bar{p}, \bar{w}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ D_w\varphi_\ell(\bar{p}, \bar{w}) \end{bmatrix} \left[\varphi_1(\bar{p}, \bar{w}) \cdots \varphi_\ell(\bar{p}, \bar{w})\right].$$

Tai ir reikėjo įrodyti. □

Ypač svarbi yra Slutsky lygties (5.29) dešinioji pusė. Ten esančios matricos elementai

$$s_{ij}(p, w) := D_j\varphi_i(p, w) + D_w\varphi_i(p, w)\varphi_j(p, w).$$

vadinami *pakeitimų nariais* (angl. substitution terms), o pati matrica $S(p, w) := [s_{ij}(p, w)] \in \mathbb{M}^{\ell \times \ell}$ vadinama *Slutsky matrica*. Kadangi Slutsky matrica $S(p, w) = J_p\psi(p, v(p, w))$, tai remiantis 5.25 išvada, ji yra simetrinė ir neigiamai pusapibrėžtė kiekvienam $(p, w) \in \mathbb{R}^{\ell+1}$.

Remiantis Slutsky matricos neigiamu pusapibrėžtumu, kiekvienam $i \in \{1, \ldots, \ell\}$ galioja nelygybė

$$s_{ii}(p, w) = D_i\psi_i(p, v(p, w)) \leq 0,$$

vadinama vartotojo paklausos dėsnio $\Delta\varphi \cdot \Delta p \leq 0$ silpna forma. Šios nelygybės interpretacija teigia, kad kiekvienos gėrybės paklausos ir jos kainos pokyčiai yra skirtingo ženklo kitiems dydžiams esant pastoviems.

Tos pačios Slutsky lygties (5.29) dešinėje pusėje esančios antrasios matricos elementai vadinami *pajamų nariais* (angl. income term), kadangi jie išreiškia paklausos kitimo dydį atsirandantį atsižvelgiant į turimo turto vertės kitimą. Remiantis Slutsky lygtimi, kainos pokyčio Δp_j sukurtas Walraso paklausos pokytis yra

$$\begin{aligned} \Delta_j\varphi_i &:= \varphi_i(p + \Delta p_j, w) - \varphi_i(p, w) \\ &\approx D_j\varphi_j(p, w)\Delta p_j = D_j\psi_i(p, v(p, w))\Delta p_j - D_w\varphi_i\varphi_j(p, w)\Delta p_j. \end{aligned}$$

Pratimai.

1. Sakykime, kad $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)\colon \mathbb{R}^4_{++} \to \mathbb{R}^3_{++}$ yra Walraso paklausos funkcija su reikšmėmis

$$\varphi_1(p,w) = \frac{p_2}{p_1+p_2+p_3}\frac{w}{p_1}, \ \ \varphi_2(p,w) = \frac{p_3}{p_1+p_2+p_3}\frac{w}{p_2}, \ \ \varphi_3(p,w) = \frac{\beta p_1}{p_1+p_2+p_3}\frac{w}{p_3},$$

kai $(p,w) = (p_1,p_2,p_3,w) \in \mathbb{R}^4_{++}$. Nustatyti šios funkcijos teigiamo homogeniškumo eilę ir kada jai galioja Walraso dėsnis?

2. Sakykime, kad dviejų gėrybių ekonomikoje Walraso paklausos funkcijai $\varphi(p,w)$ galioja Walraso dėsnis. Paklausa pirmajai gėrybei yra $\alpha w/p_1$. Rasti antrosios gėrybės paklausą. Kokia yra gautos Walraso paklausos funkcijos teigiamo homogeniškumo eilė?

3. Patikrinti Slutsky lygtį Kobo–Duglaso naudingumo funkcijos atveju. Šiuo atveju Walraso funkcija yra (5.10), o Hickso funkcija yra (5.18). Be to, pasižymėjus $K := a^{-a}(1-a)^{-(1-a)}$, $v(p,w) = (w/K)p_1^{-a}p_2^{a-1}$,

$$e(p,c) = cKp_1^a p_2^{1-a} \quad \text{ir} \quad h(p,c) = cK\left(a\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1-a}, (1-a)\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{a}\right).$$

Po to, rasti Slutsky matricą. Atsakymas

$$S(p,w) = wa(1-a)\begin{pmatrix} -\frac{1}{p_1^2} & \frac{1}{p_1p_2} \\ \frac{1}{p_1p_2} & -\frac{1}{p_2^2} \end{pmatrix}.$$

4. Sakykime, kad $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)\colon \mathbb{R}^3_{++} \to \mathbb{R}^2_{++}$ yra Walraso paklausos funkcija. *Dviejų gėrybių pakeičiamumo elastingumu* (angl. elasticity of substitution between two goods) vadinamas dydis

$$\xi_{12}(p,w) := \frac{\partial(\varphi_1(p,w)/\varphi_2(p,w))}{\partial(p_1/p_2)}\frac{p_1/p_2}{\varphi_1(p,w)/\varphi_2(p,w)}, \quad (p,w) = (p_1,p_2,w) \in \mathbb{R}^3_{++},$$

(žr. pastabas dėl žymėjimų esančias po 2.75 apibrėžimo). Parodyti, kad CES naudingumo funkcijai $\xi_{12}(p,w) = 1/(1-\rho)$, $0 < \rho < 1$ (žr. 5.1.1 pratimą). Kam lygus $\xi_{12}(p,w)$ tobulųjų pakaitalų, tobulųjų papildinių ir Kobo–Duglaso naudingumo funkcijoms?

5.4 Grynųjų mainų problema

Tapatinant gėrybių lauką su jų vartotoju, galima sakyti, jog iki šiol nagrinėjome rinką, sudarytą iš vieno vartotojo. Šiame skyrelyje nagrinėjama rinka, kurioje veikia daugiau negu vienas vartotojas ir kiekvienas iš jų gali turėti skirtingas preferencijas. Esant duotai kainų sistemai, kiekvienas vartotojas renkasi tokį optimalų gėrybių rinkinį, kurį jam leidžia asmeninis biudžetas. Biudžetas riboja pasirenkamų gėrybių kainą bet ne pačias gėrybes. Todėl esant kainų sistemai fiksuotai, gali vykti visų rinkos dalyvių turimų gėrybių perskirstymas tarp skirtingų vartotojų. Tokia rinka vadinama *grynaisiais mainais* (angl. pure exchange) - joje nevyksta gėrybių gamyba.

Grynųjų mainų problema yra klausimas, kokioje rinkoje egzistuoja tokia kainų sistema, kuri įgalina kiekvieną rinkos dalyvį optimaliai rinktis tarp visų rinkoje esamų gėrybių. Tai yra rinkos bendrosios pusiausvyros (BP) problemos atskiras atvejis, kai nėra gamybos.

Antras šiame skyrelyje nagrinėjamos BP problemos supaprastinimas yra prielaida, kad kiekvieno vartotojo pasirinkimo problema turi vienintelį sprendinį. Tuo atveju vartotojo paklausos aibės priklausomybė nuo kainos yra Walraso paklausos funkcija. Kitame skyriuje nagrinėsime atvejį, kai ši priklausomybė yra Walraso paklausos atitiktis.

Grynųjų mainų rinka Priminsime grynųjų mainų rinkos matematinį modelį. Tarkime, kad esama n vartotojų pažymėtų indeksais $i \in \{1, \dots, n\}$, kurie gali rinktis tarp ℓ gėrybių pažymėtų indeksais $h \in \{1, \dots, \ell\}$. Vartojimo aibė $X \subset \mathbb{R}^\ell_+$ visiems vartotojams yra ta pati, tačiau kiekvieno vartotojo pasirinkimas yra individualus ir nepriklauso nuo likusių vartotojų pasirinkimų. Kiekvienam $i \in \{1, \dots, n\}$, i-tasis vartotojas yra pilnai apibūdinamas savo gėrybių lauku $(X, \succeq_i)$, kuriame preferencija $\succeq_i$ yra išreiškiama naudingumo funkcija $u_i\colon X \to \mathbb{R}$.

Kaip ir anksčiau, kainų sistema yra vektorius $p = (p_1, \dots, p_\ell) \in \mathbb{R}^\ell_+$, kurio koordinatė p_h yra h-tosios gėrybės vieneto kaina, o kainų sistemas sudarančių tokių vektorių aibę žymime $P \subset \mathbb{R}^\ell_+$. Iki šiol vartotojo pradinis turtas, išreiškiamas kaina $w = w_i$, buvo laikomas nepriklausomu nuo rinkos kainų sistemos p. Toliau šiame skyrelyje i-tojo vartotojo pradinis turtas yra išreiškiamas gėrybių rinkiniu $e_i = (e_{i,1}, \dots, e_{i,\ell}) \in X$, vadinamu *pradiniu įnašu* (angl. initial endowment), ir jo pradinio turto kaina yra

$$w_i = p\cdot e_i = \sum_{h=1}^{\ell} p_h e_{i,h}.$$

Tokiu būdu, pradinių įnašų suma $\sum_{i=1}^n e_i$ riboja visoje rinkoje turimų gėrybių kiekį.

Su kiekviena kainų sistema $p \in P$, i-tasis vartotojas renkasi savo biudžeto aibėje spręsdamas optimalaus pasirinkimo problemą, t. y. randa savo paklausos aibę

$$D_i(p) := D_i(p, p\cdot e_i) = \operatorname{argmax}\big\{u_i(x)\colon\ x \in B(p, p\cdot e_i)\big\},$$

čia, kaip ir anksčiau, $B(p, w_i) = \{x \in X\colon\ p\cdot x \le w_i\}$ yra biudžeto aibė. 5.6(b) išvadoje nustatytomis sąlygomis, su bet kuria kainų sistema $p > 0$, kiekvieno vartotojo optimalaus pasirinkimo problema turi vienintelį sprendinį $x_i := \varphi_i(p, p\cdot e_i)$, t. y. $\{x_i\} =$

$D_i(p, p{\cdot}e_i)$. Visų rinkos dalyvių pasirinkimų kaina

$$p{\cdot}\Big(\sum_{i=1}^n x_i\Big) \le \sum_{i=1}^n w_i = p{\cdot}\Big(\sum_{i=1}^n e_i\Big).$$

Esant optimaliam pasirinkimui, dar lieka klausimas, ar visų vartotojų pasirinktas gėrybių vektorius $\sum_{i=1}^n x_i$ neviršija rinkoje turimus išteklius, ribojamus pradinių įnašų suma $\sum_{i=1}^n e_i$?

Pastarąjį klausimą suformuluosime kitu būdu. *Gėrybių paskirstymu* (angl. allocation) rinkoje vadinamas vektorius

$$(x_i) := (x_i)_{i=1}^n = (x_1, \ldots, x_n) \in X^n := X \times \cdots \times X,$$

sudarytas iš kiekvienam vartotojui tenkančių gėrybių rinkinių $x_i \in X$. Jei (x_i) yra gėrybių paskirstymas, o $(e_i) = (e_i)_{i=1}^n$ yra pradinių įnašų rinkinys, tai *visuminė perteklinė paklausa* (angl. aggregate excess demand), toliau vadinama VPP, yra vektorius

$$Z((x_i)) := \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n e_i \in \mathbb{R}^\ell.$$

Gėrybių paskirstymas (x_i) vadinamas *leistinu* (angl. feasible allocation), jei visuminė perteklinė paklausa $Z((x_i)) \le 0$. Kitaip tariant, su kiekviena gėrybe $h \in \{1, \ldots, \ell\}$, i-tajam vartotojui tenkančios h-tosios gėrybės kiekių sumos $\sum_{i=1}^n x_{i,h} \le \sum_{i=1}^n e_{i,h}$.

Sakysime, kad kainų sistemų aibėje P yra apibrėžta *visuminės perteklinės paklausos funkcija* ζ, toliau vadinama VPP funkcija, jei su kiekviena kainų sistema $p \in P$ ir kiekvienam vartotoju $i \in \{1, \ldots, n\}$, aibėje $\mathcal{D}_i := \{(p, p{\cdot}e_i)\colon p \in P\} \subset \mathbb{R}_+^{\ell+1}$ yra apibrėžta Walraso paklausos funkcija φ_i, o ζ funkcijos reikšmė yra

$$\zeta(p) := Z((\varphi_i(p, p{\cdot}e_i))_{i=1}^n) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(p, p{\cdot}e_i) - \sum_{i=1}^n e_i \in \mathbb{R}^\ell.$$

Taip pat sakysime, kad *grynųjų mainų problema turi sprendinį kainų sistemų aibėje* P, jei šioje aibėje apibrėžta VPP funkcija ζ ir egzistuoja tokia kainų sistema $p^* \in P$, kad $\zeta(p^*) \le 0$. Pastaroji nelygybė $\zeta(p) \le 0$ reiškia, jog vartotojų pasirinktas gėrybių paskirstymas $\sum_{i=1}^n \varphi_i(p, p{\cdot}e_i)$ neviršija rinkoje turimus išteklius, ribojamus pradinių įnašų suma $\sum_{i=1}^n e_i$, o tai yra dar vienas anksčiau minėto klausimo formulavimas.

Nuo kokių rinką apibūdinančių dydžių priklauso grynųjų mainų problemos sprendimas? Apibendrinant tai, kas pasakyta, *grynųjų mainų rinka* yra vartotojų pasirinkimus apibūdinantis rinkinys $(X, \succeq_i, e_i)_{i=1}^n$ ir kainų sistemų aibė $P \subset \mathbb{R}_+^\ell$, arba glaustai grynųjų mainų rinka yra rinkinys

$$\mathcal{E} = ((X, \succeq_i, e_i)_{i=1}^n, P). \tag{5.30}$$

Šios rinkos *būsena* vadinsime bet kurį vektorių $((x_i), p) = (x_1, \ldots, x_n, p) \in X^n \times P$.

5.28 apibrėžimas. Sakysime, kad grynųjų mainų rinkoje $\mathcal{E}$ *egzistuoja pusiausvyra*, jei egzistuoja tokia šios rinkos būsena $((x_i^*), p^*) \in X^n \times P$, kuriai galioja (a) ir (b), čia

(a) kiekvienam $i \in \{1, \ldots, n\}$, $x_i^* = \varphi_i(p^*, p^* \cdot e_i)$, t. y. gėrybių lauką $(X, \succeq_i)$ ir biudžeto aibę $B(p^*, p^* \cdot e_i)$ atitinkanti i-tojo vartotojo optimalaus pasirinkimo problema turi vienintelį sprendinį x_i^*;

(b) gėrybių paskirstymas (x_i^*) yra leistinas, t. y. VPP $\zeta(p^*) = Z((x_i^*)) \leq 0$.

Grynųjų mainų rinkos būsena $((x_i^*), p^*)$ vadinama *Walraso pusiausvyra*, o p^* vadinama *pusiausvyrine kaina*.

Remiantis ankstesniais apibrėžimais, galima teigti, kad grynųjų mainų rinkoje $\mathcal{E}$ egzistuoja pusiausvyra tada ir tik tada, kai aibėje P apibrėžta VPP funkcija ζ ir egzistuoja tokia kaina $p^* \in P$, kad $\zeta(p^*) \leq 0$. Jei pastaroji savybė galioja, tai $x_i^* := \varphi_i(p^*, p^* \cdot e_i)$.

Walraso pusiausvyros egzistencija Toliau šiame skyrelyje randamos tokios sąlygos grynųjų mainų rinkai $\mathcal{E}$, kurios garantuoja Walraso pusiausvyros egzistavimą (5.32 išvada žemiau). Tos sąlygos yra išreikštos $\mathcal{E}$ rinką sudarantiems elementams. Tačiau pradėsime nuo paieškos tokių tiesioginių sąlygų VPP funkcijai ζ, kad $\zeta(p^*) \leq 0$ su kuriuo nors $p^* \in P$.

Pirmoji svarbi VVP funkcijos savybė yra jos tolydumas, išplaukiantis iš Walraso paklausos funkcijos tolydumo. Ši savybė reikalinga naudojant Brouwerio nejudamo taško teoremą.

Antroji VPP funkcijos savybė yra Walraso dėsnis formuluojamas taip:

5.29 apibrėžimas. Tarkime, kad $P \subset \mathbb{R}_+^\ell$ ir $\zeta \colon P \to \mathbb{R}^\ell$. Sakoma, kad funkcijai ζ galioja *Walraso dėsnis*, jei skaliarinė sandauga $p \cdot \zeta(p) = 0$ su kiekviena kainų sistema $p \in P$.

Jei kiekvienam $p \in P$ ir $i \in \{1, \ldots, n\}$, paklausos aibei $D_i(p, p \cdot e_i)$ galioja Walraso dėsnis (5.7 apibrėžimas) ir $\{\varphi_i(p, p \cdot e_i)\} = D_i(p, p \cdot e_i)$, tai VPP funkcijai $\zeta \colon P \to \mathbb{R}^\ell$ taip pat galioja Walraso dėsnis. Iš tikro, kiekvienam $p \in P$, turime

$$p \cdot \zeta(p) = \sum_{i=1}^{n} \big[p \cdot \varphi_i(p, p \cdot e_i) - p \cdot e_i \big] = 0. \tag{5.31}$$

Walraso dėsnis VPP funkcijai reiškia, kad visuminės perteklinės paklausos $\zeta(p)$ kaina yra nulis bet kuriai kainų sistemai $p \in P$. Kaip vėliau bus matyti, šią sąlygą galima interpretuoti kaip grynųjų mainų rinkos paklausos suderinamumą su pasiūla. Tokiu atveju, Walraso dėsnis yra visos rinkos biudžeto apribojimas, reiškiantis, kad visada paklausos vertė turi sutapti su pasiūlos verte.

Trečioji VPP funkcijis savybė yra nulinė jos teigiamo homogeniškumo eilė. Kaip ir kitais atvejais, ji išplaukia iš analogiškos savybės Walraso paklausos funckijai (5.9(a)

teiginys). Dėka šios savybės, kainų sistema p yra pusiausvyrinė kaina tada ir tik tada, kai pusiausvyrine kaina yra vektorius λp su kuriuo nors $\lambda > 0$. Todėl, atveju $P = \mathbb{R}^\ell_+$ pusiausvyrinės kainos pakanka ieškoti aibėje

$$S := \big\{p = (p_h) \in \mathbb{R}^\ell_+ \colon \sum_{h=1}^{\ell} p_h = 1\big\}.$$

Dabar parodysime, kad bet kuri minėtas tris savybes turinti funkcija $\zeta \colon S \to \mathbb{R}^\ell$, turi savybę, analogišką Walraso pusiausvyros (b) sąlygai (5.28 apibrėžimas).

5.30 teorema. *Tarkime, kad funkcija $\zeta = (\zeta_h) \colon S \to \mathbb{R}^\ell$ yra tolydi ir jai galioja Walraso dėsnis. Tada egzistuoja toks $p^* = (p^*_h) \in S$, kad $\zeta(p^*) \le 0$ ir $\zeta_h(p^*) = 0$ jei $p^*_h > 0$.*

Įrodymas. Sukonstruosime tolydžią funkciją $f \colon S \to S$ ir parodysime, jog šios funkcijos nejudamas taškas yra ieškoma kainų sistema p^*. Pirmiausia pastebėsime, kad kiekvienam $p \in S$,

$$g(p) := \sum_{h=1}^{\ell} \max\{0, p_h + \zeta_h(p)\} > 0. \tag{5.32}$$

Iš tikro, priešingu atveju, egzistuoja toks $\bar{p} = (\bar{p}_h) \in S$, kad $g(\bar{p}) = 0$, t. y. $\bar{p}_h + \zeta_h(\bar{p}) \le 0$ su kiekvienu h. Kadangi $\bar{p} \in \mathbb{R}^\ell_+$, padauginę kiekvieną iš šių nelygybių iš $\bar{p}_h$ ir sudėję, gauname $|\bar{p}|^2 + \bar{p}\cdot\zeta(\bar{p}) \le 0$. Remiantis *Walras*o dėsniu, $\bar{p}\cdot\zeta(\bar{p}) = 0$, matome, kad pastaroji nelygybė prieštarauja tam, kad $|\bar{p}| > 0$. Tokiu būdu (5.32) savybė galioja kiekvienam $p \in S$.

Kiekvienam $p \in S$ ir $h \in \{1, \dots, \ell\}$, tegul

$$f_h(p) := \max\{0, p_h + \zeta_h(p)\}/g(p).$$

Remiantis (5.32), $\sum_{h=1}^{\ell} f_h(p) = 1$, o reikšmės $f(p) := (f_1(p), \dots, f_\ell(p))$, $p \in S$, apibrėžia funkciją f iš S į S. Nesunku įsitikinti, kad funkcija f yra tolydi, nes tokia yra funkcija ζ. Tada, remiantis Brouwerio teorema (4.1 teorema), egzistuoja toks $p^* = (p^*_h) \in S$, kad $f(p^*) = p^*$, t. y. kiekvienam $h \in \{1, \dots, \ell\}$

$$p^*_h = \max\{0, p^*_h + \zeta_h(p^*)\}/g(p^*). \tag{5.33}$$

Tegul I_0 yra aibė tokių indeksų $h \in \{1, \dots, \ell\}$, kuriems $p^*_h + \zeta_h(p^*) \le 0$. Kiekvienam $h \in I_0$, remiantis (5.33), turime $p^*_h = 0$. Todėl indeksų aibė $I := \{1, \dots, \ell\} \setminus I_0$ netuščia ir $\zeta_h(p^*) \le 0$ jei $h \in I_0$. Be to, remiantis Walraso dėsniu,

$$\sum_{h \in I} p^*_h \zeta_h(p^*) = p^*\cdot\zeta(p^*) = 0.$$

Iš kitos pusės, remiantis (5.33), kiekvienam $h \in I$, $0 < p^*_h = [p^*_h + \zeta_h(p^*)]/g(p^*)$. Padauginę kiekvienos lygybės abi puses iš $\zeta_h(p^*)$ ir sudėję, gauname

$$\frac{1}{g(p^*)} \sum_{h \in I} \big[\zeta_h(p^*)\big]^2 = \Big[1 - \frac{1}{g(p^*)}\Big] \sum_{h \in I} p^*_h \zeta_h(p^*) = 0.$$

Taigi kiekvienam $h \in I$, $\zeta_h(p^*) = 0$ ir $p_h^* > 0$. Kartu su anksčiau įrodyta savybe indeksams $h \in I_0$, gauname teoremos teiginį. □

Toliau suformuluosime grynųjų mainų rinkos (5.30) savybes, kurios garantuoja, kad VPP funkcija yra apibrėžta ir išpildo visas pastarosios teoremos prielaidas.

5.31 teorema. *Sakykime, kad* $\mathcal{E} = (\{X, \succeq_i, e_i\}, \mathbb{R}_+^\ell)$ *rinkai galioja* (a), (b) *ir* (c), *čia*

(a) *vartojimo aibė* $X \subset \mathbb{R}_+^\ell$ *yra kompakti ir iškila;*

(b) *kiekvienam* $i = 1, \ldots, n$, *gėrybių laukas* $(X, \succeq_i)$ *yra tolydus, griežtai iškilas ir lokaliai nepasotinamas;*

(c) *kiekvienam* $i = 1, \ldots, n$, $0 \neq e_i \geq 0$ *yra pradinis įnašas.*

Tada VPP funkcija ζ *yra apibrėžta aibėje* $\mathbb{R}_+^\ell$, *tolydi, nulinės eilės teigiamai homogeninė ir jai galioja Walraso dėsnis.*

Įrodymas. Kiekvienam vartotojui $i \in \{1, \ldots, n\}$ ir $p \in \mathbb{R}_+^\ell$, $w = p{\cdot}e_i \geq 0$ ir, remiantis 5.4 išvada, paklausos aibė $D_i(p, w)$ yra netuščia. Kadangi kiekvieno vartotojo gėrybių laukas yra griežtai iškilas, 5.6(b) teiginys rodo, jog kiekviena $D_i(p, w)$ turi vienintelį elemntą, t. y. aibėje $\mathbb{R}_+^{\ell+1}$ apibrėžtos Walraso funkcijos φ_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Todėl pirma, aibėje $\mathbb{R}_+^\ell$ yra apibrėžta VPP funkcija ζ. Antra, remiantis 5.10 teorema, kiekviena φ_i funkcija yra tolydi ir todėl kompozicija

$$p \mapsto (p, p{\cdot}e_i) \mapsto D_i(p, p{\cdot}e_i)$$

yra tolydi aibėje $\mathbb{R}_+^\ell$ kiekvienam $i \in \{1, \ldots, n\}$. Taigi, šioje aibėje yra tolydi ir VPP funkcija ζ. Trečia, ji taip pat yra nulinės eilės teigiamai homogeninė funkcija kadangi φ_i yra nulinės eilės teigiamai homogeninė funkcija pagal 5.9(a) teiginį. Galiausiai, remiantis 5.7 išvada (Walraso dėsnis), visiems $p \in \mathbb{R}_+^\ell$ yra teisinga lygybė (5.31), t. y. VPP funkcijai ζ galioja Walraso dėsnis; tai ir reikėjo įrodyti. □

Iš 5.30 ir 5.31 teoremų gaunama

5.32 išvada. *Jei* $\mathcal{E} = (\{X, \succeq_i, e_i\}, \mathbb{R}_+^\ell)$ *rinkai galioja* 5.31 *teoremos* (a), (b) *ir* (c) *teiginiai, tai joje egzistuoja pusiausvyra.*

Įrodymas. Remiantis 5.31 teorema, aibėje $\mathbb{R}_+^\ell$ apibrėžta VPP funkcija ζ, kuri yra tolydi, nulinės eilės teigiamai homogeninė ir jai galioja Walraso dėsnis. Kadangi ζ yra nulinės eilės teigiamai homogeninė, tai $\zeta(p) = \zeta(\lambda p)$ su $\lambda = 1/(p_1 + \cdots + p_\ell)$. Kadangi $\lambda p \in S$, pakanka nagrinėti ζ apibrėžtą aibėje S. Tada remiantis 5.30 teorema, egzistuoja tokia kainų sistema $p^* \in S$, kad $\zeta(p^*) \leq 0$. Tai reiškia, kad grynųjų mainų rinkoje egzistuoja pusiausvyra; tai ir reikėjo įrodyti. □

Cobbo-Douglaso rinkos mainai. Rasime Walraso pusiausvyrą grynųjų mainų rinkoje (5.30), kurioje yra dvi gėrybės ($\ell = 2$), vartojimo aibė $X = \mathbb{R}^2_+$, kainų sistemų aibė $P = \mathbb{R}^2_{++}$ ir du vartotojai ($n = 2$), kurių gėrybių laukai $(\mathbb{R}^2_+, \succeq_i)$, $i = 1, 2$, apibrėžti naudojant Cobbo-Douglaso naudingumo funkcijas: kiekvienam $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+$,

$$u_1(x) = (x_1)^a (x_2)^{1-a}, \quad 0 < a < 1, \quad \text{ir} \quad u_2(x) = (x_1)^b (x_2)^{1-b}, \quad 0 < b < 1.$$

Be to, abiejų vartotojų pradiniai įnašai yra, atitinkamai, $e_1 = (1, 0)$ ir $e_2 = (0, 1)$. Naudojant vartotojo su Cobbo-Douglaso naudingumo funkcija optimalaus pasirinkimo problemos sprendinį (5.10), pirmojo vartotojo Walraso paklausos funkcija $\varphi_1 = (\varphi_{11}, \varphi_{12})$ yra apibrėžta su kiekvienu $p = (p_1, p_2) > 0$:

$$\varphi_{11}(p, p{\cdot}e_1) = (ap{\cdot}e_1)/p_1 = a, \qquad \varphi_{12}(p, p{\cdot}e_1) = ((1-a)p{\cdot}e_1)/p_2 = ((1-a)p_1)/p_2.$$

Antrojo vartotojo Walraso paklausos funkcija $\varphi_2 = (\varphi_{21}, \varphi_{22})$ yra apibrėžta kiekvienam $p = (p_1, p_2) > 0$:

$$\varphi_{21}(p, p{\cdot}e_2) = (bp{\cdot}e_2)/p_1 = bp_2/p_1, \qquad \varphi_{22}(p, p{\cdot}e_2) = ((1-b)p{\cdot}e_2)/p_2 = 1 - b.$$

Rasime VPP funkciją $\zeta(p) = z_1(p) + z_2(p)$; čia $z_i(p) := \varphi_i(p, p{\cdot}e_i) - e_i$, $i = 1, 2$. Pirmajam vartotojui

$$z_1(p) = \{a - 1, (1-a)p_1/p_2\} \quad \text{ir} \quad p{\cdot}z_1(p) = p_1(a-1) + p_2(1-a)p_1/p_2 = 0.$$

Antrajam vartotojui

$$z_2(p) = \{bp_2/p_1, -b\} \quad \text{ir} \quad p{\cdot}z_2(p) = p_2 b - p_2 b = 0.$$

Tokiu būdu VPP funkcija ζ yra apibėžta teigiamame kūgyje $\mathbb{R}^2_{++}$, ir jai yra teisingas Walraso dėsnis. Walraso pusiausvyros kainą gausime išsprendę sistemą

$$\begin{cases} \zeta_1(p) = z_{11}(p) + z_{21}(p) = a - 1 + bp_2/p_1 = 0, \\ p_1 + p_2 = 1. \end{cases}$$

Taigi Cobbo-Douglaso rinkos mainų Walraso pusiausvyros kaina yra tokia kainų sistema $p^* = (p_1^*, p_2^*)$, kuriai $p_1^*/p_2^* = b/(1-a)$. Gi, Walraso pusiausvyros gėrybių paskirstymas yra

$$x_1^* = \varphi_1(p^*, p^*{\cdot}e_1) = (a, b) \quad \text{ir} \quad x_2^* = \varphi_2(p^*, p^*{\cdot}e_2) = (1-a, 1-b).$$

Pratimai.

1. Grynųjų mainų rinka sudaryta iš dviejų vartotojų su naudingumo funkcijomis ir pradiniais įnašais:

$$u_1(x) = a \ln x_1 + (1-a) \ln x_2, \quad e_1 = (0, 1)$$
$$u_2(x) = \min\{x_1, x_2\}, \quad e_2 = (1, 0),$$

čia $0 < a < 1$. Rasti Walraso pusiausvyrą.

2. Grynųjų mainų rinka sudaryta iš dviejų vartotojų su netiesioginėmis naudingumo funkcijomis ir pradiniais įnašais:

$$v_1(p, w) = \ln w - a \ln p_1 - (1-a) \ln p_2, \quad e_1 = (1, 1)$$

$$v_2(p, w) = \ln w - b \ln p_1 - (1-b) \ln p_2, \quad e_2 = (1, 1).$$

Rasti Walraso pusiausvyrą.

6 Skyrius

Konkurencinės rinkos pusiausvyra

> Sutalpindamas daugybę idėjų ir jas apimdamas tikslia simboline išraiška, skaičiavimas yra intelektinių galių atrama ir atminties apsauga, o kartu didelė parama tas idėjas lyginant ir susiejant. Vertinga gėrybė, kurios neturi jokie kiti mokslai!
>
> Janas Sniadeckis, 1818.

Šiame skyriuje pusiausvyros egzistencija nagrinėjama tokioje rinkoje, kurioje be gėrybių vartojimo taip pat vyksta gėrybių gamyba.

6.1 Gamintojo problema

Gamyba vadinamas procesas, kuris gėrybes, vadinamas ištekliais (angl. resources), transformuoja sukurdamas kitas gėrybes, vadinamas produktu, skirtas arba galutiniam vartojimui arba naudojamas kaip ištekliai kitam gamybos procesui. Gamybos ištekliais gali būti: žemė, darbas, kapitalas ir žaliavos. Gamyba taip pat apima paslaugas, tokias kaip transportavimas, medicina, švietimas ir panašiai. Gamybos tikslas maksimizuoti pelną. Šiame skyrelyje formuluojamas pelno maksimizavimo problemos matematinis modelis.

Gamybos aibė Siekdami konkretumo tarkime, kad gamyba vykdoma firmoje. Firma, naudodama išteklius - gėrybes, gamina kitas gėrybes, vadinamas produktu. Būdas naudojamas išteklius paversti produktu vadinamas gamybos būdu arba metodu. Alternatyvūs gamybos būdai sudaro gamybos technologijų aibę. Tarkime, kad firma susijusi su ℓ dviejų rūšių - ištekliais ir produktais - gėrybėmis, kurios kaip ir anksčiau, žymimos indeksu $h \in \{1, \dots, \ell\}$. Be to, ta pati gėrybė negali būti ir ištekliu ir produktu.

Jei h-toji gėrybė yra tarp gamybos išteklių, tai ji yra vadinama gamybos veiksniu (angl. factor of production), o jos suvartojamą kiekį žymėsime neigiamu skaičiumi $y_h < 0$. Jei h-toji gėrybė yra gamybos produktas, tai šios gėrybės pagamintą kiekį žymėsime teigiamu skaičiumi $y_h > 0$. Laikantis šio susitarimo, gėrybių vektorius $y = (y_1, \dots, y_\ell) = (y_h) \in \mathbb{R}^\ell$ vadinamas *gamybos planu*. Visi technologiškai įmanomi gamybos planai sudaro aibę $Y \subset \mathbb{R}^\ell$, vadinamą *gamybos aibe*. Gamybos planas $y \in Y$ vadinamas (technologiškai) *efektyviu*, jei nėra kito tokio gamybos plano $y' \in Y$, kad $y' \geq y$ ir $y' \neq y$. Kitaip tariant, gamybos planas yra efektyvus, jei nėra būdų pagaminti daugiau esant tam pačiam išteklių kiekiui, arba pagaminti tiek pat naudojant mažiau išteklių.

Bendrosios pusiausvyros gamybos teorijoje tariama, kad gamybos aibė $Y \subset \mathbb{R}^\ell$ išpildo tokias sąlygas:

(a) $0 \in Y$, interpretuojant šią prielaidą, kaip galimybę nieko neveikti;

(b) egzistuoja $y \in Y$, kurio bent viena koordinatė teigiama;

(c) jei $y \geq 0$ ir $y \in Y$, tai $y = 0$.

Prielaida (c) vadinama „nėra pietų veltui“, nes pagal ją iš nieko galima pagaminti tik nieką. Toliau laikysime, kad (a), (b) ir (c) sąlygos yra visada išpildytos. Kitos toliau minimos sąlygos galioja tik tada, kai yra nurodytos.

Sakysime, kad gamybos aibė Y yra

(d) uždara, t. y. jei seka $\{y_i\} \subset Y$ ir $y_i \to y \in \mathbb{R}^\ell$, tai $y \in Y$;

(e) iškila, t. y. jei $y', y'' \in Y$ ir $\lambda \in [0, 1]$, tai $\lambda y' + (1 - \lambda) y'' \in Y$;

(f) monotoninė, t. y. jei $y \in Y$ ir $y' \leq y$, tai $y' \in Y$.

Gamybos aibės uždarumo sąlyga nėra vien tik techninė. Nesunku patikrinti (6.1.1 pratimas), kad kiekvienas efektyvus gamybos planas priklauso aibės sienai (2.56 apibrėžimas). Gamybos aibės monotoniškumo sąlyga interpretuojama atsižvelgiant į susitarimą dėl gamybos plano vektoriaus kordinačių ženklo. Būtent, $y' \leq y$ reiškia, kad pagal gamybos planą y' produkcijos yra pagaminama mažiau arba tiek pat, naudojant tiek pat arba daugiau išteklių. Pastaroji prielaida taip pat reiškia, kad papildomas išteklių ar produkcijos kiekis sunaikinamas be jokių kaštų (angl. free disposal).

Greta minėtų gamybos aibės savybių, dažnai vartojama jos kompaktiškumo prielaida. Ji grindžiama tuo, kad realybėje išteklių aibė yra visada baigtinė, priešingu atveju nereikėtų ir ekonomikos. Pastebėsime, kad monotoniškumo ir kompatiškumo prielaidos nėra suderinamos.

Kartais patogu gamybos aibę Y apibūdinti naudojant funkciją. Funkcija $F\colon \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}$, vadinama *transformacijos funkcija*, jei $Y = \{y \in \mathbb{R}^\ell \colon F(y) \leq 0\}$ ir $F(y) = 0$ tada ir tik tada, kai y yra efektyvus gamybos planas. Efektyvių gamybos planų aibė $\{y \in \mathbb{R}^\ell \colon F(y) = 0\}$ taip pat vadinama *transformacijos siena* (angl. transformation frontier).

Gamybos funkcija Paprastumo dėlei toliau dažnai tarkime, kad gamybos produktu yra tik viena ℓ-toji gėrybė. Tuo atveju gamybos aibę Y sudaro vektoriai

$$y = (y_1, \dots, y_\ell) = (-x_1, \dots, -x_{\ell-1}, u) = (-x, u)$$

su koordinatėmis $x_1 = -y_1 \geq 0, \dots, x_{\ell-1} = -y_{\ell-1} \geq 0$ ir $u = y_\ell \geq 0$. Kiekvienam $x \in \mathbb{R}_+^{\ell-1}$, jei gamybos aibė monotoniška ir $(-x, 0) \leq 0$, tai $(-x, 0) \in Y$, kadangi $0 \in Y$.

Tegul $0 \in W \subset \mathbb{R}_+^{\ell-1}$ ir funkcija $f\colon\ W \to \mathbb{R}$ yra tolydi ir $f(0) = 0$. Sakysime, kad f yra *gamybos funkcija* apibrėžta *išteklių aibėje* W, jei aibei

$$Y := \big\{(-x, u)\colon\ x \in W,\ 0 \leq u \leq f(x)\big\}$$

galioja (a), (b) ir (c) savybės, ir $(-x, u) \in Y$ yra efektyvus gamybos planas tada ir tik tada, kai $u = f(x)$. Interpretuojant taip apibrėžtą gamybos funkciją f galima sayti, kad kiekvienam $x \in W$, $f(x)$ yra maksimalus ℓ-tojo produkto kiekis pagaminamas naudojant x išteklių. Remiantis gamybos aibės (b) sąlyga, egzistuoja toks $x \in W$, kad $f(x) > 0$.

Toliau kiekvienam $u \geq 0$, apibrėšime u lygį atitinkančią gamybos išteklių aibę

$$W(u) := \{x \in W\colon\ (-x, u) \in Y\} = \{x \in W\colon\ f(x) \geq u\};$$

čia $W(u) = \varnothing$ jei nėra gamybos išteklių, reikalingų pagaminti ℓ-tosios gėrybės u vienetų. Aibę gamybos išteklių, kurių pakanka pagaminti lygiai u vienetų ℓ-tosios gėrybės žymėsime $Q(u)$ ir vadinsime *izokvanta*, t. y. kiekvienam $u \geq 0$, izokvanta yra aibė

$$Q(u) = \{x \in W\colon\ f(x) = u\} = f^{-1}[u]$$

Jei $u \neq u'$ tai izokvantos $Q(u)$ ir $Q(u')$ nesikerta. Todėl lygybė

$$W = \bigcup_{u \geq 0} W(u) = \bigcup_{u \geq 0} Q(u)$$

reiškia, kad izokvantos suskaido išteklių aibę W į nesikertančias aibes $Q(u)$ – ekvivalentumo klases. Tokiu b$\overline{\text{u}}$du kiekvienam$x \in W$, $f(x) = u$ jei $x \in Q(u)$.

Gamybos aibių pavyzdžiai. Viena iš pirmųjų ir dažniausiai naudojamų gamybos funkcijų pavyzdžių yra Cobb'o-Douglas'o funkcija:

$$f(x) = b \prod_{i=1}^{\ell-1} x_i^{a_i}, \quad x = (x_i) \in \mathbb{R}_+^{\ell-1},$$

čia b ir a_i yra teigiamos konstantos. Ši funkcija pasirodo ir kaip naudingumo funkcija individualaus alternatyvų pasirinkimo teorijoje (žr. (3.8)). Atveju $\ell = 3$ ir $a_1 = a_2 =$

$a \in (0,1)$, t. y. esant dviems išteklių rūšims ir vienai produktų rūšiai, Cobb'o-Douglas'o gamybos funkcija apibūdinama gamybos aibė yra

$$Y = \{(-x_1, -x_2, u) \in \mathbb{R}^3\colon\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ u \geq 0,\ u \leq x_1^a x_2^{1-a}\}.$$

Be to, kiekvienam $u \geq 0$,

$$W(u) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+\colon\ u \leq x_1^a x_2^{1-a}\} \quad \text{ir} \quad Q(u) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+\colon\ u = x_1^a x_2^{1-a}\}.$$

yra gamybos išteklių aibė ir izokvanta.

Kita dažnai ekonometriniuose darbuose naudojama gamybos funkcija yra *pastovios transformacijos elastingumo* (angl. constant elasticity of substitution) arba CES funkcija:

$$f(x) = b\Big(\sum_{i=1}^{\ell-1} \alpha_i x_i^\rho\Big)^{1/\rho}, \quad x = (x_i) \in \mathbb{R}^{\ell-1}_+,$$

čia $b > 0$, $\rho \neq 0$ ir $\alpha_i > 0$. Gamybos aibė, gamybos išteklių aibė ir izokvanta apibrėžiamos kaip ir Cobb'o-Douglas'o atveju. Tačiau, priklausomomai nuo parametro ρ, šių aibių savybės yra gerokai įvairesnės.

Tarkime, kad $a > 0$ ir $b > 0$. Leontief'o technologijos gamybos aibė erdvėje $\mathbb{R}^3$ yra apibrėžiama taip:

$$Y = \{(-x_1, -x_2, u) \in \mathbb{R}^3\colon\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ u \geq 0,\ u \leq \min\{ax_1, bx_2\}\}.$$

Be to, kiekvienam $u \geq 0$,

$$\begin{aligned} W(u) &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+\colon\ u \leq \min\{ax_1, bx_2\}\}, \\ Q(u) &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+\colon\ u = \min\{ax_1, bx_2\}\}. \end{aligned}$$

Šios technologijos gamybos funkcija yra $f(x) = \min\{ax_1, bx_2\}$ visiems $x = (x_1, x_2) \geq 0$.

Pelno maksimizavimas. Firmos ekonominiu pelnu yra laikomas skirtumas tarp pajamų ir kaštų. Pajamos ir kaštai priklauso nuo gėrybių kainos, už kurią parduodami gaminiai ir už kurią perkami ištekliai. Be to, pajamos ir kaštai priklauso ir nuo firmos veiksmų: gamybinė veikla, gamybos sąnaudų pirkimas, reklamos pirkimas it t. t. Pažymėjus tokius veiksnius $(v_1, \ldots, v_n)$, bei nuo jų priklausančias pajamas $P(v_1, \ldots, v_n)$ ir kaštus $K(v_1, \ldots, v_n)$, pelno maksimizavimo problema turi tokią išraišką

$$\max_{v_1, \ldots, v_n} \{P(v_1, \ldots, v_n) - K(v_1, \ldots, v_n)\}. \tag{6.1}$$

Toliau nagrinėsime firmos veiklą atsižvelgdami tik į dviejų rūšių apribojimus: technologinius ir rinkos. Pirmieji - technologiniai - apribojimai yra išreikšti gamybos aibe

Y. Antrieji - rinkos - apribojimai yra susiję su kaina. Firma negali parduoti savo produktą brangiau negu jos gaminių vartotojai sutinka mokėti. Be to, firma negali pirkti išteklius pigiau negu jų tiekėjai sutinka parduoti gėrybes, reikalingas gamybos planui $y \in Y$. Apskritai optimalus pelno maksimizavimo problemos sprendimas reikalauja nagrinėti abu apribojimus kartu. Tačiau konkurencinės rinkos modelyje gamybos pelno maksimizavimo problema yra nagrinėjama esant duotai kainai, tai yra kaina laikoma egzogeniniu kintamuoju. Kitaip tariant, firma negali savarankiškai nustatyti kainos nes rinka yra konkurencinė. Taigi, firma pelną maksimizuoti gali rinkdamasi tik gamybos aibės ribose. Toks firmos modelis yra vadinamas *konkurencine firma*.

Toliau nagrinėjama gamintojo pelno maksimizavimo problema. Tarkime, kad $y \in Y$ yra gamybos planas, o $p \in P \subset \mathbb{R}^\ell_+$ yra kainų sistema, kaip ir iki šiol, sudaryta iš gamybos plane y esančių gėrybių vienetų kainų. Kadangi gamybos plane $y = (y_1, \ldots, y_\ell)$ teigiami skaičiai išreiškia gamybinės veiklos sukurtas gėrybes, o neigiami skaičiai išreiškia suvartojamas gėrybes, tai skaliarinė sandauga $p{\cdot}y$ yra lygi pajamų ir kaštų skirtumui, t. y. lygi firmos pelnui esant duotai kainų sistemai $p \in P$. Pelno maksimizavimo problema (6.1) konkurencinės firmos atveju reiškia klausimą ar egzistuoja gamybos planas $y \in Y$, kuris maksimizuoja pelną $p{\cdot}y$. Kadangi funkcija $y \to p{\cdot}y$, $y \in Y$, yra tolydi, remiantis Weierstrass'o teorema, pelno maksimizavimo problema turi sprendinį jei gamybos aibė Y yra kompakti. Kitaip tariant, $y^* \in Y$ yra pelno maksimizavimo problemos sprendinys, jei $\sup\{p{\cdot}y\colon\ y \in Y\} = p{\cdot}y^*$. Tokiu atveju žymėsime

$$\pi_Y(p) \equiv \pi(p) := p{\cdot}y^* = \max\{p{\cdot}y\colon\ y \in Y\}.$$

Jei kiekvienam $p \in P$, aibė

$$S_Y(p) \equiv S(p) := \text{argmax}\big\{p{\cdot}y\colon\ y \in Y\big\} = \{y^* \in Y\colon\ p{\cdot}y^* = \sup\{p{\cdot}y\colon\ y \in Y\}\}$$

yra netuščia, tai sakoma, kad yra apibrėžta konkurencinės firmos *pelno funkcija* $p \mapsto \pi(p)$, $p \in P$, o atitiktis $\eta_Y \subset P \times Y$, apibrėžta priskirimu $p \mapsto \eta_Y[p] := S_Y(p)$, $p \in P$, vadinama *pasiūlos atitiktimi*.

6.1 teiginys. *Sakykime, kad gamybos aibė $Y \subset \mathbb{R}^\ell$ yra uždara, iškila ir monotoninė, o kūgyje $P \subset \mathbb{R}^\ell_+$ yra apibrėžta pelno funkcija π_Y ir pasiūlos atitiktis η_Y. Tada*

(a) *η_Y yra nulinės eilės teigiamai homogeninė;*

(b) *π_Y yra pirmos eilės teigiamai homogeninė;*

(c) *π_Y yra iškila jei P yra iškila aibė;*

(d) *π_Y yra tolydi iš apačios, t. y. duotiems $p_0 \in P$ ir $\epsilon > 0$ egzistuoja tokia p_0 aplinka $U \subset P$, kad $\pi_Y(p) \geq \pi_Y(p_0) - \epsilon$ visiems $p \in U$.*

Įrodymas. Tarkime, kad $p \in P$, $\lambda > 0$ ir $y \in S_Y(p)$. Tada $p{\cdot}y \geq p{\cdot}z$ visiems $z \in Y$. Kadangi

$$(\lambda p){\cdot}y = \lambda(p{\cdot}y) \geq \lambda(p{\cdot}z) = (\lambda p){\cdot}z$$

visiems $z \in Y$, gauname $y \in S_Y(\lambda p)$ ir $\pi_Y(\lambda p) = \lambda \pi_Y(p)$. Jei $y \in S_Y(\lambda p)$, tai panašiai gauname $y \in S_Y(p)$, kas įrodo lygybę $S_Y(\lambda p) = S_Y(p)$ ir tvirtinimus (a) ir (b).

Tarkime, kad aibė P yra iškila, $p', p'' \in P$ ir $\lambda \in (0,1)$. Tada $p := \lambda p' + (1-\lambda)p'' \in P$ ir egzistuoja $y \in S(p)$. Atsižvelgiant į skaliarinės daugybos tiesiškumą ir pelno funkcijos apibrėžimą yra teisinga nelygybė

$$\pi_Y(p) = \Big(\lambda p' + (1-\lambda)p''\Big)\cdot y = \lambda\big(p'\cdot y\big) + (1-\lambda)\big(p''\cdot y\big) \leq \lambda \pi_Y(p') + (1-\lambda)\pi_Y(p'').$$

Tai reiškia, kad pelno funkcija π_Y yra iškila ir yra teisingas (c) tvirtinimas.

Tarkime, kad $p_0 \in P$, $\epsilon > 0$ ir $y_0 \in S(p_0)$. Tada $p_0\cdot y_0 = \pi(p_0)$ ir remiantis skaliarinės daugybos tolydumu (2.4.7 pratimas), $p\cdot y_0 \geq p_0\cdot y_0 - \epsilon$ visiems p esantiems pakankamai arti p_0, Tuo labiau yra teisinga nelygybė $\pi(p) \geq \pi(p_0) - \epsilon$ visiems p esantiems pakankamai arti p_0, kas ir įrodo (d) tvirtinimą. □

Yra teisingas stipresnis pastarojo teiginio (d) tvirtinimas, jei papildomai gamybos aibė Y yra kompakti. Tuo atveju pelno funkcija π_Y yra tolydi savo apibrėžimo aibėje, t. y. galioja teiginys

6.2 teiginys. *Jei gamybos aibė $Y \subset \mathbb{R}^\ell$ yra netuščias kompaktas, tai pelno funkcija π_Y yra apibrėžta ir tolydi aibėje $\mathbb{R}^\ell_{++}$.*

Įrodymas. Kiekvienam $p > 0$, $y \mapsto p\cdot y$, $y \in Y$, yra tolydi funkcija ir, remiantis Vejerštraso teorema (2.65 teorema), ji įgyja maksimumą, t.y. pelno funkcija π_Y yra apibrėžta aibėje $\mathbb{R}^\ell_{++}$. Remiantis 6.1 teiginio (c) tvirtinimu, pakanka įrodyti funkcijos π_Y tolydumą iš viršaus. Tarkime, kad $p_0 > 0$ ir $\epsilon > 0$. Kadangi skaliarinė daugyba yra tolydi dviejų argumentų funkcija, kiekvienam $y \in Y$, egzistuoja tokia vektoriaus p_0 atvira aplinka $U(y)$ ir tokia vektoriaus y atvira aplinka $V(y)$, kad $p\cdot z \leq p_0\cdot y + \epsilon$ visiems $p \in U(y)$ ir $z \in V(y)$. Atviros aplinkos $\{V(y)\colon\ y \in Y\}$ sudaro aibės Y atvirą padengimą. Kadangi Y yra kompaktas, tai egzistuoja baigtinis Y padengimas $V(y_1), \ldots, V(y_k)$. Tegul $U := \cap_{i=1}^k U(y_i)$. Tada U yra vektoriaus p_0 atvira aplinka. Tegul $p \in U$ ir $y \in Y$. Egzistuoja toks $i \in \{1, \ldots, k\}$, kad $y \in V(y_i)$. Kadangi $p \in U(y_i)$, tai

$$p\cdot y \leq p_0\cdot y_i + \epsilon \leq \pi(p_0) + \epsilon.$$

Kadangi $y \in Y$ yra laisvai pasirinktas, tai $\pi(p) \leq \pi(p_0) + \epsilon$; tai ir reikėjo įrodyti. □

Gamybos pasiūla ir išteklių paklausa Vėl tarkime, kad firmos produktas yra tik viena ℓ-toji gėrybė, t. y. atvejis, kai efektyvus gamybos planas nusakomas vektoriumi $y = (-x, f(x)) \in Y \subset \mathbb{R}^\ell$, $x \in W \subset \mathbb{R}^{\ell-1}_+$, o f yra gamybos funkcija apibrėžta gamybos išteklių aibėje W. Šiuo atveju kainų sistemą žymėsime taip: $p = (q, r) \in \mathbb{R}^\ell_+$ su $q := (p_1, \ldots, p_{\ell-1})$ ir $r := p_\ell$, o atitinkama gamybos plano kaina

$$p\cdot y = (q,r)\cdot(-x, f(x)) = rf(x) - q\cdot x, \quad x \in W \subset \mathbb{R}^{\ell-1}.$$

Tada pelno funkciją galima išreikšti taip: kiekvienam $r \in \mathbb{R}_+$ ir $q \in \mathbb{R}_+^{\ell-1}$,

$$\pi(q,r) = \sup\{rf(x) - q{\cdot}x\colon\ x \in W\}.$$

Jei maksimumas įgyjamas viename taške, tai aibėje $\mathbb{R}_+^{\ell}$ yra apibrėžta funkcija ξ su reikšmėmis

$$\xi(q,r) := \text{argmax}\{rf(x) - q{\cdot}x\colon\ x \in W\},$$

vadinama *išteklių paklausos funkcija* (angl. factor demand function), o kompozicija $\eta := f\circ\xi$ vadinama *pasiūlos funkcija* (angl. supply function).

Prie šio gamybos modelio grįšime 6.3 skyrelio pabaigoje nagrinėdami bendrąją pusiausvyrą.

Pratimai.

1. Įrodyti, kad kiekvienas efektyvus gamybos planas priklauso gamybos aibės sienai.
2. Įrodyti, kad gamybos aibė Y su vienu gamybos produktu yra iškila tada ir tik tada, kai gamybos funkcija f yra įgaubta.
3. Jei gamybos aibė Y su vienu gamybos produktu yra iškila, tai atitinkama netuščia gamybos išlaidų aibė $W(u)$ taip pat iškila.
4. Sakykime, kad gamybos aibė $Y \subset \mathbb{R}^{\ell}$ yra uždara, iškila ir monotoninė. Įrodyti, kad $Y = \{y \in \mathbb{R}^{\ell}\colon\ p{\cdot}y \le \pi_Y(p)$ visiems $p \in \mathbb{R}_+^{\ell}\}$.
5. Tarkime, kad gamybos funkcija $f(x) = a\ln x_1 + b\ln x_2$, $x = (x_1,x_2) > 0$ ir $a,b > 0$. Rasti paklausos ir pasiūlos funkcijas ξ ir η, bei pelno funkciją π_Y. Nuoroda: naudotis atskyrimo teorema.
6. Tarkime, kad gamybos funkcija $f(x) = x_1^a x_2^b$, $x = (x_1,x_2) > 0$ ir $a,b > 0$. Rasti išteklių paklausos ir pasiūlos funkcijas ξ ir η, bei pelno funkciją π_Y. Kokias sąlygas privalo tenkinti a ir b? Nuoroda: kintamuosius x_1, x_2 išreikšti per $y := x_1^a x_2^b$.

6.2 Socialinė sistema ir jos pusiausvyra

Socialine sistema galima laikyti grupę subjektų, kurie daro sprendimus, nebūtinai ekonominio pobūdžio. Svarbiausias tokių sprendimų bruožas yra tas, kad renkamasi iš leistinų sprendimų aibės ir pasirinkimai nėra visiškai nepriklausomi vienas nuo kito. Kiekvienas subjektas galimus sprendimus renkasi pagal savo asmenines preferencijas, o jo pasirinkimą riboja visų kitų tokios sistemos subjektų pasirinkimų rezultatai. Pagrindinė šio skyrelio teorema (6.5 teorema) nustato sąlygas, kada tokioje sistemoje egzistuoja pusiausvyra, t.y. tokia būsena, kada visi subjektai pasirinko iš jam leistinų sprendimų aibės ir nėra poreikio keisti sprendimą.

Optimalių sprendimų aibė Socialinę sistemą sudaro bet kuri baigtinė subjektų aibė, besielgiančių racionaliai ir priklausomai nuo vienas kito pasirinkimų. Kaip ir anksčiau, racionalumas reiškia tai, kad maksimizuojama preferencijas išreiškianti funkcija. Tarkime, kad socialinės sistemos subjekto pasirinkimą iš alternatyvų aibės Q riboja aplinka, priklausanti nuo būsenos iš aibės T. Taigi, priklausomai nuo būsenos $t \in T$, socialinės sistemos subjektas gali rinktis tik iš poaibio $\gamma(t) \subset Q$.

Sistemos subjekto pasirinkimo optimalumą apibūdina funkcijos $f\colon T \times Q \mapsto \mathbb{R}$ reikšmė $f(t, q)$, $(t, q) \in T \times Q$. Duotai aplinkos būsenai $t \in T$, socialinės sistemos subjektas ieško tokio elemento $q \in \gamma(t)$, kuris maksimizuoja funkciją $f(t, \cdot)$. Tarkime, kad duotam $t \in T$, visų *optimalių sprendimų aibė* yra

$$\mu(t) := \big\{z^* \in \gamma(t)\colon\ f(t, z^*) = \sup_{z \in \gamma(t)} f(t, z)\big\} \neq \varnothing. \tag{6.2}$$

Kaip ir anskčiau, ekonominių sprendimų atveju, tariame, kad, kiekvienam $t \in T$, netuščia $\mu(t)$ aibė gali turėti daugiau nei vieną elementą, t. y. μ yra atitiktis iš T į Q.

Toliau nustatomos sąlygos tam, kad atitiktis μ būtų tolydi iš išorės.

6.3 lema. *Sakykime, kad T ir Q yra euklidinių erdvių poaibiai, Q yra kompaktiška, $f\colon T \times Q \to \mathbb{R}$ yra tolydi funkcija ir γ yra tolydi su kompaktiškais vaizdais atitiktis iš T į Q. Tada* (6.2) *lygybe apibrėžta atitiktis μ yra tolydi iš išorės aibėje T.*

Įrodymas. Pirmiausia parodysime, kad kiekvienam $t \in T$, $\mu(t)$ yra uždara aibėje Q. Iš tikro, tegul $t \in T$, seka $(q_n) \subset \mu(t)$ ir $q_n \to q \in Q$, kai $n \to \infty$. Kadangi γ turi uždarus vaizdus, $\gamma(t)$ yra uždara aibėje Q ir todėl $q \in \gamma(t)$. Parodysime, kad $q \in \mu(t)$. Kadangi kiekvienam n, $q_n \in \mu(t)$, tai $f(t, q_n) \geq f(t, z)$ visiems $z \in \gamma(t)$. Kadangi $f(t, \cdot)$ yra tolydi funkcija, seka $(f(t, q_n))$ konverguoja kai $n \to \infty$ į $f(t, q)$ ir todėl $f(t, q) \geq f(t, z)$ visiems $z \in \gamma(t)$. Todėl $q \in \mu(t)$, o $\mu(t)$ yra uždara kiekvienam $t \in T$. Kadangi Q yra kompaktiška aibė, tai ir $\mu(t)$ yra kompakti kiekvienam $t \in T$ (2.61 lema), t. y. μ turi kompaktiškus vaizdus. Taigi, galima naudotis 4.11 teoremos kriterijumi išoriniam atitikties tolydumui.

Tarkime, kad seka $(t_n) \subset T$ konverguoja į $t_0 \in T$, o $q_n \in \mu(t_n)$ kiekvienam n. Reikia parodyti, kad egzistuoja posekis (q_{n_k}), konverguojantis į kurį nors $\mu(t_0)$ aibės elementą. Toks posekis konverguojantis į aibės V elementą egzistuoja, kadangi Q yra kompaktas. Rašymo paprastumui tarkime, kad pati seka (q_n) konverguoja į $q_0 \in Q$. Reikia parodyti, kad $q_0 \in \mu(t_0)$. Kadangi $q_n \in \gamma(t_n)$ ir atitiktis γ yra tolydi iš išorės, tai $q_0 \in \gamma(t_0)$ remiantis ta pačia 4.11 teorema. Todėl pakanka parodyti nelygybę

$$f(t_0, q_0) \geq f(t_0, z) \qquad \text{visiems } z \in \gamma(t_0). \tag{6.3}$$

Tarkime, kad $z \in \gamma(t_0)$. Kadangi atitiktis γ yra tolydi iš vidaus, remiantis 4.13 teorema, egzistuoja tokia seka $\{z_n\} \subset Q$, kuri konverguoja į z ir $z_n \in \gamma(t_n)$ kiekvienam n. Todėl kiekvienam n yra teisinga nelygybė $f(t_n, q_n) \geq f(t_n, z_n)$. Kadangi f tolydi, šioje nelygybėje perėję prie ribos kai $n \to \infty$ gauname, kad yra teisinga (6.3) nelygybė; tai ir reikėjo įrodyti. □

Socialinės sistemos pusiausvyra Tarkime, kad toliau apibrėžiamoje socialinėje sistemoje yra N subjektų žymimų indeksais $i \in \mathcal{N} := \{1, \dots, N\}$. Taip pat tarkime, kad Q_i yra netuščias euklidinės erdvės poaibis kiekvienam $i \in \mathcal{N}$, o $Q := Q_1 \times \cdots \times Q_N$. Kiekvienam $i \in \mathcal{N}$ ir $q = (q_1, \dots, q_{i-1}, q_i, q_{i+1}, \dots, q_N) \in Q$, tegul

$$T_i := Q_1 \times \cdots \times Q_{i-1} \times Q_{i+1} \times \cdots \times Q_N \tag{6.4}$$

ir

$$t_i := q_{\mathcal{N}\setminus i} := (q_1, \dots, q_{i-1}, q_{i+1}, \dots, q_N) \in T_i, \tag{6.5}$$

t. y. vektorius t_i gautas iš q išmetus i-tąją koordinatę q_i. Vektorius $t_i = q_{\mathcal{N}\setminus i}$ interpretuojamas kaip aplinkos poveikis i-tajam socialinės sistemos subjektui. Kiekvienam $i \in \mathcal{N}$, tegul $f_i \colon T_i \times Q_i \to \mathbb{R}$ yra funkcija, o γ_i yra atitiktis iš T_i į Q_i. Taip apibrėžtas rinkinys

$$E = (Q_i, f_i, \gamma_i) = (Q_i, f_i, \gamma_i)_{i \in \mathcal{N}}$$

vadinamas *Debreu socialine sistema*, o bet kuris elementas $q \in Q$ vadinamas šios *sistemos būsena*. Kalbant neformaliai, Debreu socialinės sistemos pusiausvyra laikysime tokią jos būseną $q^* = (q_i^*)_{i \in \mathcal{N}} \in Q$, kurios kiekviena komponentė q_i^* yra nuo aplinkos poveikio $q^*_{\mathcal{N}\setminus i}$ priklausančioje galimų sprendimų aibėje $\gamma_i(q^*_{\mathcal{N}\setminus i})$ ir, be to, šioje aibėje maksimizuoja funkciją $f_i(q^*_{\mathcal{N}\setminus i}, \cdot)$.

Tiksliau kalbant, kiekvienam $i \in \mathcal{N}$ ir $t_i = q_{\mathcal{N}\setminus i} \in T_i$, tegul

$$\mu_i(t_i) := \left\{ z^* \in \gamma_i(t_i) \colon f_i(t_i, z^*) = \sup_{z \in \gamma_i(t_i)} f_i(t_i, z) \right\} \subset Q_i. \tag{6.6}$$

6.4 apibrėžimas. Sakoma, kad egzistuoja *Debreu socialinės sistemos* $(Q_i, f_i, \gamma_i)_{i \in \mathcal{N}}$ *pusiausvyra*, jei egzistuoja tokia sistemos būsena $q^* = (q_1^*, \dots, q_N^*) \in Q$, kad $q_i^* \in \mu_i(q^*_{\mathcal{N}\setminus i})$ kiekvienam $i \in \mathcal{N}$. Būsena q^* vadinama Debreu socialinės sistemos pusiausvyra.

Kitame skyrelyje Q_i bus interpretuojama ekonominės rinkos kontekste arba vartojimo aibe, arba gamybos aibe arba kainų sistemų aibe. Debreu socialinės sistemos būsena q bus konkurencinės rinkos būsena, o q_i bus i-tojo rinkos subjekto pasirinkimas, gamybos planas ar kainų sistema. Funkcija f_i bus, atitinkamai, naudingumo funkcija, gamybos plano kaina ir visuminės perteklinės paklausos kaina, o tuo tarpu (netrivialia) atitiktimi γ_i bus biudžeto aibė.

Debreu socialinės sistemos, o tuo pačiu ir konkurencinės rinkos pusiausvyros egzistavimą įrodysime remdamiesi Kakutani teorema apie nejudamą tašką atitiktims.

Dabar jau pasiruošę įrodyti pusiausvyros egzistavimą tam tikroms Debreu socialinės sistemoms. Primename, kad tolesnės teoremos viena iš sąlygų, funkcijos kvazi-įgaubtumas, yra nusakyta 2.104(c) apibrėžime.

6.5 teorema. *Sakykime, kad kiekvienam $i \in \mathcal{N}$, Q_i yra netuščias, kompaktiškas ir iškilas euklidinės erdvės poaibis, funkcija $f_i \colon T_i \times Q_i \to \mathbb{R}$ yra tolydi ir kvazi-įgaubta pagal antrąjį argumentą, o atitiktis γ_i iš T_i į Q_i yra tolydi, bei turinti iškilus ir kompaktiškus vaizdus. Tada egzistuoja Debreu socialinės sistemos $(Q_i, f_i, \gamma_i)_{i \in \mathcal{N}}$ pusiausvyra.*

Įrodymas. Tegul $Q := Q_1 \times \cdots \times Q_N$. Apibrėšime atitiktį iš Q į Q ir parodysime, kad ji turi nejudamą tašką nusakantį ieškomą Debreu socialinės sistemos pusiausvyros būseną. Tarkime, kad $i \in \mathcal{N}$. Pagal prielaidą, $\gamma_i(t_i)$ yra kompaktiška aibė kiekvienam $t_i \in T_i$. Todėl tolydi funkcija $f_i(t_i, \cdot)$ maksimumą aibėje $\gamma_i(t_i)$ įgyja kuriame nors taške $z^* \in \gamma_i(t_i)$, o $\mu_i(t_i)$, apibrėžta (6.6) sąryšiu, yra visų tokių taškų aibė. Kadangi aibės $\mu_i(t_i) \subset Q_i$, $t_i \in T_i$, yra netuščios, tai jos apibrėžia atitiktį μ_i iš T_i į Q_i kiekvienam $i \in \mathcal{N}$. Tada kiekvienam $q = (q_1, \ldots, q_N) \in V$, turime netuščią aibę

$$\tilde{\mu}(q) := (\mu_1(q_{\mathcal{N}\setminus 1}), \ldots, \mu_N(q_{\mathcal{N}\setminus N})) \subset Q,$$

t. y. $\tilde{\mu}$ yra atitiktis iš Q į Q. Pagal šį ir 6.4 apibrėžimus, Debreu socialinės sistemos $(Q_i, f_i, \gamma_i)_{i\in\mathcal{N}}$ būsena $q^* \in Q$ yra pusiausvyra tada ir tik tada, kai $q^* \in \tilde{\mu}(q^*)$, t. y. kai q^* yra atitikties $\tilde{\mu}$ nejudamas taškas. Parodysime, kad atitiktis $\tilde{\mu}$ išpildo Kakutani nejudamo taško teoremos sąlygas (4.19 teorema).

Aibė $Q = Q_1 \times \cdots \times Q_N$ yra netuščias, kompaktiškas ir iškilas euklidinės erdvės poaibis, kadangi tokia yra kiekviena iš aibių Q_i, $i \in \mathcal{N}$. Kadangi atitiktis γ_i ir funkcija f_i išpildo 6.3 lemos sąlygas, atitiktis μ_i yra tolydi iš išorės aibėje T_i kiekvienam $i \in \mathcal{N}$. Tegul

$$\tilde{\mu}_i(q) := \mu_i(q_{\mathcal{N}\setminus i}) \tag{6.7}$$

kiekvienam $i \in \mathcal{N}$. Nesunku patikrinti (6.2.1 pratimas), kad kiekviena $\tilde{\mu}_i$ atitiktis iš Q į Q_i taip pat tolydi iš išorės aibėje Q. Panašiai, tiesiog tikrinant apibrėžimą ar naudojantis 4.11 teoremos kriterijumi, nesunku įsitikinti (6.2.2 pratimas), jog atitiktis

$$\tilde{\mu} = (\tilde{\mu}_1, \ldots, \tilde{\mu}_n) \tag{6.8}$$

taip pat yra tolydi iš išorės aibėje Q. Kas dėl atitikties $\tilde{\mu}$ vaizdų iškilumo, kiekvienam $i \in \mathcal{N}$ ir $q \in Q$, aibė $\tilde{\mu}_i(q)$ yra dviejų aibių $\gamma_i(t_i)$ ir

$$\big\{z^* \in Q_i \colon\ f_i(t_i, z^*) = \sup_{z\in\gamma_i(t_i)} f_i(t_i, z)\big\} \tag{6.9}$$

sankirta. Pirmoji aibė yra iškila pagal prielaidą, o antroji yra iškila nes $f_i(t_i, \cdot)$ yra kvazi-įgaubta funkcija (6.2.3 pratimas). Todėl iškilomis yra jų sankirtos $\tilde{\mu}_i(q)$, $i \in \mathcal{N}$, bei aibė $\tilde{\mu}(q) = (\tilde{\mu}_1(q), \ldots, \tilde{\mu}_N(q))$ kiekvienam $q \in Q$. Tokiu būdu išpildytos visos Kakutani teoremos (4.19 teoremą) sąlygos, ir todėl remiantis šia teorema atitiktis $\tilde{\mu}$ turi nejudamą tašką; tai ir reikėjo įrodyti. $\square$

Šią teoremą naudosime kitame skyrelyje, įrodant konkurencinės rinkos bendrosios pusiausvyros egzistavimą.

Pratimai.

1. Įrodyti, kad atitiktis $\tilde{\mu}_i$ apibrėžta (6.7) lygybe yra tolydi iš išorės aibėje Q.
2. Įrodyti, kad atitiktis $\tilde{\mu}$ apibrėžta (6.8) lygybe yra tolydi iš išorės aibėje Q.
3. Įrodyti, kad aibė, apibrėžta (6.9) lygybe, yra iškila.

6.3 Rinkos bendroji pusiausvyra

Šiame skyrelyje nagrinėjama rinka, kurios subjektai yra vartotojai ir gamintojai. Kadangi tokia rinka iš principo gali apimti visą šalies ekonomiką, žodžiai rinka ir ekonomika šiame skyrelyje yra sinonimai. Kaip ir grynųjų mainų rinkos atveju, apibrėžiama tokios rinkos bendroji pusiausvyra ir nustatomos jos egzistavimo sąlygos. Matysime, kad bendrosios pusiausvyros egzistavimas išplaukia iš jau aptarto pusiausvyros egzistavimo Debreu socialinėje sistemoje.

Arrow–Debreu ekonomika Tarkime, kad rinką sudaro vartotojai $i \in V = \{1, \dots, n\}$, gamintojai $j \in G = \{1, \dots, m\}$ ir bendri ištekliai, kuriuos sudaro ℓ gėrybių vektorius $e \in \mathbb{R}^\ell$. i-tąjį vartotoją apibūdina netuščia jo vartojimo aibė $X_i \subset \mathbb{R}^\ell$ ir šioje aibėje apibrėžtas racionalus preferencijos sąryšis $\succeq_i$, t.y. pora $(X_i, \succeq_i)$ yra gėrybių laukas. j-tąjį gamintoją apibūdina netuščia gamybos aibė $Y_j \subset \mathbb{R}^\ell$. Tokiu būdu Arrow–Debreu ekonomikos modelis arba, trumpiau, Arrow–Debreu ekonomika yra rinkinys:

$$\mathcal{E} := (X_i, \succeq_i, Y_j, e) = ((X_i, \succeq_i)_{i \in V}, (Y_j)_{j \in G}, e). \tag{6.10}$$

Bet kuris gėrybių rinkinys

$$(x_i, y_j) := (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) \in X_1 \times \dots \times X_n \times Y_1 \times \dots \times Y_m \subset \mathbb{R}^{\ell(n+m)}$$

vadinamas paskirstymu (angl. allocation).

$\mathcal{E}$ ekonomikos paskirstymą (x_i, y_j) atitinkanti *visuminė perteklinė paklausa* yra gėrybių vektorius

$$Z(x_i, y_j) := \sum_{i \in V} x_i - \sum_{j \in G} y_j - e \in \mathbb{R}^\ell.$$

Dėl ženklo vartojimo vektoriuje y_j, visos suvartojamos gėrybės yra su pliuso ženklu, o visos sukuriamos gėrybės yra su minuso ženklu. Tokiu būdu vektoriaus $Z(x_i, y_j)$ koordinatė yra neigiama, jei atitinkamos gėrybės rinkoje yra perteklius, ir yra teigiama, jei tos gėrybės rinkoje yra nepakankamai. Primename, kad paskirstymas (x_i, y_j) yra leistinas, jei jį atitinkanti visuminė perteklinė paklausa $Z(x_i, y_j) \le 0$. Kaip jau aiškinome 1.3 skyrelyje, paskirstymo leistinumas reiškia rinkos subalansuotumą.

Arrow–Debreu ekonomikos modelis nėra pilnas nagrinėjamos situacijos apibūdinimas. Pavyzdžiui, jame nėra nustatyti individualaus vartotojo resursai. Tai gali būti daroma keliais būdais. Šiame skyrelyje naudojamas resursų vartotojams paskirstymas grindžiamas privačios nuosavybės principu.

Privačios nuosavybės ekonomika Vartotojo problema, suformuluota 5.1 skyrelyje, yra vartotojo galimybė optimaliai rinktis iš biudžeto aibės. Kitaip tariant, i-tojo vartotojo pasirinkimas, maksimizuojant savo preferencijas, yra ribojamas turima biudžeto aibe $B_i(p, w_i) = \{x \in X_i \colon\ p \cdot x \le w_i\}$, čia kaip ir anksčiau $p \in P \subset \mathbb{R}^\ell_+$ yra kainų sistema, o w_i yra pradinis turtas. Taigi, vartotojos pasirinkimai priklauso nuo kainų sistemos ir nuo pradinio turto, kuris Arrow–Debreu ekonomikoje dar nėra apibrėžtas.

Privačios nuosavybės ekonomikoje i-tojo vartotojo pradinį turtą w_i sudaro pradinių įnašų, žymimų vektoriumi e_i, vertė ir turtas, gaunamas iš gamintojų pelno. Tokį paskirstymą galima pagrįsti, kai dalis gamintojų firmos nuosavybės priklauso vartotojams. Be to, individualių įnašų suma turi sutapti su bendrų išteklių vektoriumi e, t. y.

$$e = \sum_{i \in V} e_i. \tag{6.11}$$

Tarkime, kad $\{\theta_{ij}\} = \{\theta_{ij} \colon i \in V,\ j \in G\}$ yra rinkinys tokių realių neneigiamų skaičių, kad $\sum_{i \in V} \theta_{ij} = 1$ kiekvienam $j \in G$. Šią sąlygą interpretuosime tuo, kad visa firmos nuosavybė yra privati ir priklauso atskiriems vartotojams. Pažymėję j-tojo gamintojo gautą pelną r_j, laikysime, jog i-tojo vartotojo pradinis turtas yra

$$w_i \equiv w_i(p) = p{\cdot}e_i + \sum_{j \in G} \theta_{ij} r_j.$$

Gamintojo problema, suformuluota 6.1 skyrelyje, yra parinkimas tokio gamybos technologijos, kuri leidžia gauti didžiausią pelną, esant duotai kainai. Prisiminkime, kad j-tojo gamintojo-firmos gamybos aibė $Y_j \subset \mathbb{R}^\ell$ yra sudaryta iš gėrybių vektorių y_j taip, kad suvartojamos gėrybės kiekis turi neigiamą ženklą, o pagaminamos gėrybės kiekis turi teigiamą ženklą. Tokiu būdu duotam kainos vektoriui $p \in P$, minėtasis j-tojo gamintojo pelnas yra $r_j = \pi_j(p) = \max\{p{\cdot}y \colon y \in Y_j\}$, ir todėl i-tojo vartotojo pradinis turtas yra

$$w_i(p) = p{\cdot}e_i + \sum_{j \in G} \theta_{ij} \pi_j(p), \qquad \text{kiekvienam } i \in V. \tag{6.12}$$

Apibendrinant sakysime, kad *privačios nuosavybės Arrow–Debreu ekonomika* yra vartotojų pasirinkimus nusakantis rinkinys $\{X_i, \succeq_i, e_i\}_{i=1}^n$, gamintojų pelno paskirstymą tarp vartotojų nusakantis rinkinys $\{\theta_{ij}\}$, gamybos aibių rinkinys $\{Y_j\}_{j=1}^m$ ir kainos sistemų aibė P, arba glaustai (privačios nuosavybės) Arrow–Debreu ekonomika yra rinkinys

$$\mathcal{E} = (X_i, \succeq_i, Y_j, e_i, \theta_{ij}, P). \tag{6.13}$$

Arrow–Debreu ekonomikos pusiausvyra Tarkime, kad $\mathcal{E}$ yra privačios nuosavybės Arrow–Debreu ekonomika. Šios ekonomikos *būsena* vadinamas visų vartotojų pasirinktų gėrybių vektorių rinkinys $(x_i) = (x_1, \ldots, x_n)$, visų gamybos planų vektorių rinkinys $(y_j) = (y_1, \ldots, y_m)$ ir kainų sistemos vektorius $p \in P$, arba glaustai būsena yra rinkinys

$$(x_i, y_j, p) := (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m, p) \in X_1 \times \cdots \times X_n \times Y_1 \times \cdots \times Y_m \times P \subset \mathbb{R}^{\ell(n+m+1)}.$$

6.6 apibrėžimas. Sakysime, kad (6.13) rinkiniu nusakytos Arrow–Debreu ekonomikos $\mathcal{E}$ būsena (x_i^*, y_j^*, p^*) yra *pusiausvyra*, jei

(a) kiekvienam $i \in V$, $x_i^* \in D_{X_i}(p^*, w_i(p^*))$, t. y. x_i^* yra vartotojo optimalaus pasirinkimo problemos sprendinys, atitinkantis gėrybių lauką $(X_i, \succeq_i)$ ir biudžeto aibę $B_i(p^*, w_i(p^*))$;

(b) kiekvienam $j \in G$, $y_j^* \in S_{Y_j}(p^*)$, t. y. y_j^* yra pelną maksimizuojantis gamybos planas esant kainų sistemai p^*;

(c) visuminė perteklinė paklausa $Z(x_i^*, y_j^*) \leq 0$ ir $p^* \cdot Z(x_i^*, y_j^*) = 0$.

Lyginant su grynųjų mainų rinkos pusiausvyra (5.28 apibrėžimas), Arrow–Debreu rinkos modelyje, greta vartotojo dalyvauja ir gamintojas, o vartotojo pasirinkimas gali turėti ne vienintelį optimalų sprendinį. Kaip rodo kitas teiginys, Arrow–Debreu ekonomikos pusiausvyroje kiekvienas vartotojo optimalus sprendinys priklauso jo biudžeto kraštui.

6.7 teiginys. *Jei $\mathcal{E}$ yra Arrow–Debreu ekonomika su privačia nuosavybe ir (x_i^*, y_j^*, p^*) yra šios ekonomikos pusiausvyros būsena, tai $p^* \cdot x_i^* = w_i(p^*)$ kiekvienam $i \in V$.*

Įrodymas. Remiantis 6.6 apibrėžimo (a) savybe, $p^* \cdot x_i^* \leq w_i(p^*)$ kiekvienam $i \in V$. Priešingai teiginiui tarkime, kad egzistuoja nors vienas vartotojas i, kurio pasirinkimo kaina $p^* \cdot x_i^* < w_i(p^*)$. Tada sumuojant pagal visus $i \in V$, griežta nelygybė vis dar galioja ir, naudojant (6.11) bei (6.12), gauname

$$\begin{aligned} \sum_{i \in V} p^* \cdot x_i^* &< \sum_{i \in V} w_i(p^*) = \sum_{i \in V} p^* \cdot e_i + \sum_{i \in V} \sum_{j \in G} \theta_{ij} p^* \cdot y_j^* \\ &= p^* \cdot e + \sum_{j \in G} p^* \cdot y_j^* = \sum_{i \in V} p^* \cdot x_i^* - p^* \cdot Z(x_i^*, y_j^*). \end{aligned}$$

Šios griežtos nelygybės kairė ir dešinė pusės yra lygios kadangi $p^* \cdot Z(x_i^*, y_j^*) = 0$, remiantis 6.6 apibrėžimo (c) savybe. Gauta prieštara įrodo teiginį. □

Kadangi Arrow–Debreu ekonomikos pusiausvyros būsenos (x_i^*, y_j^*, p^*) komponentės x_i^* ir y_j^* priklauso nuo kainų sistemos p^*, atitinkamos visuminės perteklinės paklausos reikšmės $Z(x_i^*, y_j^*)$ taip pat priklauso nuo kainų sistemos. Ta priklausomybė išreiškiama atitiktimi

$$\begin{aligned} \zeta(p^*) &:= \sum_{i \in V} \varphi_{X_i}(p^*, w_i(p^*)) - \sum_{j \in G} \eta_{Y_j}(p^*) - \{e\} \qquad (6.14) \\ &= \left\{ Z(x_i^*, y_j^*) \colon\ x_i^* \in \varphi_{X_i}(p^*, w_i(p^*)),\ y_j^* \in \eta_{Y_j}(p^*) \right\} \subset \mathbb{R}^\ell, \end{aligned}$$

čia φ_{X_i} yra paklausos atitiktis ir η_{Y_j} yra pasiūlos atitiktis.

Dabar jau galima įrodyti bendrosios pusiausvyros egzistavimo teoremą Arrow–Debreu ekonomikai.

6.8 teorema. *Tarkime, kad Arrow–Debreu ekonomiką $\mathcal{E}$ yra toks rinkinys* (6.13)*, kad*

(a) *kiekvienam* $i \in V$, *vartojimo aibė* $X_i \subset \mathbb{R}^\ell_+$ *yra iškila, kompaktiška ir egzistuoja toks* $\tilde{x}_i \in X_i$, *kad* $\tilde{x}_i < e_i$;

(b) *kiekvienam* $i \in V$, *gėrybių laukas* $(X_i, \succeq_i)$ *yra tolydus, iškilas ir lokaliai nepasotinamas*;

(c) *kiekvienam* $j \in G$, *gamybos aibė* $Y_j \subset \mathbb{R}^\ell$ *yra iškila ir kompaktiška*;

(d) $P = \mathbb{R}^\ell_+ \setminus \{0\}$.

Tada Arrow–Debreu ekonomikoje $\mathcal{E}$ *egzistuoja pusiausvyra.*

Įrodymas. Remiantis 5.9(a) ir 6.1(a) teiginiais, paklausos atitiktis φ_{X_i} ir pasiūlos atitiktis η_{Y_j} yra nulinės eilės teigiamai homogeniškos. Todėl nulinės eilės teigiamai homogeniška yra visuminės perteklinės paklausos atitktis (6.14). Remiantis 6.6 apibrėžimu, kiekvienam $\lambda > 0$, būsena $(x_i^*, y_j^*, \lambda p^*)$ yra pusiausvyra tada ir tik tada, kai pusiausvyra yra būsena (x_i^*, y_j^*, p^*). Be to, abi būsenos turi tą pačią visuminę perteklinę paklausą $Z(x_i^*, y_j^*)$. Tokiu būdu galima tarti, kad kainų sistemų aibė P yra simpleksas

$$S = \{p = (p_h) \in \mathbb{R}^\ell_+ \colon \sum_h p_h = 1\}. \tag{6.15}$$

Aibė S yra iškila ir kompaktiška (6.3.1 pratimas). Toliau parodysime, kad Arrow–Debreu ekonomika $\mathcal{E}$ yra Debreu socialinė sistema sudaryta iš n vartotojų, m gamintojų ir vieno fiktyvaus rinkos dalyvio, kuris renkasi kainą.

Apibrėšime Debreu socialinę sistemą $(Q_i, f_i, \gamma_i)_{i \in \mathcal{N}}$ taip, kad $\mathcal{N} = \{1, \ldots, m + n + 1\}$, $N := n + m + 1$ ir

$$Q_i := \begin{cases} X_i & \text{jei } i = 1, \ldots, n, \\ Y_{i-n} & \text{jei } i = n+1, \ldots, n+m, \\ S & \text{jei } i = N = n + m + 1. \end{cases}$$

Visos Q_i aibės yra netušti, kompaktiški ir iškili euklidinės erdvės $\mathbb{R}^\ell$ poaibiai, t. y. jos išpildo 6.5 teoremos reikalavimus šioms aibėms Tegul Debreu socialinės sistemos būsena $q \in Q_1 \times \cdots \times Q_N$ yra Arrow–Debreu ekonomikos būsena (x_i, y_j, p). Toliau apibrėžiama socialinės sistemos subjekto pasirinkimą vertinanti funkcija $f_i \colon T_i \times Q_i \to \mathbb{R}$, čia T_i ir jos elementai $t_i = q_{\mathcal{N} \setminus i}$ apibrėžti (6.4) ir (6.5) sąryšiais. Remiantis 3.14 teorema, kiekvienam $i \in \{1, \ldots, n\}$, egzistuoja gėrybių lauką $(X_i, \succeq_i)$ išreiškianti tolydi naudingumo funkcija u_i. Taigi šiems i, sąryšiu

$$f_i(q_{\mathcal{N} \setminus i}, x_i) := u_i(x_i), \qquad x_i \in X_i, \tag{6.16}$$

apibrėžta funkcija f_i yra tolydi, nes nuo pirmojo argumento nepriklauso. Be to, ji yra kvazi-įgaubta pagal antrąjį argumentą remiantis 3.19 teiginiu. Toliau, jei $i \in \{n + 1, \ldots, n + m\}$, tai

$$f_i(q_{\mathcal{N} \setminus i}, y_{i-n}) := p \cdot y_{i-n}, \qquad y_{i-n} \in Y_{i-n}. \tag{6.17}$$

Dešinėje pusėje esanti funkcija yra bitiesinė ir todėl f_i yra tolydi, bei kvazi-įgaubta pagal antrąjį argumentą. Pagaliau, jei $i = n + m + 1 = N$, tai

$$f_i(q_{\mathcal{N}\setminus i}, p) := p \cdot Z(x_i, y_j), \qquad p \in P. \tag{6.18}$$

Kadangi funkcija $(x_i, y_j) \mapsto Z(x_i, y_j)$ yra tiesinė visų $n + m$ argumentų atžvilgiu, tai funkcija f_{n+m+1} yra bitiesinė ir todėl taip pat yra tolydi, bei kvazi-įgaubta pagal antrąjį argumentą. Funkcijos f_N maksimizavimas kainų sistemos p atžvilgiu reiškia kainos didinamą tos gėrybės, kurios paklausa yra didesnė už pasiūlą (visuminė perteklinė pasiūla yra teigiama) ir kaina yra mažinama tos gėrybės, kurios paklausa yra mažesnė už pasiūlą (visuminė perteklinė pasiūla yra neigiama).

Lieka apibrėžti atitiktis γ_i kiekvienam Debreu socialinės sistemos dalyviui nusakančią jo galimų pasirinkimų aibę, t.y. aplinkos poveikį. Gamintojų ir fiktyvaus Debreu socialinės sistemos subjekto pasirinkimų aibės yra Y_j ir S, kurios nepriklauso nuo aplinkos poveikio, t.y. kiekvienam $t_i \in T_i$,

$$\gamma_i(t_i) := \begin{cases} Y_{i-n} & \text{jei } i = n+1, \ldots, n+m, \\ S & \text{jei } i = N = n+m+1. \end{cases} \tag{6.19}$$

Tai reiškia, kad kiekviena iš Debreu socialinės sistemos atitikčių γ_i, $i \in \{n+1, \ldots, n+m+1\}$ turi iškilus ir kompaktiškus vaizdus, be to, yra nekintanti (konstanta), o todėl ir tolydi. Kitaip yra su vartotojų pasirinkimais. Kiekvienam $i \in \{1, \ldots, n\}$ ir $t_i \in T_i$, tegul

$$\gamma_i(t_i) := B_i(p, w_i(p)) = \{x \in X_i \colon \ p \cdot x \le w_i(p)\}; \tag{6.20}$$

čia $w_i(p)$ yra apibrėžta lygybe (6.12). Be to, tai reiškia, kad vartotojo pasirinkimas priklauso nuo aplinkos poveikio, nes biudžeto aibė priklauso nuo kainų sistemos p - vienos iš $t_i = q_{\mathcal{N}\setminus i}$ koordinačių. Remiantis 5.1 teiginiu, kai $i \in \{1, \ldots, n\}$, atitikties γ_i vaizdai yra iškilos ir kompaktiškos aibės. Šios atitikties tolydumui parodyti pastebėsime, kad

$$T_i \ni t_i \mapsto p \mapsto (p, w_i(p)) \mapsto B_i(p, w_i(p)) = \gamma_i(t_i) \subset X_i, \tag{6.21}$$

t. y. γ_i yra atitikties β_i iš $S \times \mathbb{R}$ į X_i, funkcijos $p \mapsto (p, w_i(p))$ ir projekcijos $t_i \mapsto p$ kompozicija. Kadangi pelno funkcija π_j yra tolydi aibėje S su kiekvienu j remiantis 6.2 teiginiu, tai funkcija $p \mapsto w_i(p)$, apibrėžta (6.12) lygybe, yra tolydi aibėje S. Be to, kadangi $0 \in X_i \subset \mathbb{R}^\ell_+$ ir $\tilde{x}_i < e_i$, tai $0 \le p \cdot \tilde{x}_i < p \cdot e_i$ su kiekviena kainų sistema $p \in S$. Kitaip kalbant, nelygybė

$$0 \le \inf\{p \cdot x \colon \ x \in X_i\} < w_i(p) \tag{6.22}$$

yra teisinga visiems $i \in \{1, \ldots, n\}$ ir $p \in S$. Todėl atitiktis β_i yra tolydi taške $(p, w_i(p))$ dėka 5.3(b), (c) teoremos ir (6.22) nelygybės. Kadangi tolydžių atitikčių kompozicija yra tolydi (4.17 teiginys), kompozicija (6.21) ir tuo pačiu atitiktis γ_i yra tolydi kiekvienam $i \in \{1, \ldots, n\}$. Tokiu būdu yra išpildytos visos 6.5 teoremos sąlygos, kas reiškia, jog sukonstruotoji Debreu socialinė sistema $(Q_i, f_i, \gamma_i)_{i \in \mathcal{N}}$ turi pusiausvyrą.

Tegul $q^* = (x_i^*, y_j^*, p^*) \in Q = Q_1 \times \cdots \times Q_N$ yra šiame įrodyme sukonstruotos Debreu socialinės sistemos pusiausvyra, t. y. kiekvienam $i \in \mathcal{N}$,

$$q_i^* \in \mu_i(q_{\mathcal{N}\setminus i}^*) = \Big\{ z_i^* \in \gamma_i(t_i^*) \colon\ f_i(t_i^*, z_i^*) = \sup_{z \in \gamma_i(t_i^*)} f_i(t_i^*, z) \Big\}. \tag{6.23}$$

Parodysime, kad būsena v^* yra Arrow–Debreu ekonomikos $\mathcal{E}$ pusiausvyra. Pagal (6.23) ir (6.19), kiekvienam $j \in G$, $y_j^* = q_{n+j}^*$ maksimizuoja (6.17) funkciją aibėje Y_j ir todėl $p^* \cdot y_j^* = \pi_j(p^*)$, t. y. išpildyta 6.6 apibrėžimo (b) sąlyga. Pagal (6.23) ir (6.20), kiekvienam $i \in V$, $x_i^* = q_i^*$ maksimizuoja (6.16) funkciją aibėje $B_i(p^*, w_i(p^*))$, t. y. $x_i^* \in D_i(p^*, w_i(p^*))$, kas reiškia, kad yra išpildyta 6.6 apibrėžimo (a) sąlyga. Be to, remiantis 5.8 išvada, x_i^* randasi ant biudžeto aibės krašto, t. y.

$$p^* \cdot x_i^* = w_i(p^*) = p^* \cdot e_i + \sum_{j \in G} \theta_{ij} p^* \cdot y_j^*, \qquad \text{kiekvienam } i \in V.$$

Sumuodami pagal i, naudodami (6.11) ir keisdami sumavimo tvarką, kadangi $\sum_i \theta_{ij} = 1$ kiekvienam j, gauname, kad

$$\sum_{i \in V} p^* \cdot x_i^* - p^* \cdot e - \sum_{j \in G} p^* \cdot y_j^* = p^* \cdot Z(x_i^*, y_j^*) = 0.$$

Pagal (6.23) ir (6.19), p^* maksimizuoja (6.18) funkciją it todėl iš pastarosios lygybės išplaukia, kad

$$p \cdot Z(x_i^*, y_j^*) \leq 0 \qquad \text{kiekvienam } p \in S.$$

Jei bent vienos iš gėrybių $h \in \{1, \ldots, \ell\}$ visuminė perteklinė paklausa $Z_h(x_i^*, y_j^*)$ yra griežtai teigiama, tai laikydami šios gėrybės kainą lygią vienetui, o visų kitų gėrybių kainą lygią nuliui, gautumę prieštarą nelygybei paskutinėje išnašoje. Todėl $Z_h(x_i^*, y_j^*) \leq 0$ kiekvienam h, o tai reiškia, kad yra išpildyta 6.6 apibrėžimo (c) sąlyga. Tokiu būdu būsena $q^* = (x_i^*, y_j^*, p^*)$ yra Arrow–Debreu ekonomikos $\mathcal{E}$ pusiausvyra; tai ir reikėjo įrodyti. □

Rinkos kvazitiesinis modelis Kai išpildytos gautos teoremos prielaidos, galime teigti, jog Arrow–Debreu ekonomikoje egzistuoja bendroji pusiausvyra. Tačiau teorema nenurodo konkrečios pusiausvyros būsenos. 5.4 skyrelyje matėme, kad paprastais grynųjų mainų rinkos modelio atvejais nesunku rasti Walraso pusiausvyrą. Norėdami iliustruoti pusiausvyros paieškos ypatybes esant gamybai, nagrinėsime sudėtingesnį pavyzdį, vadinamą *dviejų gėrybių rinkos kvazitiesiniu modeliu*.

Kaip ir anksčiau tarkime, kad rinką sudaro n vartotojų, m gamintojų ir yra $\ell = 2$ gėrybių. Tarkime, kad $X \subset \mathbb{R}_+^2$ yra vartojimo aibė ir kiekvienam $i \in V = \{1, \ldots, n\}$, i-tojo vartotojo naudingumo funkcija yra u_i su reikšmėmis:

$$u_i(x) := x_1 + g_i(x_2), \qquad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2,$$

čia $g_i\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yra C^2 funkcija turinti išvestines $g_i'(t) > 0$ ir $g_i''(t) < 0$ visiems $t \geq 0$. Pastaroji sąlyga reiškia, kad funkcija g_i yra griežtai įgaubta. Remiantis 3.19 teiginiu, nesunku parodyti, kad gėrybių laukas $(X, \succeq_i)$, apibrėžiamas naudingumo funkcija u_i, yra iškilas, jei X yra iškila. Kadangi u_i funkcija yra tiesinė pagal pirmąją koordinatę, tai gerokai supaprastina pusiausvyros paiešką ir dėl šios priežasties modelis vadinamas kvazitiesiniu. Tarkime, kad nėra antrosios gėrybės pradinio įnašo, kas reiškia, kad šią gėrybę pagamina tik firmos, o i-tojo vartotojo pirmosios gėrybės pradinį įnašą žymėsime $w_i > 0$. Tada $e_i = (w_i, 0)$ kiekvienam $i \in V$.

Kiekvienam $j \in G = \{1, \dots, m\}$, j-toji firma iš $t \in W \subset [0, \infty)$ vienetų pirmosios gėrybės gali pagaminti $f_j(t)$ vienetų antrosios gėrybės, o gamybos aibė yra

$$Y_j = \{(-t, u)\colon\ t \in W,\ 0 \leq u \leq f_j(t)\},$$

čia gamybos funkcija f_j yra C^2 funkcija apibrėžta gamybos išteklių aibėje W. Esant pasiūlos ir paklausos atitikčių nulinės eilės teigiamam homogeniškumui, galime tarti, kad pirmosios gėrybės vieneto kaina yra 1, o antrosios gėrybės vieneto kaina yra r. Todėl kainų sistema šiame modelyje bus išreiškiama vektoriumi $p = (1, r)$, $r \geq 0$, o i-tojo vartotojo pradinis turtas, atitinkantis šią kainų sistemą, išreiškiamas (6.12) sąryšiu. Tokiu būdu, dviejų gėrybių rinkos kvazitiesinis modelis yra Arrow–Debreu ekonomikos (6.13) su privačia nuosavybe atskiras atvejis.

Konstruktyvus bendrosios pusiausvyros būsenos radimas kvazitiesiniam modeliui reiškia galimybę rasti tokį būsenos vektorių $(x_i^*, y_j^*, p^*) = ((x_{i1}^*, x_{i2}^*), (y_{j1}^*, y_{j2}^*), (1, r^*))$, kuriam galioja (6.6) apibrėžimo sąlygos. Nurodysime kelią, kuriuo einant galima rasti antrąją gėrybę apibūdinančią pusiausvyros būseną $(x_{i2}^*, y_{j2}^*, r^*)$ (žr. 6.3.5 pratimą). Kiekvienam $r \geq 0$, j-tosios firmos išteklių paklausos funkcijos ξ_j reikšmė

$$\xi_j(1, r) = argmax\{r f_j(t) - t\colon\ t \in W\}.$$

yra apibrėžta, jei maksimumas įgyjamas vieninteliame taške. Jei toks taškas $t_j \in W$ egzistuoja, tai remiantis būtina ekstremumo egzistavimo sąlyga (2.111 teorema), privalo galioti lygybė $r f_j'(t_j) = 1$. Kiekvienam $i \in V$, i-tojo vartotojo pasirinkimas ribojamas biudžeto aibe, atitinkančia kainų sistemą $p = (1, r)$,

$$B_i(p, w(p)) = \big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2\colon\ x_1 + r x_2 \leq w_i + \sum_{j \in G} \theta_{ij} \pi_j(p)\big\}.$$

Jei galioja Walras'o dėsnis, tai paklausos aibė yra

$$D_i(p, w(p)) = argmax\big\{x_1 + g_i(x_2)\colon\ x_1 + r x_2 = w_i + \sum_{j \in G} \theta_{ij} \pi_j(p)\big\}.$$

Sąlyginio ekstremumo paiešką pakeitę besąlyginio ekstremumo paieška, gauname, kad optimalus antrosios gėrybės pasirinkimas nusakomas aibe

$$argmax\big\{g_i(x_2) - r x_2 + w_i + \sum_{j \in G} \theta_{ij} \pi_j(p)\colon\ x_2 \geq 0\big\},$$

arba sąlyga $g_i'(x_{i2}) = r$. Dar vieną sąlygą pusiausvyros paieškai gauname, panaudoję visuminės perteklinės paklausos Z antrąją komponentę $Z_2(x_i, y_j)$ prilygindami nuliui. Tokiu būdu antrosios gėrybės pusiausvyros būsena $(x_{i2}^*, y_{j2}^*, r^*)$ yra sistemos

$$\begin{cases} g_i'(x_{i2}) = r & i = 1, \dots, n, \\ r^* f_j'(t_j) = 1 & j = 1, \dots, m, \\ \sum_i x_{i2} = \sum_j f_j(t_j) \end{cases}$$

sprendinys $(x_{i2}^*, f_j(t_j^*), r^*)$, jei jis egzistuoja.

Pratimai.

1. Įrodyti, kad aibė (6.15) yra iškila ir kompaktiška.

2. Įrodyti: jei būsena (x_i^*, y_j^*, p^*) yra (6.13) rinkiniu nusakytos Arrow–Debreu ekonomikos $\mathcal{E}$ pusiausvyra, tai bet kuriam $\lambda > 0$, būsena $(x_i^*, y_j^*, \lambda p^*)$ taip pat yra šios ekonomikos pusiausvyra.

3. Tegul (x_i, y_j, p) yra (6.13) rinkiniu nusakytos Arrow–Debreu ekonomikos $\mathcal{E}$ būsena ir $p > 0$. Jei $Z_h(x_i, y_j) = 0$ kiekvienam $h \neq h_0$ ir $p \cdot x_i = p \cdot e_i + \sum_{j \in G} \theta_{ij} p \cdot y_j$ su kiekvienu $i \in V$, tai $Z_{h_0}(x_i, y_j) = 0$.

4. Nagrinėkime dviejų gėrybių rinkos kvazitiesinį modelį, kuriame yra vienas vartotojas $(n = 1)$ ir vienas gamintojas $(m = 1)$. Nustatyti pusiausvyros egzistavimą garantuojančias sąlygas ir rasti pusiausvyros būseną.

5. Nustatyti sąlygas dviejų gėrybių rinkos kvazitiesiniam modeliui, kurios įgalintų rasti pirmąją gėrybę apibūdinančią pusiausvyros būseną $(x_{i1}^*, y_{j1}^*, 1)$.

6.4 Pareto efektyvumas ir pusiausvyra

Praeitame skyrelyje nustatytos sąlygos Arrow–Debreu ekonomikai kada joje egzistuoja pusiausvyra. Visų pusiausvyros būsenų aibė, jei ji yra netuščia, gali turėti ne vienintelį elementą. Todėl galima klausti ar viena iš tų būsenų yra kokia nors prasme geresnė už kitą. Šiame skyrelyje atsakysime į šį klausimą, kai viena būsena vadinama „geresne“ už kitą, jei ji vieniems vartotojams suteikia daugiau vertybių nesumažinant jų kitiems vartotojams. Be to, šis klausimas nagrinėjamas šiek tiek bendresnei pusiausvyrai, nei ta, kuri buvo tiriama ankstesniame skyrelyje. Nuo bendresnės pusiausvyros apibūdinimo ir pradėsime.

Pusiausvyra su pradinio turto pervedimais Arrow–Debreu matematinis ekonomikos modelis įgalina nagrinėti bendresnę sistemą nei ta, kuri grindžiama privačia nuosavybe.

Priminsime, kad privačios nuosavybės sistema matematiniame modelyje reiškia vartotojo biudžeto ribojimą pradiniu turtu, nustatomu (6.12) išraiška, t. y. pradiniu turtu, priklausančiu nuo firmos pelno dydžio. Galima nagrinėti pusiausvyrą tokios ekonominės sistemos, kurioje pradinio turto pervedimai (paskirstymai) tarp vartotojų yra bet kokie. Tuo atveju laikysime, kad visos ekonominės sitemos bendri ištekliai yra žinomi ir lygūs gėrybių rinkiniui $e \in \mathbb{R}^\ell$, o i-tojo vartotojo pradinis turtas yra w_i, kiekvienam $i \in V$, nėra iš anksto fiksuotas. Tuo tarpu Arrow–Debreu ekonomikos modelis $\mathcal{E}$, apibrėžiamas rinkiniu (6.10), yra tas pats. Taigi, kaip ir anksčiau, šios ekonomikos paskirstymui (x_i, y_j) atitinkanti visuminė perteklinė paklausa yra

$$Z(x_i, y_j) = \sum_{i\in V} x_i - \sum_{j\in G} y_j - e \in \mathbb{R}^\ell.$$

6.9 apibrėžimas. Tarkime, kad $(X_i, \succeq_i, Y_j, e)$ yra Arrow–Debreu ekonomika. Šios ekonomikos būsena (x_i^*, y_j^*, p^*) vadinama *pusiausvyra su pervedimais* (angl. equilibrium with transfers), jei egzistuoja toks i-tojo vartotojo pradinio turto priskyrimas w_i, kiekvienam $i \in V$, kad galioja

(a) kiekvienam $i \in V$, $x_i^* \in D_{X_i}(p^*, w_i)$;

(b) kiekvienam $j \in G$, $y_j^* \in S_{Y_j}(p^*)$;

(c) $Z(x_i^*, y_j^*) \le 0$ ir $p^* \cdot Z(x_i^*, y_j^*) = 0$;

(d) $\sum_{i\in V} w_i = p^* \cdot e + \sum_{j\in G} p^* \cdot y_j^*$.

Rinkinį (w_i) tokiu atveju vadinsime *pusiausvyrą realizuojančiu pradinio turto priskyrimu.*

Arrow–Debreu ekonomikos pusiausvyra esant privačiai nuosavybei yra atskiras atvejis pusiausvyros su pervedimais. Tai yra tas atvejis, kai pradinio turto priskyrimas vartotojams realizuojamas (6.12) išraiška. Kaip ir ekonomikoje su privačia nuosavybe (6.7 teiginys), būsena realizuojanti pusiausvyrą, pradinį turtą priskiria taip, kad galioja Walras'o dėsnis.

6.10 teiginys. *Jei būsena (x_i^*, y_j^*, p^*) yra pusiausvyra su pervedimais, o (w_i) yra šią pusiausvyrą realizuojantis pradinio turto priaskyrimas, tai $w_i = p^* \cdot x_i^*$ kiekvienam $i \in V$.*

Įrodymas. Remiantis 6.9 apibrėžimo (a) savybe, turime $p^* \cdot x_i^* \le w_i$ kiekvienam $i \in V$. Tarkime, kad tarp šių nelygybių yra bent viena griežta nelygybė. Tokiu atveju, sumuodami visas nelygybes, bei naudodami 6.9 apibrėžimo (d) ir (c) savybes, gauname

$$\sum_{i\in V} p^* \cdot x_i^* < \sum_{i\in V} w_i = p^* \cdot \Big(e + \sum_{j\in G} y_j^*\Big) = p^* \cdot \Big(\sum_{i\in V} x_i^*\Big) - p^* \cdot Z(x_i^*, y_j^*) = \sum_{i\in V} p^* \cdot x_i^*.$$

Ši prieštara įrodo teiginį. $\square$

Pareto efektyvumas

6.11 apibrėžimas. Tarkime, kad Arrow–Debreu ekonomiką apibrėžia $(X_i, \succeq_i, Y_j, e)$ rinkinys. Gėrybių paskirstymas $(x_i, y_j) = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^{\ell(n+m)}$ vadinamas *leistinu*, jei $x_i \in X_i \subset \mathbb{R}^\ell$ kiekvienam $i \in V$, $y_j \in Y_j \subset \mathbb{R}^\ell$ kiekvienam $j \in G$ ir visuminė perteklinė paklausa

$$Z(x_i, y_j) = \sum_{i \in V} x_i - \sum_{j \in G} y_j - e \leq 0.$$

Sakysime, kad leistinas gėrybių paskirstymas (x_i, y_j) yra *geresnis* už kitą leistiną gėrybių paskirstymą (x_i^*, y_j^*), jei

$$\begin{aligned} &x_i \succeq_i x_i^* \qquad \text{kiekvienam } i \in V \text{ ir} \\ &x_i \succ_i x_i^* \qquad \text{su kuriuo nors } i \in V. \end{aligned} \tag{6.24}$$

Leistinas gėrybių paskirstymas yra vadinamas *Pareto efektyviu*, jei neegzistuoja kitas geresnis už jį leistinas gėrybių paskirstymas.

Kitaip kalbant, paskirstymas yra Pareto efektyvus, jei nėra kito leistino paskirstymos, kuris pagerintų kieno nors padėtį nepablogindamas visų kitų padėties. Šiuo atveju vartotojo gera ar bloga padėtis apibūdinama jo preferencijos sąryšiu ar naudingumo funkcija.

Pirmoji fundamentalioji gerovės ekonomikos teorema Toliau parodoma, kad pusiausvyros būsena yra Pareto efektyvi jei kiekvienas vartotojas yra lokaliai nepasotinamas 3.6 apibrėžimo prasme.

6.12 teorema. *Tarkime, kad Arrow–Debreu ekonomikos $(X_i, \succeq_i, Y_j, e)$ kiekvienas gėrybių laukas $(X_i, \succeq_i)$ yra lokaliai nepasotinamas. Jei šios ekonomikos būsena (x_i^*, y_j^*, p^*) yra pusiausvyra su pervedimais, tai gėrybių rinkinys (x_i^*, y_j^*) yra Pareto efektyvus.*

Įrodymas. Tegul (w_i) yra pusiausvyros būseną (x_i^*, y_j^*, p^*) realizuojantis pradinio turto priskyrimas, t. y. šiems dydžiams galioja 6.9 apibrėžimo (a) - (d) savybės. Dėka (c) savybės, gėrybių paskirstymas (x_i^*, y_j^*) yra leistinas. Tarkime, kad jis nėra Pareto efektyvus. Tada egzistuoja geresnis gėrybių paskirstymas (x_i, y_j), t. y. šis gėrybių paskirstymas yra leistinas ir jam galioja (6.24).

Kadangi x_i^* yra optimalus pasirinkimas, galioja implikacija (6.4.1 pratimas):

$$\text{jei} \quad x_i \succ_i x_i^* \quad \text{tai} \quad p^* \cdot x_i > p^* \cdot x_i^*. \tag{6.25}$$

Remiantis gėrybių lauko $(X_i, \succeq_i)$ lokaliu nepasotinamumu, galioja kita implikacija (6.4.2 pratimas):

$$\text{jei} \quad x_i \succeq_i x_i^* \quad \text{tai} \quad p^* \cdot x_i \geq p^* \cdot x_i^*. \tag{6.26}$$

Naudodami šias implikacijas, (6.24) ir sumuodami atitinkamas nelygybes, gauname

$$p^*\cdot\Big(\sum_{i\in V} x_i\Big) > p^*\cdot\Big(\sum_{i\in V} x_i^*\Big). \tag{6.27}$$

Kadangi kiekvienas gėrybių laukas $(X_i, \succeq_i)$ yra lokaliai nepasotinamas, remiantis 5.7 išvada, x_i^* randasi ant biudžeto aibės krašto, t. y. $p^*\cdot x_i^* = w_i$ kiekvienam $i \in V$ (6.10 teiginys yra alterantyvus kitas argumentas). Sumuodami pastarasias lygybes pagal $i \in V$, po to naudodami (d) ir (b) savybes iš 6.9 apibrėžimo, gauname, kad

$$p^*\cdot\Big(\sum_{i\in V} x_i^*\Big) = p^*\cdot e + \sum_{j\in G} p^*\cdot y_j^* \geq p^*\cdot e + \sum_{j\in G} p^*\cdot y_j.$$

Ši nelygybė kartu su (6.27) leidžia teigti, kad yra teisinga nelygybė

$$p^*\cdot Z(x_i, y_j) = p^*\cdot\Big(\sum_{i\in V} x_i\Big) - p^*\cdot e - p^*\cdot\Big(\sum_{j\in G} y_j\Big) > 0.$$

Iš kitos pusės, kadangi gėrybių paskirstymas (x_i, y_j) yra leistinas, atitinkama visuminė perteklinė paklausa $Z(x_i, y_j) \leq 0$. Padauginę skaliariškai abi pastarosios nelygybės puses iš vektoriaus p^* su neneigiamomis koordinatėmis, gauname priešingą nelygybę $p^*\cdot Z(x_i, y_j) \leq 0$. Ši prieštara įrodo, kad ankstesnė prielaida apie geresnio gėrybių paskirstymo egzistavimą yra neteisinga. Todėl gėrybių paskirstymas (x_i^*, y_j^*) yra Pareto efektyvus; tai ir reikėjo įrodyti. □

Antroji fundamentalioji gerovės ekonomikos teorema Toliau parodoma, jog kiekvienas Pareto efektyvus paskirstymas yra kurios nors pusiausvyros būsenos paskirstymas. Kitaip kalbant, egzistuoja tokia kaina, kuriai esant Pareto efektyvus gėrybių paskirstymas tampa Arrow–Debreu ekonomikos pusiausvyros būsena.

6.13 teorema. *Tarkime, kad Arrow–Debreu ekonomika $\mathcal{E} = (X_i, \succeq_i, Y_j, e)$ yra tokia, kad*

(a) *kiekvienam $i \in V$, vartojimo aibė X_i yra iškila, o gėrybių laukas $(X_i, \succeq_i)$ yra tolydus ir iškilas*;

(b) *su kuriuo nors $i \in V$, gėrybių laukas $(X_i, \succeq_i)$ yra lokaliai nepasotinamas*;

(c) *kiekvienam $j \in G$, gamybos aibė Y_j yra iškila.*

Jei (x_i^*, y_j^*) yra $\mathcal{E}$ ekonomikos Pareto efektyvus gėrybių paskirstymas, tai egzistuoja tokia kainų sistema $p^* \in \mathbb{R}_+^\ell$, kad

(d) *kiekvienam $j \in G$, $y_j^* \in S_{Y_j}(p^*)$, t.y. y_j^* yra funkcijos $Y_j \ni y_j \mapsto p^*\cdot y_j$ maksimumo taškas*;

(e) *kiekvienam* $i \in V$, x_i^* *yra funkcijos* $\{x_i \in X_i\colon\ x_i \succeq_i x_i^*\} \ni x_i \mapsto p^*{\cdot}x_i$ *minimumo taškas.*

Prieš įrodant teoremą, parodysime, kaip šios teoremos tvirtinimas susijęs su konkurencinės rinkos pusiausvyra.

6.14 išvada. *Tarkime, kad yra išpildytos* 6.13 *teoremos sąlygos* (a), (b) *ir* (c). *Be to, kiekvienam* $i \in V$,

$$p^*{\cdot}x_i^* > \inf_{x \in X_i} p^*{\cdot}x. \tag{6.28}$$

Jei (x_i^*, y_j^*) *yra* $\mathcal{E}$ *ekonomikos Pareto efektyvus gėrybių paskirstymas, tai egzistuoja kainų sistema* $p^* \in \mathbb{R}_+^\ell$, *rinkiniai* $\{e_i\}$ *ir* $\{\theta_{ij}\}$, *kad būsena* (x_i^*, y_j^*, p^*) *yra* $(X_i, \succeq_i, Y_j, e_i, \theta_{ij}, \mathbb{R}_+^\ell)$ *ekonomikos pusiausvyra.*

Įrodymas. Tegul (x_i^*, y_j^*) yra $\mathcal{E}$ ekonomikos Pareto efektyvus gėrybių paskirstymas. Remiantis 6.13 teorema, egzistuoja tokia kainų sistema $p^* \in \mathbb{R}_+^\ell$, kad galioja tos teoremos (d) ir (e) savybės. Parinksime tokius rinkinius $\{e_i\}$ ir $\{\theta_{ij}\}$, su kuriais būsenai (x_i^*, y_j^*, p^*) ir ekonomikai $(X_i, \succeq_i, Y_j, e_i, \theta_{ij}, \mathbb{R}_+^\ell)$ galioja pusiausvyros apibrėžimo (6.6 apibrėžimas) (a), (b) ir (c) sąlygos.

Kiekvienam $i \in V$, tegul

$$e_i := x_i^* - \frac{1}{n}\sum_{j \in G} y_j^* \qquad \text{ir} \qquad \theta_{ij} := 1/n$$

visiems i, j. Tada

$$w_i(p^*) = p^*{\cdot}e_i + \sum_{j \in G} \theta_{ij}\pi_j(p^*) = p^*{\cdot}x_i^*,$$

o visuminė perteklinė paklausa

$$Z(x_i^*, y_j^*) = \sum_{i \in V} x_i^* - \sum_{j \in G} y_j^* - \sum_{i \in V} e_i = 0.$$

Tokiu būdu, galioja 6.6 apibrėžimo (c) sąlyga. Šio apibrėžimo sąlyga (b) sutampa su 6.13 teoremos (d) teiginiu. Liko įrodyti 6.6 apibrėžimo (a) sąlygą: $x_i^* \in D_{X_i}(p^*, p^*{\cdot}x_i^*)$ kiekvienam $i \in V$. Parodysime, kad ji gaunama iš 6.13 teoremos (e) teiginio.

Tegul $i \in V$ ir tegul $x_i \in B_i(p^*, p^*{\cdot}x_i^*)$, t. y. $x_i \in X_i$ yra toks gėrybių rinkinys, kad $p^*{\cdot}x_i \le p^*{\cdot}x_i^*$. Parodysime, kad $x_i^* \succeq_i x_i$. Pagal prielaidą (6.28) egzistuoja toks $z_i \in X_i$, kad $p^*{\cdot}x_i^* > p^*{\cdot}z_i$. Kiekvienam $\lambda \in [0,1]$, apibrėžkime gėrybių rinkinį $x_i(\lambda) := \lambda z_i + (1-\lambda)x_i$. Kadangi X_i yra iškila, tai $x_i(\lambda) \in X_i$ ir, pagal apibrėžimą, $p^*{\cdot}x_i(\lambda) < p^*{\cdot}x_i^*$ kiekvienam $\lambda \in (0,1]$. Todėl remiantis 6.13 teoremos (b) teiginiu ir 3.1.7 pratimu, $x_i^* \succ_i x_i(\lambda)$ kiekvienam $\lambda \in (0,1]$. Kadangi gėrybių laukas $(X_i, \succeq_i)$ yra tolydus, aibė $\{y \in X_i\colon\ x_i^* \succeq_i y\}$ yra uždara, jai priklauso visi $x_i(\lambda)$, $\lambda \in (0,1]$, tai jai priklauso ir ribinis elementas $x_i = x_i(0)$, gaunamas perėjus prie ribos kai $\lambda \downarrow 0$.

Tai reiškia, kad $x_i^* \succeq_i x_i$. Tokiu būdu įrodyta, kad galioja pusiausvyros apibrėžimo (6.6 apibrėžimas) (a) sąlyga ir būsena (x_i^*, y_j^*, p^*) yra privačios nuosavybės ekonomikos $\mathcal{E}$ pusiausvyra. □

6.13 teoremos įrodymas. Remiantis (b) sąlyga ir pakeitę numeraciją, jei tai yra būtina, galime tarti, kad pirmasis gėrybių laukas $(i = 1)$ yra lokaliai nepasotinamas (3.6 apibrėžimas). Tegul

$$M_1^* := \{x_1 \in X_1 \colon\ x_1 \succ_1 x_1^*\} \quad \text{ir} \quad M_i := \{x_i \in X_i \colon\ x_i \succeq_i x_i^*\}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

M_1^* aibė yra netuščia remiantis lokaliu nepasotinamumu. Aišku, kad visos M_i aibės taip pat yra netuščios. Todėl galime apibrėžti aibę:

$$W := \sum_{i\in V} \{e_i\} + \sum_{j\in G} Y_j - M_1^* - \sum_{i=2}^{n} M_i;$$

kaip ir anksčiau, euklidinės erdvės poaibių tiesinis darinys $\sum_k A_k$ yra aibė $\{\sum_k a_k \colon\ a_k \in A_k\}$. Parodysime, kad aibė W neturi teigiamų elementų, t. y. $W \cap \mathbb{R}^\ell_{++} = \varnothing$. Tarkime, kad toks elementas egzistuoja, tai yra

$$u := \sum_{i\in V} e_i + \sum_{j\in G} y_j - \sum_{i\in V} x_i = -Z(x_i, y_j) \in W \quad \text{ir} \quad u > 0.$$

Tada $Z(x_i, y_j) = -u < 0$, o gėrybių rinkiniams $\{x_i\}$ yra teisinga (6.24). Tokio rinkinio egzistavimas prieštarauja tam, kad gėrybių paskirstymas (x_i^*, y_j^*) yra Pareto efektyvus. Tokiu būdu iš tikro aibė W neturi teigiamų elementų.

Remiantis 3.18 lema, aibė M_1^* yra iškila, o aibės M_i ir Y_j yra iškilos pagal prielaidas. Kadangi iškilų aibių tiesinis darinys yra iškila aibė (2.7 teiginys), tai aibė W yra iškila. Toliau pasiremsime atskyrimo teoremos variantu (2.102 išvada): egzistuoja tokia kainų sistema $p^* \in \mathbb{R}^\ell_+$, kad $p^* \cdot u \le 0$ kiekvienam $u \in W$. Todėl visiems $x_1 \in M_1^*$, $x_i \in M_i$, $i \in \{2, \ldots, n\}$, ir $y_j \in Y_j$ yra teisinga

$$\sum_{i\in V} p^* \cdot e_i + \sum_{j\in G} p^* \cdot y_j \le \sum_{i\in V} p^* \cdot x_i. \tag{6.29}$$

Parodysime, kad pastaroji nelygybė yra teisinga ir tuo atveju kai $x_1 \in M_1$. Iš tikro, tegul $\bar{x}_1 \in M_1$. Remdamiesi gėrybių lauko $(X_1, \succeq_1)$ lokaliu nepasotinamumu, randame tokią seką $(z_n) \in X_1$, kad $z_n \to \bar{x}_1$, kai $n \to \infty$, ir $z_n \succ_1 \bar{x}_1$ kiekvienam n. Pastaroji savybė ir 3.5 teiginys leidžia nuspręsti, kad $z_n \succ_1 x_1^*$ kiekvienam n, t. y. $(z_n) \subset M_1^*$. Taigi, (6.29) galioja kai vietoje x_1 yra bet kuris (z_n) sekos elementas. Remiantis skaliarinės daugybos tolydumu, $p^* \cdot z_n \to p^* \cdot \bar{x}_1$, kai $n \to \infty$, ir todėl (6.29) galioja kai vietoje $x_1 \in M_1^*$ yra $\bar{x}_1 \in M_1$.

Toliau parodoma, kad yra teisingi 6.13 teoremos (d) ir (e) tvirtinimai. (6.29) nelygybėje paėmę $x_i = x_i^*$ ir $y_j = y_j^*$, gauname

$$\sum_{i\in V} p^*\cdot e_i + \sum_{j\in G} p^*\cdot y_j^* \leq \sum_{i\in V} p^*\cdot x_i^*.$$

Iš kitos pusės, kadangi gėrybių paskirstymas (x_i^*, y_j^*) yra leistinas, ir todėl visuminė perteklinė paklausa $Z(x_i^*, y_j^*) \leq 0$, tai galioja pastarosios išnašos nelygybė į priešingą pusę. Abi kartu šios nelygybės įrodo lygybę

$$\sum_{i\in V} p^*\cdot e_i = \sum_{i\in V} p^*\cdot x_i^* - \sum_{j\in G} p^*\cdot y_j^*. \tag{6.30}$$

(6.29) nelygybėje vietoje $\sum_{i\in V} p^*\cdot e_i$ įstatę jos gautą (6.30) išraišką, gauname nelygybę

$$\sum_{j\in G} p^*\cdot y_j - \sum_{j\in G} p^*\cdot y_j^* \leq \sum_{i\in V} p^*\cdot x_i - \sum_{i\in V} p^*\cdot x_i^*, \tag{6.31}$$

kuri yra teisinga visiems $x_i \in M_i$ ir $y_j \in Y_j$. Dabar teoremos (d) tvirtinimas gaunamas (6.31) nelygybėje paėmus visus $x_i = x_i^*$ ir visus $y_j = y_j^*$ išskyrus vieną $y_j \in Y_j$. Analogiškai teoremos (e) tvirtinimas gaunamas (6.31) nelygybėje paėmus visus $x_i = x_i^*$ išskyrus vieną $x_i \in M_i$ ir visus $y_j = y_j^*$. 6.13 teoremos įrodymas baigtas. $\square$

Pratimai.

1. Tegul $X \subset \mathbb{R}^\ell$, $(X, \succeq)$ yra gėrybių laukas, $p \in \mathbb{R}^\ell$, $w \in \mathbb{R}$ ir $x^* \in D_X(p, w)$. Įrodyti: jei $x \in X$ ir $x \succ x^*$ tai $p\cdot x > w$.

2. Tegul $X \subset \mathbb{R}^\ell$, $(X, \succeq)$ yra lokaliai nepasotinamas gėrybių laukas, $p \in \mathbb{R}^\ell$, $w \in \mathbb{R}$ ir $x^* \in D_X(p, w)$. Įrodyti: jei $x \in X$ ir $x \succeq x^*$ tai $p\cdot x \geq w$.

6.5 Pastabos ir papildoma literatūra

6.1 skyrelis Lyginant su vartojimu, firmos teorija atrodo paprastesnė, nes nagrinėja paprastos funkcijos maksimizavimo problemą - pelno problemą. Tačiau taip atrodo tik iš pirmo žvilgsnio. Kainų sistemos egzogeniškumas nagrinėjant vartojimą yra pakankamai reali prielaida. Tačiau ši prielaida, reiškianti, kad rinka yra konkurencinė, neatrodo tokia nekalta nagrinėjant gamybą. Ne mažiau svarbi yra rinka, kurioje veikia monopolija, sugebanti keisti rinkos kainą. Taigi, monopolisitniu ar oligopolijos atveju, prielaida apie kainų sistemos egzogeniškumą nėra pagrįsta. Tokiu atveju ekonominė teorija grindžiama lošimų teorija.

6.2 skyrelis Šiame skyrelyje nagrinėjama socialinė sistema kitaip dar vadinama *abstrakčia ekonomika*. Tokią sistemą pasiūlė ir jos pusiausvyros egzistavimą įrodė Debreu (1952). Šis faktas buvo naudojamas garsiajame Arrow ir Debreu darbe (1954), įrodant konkurencinės rinkos pusiausvyros egzistavimą.

Savo ruožtu Debreu (1952) socialinės sitemos pusiausvyros formulavimas ir egzistencija apibendrino Nash (1950) lošimo pusiausvyrą ir jos egzistavimą.

6.3 lema arba panašus į ją teiginys labai dažnai naudojami bendrosios pusiausvyros teorijoje, vadinant tai matematinės ekonomikos fundamentaliu principu arba maksimumo teorema (žr. pavyzdžiui [6, 12 skyrius]). Pirmasis tokį teiginį įrodė Berge [4], ir dėl to šis teiginys ar jo apibendrinimas neretai vadinami *Berge maksimumo teorema*.

Papildoma literatūra.

1. A. J. Arrow and G. Debreu (1954), Existence of an equilibrium for a competitive economy. *Econometrica*, 22, p. 265-290.

2. G. Debreu (1952). A Social Equilibrium Existence Theorem. *Proceedings of the national Academy of Sciences*, Vol. **38**, No. 10, 886-893.

3. J. F. Nash Jr. (1950). Equilibrium Points in N-Person Games. *Proceedings of the national Academy of Sciences*, Vol. **36**, 48-49.

A Priedas

Terminai

Naudojamų terminų paaiškinimas:

Terminas	*Reikšmė*
egzogeninis	primestas sistemai iš išorės (exogenous)
endogeninis	kylantis iš veikiančios sistemos vidaus (endogenous)
ex ante	numatomas iš anksto (prieš įvykį – iš lotynų)

Lietuviškai	*Angliškai*
gėrybės	goods
naudingumo funkcija	utility function
neapibrėžtis	uncertainty
indiferentiškumo kreivė (aibė)	indiference curve (set)
preferencijos	preferences
prekė	commodity
turtas	wealth
(ekonomikos) subjektas	(economic) agent

Simbolis	*Jo reikšmė*
$A := B$ arba $B =: A$	B apibrėžia A
$\Rightarrow$	implikacija; jei ..., tai ...
$\Leftrightarrow$	tada ir tik tada, kai
$\forall$	kiekvienam
$\exists$	egzistuoja
$\succeq$	preferencija
$A + B$	aibių A ir B sudėtis (1.21)

$\varnothing$	tuščia aibė
$\mathbb{N}$	$\{0, 1, 2, \dots\}$ naturaliųjų skaičių aibė
$\mathbb{N}_+$	$\mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, \dots\}$
$\mathbb{Z}$	$\{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ sveikųjų skaičių aibė
$\mathbb{Z}_+$	$\mathbb{Z} \setminus \{0\}$
$\mathbb{Q}$	racionaliųjų skaičių aibė
$\mathbb{R}$	realiųjų skaičių aibė
$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\mathbb{R}^\ell_+$	$\{x \in \mathbb{R}^\ell \colon\ x \geq 0\}$
$\mathbb{R}^\ell_{++}$	$\{x \in \mathbb{R}^\ell \colon\ x > 0\}$
$B(p, w)$	biudžeto aibė
$D(p, w)$	paklausos aibė
$R(x, \epsilon)$	atviras rutulys

Sutrumpinimas	*Jo reikšmė*
BP	bendroji pusiausvyra
SAPA	silpnoji atskleistosios preferencijos aksioma

Literatūra

1. C. D. Aliprantis, D. J. Brown and O. Burkinshaw, *Existence and Optimality of Competitive Equilibria*. Springer, Berlin, 1990.

2. K. J. Arrow and F. J. Hahn, *General Competitive Analysis*. Holden Day, San Francisco, 1971.

3. Y. Balasko, *Foundations of the Theory of General Equilibrium*. Academic Press, 1988.

4. C. Berge, *Espaces topologiques, fonctions multivoques*. Paris, Dunod, 1962. Vertimas: *Topological Spaces. Including a Treatment of Multi-Valued Functions, Vector Spaces and Convexity*. Oliver & Boyd, Edinburgh and London, 1963. Perspausdinta: Dover Publications, 1997.

5. O. Blanchard, *Makroekonomika*. Vertimas iš anglų kalbos, Tyto Alba, 2007.

6. K. C. Border, *Fixed point theorems with applications to economics and game theory*. Cambridge University Press, 1985.

7. G. Callahan, *Economics for Real People: An Introduction to the Austrian School*. Mises Institute, US, 2002.

8. Calzi, M. Li and A. Basile. *Economists and Mathematics from 1494 to 1969. Beyond the Art of Accounting*. [11, p. 95-107]

9. G. Debreu, *Theory of Value. An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium*. Yale University Press, 1959.

10. G. Debreu, *Mathematical Economics*. Cambridge University Press, 1983.

11. M. Emmer, (Editor), *Mathematics and Culture I*. Springer, 2004.

12. J. R. Hicks, *Value and Capital*. Clarendon Press, Oxford, 1939.

13. W. Hildenbrand and A. P. Kirman, *Introduction to Equilibrium Analysis. Variations on themes by Edgeworth and Walras.* North-Holand Publishing Company, Amsterdam, 1976.

14. E. K. Hunt, *History of Economic Thought. A Critical Perspective*. Updated Second Edition. M. E. Sharpe, USA, 2002.

15. B. Ingrao and G. Israel, *The Invisible Hand. Economic Equilibrium in the History of Science*. MIT, Cambridge, 1990.

16. S. Keen, *Debunking Economics. The Naked Emperor of the Social Sciences*. Pluto Press, Australia, 2001.

17. J. M. Keynes, *The General Theory of Employment, Interest and Money*. Great Minds Series. Prometheus Books, New York, 1997 (originally published by Harcourt, Brace & World, New York, 1936).

18. A. Mas-Colell, *The Theory of General Economic Equilibrium. A Differential Approach.* Cambridge University Press, 1985.

19. A. Mas-Colell, M. D. Whinston and J. R. Green, *Microeconomic Theory*. Oxford University Press, 1995.

20. L. W. Mckenzie, *Classical General Equilibrium Theory*. The MIT press, 2002.

21. J. von Neumann and O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University press, 1944.

22. P. C. Nicola, *Mainstream Mathematical Economics in the* 20*th Century*. Springer, 2000.

23. G. Owen, *Game Theory*. Third Edition. Academic Press, 2001.

24. V. Pareto, *Manuel d'Economie Politique*. Paris, 1909. Perspausdinta: Droz, Geneva, 1966.

25. A. Rubinstein, *Lecture Notes in Microeconomic Theory. The Economic Agent.* Princeton University Press, Princeton, 2006.

26. P. Samuelson, *Foundations of Economic Analysis*. Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1947.

27. H. E. Scarf (with the collaboration of T. Hansen), *The Computation of Economic Equilibria*. Yale University Press, New Haven, 1973.

28. J. B. Shoven and J. Whalley, *Applying General Equilibrium*. Cambridge University Press, 1992.

29. A. Smith, *Tautų turtas*. Vertimas iš anglų kalbos, Margi raštai, 2004.

30. B. P. Stigum, *Econometrics and the Philosophy of Economics. Theory-Data Confrontations in Economics.* Princeton University Press, 2003.

31. H. Stretton, *Economics: A New Introduction*. Revised edn. Pluto Press, London, 2000.

32. H. R. Varian, *Microeconomic Analysis*. 3rd ed. Norton, New York 1992.

33. L. Walras, *Éléments d'économie politique pure*. Pichon et Durand-Auzias (1952), Paris, 1900. Vertimas į anglų kalbą: *Elements of Pure Economics*, Irwin, Homewood, 1954.

34. E. R. Weintraub, *How Economics Became a Mathematical Science*. Duke University Press, 2002.