4 paskaita

4.1 Bero teorema apie kategorijas

Šiame skyrelyje įrodysime vieną iš kertinių funkcinės analizės rezultatų – Bero teoremą apie kategorijas. Tikrąją jos reikšmę galėsime įvertinti kiek vėliau. Šiame skyrelyje, kaip pritaikymo pavyzdį, įrodysime niekur nediferencijuojamos tolydžios funkcijos egzistavimą. Pirmasis tokią funkciją sukonstravo K. T. V. Vejerštrasas. Taikydami Bero teoremą iš tiesų sužinosime dar daugiau: tarp visų tolydžiųjų funkcijų, niekur nediferencijuojamos sudaro „daugumą“.

4.1.1 Tirštosios aibės

Nagrinėsime metrinę erdvę $(\mathbb{X}, d)$.

4.1 apibrėžimas. *Tarkime, $A, B \subset \mathbb{X}$. Aibė A yra tiršta aibėje B, jei*

$$[A] \supset B.$$

Jei

$$[A] = \mathbb{X},$$

tai sakome, kad aibė A yra visur tiršta.

Remiantis aibės uždarinio apibrėžimu, aibė A tiršta aibėje B (atitinkamai visur tiršta), jei aibės B (atitinkamai $\mathbb{X}$) elementus galime kaip norime tiksliai aproksimuoti aibės A elementais, t.y., kokį beparinktume $\varepsilon > 0$, kiekvieną $x \in B$ (atitinkamai $x \in \mathbb{X}$) atitiks toks $x_\varepsilon \in A$, kad

$$d(x, x_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Taigi aibės tirštumas iš esmės reiškia galimybę vienos aibės elementus bet kuriuo pasirinktu tikslumu aproksimuoti kitais, galbūt paprastenės struktūros elementais. Kaip gerai žinome, kokį beparinktume $\varepsilon > 0$, kiekvienam realiajam skaičiui a rasime tokį racionalųjį skaičių r, kad $|a-r| < \varepsilon$. Metrinių erdvių terminais, metrinės erdvės $\mathbb{R}$ racionaliųjų skaičių aibė $\mathbb{Q}$ yra visur tiršta. Panagrinėkime kiek sudėtingesnius pavyzdžius.

4.1 pavyzdys. Skaitinė seka (x_n) vadinama *finičiąja*, jei jos nelygių nuliui elementų skaičius yra baigtinis. Visų finičiųjų sekų aibę pažymėkime $\mathcal{F}$.

4.1 teiginys. *Finičiųjų sekų aibė $\mathcal{F}$ yra visur tiršta kiekvienoje iš erdvių ℓ_p, $p \geq 0$ ir c_0.*

Įrodymas. Pirmiausia įrodykime, kad $\mathcal{F}$ yra visur tiršta erdvėje ℓ_p. Tegu $\boldsymbol{x} = (x_n) \in \ell_p$ ir $\varepsilon > 0$. Parinkime tokį $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, kad

$$\sum_{k=n_\varepsilon+1}^{\infty} |x_k|^p \leq \begin{cases} \varepsilon^p, & \text{kai } \ p \geq 1, \\ \varepsilon, & \text{kai } \ 0 < p < 1. \end{cases}$$

Apibrėžkime $\boldsymbol{x}_\varepsilon = (x_1, \dots, x_{n_\varepsilon}, 0, 0, \dots) \in \mathcal{F}$. Kadangi

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_\varepsilon) = \begin{cases} \left(\sum_{k=n_\varepsilon+1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p}, & \text{kai } p \geq 1, \\ \sum_{k=n_\varepsilon+1}^{\infty} |x_k|^p, & \text{kai } \ 0 < p < 1 \end{cases} < \varepsilon,$$

tai $[\mathcal{F}] = \ell_p$.

Erdvės c_0 atveju, kiekvienam $\boldsymbol{x} = (x_n) \in c_0$ parenkame tokį n_ε, kad

$$\max_{k \geq n_e+1} |x_k| < \varepsilon.$$

Toks n_ε egzistuoja, nes $\boldsymbol{x} \in c_0$ tada ir tik tada, kai $\lim_{n\to\infty} \max_{k\geq n} |x_k| = 0$. Imdami elementą $\boldsymbol{x}_\varepsilon = (x_1, \dots, x_{n_\varepsilon}, 0, \dots) \in \mathcal{F}$, turime

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_\varepsilon) = \max_{k \geq n_\varepsilon+1} |x_k| < \varepsilon.$$

Taigi $[\mathcal{F}] = c_0$. ∎

Nesunku įsitikinti, kad finičiųjų sekų aibė nėra tiršta erdvėje ℓ_∞. Tikrai, paėmę vienetukų seką $\boldsymbol{x} = (1, 1, \dots)$, matome, kad

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sup_{j \geq 1} |1 - y_j| \geq 1$$

su kiekviena finičiąja seka $\boldsymbol{y}$.

4.2 pavyzdys. Šiame pavyzdyje performuluosime analizėje gerai žinomą Vejerštraso teoremą, kuri tvirtina, kad kiekvieną tolydžiąją uždarame intervale funkciją galime kaip norime tiksliai tolygiai aproksimuoti polinomu. Tai labai svarbus rezultatas, nes polinomai pilnai aprašomi savo koeficientais, taigi turi labai paprastą parametrinę formą.

Visų polinomų aibę pažymėkime $\mathcal{P}$.

4.1 teorema. (Vejerštraso.) *Polinomų aibė $\mathcal{P}$ yra visur tiršta tolydinių funkcijų erdvėje $\mathcal{C}[a,b]$.*

4.3 pavyzdys. Šiame pavyzdyje paminėsime svarbias Lebego erdvių visur tirštas aibes. Prisiminę Lebego integralo apibrėžimą, galime nesunkiai numanyti, kad vienos svarbiausių čia yra laiptinių funkcijų aibės. Paprastumo dėlei nagrinėkime erdves $L_p(0,1)$. Bendrą atvejį siūlome išnagrinėti vietoj pratimo.

Apibrėžkime funkcijas $\lambda_{nk} : (0,1) \to \mathbb{R}$:

$$\lambda_{nk}(t) = \begin{cases} 1, & \text{jei } \ k/n \le t < (k+1)/n, \\ 0 & \text{kitur,} \end{cases} \tag{4.1}$$

kai $k = 0, 1, \ldots, n-1$; $\quad n = 1, 2, \ldots$ Nagrinėkime aibę $\mathcal{A}$, kurią sudaro laiptinės funkcijos atitinkančios intervalo $(0,1)$ skaidinį vienodo ilgio intervalais, t.y.

$$\mathcal{A} = \Big\{ \sum_{k=0}^{n-1} a_{nk}\lambda_{nk} : \quad a_{nk} \in \mathbb{R}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1, \quad n \in \mathbb{N} \Big\}.$$

Šis rezultatas yra gerai žinomas Lebego integralo teorijoje.

4.2 teiginys. *Aibė $\mathcal{A}$ yra visur tiršta kiekvienoje iš erdvių $L_p(0,1), p \ge 1$.*

4.3 teiginys. *Tolydžiųjų funkcijų aibė yra visur tiršta kiekvienoje iš erdvių $L_p(0,1), 1 \le p < \infty$.*

Įrodymas. Atsižvelgus į 4.2 teiginį, pakanka išnagrinėti funkciją

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{kai } \ \alpha \le t \le \beta, \\ 0, & \text{kitur,} \end{cases}$$

kai $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$. Tegu tolydi funkcija f_ε yra lygi 1, kai $\alpha \leq t \leq \beta$; nuliui, kai $0 \leq t < \alpha - (\varepsilon/4)^p$ arba $\beta + (\varepsilon/4)^p \leq t \leq 1$; kitur yra tiesinė. Pagal konstrukciją,

$$d^p(f, f_\varepsilon) = \int_a^b |f(t) - f_\varepsilon(t)|^p dt \leq 2(\varepsilon/4)^p \leq (\varepsilon/2)^p.$$

■

4.1 išvada. *Polinomų aibė $\mathcal{P}$ yra visur tiršta kiekvienoje erdvėje $L_p(0,1), 1 \leq p < \infty$.*

Įrodymas. Tegu $\varepsilon > 0$ ir f_ε yra tokia tolydi funkcija, kad $d(f, f_\varepsilon) < \varepsilon/2$. Kadangi funkcija f_ε tolydi, remiantis Vejerštraso teorema, egzistuoja toks polinomas p, kad

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} |f_\varepsilon(t) - p(t)| \leq \varepsilon/2.$$

Taigi ir

$$d(f_\varepsilon, p) = \Big(\int_0^1 |f_\varepsilon(t) - p(t)|^p dt \Big)^{1/p} \leq \varepsilon/2.$$

Pritaikę trikampio nelygybę, gauname

$$d(f, p) \leq d(f, f_\varepsilon) + d(f_\varepsilon, p) \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

■

4.1.2 Pirmosios kategorijos aibės

Pirmiausia apibrėšime niekur netirštąsias aibes.

4.2 apibrėžimas. *Aibė $A \subset \mathbb{X}$ vadinama niekur netiršta erdvėje $\mathbb{X}$, jei kiekviename erdvės $\mathbb{X}$ uždarajame rutulyje B yra kitas rutulys $B' \subset B$, kuris su aibe A neturi bendrų taškų: $A \cap B' = \emptyset$.*

Kitaip tariant, aibė yra niekur netiršta, jei ji nėra tiršta jokiame uždarajame rutulyje. Kartais patogu naudotis ir kitais, ekvivalenčiais niekur netirštos aibės apibrėžimais.

4.4 teiginys. *Šie teiginiai ekvivalentūs:*

1) *aibė $A \subset \mathbb{X}$ niekur netiršta;*

2) *aibės A uždarinio vidus tuščias, t.y.* $\overset{\circ}{[A]} = \emptyset$;

3) *aibės A uždarinio papildymas visur tirštas, t.y.* $[[A]^c] = \mathbb{X}$.

Įrodymas. (1) $\Longrightarrow$ (2). Tarkime, aibė A niekur netiršta. Jei egzistuoja $x \in \overset{\circ}{[A]}$, tai atsiras toks $\varepsilon > 0$, kad $B_\varepsilon(x) \subset [A]$. Įsitikinkime, kad rutulyje $B_\varepsilon(x)$ nėra jokio rutulio, neturinčio bendrų taškų su aibe A. Tikrai, jei $y \in B_\varepsilon(x)$, tai y yra aibės A ribinis taškas. Vadinasi, kokį $\tau > 0$ bepaimtume,

$$S_\tau(y) \cap A \neq \emptyset.$$

Taigi radome tokį uždarą rutulį $B_\varepsilon(x)$, kuriame nėra jokio rutulio neturinčio bendrų taškų su aibe A. Gauta prieštara rodo, kad elementų aibėje $\overset{\circ}{[A]}$ nėra, t.y. $\overset{\circ}{[A]} = \emptyset$.
(2) $\Longleftrightarrow$ (3). Išplaukia iš **??** teiginio.
(2) $\Longrightarrow$ (1). Tarkime, $\overset{\circ}{[A]} = \emptyset$ ir $B \subset \mathbb{X}$ bet kuris uždarasis rutulys. Tegu $y \in B$. Kadangi y nėra aibės $[A]$ vidinis taškas, kiekviename rutulyje $S_\tau(y)$ egzistuoja $z \in S_\tau(y) \backslash [A]$. Bet aibė $S_\tau(y) \backslash [A]$ yra atvira. Todėl atsiras toks $\tau' > 0$ su kuriuo $S_{\tau'}(z) \subset S_\tau(y) \backslash [A]$. O tai reiškia, kad $S_{\tau'}(z) \cap A = \emptyset$. ∎

Pavyzdžiui, aibė $A = \{1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots\}$ yra niekur netiršta erdvėje $\mathbb{R}$, nes tarp bet kurių dviejų gretimų jos taškų $1/n, 1/(n+1)$ visada galime patalpinti uždarą intervalą $[a, b]$, $1/n < a < b < 1/(n+1)$, kuriame aibės A taškų nėra. Nesunku įsitikinti, kad baigtinio skaičiaus niekur netirštų aibių sąjunga yra niekur netiršta. Tačiau skaičiai sąjungai tai nebūtinai teisinga. Pavyzdžiui, racionaliųjų skaičių aibės $\mathbb{Q}$ elementus galime sunumeruoti $\mathbb{Q} = \{r_1, r_2, \dots\}$, todėl

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \{r_j\}.$$

Bet aibė sudaryta iš vieno skaičiaus niekur netiršta. Taigi aibę $\mathbb{Q}$ galime užrašyti skaičia niekur netirštų aibių sąjunga. Kita vertus, aibė $\mathbb{Q}$ yra visur tiršta. Taigi turi prasmę šis apibrėžimas.

4.3 apibrėžimas. *Aibė $A \subset \mathbb{X}$ vadinama pirmosios kategorijos, jei ji yra skaiti niekur netirštų aibių sąjunga. Priešingu atveju, aibė A vadinama antrosios kategorijos.*

Metrinės erdvės aibes į kategorijas suskirstė R. L. Beras, taip atskirdamas „retas“ („liesas“) aibes nuo „neretų“ („riebių“). Paminėsime keletą savybių, susijusių su aibių kategorija, jų įrodymus palikdami skaitytojui vietoj pratimo.

(1) Jei aibė $B \subset \mathbb{X}$ – pirmosios kategorijos ir $A \subset B$, tai aibė A taip pat pirmosios kategorijos;

(2) skaiti pirmosios kategorijos aibių sąjunga – pirmosios kategorijos;

(3) jei $C = A \cup B$ ir aibė A yra pirmosios kategorijos, o aibė C – antrosios, tai antrosios kategorijos yra ir aibė B.

(4) uždaroji aibė su tuščiu vidumi – pirmosios kategorijos;

(5) jei $T : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ – homeomorfizmas, tai su bet kuria aibe $A \subset \mathbb{X}$, abi aibės A ir $T(A)$ yra tos pačios kategorijos.

Akivaizdu, kad tuščia aibė yra pirmosios kategorijos. Kaip jau žinome, racionaliųjų skaičių aibė $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ yra pirmosios kategorijos. Netrukus įsitikinsime, kad realiųjų skaičių aibė $\mathbb{R}$ yra antrosios kategorijos. Atsižvelgę į tai ir į (3) savybę, gauname, kad iracionaliųjų skaičių aibė taip pat antrosios kategorijos. Bero prasme, racionalieji skaičiai realiųjų skaičių aibėje sudaro mažumą.

Panagrinėkime dar keletą pavyzdžių.

4.4 pavyzdys. Aibė $L_2(0,1)$ yra erdvės $L_1(0,1)$ pirmosios kategorijos aibė.

Norėdami tai įrodyti, nagrinėkime erdvės $L_1(0,1)$ aibes

$$A_k = \{f \in L_1(0,1) : \int_0^1 f^2(t)dt \le k^2\}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Kadangi

$$L_2(0,1) = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k,$$

pakanka įsitiktinti, kad aibės $A_k, k = 1, 2, \ldots$ niekur netirštos erdvėje $L_1(0,1)$. Pasinaudosime vienu iš ekvivalenčių niekur netirštos aibės apibrėžimų. Būtent, įrodysime, kad su kiekvienu k aibė A_k uždara ir turi tuščią vidų. Fiksuokime k. Pirmiausia įrodykime, kad aibė A_k yra uždara. Tarkime, seka

$(f_n) \subset A_k$ konverguoja ir $f = \lim f_n$, t.y.

$$d(f_n, f) = \int_0^1 |f_n(t) - f(t)|dt \to 0, \quad \text{kai} \ \ n \to \infty.$$

Fiksuokime $a > 0$ ir pažymėkime $A(a) = \{t \in (0,1) : |f(t)| \leq a\}$. Nagrinėkime integralą

$$I(a) = \Big(\int_{A(a)} f^2(t)dt\Big)^{1/2}.$$

Su bet kuriuo $\varepsilon > 0$, pažymėję $T_\varepsilon = \{t \in (0,1) : |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon\}$ ir $T_\varepsilon^c = (0,1)\backslash T_\varepsilon$, turime

$$\begin{aligned}
&I(a) = \Big(\int_{A(a)\cap T_a} f^2(t)dt + \int_{A(a)\cap T_a^c} f^2(t)dt\Big)^{1/2} \leq \\
&\big[a^2 m\{t \in (0,1) : |f_n(t) - f(t)| \geq \varepsilon\}\big]^{1/2} + \\
&\Big(\int_{A(a)\cap T_\varepsilon} (f_n(t) - f(t))^2 dt\Big)^{1/2} + \Big(\int_{A(a)\cap T_\varepsilon} f_n^2(t)dt\Big)^{1/2} \leq \\
&a\varepsilon^{-1/2} d(f_n, f) + \varepsilon^{1/2} d(f_n, f) + k.
\end{aligned}$$

Kadangi $\varepsilon > 0$ laisvai pasirenkamas skaičius, iš gauto įverčio matome, kad

$$I(a) \leq k.$$

Skaičių a taip pat galime pasirinkti laisvai, todėl ir $\int_0^1 f^2(t)dt \leq k^2$. Taigi būtinai $f \in A_k$. Kadangi (f_n) - laisvai parinkta seka, tai aibė A_k uždara. Lieka įrodyti, kad jos vidus tuščias. Tegu $f \in A_k$. Nagrinėkime rutulį $S_\varepsilon(f) \subset L_1(0,1)$. Įrodysime, kad kiekviename tokiame rutulyje yra elementų nepriklausančių aibei A_k. Pakanka paimti funkciją

$$g_a(t) = f(t) + (\varepsilon/2)t^{-1/2}\chi\{a < t < 1\}, \quad 0 < a < 1.$$

Tikrai, $g_a \in L_1$ ir $d(g_a, f) = (\varepsilon/2)\int_a^1 t^{-1/2}dt = \varepsilon(1 - \sqrt{a}) < \varepsilon$. Bet

$$\begin{aligned}
&\Big(\int_0^1 g_a^2(t)dt\Big)^{1/2} \geq \\
&\Big(\int_a^1 (\varepsilon/2)^2 t^{-1} dt\Big)^{1/2} - \Big(\int_0^1 f^2(t)dt\Big)^{1/2} \geq \\
&(\varepsilon/2)\ln^{1/2}(1/a) - k.
\end{aligned}$$

Iš šio įverčio matome, kad pakankamai mažiems a, $g_a \notin A_k$.

4.5 pavyzdys. Erdvės ℓ_2 aibė ℓ_1 yra pirmosios kategorijos. Įrodymui nesunku modifikuoti ankstesnį pavyzdį. Paliekame tai skaitytojui vietoj pratimo.

4.1.3 Bero teorema

Ši teorema dažniausiai vadinama Bero teorema apie kategorijas.

4.2 teorema. *Pilna metrinė erdvė yra antrosios kategorijos aibė.*

Įrodymas. Tarkime, $\mathbb{X}$ yra pilna metrinė erdvė bet

$$\mathbb{X} = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

ir aibės $A_k, k \geq 1$, niekur netirštos. Pasirinkime vienetinio spindulio uždarą rutulį $B_1(a)$ su centru bet kuriame erdvės taške $a \in \mathbb{X}$. Kadangi aibė A_1 niekur netiršta, tai rasime tokį uždarą rutulį $B_{r_1}(a_1) \subset B_1(a)$, su spinduliu $r_1 < 1/2$, kuriame nėra aibės A_1 taškų. Lygiai taip pat, kadangi A_2 niekur netiršta, tai rasime rutulį $B_{r_2}(a_2) \subset B_{r_1}(a_1)$, su spinduliu $r_2 < 1/4$, kuriame nėra aibės A_2 taškų. Tęsdami šią konstrukciją gausime vienas į kitą įdėtų uždarų rutulių seką $B_{r_n}(a_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, kurių spinduliai $r_n < 2^{-n}, n = 1, 2, \ldots$, artėja į nulį. Be to, rutulyje $B_{r_n}(a_n)$, nėra nei vieno aibių $A_1, A_2, \ldots, A_n$ taško. Pritaikę **??** teoremą gauname, kad egzistuoja taškas $x_0 \in \mathbb{X}$, priklausantis visiems rutuliams, $x_0 \in B_{r_n}(a_n)$ su visais $n \in \mathbb{N}$. Kita vertus, taškas x_0 nepriklauso nei vienai iš aibių A_n, todėl

$$x_0 \notin \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \mathbb{X}.$$

Gauta prieštara įrodo teoremą. ■

4.2 išvada. *Pilnos metrinės erdvės pirmosios kategorijos aibės papildymas yra antrosios kategorijos aibė.*

4.2 Separabiliosios metrinės erdvės

Tarp realiųjų skaičių ypatingą vietą užima racionalieji. Jau žinome, kad racionaliųjų skaičių aibė $\mathbb{Q}$ yra visur tiršta erdvėje $\mathbb{R}$. Kita gera jos savybė – ji yra skaiti. Tos dvi racionaliųjų skaičių aibės savybės pasitarnavo apibrėžiant separabiliasias metrines erdves.

4.4 apibrėžimas. *Metrinė erdvė $\mathbb{X}$ vadinama separabiliąja, jei egzistuoja skaiti visur tiršta aibė $X_0 \subset \mathbb{X}$.*

Aibė $X_0 \subset \mathbb{X}$ vadinama separabiliąja, jei poerdvis X_0 yra separabilioji metrinė erdvė.

Erdvė $\mathbb{R}$ separabili, nes racionaliųjų skaičių aibė $\mathbb{Q}$ yra skaiti ir visur tiršta. Skaitytojui paliekame pačiam įsitikinti, kad erdvės $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ taip pat separabilios.

4.5 teiginys. *Erdvės ℓ_p, $0 < p < \infty$, c_0, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ separabilios.*

Įrodymas. Tegu $A_0 = \cup_{n=1}^{\infty} A_{0n}$, kai

$$A_{0n} = \{\boldsymbol{r} = (r_1, \dots, r_n, 0, \dots), r_i \in \mathbb{Q}, i = 1, \dots, n\}.$$

Kiekviena iš aibių $A_{0n}, n \in \mathbb{N}$ yra skaiti. Kaip skaiti skaičių aibių sąjunga, aibė A_0 skaiti (žr. **??** teiginį). Įrodysime, kad aibė A_0 visur tiršta kiekvienoje iš erdvių $\ell_p, 0 < p < \infty, c_0$ ir $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Pradėkime nuo erdvių $\ell_p, p \geq 1$. Imkime $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots) \in \ell_p$ ir $\varepsilon > 0$. Pirmiausia taip parinkime $N = N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, kad

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} |x_k|^p < \varepsilon^p/2.$$

Toliau taip parinkime $\boldsymbol{r}_\varepsilon \in A_{0N}$, $\boldsymbol{r}_\varepsilon = (r_{\varepsilon 1}, \dots, r_{\varepsilon N}, 0, \dots)$, kad

$$\sum_{k=1}^{N} |x_k - r_{\varepsilon k}|^p < \varepsilon^p/2.$$

Taip parinkę $\boldsymbol{r}_\varepsilon$, gauname

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{r}_\varepsilon) = \Big(\sum_{k=1}^{N} |x_k - r_{\varepsilon k}|^p + \sum_{k=N+1}^{\infty} |x_k|^p \Big)^{1/p} < \varepsilon.$$

Taigi $[A_0] = \ell_p$, kai $p \geq 1$.

Likusių erdvių separabilumą įrodome panašiai. Nagrinėjant erdvę c_0, reikia pastebėti, kad seka $\boldsymbol{x} = (x_n)$ konverguoja į nulį tada ir tik tada, kai $\lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} |x_k| = 0$. Todėl kiekvieną $\varepsilon > 0$ atitinka toks $N = N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, su kuriuo

$$\sup_{k\geq N} |x_k| < \varepsilon.$$

Lieka taip parinkti $\boldsymbol{r}_\varepsilon \in A_{0N}$, $\boldsymbol{r}_\varepsilon = (r_{\varepsilon 1}, \dots, r_{\varepsilon N}, 0, \dots)$, kad

$$\sup_{1\leq k\leq N} |x_k - r_{\varepsilon k}| < \varepsilon.$$

Tuomet ir

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{r}_\varepsilon) = \max\{\sup_{1\leq k\leq N} |x_k - r_{\varepsilon k}|, \sup_{k\geq N} |x_k|\} < \varepsilon.$$

Likusių erdvių $\ell_p, 0 < p < 1$ ir $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ separabilumą siūlome skaitytojui įrodyti pačiam. ∎

4.6 teiginys. *Erdvė ℓ_∞ neseparabili.*

Įrodymas. Sakykime, $M \subset \ell_\infty$ – aibė tokių sekų $\boldsymbol{x} = (x_n)$, kai kiekvienas x_n yra arba 0, arba 1. Akivaizdu, kad $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sup_{n\geq 1} |x_n - y_n| = 1$, jei $\boldsymbol{x} = (x_n) \neq \boldsymbol{y} = (y_n)$. Be to, aibė M yra kontinumo galios, nes kiekvieną seką $(x_n) \in M$ atitinka skaičius $x \in [0, 1]$, kurio dvejetainė išraiška yra seka (x_n). Jei tartumėme, kad ℓ_∞ separabili, tai egzistuotų skaiti ir visur tiršta aibė $A \subset \ell_\infty$. Tegu $A = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_n, \dots\}$. Paėmę $\varepsilon = 1/3$ turime, kad $\mathbb{X} = \cup_{k=1}^{\infty} S_{1/3}(\boldsymbol{x}_k)$. Kadangi rutulių $S_{1/3}(\boldsymbol{x}_k)$, dengiančių visą erdvę, aibė skaiti, o M – kontinumo galios, tai bent viename iš rutulių, tarkime $S_{1/3}(\boldsymbol{x}_k)$, turi būti bent du skirtingi taškai $\boldsymbol{x}$ ir $\boldsymbol{y}$ iš M. Bet tada

$$1 = d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leq d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_k) + d(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{y}) \leq 1/3 + 1/3 = 2/3,$$

o tai neįmanoma. Taigi prielaida apie ℓ_∞ separabilumą neteisinga. ∎

4.7 teiginys. *Erdvės $\mathcal{C}[a, b], \mathcal{C}(\mathbb{R}), \mathcal{C}^k[a, b]$ separabilios.*

Įrodymas. Pirmiausia įrodysime erdvės $\mathcal{C}[a,b]$ separabilumą. Nesunku įsitikinti, kad polinomų su racionaliaisiais koeficientais aibė $\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}$ yra skaiti. Ji, be to, visur tiršta erdvėje $\mathcal{C}[a,b]$. Tikrai, kiekvienai funkcijai $f \in \mathcal{C}[a,b]$ su bet kuriuo $\varepsilon > 0$ galime surasti tokį polinomą $p \in \mathcal{P}_{\mathbb{Q}}$, kad

$$d(f,p) = \sup_{a \le t \le b} |f(t) - p(t)| < \varepsilon.$$

Tikrai, remiantis Vejerštraso teorema (žr. 4.1 teoremą), su bet kuriuo $\varepsilon > 0$, kiekvieną $f \in \mathcal{C}[a,b]$ atitinka toks polinomas q, kad $d(f,q) < \varepsilon/2$. Kadangi polinomo q laipsnis baigtinis, tai galime rasti tokį $p \in \mathcal{P}_{\mathbb{Q}}$, kad $d(q,p) < \varepsilon/2$. Pasinaudoję trikampio nelygybe išvedame $d(f,p) < \varepsilon$.

Erdvių $\mathcal{C}^k[a,b]$ separabilumas įrodomas analogiškai.

4.8 teiginys. *Erdvė $B[a,b]$ neseparabili.*

Įrodymas. Apibrėžkime funkciją $\chi_s(t) = 1$, kai $t \le s$, ir $\chi_s(t) = 0$ priešingu atveju. Akivaizdu, kad aibė $M = \{\chi_s, s \in [a,b]\}$ – kontinumo galios ir

$$d(\chi_s, \chi_t) = \sup_{u \in [a,b]} |\chi_s(u) - \chi_t(u)| = 1,$$

kai $s \neq t$. Toliau samprotaujame kaip ir 4.6 teoremos įrodyme. ∎

4.9 teiginys. *Erdvės $L_p(a,b)$, kai $p \ge 1$, $-\infty \le a < b \le +\infty$, yra separabilios.*

Įrodymas. Pirmiausia nagrinėkime erdves $L_p(0,1)$, $\;p \ge 1$. Nagrinėkime racionaliųjų laiptinių funkcijų aibę

$$\mathcal{A}_0 = \Big\{ \sum_{k=0}^{n-1} r_{nk}\lambda_{nk} : \quad r_{nk} \in \mathbb{Q}, \quad k = 0,1,\ldots,n-1, n \in \mathbb{N} \Big\}.$$

Funkcijos λ_{nk} apibrėžtos (4.1) formule. Aibė $\mathcal{A}_0$ yra skaiti, nes ją galime išreikšti skaičia skaičių aibių sąjunga. Įrodysime, kad ji yra visur tiršta kiekvienoje erdvėje $L_p(0,1), p \ge 1$. Fiksuokime $\varepsilon > 0$ ir paimkime bet kurią funkciją $f \in L_p(0,1)$. Pagal ką tik įrodytą 4.2 teiginį, egzistuoja toks $n \in \mathbb{N}$, kad

$$d\Big(f, \sum_{k=0}^{n} a_{nk}\lambda_{nk}\Big) < \varepsilon/2.$$

Taip parinkime racionaliuosius skaičius $r_{nk}, k = 0, 1, \dots, n$, kad

$$\max_{0 \le k \le n} |a_{nk} - r_{nk}| < \varepsilon/2.$$

Tuomet $f_\varepsilon = \sum_{k=0}^{n} a_{nk}\lambda_{nk} \in \mathcal{A}_0$ ir

$$d(f, f_\varepsilon) \le d\Big(f, \sum_{k=0}^{n} a_{nk}\lambda_{nk}\Big) + d\Big(\sum_{k=0}^{n} a_{nk}\lambda_{nk}, \sum_{k=0}^{n} r_{nk}\lambda_{nk}\Big) <$$
$$\varepsilon/2 + \max_{0 \le k \le n} |a_{nk} - r_{nk}| < \varepsilon.$$

Taigi $[\mathcal{A}_0] = L_p(0,1)$, todėl erdvė $L_p(0,1)$ yra separabili. Nuo erdvės $L_p(0,1)$ nesunku pereiti prie $L_p(a,b)$, kai a, b baigtiniai skaičiai ar begalybės. Kadangi $L_p(a,b)$ yra $L_p(-\infty,\infty)$ poerdvis (jei kiekvieną funkciją, apibrėžtą baigtiniame intervale pratęsime, laikydami ją lygia nuliui už to intervalo), pakanka įrodyti erdvės $L_p(-\infty,\infty)$ separabilumą. Pažymėkime

$$t = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan u, \quad -\infty < u < +\infty.$$

Funkcijai $f : (0,1) \to \mathbb{R}$, apibrėžkime

$$g_f(u) = \pi^{-1/p}\frac{f(t)}{(1+u^2)^{1/p}} \quad -\infty < u < +\infty.$$

Akivaizdu, kad funkcija $f \in L_p(0,1)$ tada ir tik tada, kai $g_f \in L_p(-\infty, +\infty)$. Be to,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g_f(u)|^p du = \int_0^1 |f(t)|^p dt.$$

Vadinasi, erdvės $L_p(-\infty, +\infty)$ aibė $\mathcal{A}_1 = \{g_f : f \in \mathcal{A}_0\}$ yra skaiti ir visur tiršta. ∎