MATEMATINĖ EKONOMIKA

Egzamino 2007.01.08 klausimai

Rimas Norvaiša

E-paštas: norvaisa @ktl.mii.lt

Vilnius, 2006 gruodis

1 Klausimai egzaminui 2007.01.08

Teorija. Atsakant į kiekvieną klausimą, būtina suformuluoti naudojamų sąvokų apibrėžimus.

1. Tegul $X \subset \mathbb{R}^\ell_+$ ir $(p, w) \in \mathbb{R}^{\ell+1}_+$. Įrodyti, kad biudžeto aibė $\beta(p, w)$ yra

   (a) iškila jei X iškila;

   (b) uždara jei X uždara;

   (c) aprėžta jei arba X aprėžta arba $p > 0$.

   Įrodyti, kad β yra nulinės eilės teigiamai homogeniška atitiktis iš $\mathbb{R}^{\ell+1}_+$ į X.

2. Sakykime, kad $X \subset \mathbb{R}^\ell_+$ yra kompakti vartojimo aibė. Įrodyti, kad biudžeto atitiktis β iš $\mathbb{R}^{\ell+1}_+$ į X yra tolydi iš išorės aibėje $\mathbb{R}^{\ell+1}_+$.

3. Sakykime, kad $X \subset \mathbb{R}^\ell_+$ yra iškila vartojimo aibė ir $(p, w) \geq 0$ yra tokia kainos-turto būsena, kad $\inf\{p \cdot x \colon x \in X\} < w$. Įrodyti, kad biudžeto atitiktis β iš $\mathbb{R}^{\ell+1}_+$ į X yra tolydi iš vidaus būsenoje (p, w).

4. Kokiais atvejais vartotojo optimalaus pasirinkimo iš biudžeto aibės problema turi sprendinį? Atsakant teiginius įrodyti.

5. Kokiais atvejais vartotojo optimalaus pasirinkimo iš biudžeto aibės problema turi vienintelį sprendinį? Atsakant teiginius įrodyti.

6. Sakykime, kad Walraso paklausos atitiktis D yra apibrėžta iš aibės $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^{\ell+1}_+$ į $X \subset \mathbb{R}^\ell_+$. Įrodyti, kad galioja (a), (b) ir (c); čia

   (a) D yra nulinės eilės teigiamai homogeniška atitiktis;

   (b) jei gėrybių laukas $(X, \succeq)$ yra lokaliai nepasotinamas, tai su kiekviena kainos–turto būsena $(p, w) \in \mathcal{D} \cap \mathbb{R}^{\ell+1}_{++}$ galioja Walraso dėsnis: $p \cdot x = w$ su kiekvienu $x \in D(p, w)$;

   (c) jei gėrybių laukas $(X, \succeq)$ yra iškilas, tai aibė $D(p, w)$ yra iškila su kiekviena kainos-turto būsena $(p, w) \in \mathcal{D} \cap \mathbb{R}^{\ell+1}_{++}$.

7. Sakykime, kad vartojimo aibė $X \subset \mathbb{R}^\ell_+$ yra kompaktas ir gėrybių laukas $(X, \succeq)$ yra tolydus. Įrodyti, kad Walraso paklausos atitiktis D yra apibrėžta ir tolydi iš išorės aibėje $\mathbb{R}^{\ell+1}_{++}$.

8. Sakykime, kad vartojimo aibė $X \subset \mathbb{R}^\ell_+$ yra iškilas kompaktas, o gėrybių laukas $(X, \succeq)$ yra lokaliai nepasotinamas ir išreiškiamas tolydžiąja naudingumo funkcija u. Įrodyti, kad aibėje $\mathbb{R}^{\ell+1}_{++}$ apibrėžta netiesioginė naudingumo funkcija $v = u \circ D$ yra tolydi ir kvaziiškila.

9. Suformuluoti ir paaiškinti grynųjų mainų rinkos modelį ir grynųjų mainų problemą.

10. Tarkime, kad funkcija $\zeta\colon\ S^{\ell-1} \to \mathbb{R}^\ell$ yra tolydi ir su kiekvienu $p \in S^{\ell-1}$, $p{\cdot}\zeta(p) = 0$. Įrodyti, jog egzistuoja toks $p^* = (p_h^*) \in S^{\ell-1}$, kad $\zeta(p^*) \leq 0$ ir $\zeta_h(p^*) = 0$ jei $p_h^* = 0$ (2.2 teorema).

11. Sakykime, kad $\mathcal{E} = (\{X, \succeq_i, e_i\}, \mathbb{R}^\ell_{++})$ rinkai galioja (a), (b) ir (c), čia

    (a) vartojimo aibė $X \subset \mathbb{R}^\ell_+$ yra kompakti ir iškila;

    (b) su kiekvienu $i = 1, \ldots, n$, gėrybių laukas $(X, \succeq_i)$ yra griežtai iškilas, lokaliai nepasotinamas ir tolydus;

    (c) su kiekvienu $i = 1, \ldots, n$, $0 \neq e_i \geq 0$ yra pradinis įnašas.

    Įrodyti, kad VPP funkcija ζ yra apibrėžta aibėje $\mathbb{R}^\ell_{++}$, tolydi, nulinės eilės teigiamai homogeninė ir jai teisingas Walras'o dėsnis.

12. Sakykime, kad $Y \subset \mathbb{R}^\ell$ yra gamybos aibė ir kūgyje $P \subset \mathbb{R}^\ell_+$ yra apibrėžta pelno funkcija π_Y. Įrodyti, jog pasiūlos atitiktis S_Y yra nulinės eilės teigiamai homogeninė, o pelno funkcija π_Y yra:

    (a) pirmos eilės teigiamai homogeninė;

    (b) iškila jei P yra iškila aibė;

    (c) tolydi iš apačios.

13. Įrodyti: jei gamybos aibė $Y \subset \mathbb{R}^\ell$ yra netuščias kompaktas, tai pelno funkcija π_Y yra apibrėžta ir tolydi aibėje $\mathbb{R}^\ell_{++}$.

14. Sakykime, kad U ir V yra euklidinių erdvių poaibiai, V yra kompaktas, $f\colon\ U \times V \to \mathbb{R}$ yra tolydi funkcija ir γ yra tolydi atitiktis iš U į V. Įrodyti, kad lygybe

$$\mu(u) := \{v \in \gamma(u)\colon\ f(u,v) = \sup_{z \in \gamma(u)} f(u,z)\} \neq \emptyset, \qquad u \in U.$$

    apibrėžta atitiktis μ yra tolydi iš išorės aibėje U.

15. Sakykime, kad su kiekvienu $i \in \mathcal{N}$, V_i yra netuščias, kompaktus ir iškilas euklidinės erdvės poaibis, funkcija $f_i\colon\ U_i \times V_i \to \mathbb{R}$ yra tolydi ir kvazi-įgaubta pagal antrąjį argumentą, o atitiktis γ_i iš U_i į V_i yra tolydi, iškila ir kompakti. Įrodyti, jog egzistuoja Debreu socialinės sistemos $\{V_i, f_i, \gamma_i\}_{i \in \mathcal{N}}$ pusiausvyra.

16. Tarkime, kad $\mathcal{E} = (\{X_i, \succeq_i, e_i\}, \{\theta_{ij}\}, \{Y_j\}, P)$ yra tokia Arrow-Debreu ekonomika , kad

    (a) su kiekvienu $i \in \{1, \ldots, n\}$, aibė $X_i \subset \mathbb{R}^\ell_+$ yra netuščia, iškila, kompakti ir egzistuoja toks $\tilde{x}_i \in X_i$, kad $\tilde{x}_i < e_i$;

    (b) su kiekvienu $i \in \{1, \ldots, n\}$, gėrybių laukas $(X_i, \succeq_i)$ yra tolydus, iškilas ir lokaliai nepasotinamas;

    (c) su kiekvienu $j \in \{1, \ldots, m\}$, gamybos aibė $Y_j \subset \mathbb{R}^\ell$ yra iškila, kompakti ir $0 \in Y_j$;

(d) $P \subset \mathbb{R}^\ell_+ \setminus \{0\}$ yra kūgis.

Tada Arrow-Debreu ekonomika $\mathcal{E}$ yra Debreu socialinė sistema turinti pusiausvyrą.

17. Tarkime, kad $\mathcal{E} = (\{X_i, \succeq_i, e_i\}, \{\theta_{ij}\}, \{Y_j\}, P)$ yra tokia Arrow-Debreu ekonomika , kad

    (a) su kiekvienu $i \in \{1, \ldots, n\}$, aibė $X_i \subset \mathbb{R}^\ell_+$ yra netuščia, iškila, kompakti ir egzistuoja toks $\tilde{x}_i \in X_i$, kad $\tilde{x}_i < e_i$;

    (b) su kiekvienu $i \in \{1, \ldots, n\}$, gėrybių laukas $(X_i, \succeq_i)$ yra tolydus, iškilas ir lokaliai nepasotinamas;

    (c) su kiekvienu $j \in \{1, \ldots, m\}$, gamybos aibė $Y_j \subset \mathbb{R}^\ell$ yra iškila, kompakti ir $0 \in Y_j$;

    (d) $P \subset \mathbb{R}^\ell_+ \setminus \{0\}$ yra kūgis.

    Įrodyti (f) teiginį naudojantis (e) teiginio įrodyme gauta pusiausvyra, čia

    (e) Arrow-Debreu ekonomika $\mathcal{E}$ yra Debreu socialinė sistema turinti pusiausvyrą;

    (f) egzistuoja tokia Arrow-Debreu ekonomikos $\mathcal{E}$ pusiausvyros būsena $((x_i^*), (y_j^*), p^*)$, kad jos visuminės perteklinės paklausos kaina $p^* \cdot Z((x_i^*), (y_j^*)) = 0$.

Uždaviniai:

1. Sakykime, kad $X = \{x, y, z\}$, $\mathcal{B} = \{\{x, y\}, \{x, y, z\}\}$ ir $C(\{x, y\}) = \{x\}$. Rasti visus tuos pasirinkimus iš X, kuriems esant pasirinkimo struktūrai $(\mathcal{B}, C(\cdot))$ galioja SAPA.

2. Pasirinkimo struktūrai $(\mathcal{B}, C(\cdot))$ galioja SAPA tada ir tik tada, kai galioja savybė: sakykime, kad $B, B' \in \mathcal{B}$ ir $x, y \in B \cap B'$; jei $x \in C(B)$ ir $y \in C(B')$ tai $\{x, y\} \subset C(B)$ ir $\{x, y\} \subset C(B')$.

3. Sakykime, kad $(\mathcal{B}, C(\cdot))$ yra alternatyvų aibės X pasirinkimo struktūra. Apibrėžkime du atskleistus griežtos preferencijos sąryšius:

$$\begin{aligned} x \succ^* y \quad &\iff \quad x \succeq^* y \quad \text{ir} \quad \neg[\, y \succeq^* x \,]; \\ x \succ^{**} y \quad &\iff \quad [\, \exists\, B' \in \mathcal{B} \,]: \quad x, y, \in B', \quad x \in C(B') \quad \text{ir} \quad y \notin C(B'). \end{aligned}$$

   Įrodyti, kad preferencijos sąryšiai $\succ^*$ ir $\succ^{**}$ sutampa jei pasirinkimo struktūrai $(\mathcal{B}, C(\cdot))$ galioja SAPA.

4. Tegul $\psi\colon\ S \to T$ yra funkcija. Įrodyti, kad ji yra tolydi taške tada ir tik tada, kai ji yra tolydi iš išorės tame taške (kaip atitiktis).

5. Sakykime, kad $(\mathbb{R}^2_+, \succeq)$ yra tobulųjų pakaitalų gėrybių laukas, apibrėžtas naudingumo funkcija $u(x) = x_1 + x_2$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+$. Rasti paklausos aibę $D(p, w)$, $(p, w) \in \mathbb{R}^3_{++}$.

6. Sakykime, kad $(\mathbb{R}^2_+, \succeq)$ yra tobulųjų papildinių gėrybių laukas, apibrėžtas naudingumo funkcija $u(x) = \min\{x_1, x_2\}$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+$. Rasti paklausos aibę $D(p, w)$, $(p, w) \in \mathbb{R}^3_{++}$.

7. Tarkime, kad $(\mathbb{R}^2_+, \succeq)$ yra gėrybių laukas apibrėžtas Cobbo-Douglaso naudingumo funkcija
$$u(x) = x_1^{\epsilon} x_2^{1-\epsilon}, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+, \quad 0 < \epsilon < 1.$$
Rasti paklausos aibę $D(p, w)$, $(p, w) \in \mathbb{R}^3_{++}$.

8. Parodyti, kad CES naudingumo funkcija
$$u(x) = \left[a x_1^{\rho} + b x_2^{\rho} \right]^{1/\rho}, \qquad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+$$
apibrėžtas alternatyvų laukas $(\mathbb{R}^2_+, \succeq)$ yra tolydus, stipriai monotoninis, lokaliai nepasotinamas.

9. Parodyti, kad CES naudingumo funkcija
$$u(x) = \left[a x_1^{\rho} + b x_2^{\rho} \right]^{1/\rho}, \qquad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+$$
apibrėžtas alternatyvų laukas $(\mathbb{R}^2_+, \succeq)$ yra griežtai iškilas kai $0 < \rho < 1$.

10. Tarkime, kad $(\mathbb{R}^2_+, \succeq)$ yra gėrybių laukas apibrėžtas CES naudingumo funkcija
$$u(x) = \left[a x_1^{\rho} + b x_2^{\rho} \right]^{1/\rho}, \qquad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+.$$
Rasti paklausos aibę $D(p, w)$, $(p, w) \in \mathbb{R}^3_{++}$.

11. Tarkime, kad $v(p, w)$, $(p, w) \in \mathbb{R}^{\ell+1}_{++}$ yra netiesioginė naudingumo funkcija ir $p = (p_h) \in \mathbb{R}^{\ell}_{++}$. Įrodyti, kad ji yra nedidėjanti atžvilgiu $p_h > 0$ ir nemažėjanti atžvilgiu $w > 0$.

12. Tarkime, kad $v(p, w)$, $(p, w) \in \mathbb{R}^{\ell+1}_{++}$ yra netiesioginė naudingumo funkcija. Įrodyti, kad ji yra nulinės eilės teigiamai homogeninė.

13. Grynųjų mainų rinka sudaryta iš dviejų vartotojų su naudingumo funkcijomis ir pradiniais įnašais:
$$u_1(x) = x_1^a x_2^{1-a}, \quad 0 < a < 1, \quad e_1 = (1, 0)$$
$$u_2(x) = x_1^b x_2^{1-b}, \quad 0 < b < 1, \quad e_2 = (0, 1).$$
Rasti Walraso pusiausvyrą.

14. Grynųjų mainų rinka sudaryta iš dviejų vartotojų su naudingumo funkcijomis ir pradiniais įnašais:
$$u_1(x) = a \ln x_1 + (1 - a) \ln x_2, \quad e_1 = (0, 1)$$
$$u_2(x) = \min\{x_1, x_2\}, \quad e_2 = (1, 0),$$
čia $0 < a < 1$. Rasti Walraso pusiausvyrą.

15. Tarkime, kad gamybos funkcija $f(x) = x^a$, $x \geq 0$ ir $a > 0$. Kokiems a apibrėžtos išteklių paklausos funkcija ξ, pelno funkcija π ir rasti jas.

16. Tarkime, kad gamybos funkcija $f(x) = a \ln x_1 + b \ln x_2$, $x = (x_1, x_2) > 0$ ir $a, b > 0$. Kokiems a ir b apibrėžtos išteklių paklausos funkcija ξ, pelno funkcija π ir rasti jas.

17. Tarkime, kad gamybos funkcija $f(x) = \min\{x_1, x_2\}^a$, $x = (x_1, x_2) \geq 0$, $a > 0$. Kokiems a apibrėžtos išteklių paklausos funkcija ξ, pelno funkcija π ir rasti jas.