15 paskaita

15.1 Kompaktiškieji operatoriai

15.1.1 Erdvė $L^c(\mathbb{E}, \mathbb{F})$

Šiame skyrelyje $\mathbb{E}, \mathbb{F}$ – tiesinės normuotos erdvės virš to paties skaliarų kūno $\mathbb{K}$.

15.1 apibrėžimas. *Tiesinis operatorius $T : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ vadinamas kompaktiškuoju, jei su kiekviena aprėžtąja aibe $A \subset \mathbb{E}$, aibė $T(A)$ – reliatyviai kompaktiška.*

15.1 teiginys. *Jei $T : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ – tiesinis operatorius ir su kiekviena seka $(x_n) \subset B_{\mathbb{E}} = \{x \in \mathbb{E} : ||x|| \leq 1\}$, seka (Tx_n) turi konverguojantį posekį, tai operatorius T kompaktiškas.*

Įrodymas. Akivaizdus. ∎

Pagal kompaktiškojo operatoriaus apibrėžimą, kiekvienas tiesinis kompaktiškas operatorius yra aprėžtas, vadinasi, ir tolydus.

Iš .... teiginio išplaukia, kad tapatusis operatorius $I_{\mathbb{E}}$ kompaktiškas tada ir tik tada, kai $\dim(\mathbb{E}) < \infty$. Kita vertus, kiekvienas tiesinis operatorius, kurio reikšmių aibė yra baigtinio matavimo, yra kompaktiškas.

Tiesinių tolydžių kompaktiškųjų operatorių $T : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ aibę žymėsime $L^c(\mathbb{E}, \mathbb{F})$.

15.1 teorema. *Erdvės $L(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ aibė $L^c(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ yra uždara ir tiesinė.*

Įrodymas. Pirmiausia įrodysime, kad aibė $L^c(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ yra tiesinė. Tarkime, operatoriai $S, T \in L^c(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ ir $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Jei $(x_n) \subset \mathbb{E}$ – aprėžtoji seka, tai seka (Tx_n) turi konverguojantįjį posekį, sakykime, $(Tx_n^{(1)})$, o seka $(Sx_n^{(1)})$ –

konverguojantįjį posekį $(Sx_n^{(2)})$. Savo ruožtu seka $(Tx_n^{(2)})$ konverguoja kaip konverguojančiosios sekos posekis. Vadinasi, seka $(\alpha Tx_n^{(2)} + \beta Sx_n^{(2)})$ konverguoja ir $\alpha T + \beta S \in L^c(\mathbb{E}, \mathbb{F})$.

Dabar tarkime, $(T_n) \in L^c(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ ir $T = \lim_{n\to\infty} T_n$. Kiekvieną $\varepsilon > 0$ atitinka $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, kad

$$||T_n x - Tx|| < \varepsilon \quad \text{su visais } \ n \geq N_\varepsilon, \quad x \in B_{\mathbb{E}}. \tag{15.1}$$

Remiantis 15.1 apibrėžimu, aibė $T_N(B_{\mathbb{E}})$ reliatyviai kompaktiška. Pritaikę Hausdorfo teoremą **??**, randame tokį baigtinį rinkinį $\{x_1, ..., x_m\} \subset B_{\mathbb{E}}$, kad aibė

$$\{T_{N_\varepsilon} x_1, ..., T_{N_\varepsilon} x_m\} \subset \mathbb{F}$$

yra aibės $T_{N_\varepsilon}(B_{\mathbb{E}})$ $\varepsilon/3$-tinklas. Vadinasi, bet kurį $x \in B_{\mathbb{E}}$ atitinka toks $k = 1, ..., m$, kad $||T_{N_\varepsilon} x - T_{N_\varepsilon} x_k|| < \varepsilon/3$. Pritaikę (15.1), gauname

$$||Tx - Tx_k|| \leq ||Tx - T_{N_\varepsilon} x|| + ||T_{N_\varepsilon} x - T_{N_\varepsilon} x_k|| + ||T_{N_\varepsilon} x_k - Tx_k|| < (7/3)\varepsilon.$$

Vadinasi, aibė $T(B_{\mathbb{E}})$ yra visiškai aprėžta, ir lieka pritaikyti Hausdorfo teoremą. ■

15.1.2 Šauderio teorema

15.2 teorema. *Jei $T \in L(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ ir erdvė $\mathbb{F}$ – Banacho, tai operatorius T yra kompaktiškas tada ir tik tada, kai jo jungtinis operatorius T^* kompaktiškas.*

Įrodymas. *Būtinumas* Nagrinėkime atitinkamai erdvės $\mathbb{E}$ ir $\mathbb{F}^*$ uždaruosius vienetinius rutulius $B = \{x \in \mathbb{E} : ||x|| \leq 1\}$ ir $B^* = \{y^* \in \mathbb{F}^* : ||y^*|| \leq 1\}$. Tegu $T \in L^c(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ ir seka $(y_n^*) \subset B^*$. Apibrėžkime funkcijas $\phi_n : T(B) \to \mathbb{R}, n = 1, 2, \cdots$:

$$\phi_n(y) = y_n^*(y).$$

Kadangi

$$|\phi_n(y)| = |y_n^*(y)| \leq ||y_n^*|| \cdot ||y|| \leq ||y||,$$

tai funkcijos ϕ_n yra aprėžtos kiekvienoje aprėžtoje aibėje. Be to,

$$|\phi_n(y) - \phi_n(z)| = |y_n^*(y - z)| \leq ||y_n^*|| \cdot ||y - z|| \leq ||y - z||.$$

Todėl funkcijos (ϕ_n) yra lygialaipsniškai tolydžios. Kadangi $T(B)$ – kompaktiška aibė, tai pagal Arcelo - Askolio teoremą, aibė $(\phi_n) \subset \mathcal{C}(T(B))$

yra reliatyviai kompaktiška. Todėl egzistuoja konverguojantis posekis $(\phi_{n'})$. Tarkime, $\phi_{n'} \to \phi$ erdvėje $\mathcal{C}(T(B))$. Tai yra,

$$\sup_{y \in T(B)} |\phi_{n'}(y) - \phi(y)| = \sup_{x \in B} |\phi_{n'}(Tx) - \phi(Tx)| \to 0.$$

Bet $\phi_{n'}(Tx) = y^*_{n'}(Tx) = T^*(y^*_{n'}(x))$, todėl seka $T^*(y^*_{n'})$ konverguoja.
Pakankamumas. tarkime, T^* – kompaktiškas operatorius. Kaip ką tik įrodėme, jo jungtinis operatorius $T^{**} = (T^*)^* : \mathbb{E}^{**} \to \mathbb{F}^{**}$ taip pat kompaktiškas. Taigi, $T^{**}(B^{**})$ – reliatyviai kompaktiška aibė, kai $B^{**} = \{x^{**} \in \mathbb{E}^{**} : ||x^{**}|| \leq 1\}$. Kadangi įdėtis $\mathbb{E} \hookrightarrow \mathbb{E}^{**}$ tolydi ir $T(B) \hookrightarrow T^{**}(B^{**})$ tai ir aibė $T(B)$ – reliatyviai kompaktiška. ■

15.1.3 Pavyzdžiai

Pateiksime keletą kompaktškųjų operatorių pavyzdžių.

15.1 pavyzdys. Šiame pavyzdyje nagrinėsime baigtiniamačius operatorius (žr. **??** pavyzdį). Baigtiniamačiai operatoriai yra kompaktiški. Iš tikrųjų, kadangi $\dim(R(T)) < \infty$, tai kiekviena aprėžta aibė $A \subset R(T)$ yra reliatyviai kompaktiška.

15.2 pavyzdys. Tarkime, $k : [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}$ – tolydi funkcija, K – integralinis Fredholmo operatorius su branduoliu k.

15.3 teorema. *Erdvės $\mathcal{C}[a, b]$ integralinis Fredholmo operatorius K su tolydžiu branduoliu k yra kompaktiškas.*

Įrodymas. Tarkime, B – vienetinis erdvės $\mathcal{C}[a, b]$ rutulys. Pakanka įrodyti, kad $K(B)$ reliatyviai kompaktiška aibė. Remiantis Arcelo–Askoli teorema, reikia parodyti, kad $K(B)$ aprėžta ir vienodai tolydi. Akivaizdu, kad ši aibė aprėžta, nes operatorius K yra aprėžtas. Tarkime, $\varepsilon > 0$ ir $x \in B$. Kadangi funkcija k yra tolydi, tai egzistuoja $\delta > 0$ toks, kad

$$|k(s_1, t) - k(s_2, t)| < \varepsilon(b - a)^{-1},$$

kai $t \in [a,b]$, o $s_1, s_2 \in [a,b]$ tenkina sąlygą $|s_1 - s_2| < \delta$. Vadinasi, imdami $s_1, s_2 \in [a,b]$ tokius, kad $|s_1 - s_2| < \delta$, gauname (primename, kad $x \in B$)

$$
\begin{aligned}
|(Kx)(s_1) - (Kx)(s_2)| &= \left| \int_a^b (k(s_1,t) - k(s_2,t))x(t)dt \right| \\
&\le (b-a) \sup\{|k(s_1,t) - k(s_2,t)| \cdot |x(t)| : a \le t \le b\} \\
&\le \varepsilon \sup\{|x(t)| : a \le t \le b\} \le \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Iš čia išplaukia, kad aibė $K(B)$ yra vienodai tolydi. ■

15.3 pavyzdys. Šiame pavyzdyje integralinį Fredholmo operatorių nagrinėsime apibrėžtą erdvėje $L_2(a,b)$.

15.2 apibrėžimas. *Operatorius $T : L_2(a,b) \to L_2(a,b)$, apibrėžtas lygybe*

$$(Tx)(t) = \int_a^b k(t,s)x(s)ds,$$

vadinamas integraliniu Fredholmo operatoriumi su branduoliu k. Branduolys k vadinamas išsigimusiuoju, jei

$$k(s,t) = \sum_{j=1}^{n} p_j(t)q_j(s)$$

ir funkcijos $p_j, q_j \in L_2(a,b)$, $k = 1, ..., n$.

15.1 lema. *Integralinis Fredholmo operatorius erdvėje $L_2(a,b)$ su išsigimusiu branduoliu yra kompaktiškas.*

Įrodymas. Integralinio operatoriaus su išsigimusiu branduoliu reikšmių sritis yra baigtiniamatė erdvė, kurią generuoja funkcijos $p_j,\ j = 1, \ldots, n$,todėl kiekvieną aprėžtąją aibę jis vaizduoja į reliatyviai kompaktišką. ■

Remdamiesi šia lema, įrodysime integralinio Fredholmo oprERatoriaus kompaktiškumą.

15.4 teorema. *Jei T – integralinis Fredholmo erdvės $L_2(a,b)$ operatorius su branduoliu k, tenkinančiu sąlygą*

$$\int_a^b \int_a^b k^2(t,s)dtds < \infty,$$

tai operatorius T yra kompaktiškas.

Įrodymas. Pažymėkime

$$L_2([a,b]\times[a,b]) = \{g : [a,b]\times[a,b] \to \mathbb{R} : \int_a^b \int_a^b g^2(t,s)dtds < \infty\}.$$

Erdvė $L_2(a,b)$ yra separabilioji Hilberto erdvė, todėl joje egzistuoja ortonormuotoji bazė, sakykime, (p_n). Tuomet seka $(p_i(s)p_j(t), i, j \in \mathbb{N})$ yra erdvės $L_2([a,b]\times[a,b])$ bazė (žr. **??** pratimą). Todėl branduolį k galime išreikšti eilute

$$k(t,s) = \sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij} p_i(t) p_j(s);$$

čia $a_{ij} = \int_a^b \int_a^b k(t,s)p_i(t)p_j(s)dtds$.

Remiantis eilutės normuotoje erdvėje sąvoka,

$$\int_a^b \int_a^b |k(t,s) - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} p_i(t) p_j(s)|^2 dtds \to 0,$$

kai $n \to \infty$. Tarkime, T_n – integralinis operatorius, apibrėžtas lygtimi

$$T_n x(t) = \int_a^b \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} p_i(t) p_j(s) x(s) ds.$$

Operatoriaus T_n branduolys yra išsigimęs. Remiantis 15.1 lema, T_n – kompaktiškasis operatorius. Be to,

$$||T - T_n||^2 \le \int_a^b \int_a^b |k(t,s) - \sum_{i,j]1}^{n} a_{ij} p_i(t) p_j(s)|^2 dtds.$$

Remiantis 15.1 teorema, T – kompaktiškasis operatorius. ∎

15.2 Spektrinės teorijos elementai

Iš tiesinės algebros žinome, kad nagrinėjant lygtį $Ax = \lambda x$, čia $x \in \mathbb{R}^n$ yra nežinomasis, A – duota $n \times n$ matrica (kuri atitinka tiesinį operatorių, veikiantį erdvėje $\mathbb{R}^n$), o $\lambda \in \mathbb{C}$ – parametras, visos λ reikšmės pasidalija į dvi aibes. Pirmojoje yra tos, su kuriomis lygtis turi nenulinį sprendinį (jos vadinamos matricos tikrinėmis reikšmėmis ir sudaro atitinkamo operatoriaus spektrą). Visos likusios λ reikšmės vadinamos reguliariosiomis. Su jomis ir tik su jomis, lygtis $(A - \lambda I)x = b$ turi vienintelį sprendinį koks bebūtų $b \in \mathbb{R}^n$.

Šiame skyriuje tikrinių ir reguliariųjų reikšmių bei spektro sąvokas apibendrinsime tiesiniams operatoriams, veikiantiems abstrakčiose tiesinėse erdvėse. Pamatysime, kad, perėjus prie begalinės dimensijos erdvių, spektrinė teorija tampa sudėtingesne. Kiek plačiau susipažinsime su Hilberto erdvių kompaktiškųjų operatorių spektrine teorija.

15.2.1 Spektras ir rezolventė

Šiame skyrelyje $\mathbb{E}$ – begalinės dimensijos tiesinė normuota erdvė virš skaliarų kūno $\mathbb{K}$.

15.3 apibrėžimas. *Tegu operatorius $T \in L(\mathbb{E})$.*

a) Operatoriaus T rezolventine aibe vadinama aibė

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{K} : (\lambda I - T)^{-1} \text{ egzistuoja ir yra tiesinis tolydus operatorius}\}$$

Rezolventinės aibės taškai vadinami reguliariosiomis operatoriaus T reikšmėmis.

b) Atvaizdis $R : \rho(T) \to L(E)$, $R(\lambda) = R_T(\lambda) = (\lambda I - T)^{-1}$ vadinamas operatoriaus rezolvente.

c) Operatoriaus T spektru vadinama aibė $\sigma(T) = \mathbb{K} \backslash \rho(T)$.

15.4 apibrėžimas. *Operatoriaus spektras skirstomas į*[1][2]

p) taškinį spektrą:

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \sigma(T) : (\lambda I - T)^{-1} \text{ neegzistuoja}\};$$

[1] Kai kuriuose vadovėliuose spektras skirstomas tik į taškinį ir tolydųjį spektrą, t.y., apjungiant c) ir r) atvejus į vieną: $(\lambda I - T)^{-1}$ egzistuoja, bet yra neaprėžtas.

[2] Raidės p, c ir r paimtos kaip pirmos angliškų žodžių "point", "continous" ir "residual" raidės.

c) tolydųjį spektrą:

$$\begin{aligned}\sigma_c(T) = &\{\lambda \in \sigma(T) : (\lambda I - T)^{-1} \text{ egzistuoja,} \\ &\text{yra neaprėžtas, o aibė } (\lambda I - T)(\mathbb{E}) \text{ visur tiršta}\};\end{aligned}$$

r) likutinį spektrą:

$$\begin{aligned}\sigma_r(T) = &\{\lambda : (\lambda I - T)^{-1} \text{ egzistuoja,} \\ &\text{yra neaprėžtas, o aibė } (\lambda I - T)(\mathbb{E}) \text{ nėra visur tiršta}\}.\end{aligned}$$

Iš atvirojo atvaizdžio teoremos išplaukia lygybė

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T).$$

Iš tikrųjų, remiantis atvirojo atvaizdžio teorema, $\lambda I - T$ yra bijekcija tada ir tik tada, kai $(\lambda I - T)^{-1}$ egzistuoja ir yra tolydus atvaizdis.

15.4 pavyzdys. Nagrinėkime aibę $\mathbb{E}$, sudarytą iš aprėžtų funkcijų $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, kurios yra tolydžios taškuose 0 ir 1 bei lygios nuliui taške 0. Toje aibėje nagrinėkime natūraliasias sumos ir sandaugos iš skaliaro operacijas ir apibrėžkime normą $||f|| = \sup_{0 \le t \le 1} |f(t)|$. Nesunku įrodyti, kad taip sukonstruota realioji tiesinė normuota erdvė $\mathbb{E}$ yra Banacho (galime pastebėti, kad $\mathbb{E}$ yra Banacho erdvės $B[0,1]$ poerdvis). Nagrinėkime operatorių $T : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$,

$$Tf(t) = tf(t), \quad t \in [0,1], \quad f \in \mathbb{E}.$$

Akivaizdu, kad $T \in L(\mathbb{E})$ (vistiek įsitikinkite!). Įrodysime, kad $\rho(T) = \mathbb{R} \backslash [0,1]$, o $\sigma(T) = [0,1]$. Pirmiausia tarkime, $\lambda \notin [0,1]$. Ooperatorių $(\lambda I - T)^{-1}$ apibrėžkime taip:

$$(\lambda I - T)^{-1} f(t) = (\lambda - t)^{-1} f(t), \quad t \in [0,1], \ f \in \mathbb{E}.$$

Akivaizdu, kad operatorius $(\lambda I - T)^{-1} \in L(\mathbb{E})$. Be to, su visais $f \in \mathbb{E}$ ir $t \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}(\lambda I - T)^{-1}(\lambda I - T) f(t) &= (\lambda I - T)^{-1}(\lambda - t) f(t) = f(t); \\ (\lambda I - T)(\lambda I - T)^{-1} f(t) &= (\lambda I - T)(\lambda - t)^{-1} f(t) = f(t).\end{aligned}$$

Tai įrodo, $(\lambda I - T)^{-1}$ išties yra operatoriaus $\lambda I - T$ atvirkštinis. Taigi $\lambda \in \rho(T)$.

Dabar nagrinėkime operatoriaus spektrą, t. y. aibę $[0,1]$. Nesunku įsitikinti, kad atviras intervalas $(0,1)$ sudaro taškinį spektrą. Iš tikrųjų, imdami $\lambda \in (0,1)$, apibrėžkime funkciją

$$f_\lambda(t) = \delta_\lambda(t) = ??????, \quad t \in [0,1].$$

Tuomet

$$Tf_\lambda(t) = tf_\lambda(t) = \lambda f_\lambda(t), \quad t \in [0,1].$$

Taigi $\lambda \in \sigma_p(T)$.

Lieka du taškai: 0 ir 1. Iš pirmo žvilgsnio atrodytų, kad abu šie taškai priklauso tai pačiai spektro daliai. Tačiau taip nėra: $1 \in \sigma_r(T)$, o $0 \in \sigma_c(T)$.

Nagrinėkime operatorių $I-T$. Jei $(I-T)f = 0$, tai $f(t) = tf(t)$ su visais $t \in [0,1]$. Vadinasi, $f(t) = 0$, kai $t \in [0,1)$. Kadangi, be to, funkcija f yra tolydi taške 1, tai $f(1) = 0$ ir $f = 0$. Tai įrodo, kad operatorius $I-T$ yra injektyvus. Taigi gauname, kad $(I-T)^{-1}$ egzistuoja. Norėdami įsitikinti, kad $1 \in \sigma_r(T)$ turime dar įrodyti, kad aibė $(I-T)(\mathbb{E})$ nėra visur tiršta erdvėje $\mathbb{E}$. Bet tai akivaizdu, nes funkcijos, priklausančios aibei $(I-T)(\mathbb{E})$ būtinai lygios nuliui taške 1. Tuo tarpu erdvės $\mathbb{E}$ funkcijos taške 1 gali įgyti bet kurią reikšmę.

Liko įrodyti, kad $\sigma_c(T) = \{0\}$. Operatorius T yra injektyvus. Tikrai, jei $Tf = 0$, tai $tf(t) = 0$ su visais $t \in [0,1]$. Todėl $f(t) = 0$, kai $t \in (0,1]$. Remiantis erdvės $\mathbb{E}$ apibrėžimu, $f(0) = 0$. Taigi $f = 0$. Toliau įrodykime, kad $T(\mathbb{E})$ yra visur tiršta aibė. Tuo tikslu fiksuokime $\varepsilon > 0$ ir $g \in \mathbb{E}$. Funkcija g yra tolydi nulyje, be to, $g(0) = 0$. Todėl egzistuoja toks $\delta > 0$ su kuriuo $|g(t)| < \varepsilon$, kai $0 \leq t \leq \delta$. Apibrėžkime funkciją $g_\varepsilon(t) = 0$ kai $0 \leq t \leq \delta$ ir $g_\varepsilon(t) = t^{-1}y(t)$, kai $\delta < t \leq 1$. Akivaizdu, kad $g_\varepsilon \in \mathbb{E}$ ir

$$||Tg_\varepsilon - g|| = \sup_{0 \leq t \leq \delta} |g(t)| < \varepsilon.$$

Operatoriaus spektras priklauso ir nuo erdvės, kurioje šis operatorius nagrinėjamas. Tai matysime kituose pavyzdžiuose.

15.5 pavyzdys. Operatorių T apibrėšime kaip 15.4 pavyzdyje, tik pakeisime jo apibrėžimo sritį. Nagrinėsime operatorių $T : \mathcal{C}[0,1] \to \mathcal{C}[0,1]$,

$$Tf(t) = tf(t), \quad t \in [0,1], \quad f \in \mathcal{C}[0,1].$$

Nesunku įsitikinti, kad, kaip ir ankstesniame 15.4 pavyzdyje, $\sigma(T) = [0,1]$, tačiau visas intervalas $[0,1]$ sudaro likutinį spektrą. Tikrai, tolydžiųjų funkcijų erdvėje $\mathcal{C}[0,1]$ lygties $(\lambda - t)f(t) = 0, \quad t \in [0,1]$, sprendinys gali būti tik

$f = 0$, o aibę $(\lambda I - t)(\mathcal{C}[0,1])$ sudaro tolydžiosios funkcijos, kurios lygios nuliui taške $t = \lambda$. Ši aibė nėra visur tiršta erdvėje $\mathcal{C}[0,1]$.

15.6 pavyzdys. Vėl nagrinėkime operatorių

$$Tf(t) = tf(t), \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{15.2}$$

tačiau dabar veikiantį erdvėje $L_2(\mathbb{R})$, t. y., (15.2) apibrėžime f ir $Tf \in L_2(\mathbb{R})$. Šis operatorius apibrėžtas ne visoje erdvėje $L_2(\mathbb{R})$, o tik aibėje

$$D(T) = \Big\{ f \in L_2(\mathbb{R}) : \int_{-\infty}^{\infty} t^2 f^2(t)dt < \infty \Big\}.$$

Parodysime, kad kiekvienas realusis skaičius λ priklauso operatoriaus T tolydžiajam spektrui $\sigma_c(T)$. Imkime fiksuotą $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ ir erdvėje $L_2(\mathbb{R})$ nagrinėkime lygtį

$$(\lambda_0 I - T)f = 0$$

(tai reiškia, kad $(\lambda_0 - t)f(t) = 0$ beveik visiems $t \in \mathbb{R}$). Akivaizdu, kad jos sprendinys $f(t) = 0$ beveik visur, t. y., sprendinys yra nulinis erdvės $L_2(\mathbb{R})$ elementas. Todėl kiekvienam realiam $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ operatorius $(\lambda_0 I - T)^{-1}$ egzistuoja. Šio operatoriaus apibrėžimo sritis $D((\lambda_0 I - T)^{-1})$ yra visos funkcijos $g \in L_2(\mathbb{R})$, kurios tapatingai lygios nuliui kokioje nors taško λ_0 aplinkoje (tos aplinkos gali būti skirtingos skirtingoms funkcijoms g). Nesunku įsitikinti, kad ši aibė yra visur tiršta erdvėje $L_2(\mathbb{R})$. Tikrai, kiekvienai funkcijai $f \in L_2(\mathbb{R})$ ir kiekvienam $\varepsilon > 0$ galime parinkti tokį $\delta > 0$, kad

$$\int_{\lambda_0-\delta}^{\lambda_0+\delta} f^2(t)dt < \varepsilon^2.$$

Paėmę

$$g(t) = \begin{cases} 0, & \text{kai } \ |t - \lambda_0| < \delta, \\ f(t), & \text{kitur}, \end{cases}$$

turime $\|f - g\| < \varepsilon$ ir $g \in D((\lambda_0 I - T)^{-1})$. Kad įsitikintume operatoriaus $(\lambda_0 I - T)^{-1}$ neaprėžtumu, užtenka paimti seką $(g_n) \subset D((\lambda_0 I - T)^{-1})$,

$$g_n(t) = \begin{cases} 0, & \text{kai } \ |t - \lambda_0| < 1/2n, \\ \sqrt{n}, & \text{kai } \ 1/2n \le |t - \lambda_0| < 1/n, \\ 0, & \text{kai } \ |t - \lambda_0| \ge 1/n. \end{cases}$$

Šių funkcijų norma lygi 1. Iš kitos pusės, nesunku matyti, kad

$$f_n(t) = (\lambda_0 - t)^{-1} g_n(t), \qquad \|f_n\| = n.$$

15.2.2 Tikrinės reikšmės

Tarkime, $T : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ – tiesinis operatorius, apibrėžtas tiesinėje normuotoje erdvėje $\mathbb{E}$. Skaičius $\lambda \in \sigma_p(T)$ vadinamas operatoriaus T *tikrine reikšme*. Kitais žodžiais tariant, skaičius $\lambda \in \mathbb{K}$ yra operatoriaus T tikrinė reikšmė tada ir tik tada, kai egzistuoja toks nenulinis elementas $x \in \mathbb{E}$, kad

$$Tx = \lambda x. \tag{15.3}$$

Kiekvienas toks nenulinis elementas x, su kuriuo teisinga (15.3) lygybė, vadinamas operatoriaus T *tikriniu vektoriumi*, atitinkančiu tikrinę reikšmę λ. Tikrinių reikšmių problema – tai problema apie duotojo tiesinio operatoriaus tikrinių reikšmių ir tikrinių vektorių radimą.

Tarkime, $\dim(\mathbb{E}) = m$, $T : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ – tiesinis operatorius. Fiksuokime erdvės $\mathbb{E}$ bazę $e_1, ..., e_m$. Tarkime,

$$Te_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} e_i, \quad j = 1, ..., m;$$

čia (α_{ij}) – matrica, atitinkanti operatorių T. Šiuo atveju lygtis $Tx = \lambda x$ yra ekvivalenti lygčių sistemai

$$\sum_{j=1}^{m} (a_{ij} - \lambda \delta_{ij}) x_j = 0, \quad i = 1, 2, ..., m;$$

čia $x = \sum_{j=1}^{m} x_j e_j$. Ši tiesinių homogeninių lygčių sistema turi nenulinį sprendinį tada ir tik tada, kai $\det(a_{ij} - \lambda \delta_{ij}) = 0$. Vadinasi, operatoriaus T tikrinės reikšmės yra matricos (a_{ij}) charakteringosios lygties šaknys. Įrašę tų šaknų reikšmes į homogeninių lygčių sistemą, randame tikrinių vektorių koordinates.

Jei, be to, erdvė $\mathbb{E}$ yra kompleksinė, tai charakteringoji lygtis

$$\det(a_{ij} - \lambda \delta_{ij}) = 0$$

turi m šaknų. Tuo tarpu realiosios erdvės atveju realiųjų šaknų gali ir visai nebūti. Taigi iš esmės gali skirtis kompleksinės ir realiosios erdvių operatorių tikrinių reikšmių tyrimas.

15.5 teorema. *Tarkime, $\mathbb{E}$ – tiesinė normuota erdvė. Jei $\lambda_1, ..., \lambda_n$ – operatoriaus $T \in L(\mathbb{E})$ skirtingos tikrinės reikšmės, tai šias reikšmes atitinkantys tikriniai vektoriai $x_1, ..., x_n$ yra tiesiškai nepriklausomi.*

Įrodymas. Tarkime, $x_1, ..., x_n$ nėra tiesiškai nepriklausomi. Vadinasi, egzistuoja tokie skaliarai $\alpha_1, ..., \alpha_n$, kad $\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \neq 0$, bet $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$. Sakykime, $\alpha_1 \neq 0$. Kadangi operatorius T yra tiesinis, tai

$$0 = T\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T x_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i x_i.$$

Iš šios lygybės atėmę lygybę $\lambda_n \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$, gauname

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(\lambda_i - \lambda_n) x_i = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i(\lambda_i - \lambda_n) x_i.$$

Nuosekliai tęsdami šį procesą, t.y., paveikdami gautos lygybės abi puses operatoriumi T , padaugindami turimą lygybę iš λ_{n-1}, jas atimdami ir t.t., įrodome, kad

$$0 = \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3) \cdots (\lambda_1 - \lambda_n) x_1.$$

Bet ši lygybė galima tik, kai $\alpha_1 = 0$. Gauta prieštara įrodo prielaidos klaidingumą. ∎

15.6 teorema. *Sakykime, $\mathbb{E}$ – tiesinė normuotoji erdvė, $T : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ – tiesinis aprėžtas operatorius. Jei λ – operatoriaus T tikrinė reikšmė, tai aibė N_λ, sudaryta iš erdvės $\mathbb{E}$ nulio ir visų tikrinių elementų, atitinkančių tikrinę reikšmę λ, yra tiesinė ir uždara.*

Įrodymas. Akivaizdu, kad aibė N_λ – tiesinė. Jei seka $(z_n) \subset N_\lambda$ ir $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$, tai $\lim_{n\to\infty} Tz_n = Tz_0$. Kadangi $Tz_n = \lambda z_n$, tai

$$\lambda z_0 = \lim_{n\to\infty} \lambda z_n = \lim_{n\to\infty} Tz_n = Tz_0.$$

Iš čia išplaukia, kad $z_0 \in N_\lambda$. Vadinasi, aibė N_λ – uždara. ∎

15.5 apibrėžimas. *Aibė N_λ, figūruojanti 15.6 teoremoje, vadinama operatoriaus T tikriniu poerdviu, atitinkančiu tikrinę reikšmę λ. Šio poerdvio dimensija vadinama tikrinės reikšmės λ kartotinumu.*

15.7 teorema. *Jei $T : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ – kompaktiškasis operatorius, tai jo tikrinio poerdvio N_λ, atitinkančio tikrinę reikšmę λ, dimensija baigtinė.*

Įrodymas. Imkime vienetinio rutulio $S_\lambda = \{x \in N_\lambda : ||x|| \le 1\}$ bet kurią elementų seką (x_n). Kadangi operatorius T kompaktiškas, tai iš sekos (Tx_n) galime išrinkti konverguojantįjį posekį $(Tx_{n'})$. Kadangi $x_n = Tx_n/\lambda$ su visais $n \ge 1$, tai konverguoja ir posekis $(x_{n'})$. Vadinasi, erdvės N_λ vienetinis rutulys yra reliatyviai kompaktiška aibė. Remiantis ?????? teiginiu, $dim(N_\lambda) < \infty$. ■

15.8 teorema. *Kompaktiškojo tiesinio operatoriaus $T : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ spektras susideda tik iš tikrinių reikšmių. Šių reikšmių aibė yra baigtinė arba skaiti, pastaruoju atveju tikrinių reikšmių seka turi vienintelį ribinį tašką $\lambda = 0$. Kiekvienam $\varepsilon > 0$ yra tik baigtinis skaičius tikrinių reikšmių, moduliu didesnių už ε.*

Įrodymas. Tai, kad kompaktiško operatoriaus T spektras susideda tik iš tikrinių reikšmių išplaukia iš Fredholmo alternatyvos (žr. ?????????? teoremą). Tikrai, jei $\lambda \notin \rho(T)$, tai (15.3) lygtis turi nenulinį sprendinį.

Toliau tarkime, kad operatoriaus T tikrinių reikšmių aibė begalinė. Paėmę bet kurį skaičių $\varepsilon > 0$, įsitikinsime, kad nelygybę $|\lambda| \ge \varepsilon$ tenkinančių tikrinių reikšmių λ skaičius gali būti tik baigtinis. Sakykime, yra priešingai: egzistuoja seka (λ_k) skirtingų tikrinių reikšmių, be to, $|\lambda_k| \ge \varepsilon$, $k = 1, 2, ...$ Remiantis ???????? teorema, tikrinių elementų, kuriuos apibrėžia lygybės $Tx_n = \lambda_n x_n$, $n \in \mathbb{N}$, seka (x_k) yra tiesiškai nepriklausoma. Nagrinėkime erdvės $\mathbb{E}$ poerdvius $L_n = \text{tap}\{x_1, ..., x_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Pagal Ryso lemą apie „beveik" statmenį (žr. ?????? lemą), egzistuoja erdvės $\mathbb{E}$ elementų seka (y_n), kuri tenkina šias sąlygas: $y_n \in L_n$, $||y_n|| = 1$, ir $||x - y_n|| > 1/2$ su visais $x \in L_{n-1}$, $n > 1$. Kadangi seka (y_n/λ_n) aprėžta, tai seka (Ty_n/λ_n) turi konverguojantįjį posekį.

Pažymėkime $T_\lambda = \lambda I - T$. Jei $x \in L_n$, t. y., $x = \sum_{k=1}^n a_k x_k$, tai $Tx = \sum_{k=1}^n a_k \lambda_k x_k \in L_n$. Tačiau

$$\begin{aligned} T_{\lambda_n} x &= \sum_{k=1}^n a_k \lambda_n x_k - \sum_{k=1}^n a_k \lambda_k x_k \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} a_k (\lambda_n - \lambda_k) x_k \in L_{n-1}. \end{aligned}$$

Tarkime, $m > n$ ir nagrinėkime

$$T\Big(y_m/\lambda_m\Big) - T\Big(y_n/\lambda_n\Big) = y_m - \Big(T_{\lambda_m}\Big(\frac{y_m}{\lambda_m}\Big) + T\Big(\frac{y_n}{\lambda_n}\Big)\Big) := y_m - \tilde{y}.$$

Iš ką tik įrodytų sąryšių

$$T_{\lambda_m}\Big(\frac{y_m}{\lambda_m}\Big) \in L_{m-1} \quad \text{ir} \quad T\Big(\frac{y_n}{\lambda_n}\Big) \in L_n \subset L_{m-1},$$

todėl $\tilde{y} \in L_{m-1}$ ir iš Ryso lemos gauname, kad

$$||T(y_m/\lambda_m) - T(y_n/\lambda_m)|| = ||y_m \; - \tilde{y}|| > 1/2.$$

Ši nelygybė rodo, kad seka $(T_n(y_n/\lambda_n))$ neturi nė vieno konverguojančiojo posekio. Gautoji prieštara paneigia pradžioje darytąją prielaidą. Vadinasi, kiekvieną $\varepsilon > 0$ gali atitikti tik baigtinis skaičius tikrinių reikšmių, tenkinančių nelygybę $|\lambda| \geq \varepsilon$. Todėl $\lambda = 0$ – vienintelis tikrinių reikšmių aibės ribinis taškas, jei toji aibė begalinė. ∎

15.2.3 Kompaktiškų savijungių operatorių spektrinė teorema

Nagrinėjant operatorius, veikiančius Hilberto erdvėje, galime apsiriboti siauresnėmis operatorių klasėmis ir joms detaliau aprašyti spektrą. Viena iš tokių klasių – savijungūs operatoriai. Jiems ir skirtas šis skyrelis.

Sakykime, $\mathbb{H}$ – Hilberto erdvė, $T : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ – savijungis operatorius. Pirmiausiai įrodysime bendrą teiginį apie operatoriaus T reguliariąsias reikšmes.

15.9 teorema. *Tam, kad $\lambda \in \mathbb{K}$ būtų savijungio operatoriaus $T : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ reguliariąja reikšme (rezolventinės aibės tašku), būtina ir pakankama, kad egzistuotų tokia teigiama konstanta m, kad su visais $x \in \mathbb{H}$ būtų*

$$||\lambda x - Tx|| \geq m||x||. \tag{15.4}$$

Įrodymas. Būtinumas. Pažymėkime $T_\lambda = \lambda I - T$. Tegu egzistuoja aprėžta rezolventė $R_T(\lambda) = T_\lambda^{-1}$ ir $||R_T(\lambda)|| = d$. Tada su visais $x \in \mathbb{H}$,

$$||x|| = ||R_T(\lambda)T_\lambda(x)|| \leq d||T_\lambda(x)||,$$

t. y. galioja (15.4) su $m = d^{-1}$.

Pakankamumas. Tegu $y = T_\lambda(x)$ ir $L = \{y = T_\lambda(x),\ x \in \mathbb{H}\}$. Ryšis tarp x ir y yra abipus vienareikšmis, nes, jei $T_\lambda(x_1) = T_\lambda(x_2)$, tai iš (15.4) gauname

$$||x_1 - x_2|| \leq m^{-1}||T_\lambda(x_1) - T_\lambda(x_2)|| = 0,$$

t. y. $x_1 = x_2$. Parodysime, kad L yra visur tiršta tiesinė erdvės $\mathbb{H}$ aibė. Jei taip nebūtų, tai egzistuotų toks $x_0 \in \mathbb{H}$, $x_0 \neq 0$, kad $(x_0, y) = 0$ su visais $y \in L$. Bet tada

$$\langle x_0, \lambda x - Tx \rangle = 0.$$

Kadangi operatorius T – savijungis, tai ir

$$\langle \bar{\lambda} x_0 - Tx_0, x \rangle = 0 \quad \text{su visais} \quad x \in \mathbb{H}.$$

Iš šios sąryšio gauname, kad $\bar{\lambda} x_0 - Tx_0 = 0$. Bet ši lygybė su nenuliniu x_0 negalima nei su kompleksiniu λ (tuo atveju savijungis operatorius turėtų kompleksinę tikrinę reikšmę), nei su realiuoju λ (tada $\bar{\lambda} = \lambda$ ir $||x_0|| \leq m^{-1}||\lambda x_0 - Tx_0|| = 0$). Todėl L – visur tiršta erdvėje $\mathbb{H}$. Įrodysime, kad L ir uždara aibė. Tegu $y_n \in L$, $y_n = T_\lambda(x_n)$, $n \geq 1$ ir $y_n \to y_0$. Pasinaudoję (15.4), turime

$$||x_n - x_m|| \leq \frac{1}{m}||T_\lambda(x_n) - T_\lambda(x_m)|| = \frac{1}{m}||y_n - y_m||.$$

Kadangi (y_n) – konverguojanti seka, tai (x_n) – Koši seka. Bet $\mathbb{H}$ - pilna erdvė, todėl egzistuoja $x_0 = \lim x_n$. Tada ir $T_\lambda(x_0) = \lim T_\lambda(x_n) = \lim y_n = y_0$, o tai reiškia, kad $y_0 \in L$. Taigi L - visur tiršta ir uždara aibė, todėl $L = \mathbb{H}$. Kadangi atvaizdis $y = T_\lambda(x)$ abipus vienareikšmis, todėl egzistuoja atvirkštinis operatorius $x = T_\lambda^{-1}(y) = R_T(\lambda)(y)$ apibrėžtas visoje erdvėje $\mathbb{H}$, o iš (15.4) gauname, kad

$$||R_T(\lambda)(y)|| = ||x|| \leq m^{-1}||T_\lambda(x)|| = m^{-1}||y||.$$

Tai įrodo, kad rezolventė aprėžta, $||R_T(\lambda)|| \leq m^{-1}$ ir $\lambda \in \rho(T)$. ∎

Iš šios teoremos gauname tokią išvadą, kuri naudinga nagrinėjant savijungio operatoriaus spektrą.

15.1 išvada. *λ priklauso savijungio operatoriaus T spektrui tada ir tik tada, jei egzistuoja tokia seka $(x_n) \subset \mathbb{H}$ ir tokia skaitinė seka $c_n \to 0$, kad*

$$||Tx_n - \lambda x_n|| \leq c_n||x_n||. \tag{15.5}$$

Nelygybės (15.5) abi puses padalinę iš $||x_n||$, gauname

$$||Tx_n - \lambda x_n|| \to 0, \quad ||x_n|| = 1. \tag{15.6}$$

15.10 teorema. Jei T ***– savijungis operatorius,*** $\lambda = \alpha + i\beta, \quad \beta \neq 0$***, tai*** $\lambda \in \rho(T)$***. Savijungio operatoriaus tikrinės reikšmės realios, o tikriniai elementai, atitinkantys skirtingas tikrines reikšmes, yra ortogonalūs.***

Įrodymas. Tegu $y = T_\lambda(x) = \lambda x - Tx$, tada

$$\begin{aligned}\langle y, x\rangle =& \lambda\langle x, x\rangle - \langle Tx, x\rangle \\ \langle x, y\rangle =& \overline{\langle y, x\rangle} = \overline{\lambda}\langle x, x\rangle - \langle Tx, x\rangle.\end{aligned}$$

Todėl

$$\langle y, x\rangle - \langle x, y\rangle = (\lambda - \overline{\lambda})\langle x, x\rangle = 2i\beta||x||^2$$

ir

$$2|\beta|||x||^2 = |\langle y, x\rangle - \langle x, y\rangle| \leq |\langle y, x\rangle| + |\langle x, y\rangle| \leq 2||y||||x||.$$

O tai reiškia, kad $||y|| \geq |\beta|||x||$, t. y., $||T_\lambda(x)|| \geq |\beta|||x||$. Belieka pasinaudoti 15.9 teorema. Įrodėme, kad $\lambda \in \rho(T)$, o iš čia išplaukia, kad savijungio operatoriaus spektras, o tuo pačiu ir tikrinės reikšmės, yra realių skaičių aibėje.

Jei $Tx_1 = \lambda_1 x_1$, $Tx_2 = \lambda_2 x_2$ ir $\lambda_1 \neq \lambda_2$, tai

$$\lambda_1\langle x_1, x_2\rangle = \langle \lambda_1 x_1, x_2\rangle = \langle Tx_1, x_2\rangle = \langle x_1, Tx_2\rangle = \langle x_1, \lambda_2 x_2\rangle = \lambda_2\langle x_1, x_2\rangle.$$

Iš čia $\langle x_1, x_2\rangle = 0$, t.y. $x_1 \perp x_2$. ■

15.11 teorema. *Jei* $\mathbb{H} \neq \{0\}$, $T \in L(\mathbb{H})$ *– savijungis operatorius, tai visas šio operatoriaus spektras priklauso intervalui* $[m, M]$*; čia*

$$m = \inf_{||x||=1} (Tx, x), \quad M = \sup_{||x||=1} (Tx, x).$$

Be to, abu intervalo galai priklauso spektrui.

Įrodymas. Kadangi iš 15.10 teoremos žinome, kad savijungio operatoriaus spektras sudarytas tik iš realiųjų skaičių, todėl pirmajam teoremos teiginiui įrodyti užtenka parodyti, kad, jei $\lambda \notin [m, M]$, tai $\lambda \in \rho(T)$.

Tegu $\lambda = M + d, \ d > 0$. Iš M apibrėžimo turime

$$\langle T_\lambda x, x\rangle = \lambda\langle x, x\rangle - \langle Tx, x\rangle \geq \lambda||x||^2 - M\langle x, x\rangle = d||x||^2.$$

Todėl

$$|\langle T_\lambda x, x\rangle| \geq d||x||^2.$$

Bet $|\langle T_\lambda x, x\rangle| \leq ||T_\lambda x|| \cdot ||x||$. Iš pastarųjų dviejų nelygybių išvedame

$$||T_\lambda x|| \geq d||x||.$$

Pasinaudoję 15.9 teorema turime, $\lambda \in \rho(T)$. Analogiškai nagrinėjamas ir atvejis, kai $\lambda < m$.

Dabar įrodysime, kad $M \in \sigma(T)$ (analogiškai įrodoma ir, kad $m \in \sigma(T)$). Lengva įsitikinti, kad operatorių T pakeitus į T_μ, jo spektras pasistums į kairę per μ, o skaičiai m ir M pasikeis į $m-\mu$ ir $M-\mu$. Todėl, nemažindami bendrumo, galime laikyti, kad $0 \leq m \leq M$. Pirmiausia parodysim, kad $||T|| = M$ (jei $m \leq M$, įrodoma, kad $||T|| = \max(|m|, |M|) = \sup_{||x||=1} |\langle Tx, x\rangle|$). Nagrinėjamu atveju $M = \sup_{||x||=1} |\langle Tx, x\rangle|$, ir, jei $||x|| = 1$, tai iš nelygybės

$$|\langle Tx, x\rangle)| \leq ||Tx||||x|| \leq ||T||||x||^2 = ||T||$$

gauname

$$M = \sup_{||x||=1} |\langle Tx, x\rangle| \leq ||T||. \tag{15.7}$$

Iš kitos pusės, su kiekvienu $y \in \mathbb{H}$ galioja $\langle Ty, y\rangle \leq M||y||^2$. Paėmę bet kurį $z \in \mathbb{H}, \quad z \neq 0$ ir, apibrėžę

$$\lambda = \Big(\frac{||Tz||}{||z||}\Big)^{1/2}, \quad u = \frac{Tz}{\lambda},$$

bei pasinaudoję (**??**) formule ir lygiagretainio taisykle,išvedame

$$\begin{aligned} ||Tz||^2 = \langle T(\lambda z), u\rangle &= \frac{1}{4}\{\langle T(\lambda z + u), \lambda z + u\rangle - \langle T(\lambda z - u), \lambda z - u\rangle\} \\ &\leq \frac{1}{4}M\{||\lambda z + u||^2 + ||\lambda z - u||^2\} = \frac{1}{2}M\{||\lambda z||^2 + ||u||^2\} \\ &= \frac{1}{2}M\{\lambda^2||z||^2 + \frac{1}{\lambda^2}||Tz||^2\} = M||z||||Tz||. \end{aligned} \tag{15.8}$$

Čia verta pastebėti, kad (**??**) formulėje menamoji dalis lygi nuliui, jei $\langle Tx, y\rangle$ – realusis skaičius. Nagrinėjamu atveju taip ir yra, nes $\langle T(\lambda z), u\rangle$ yra lygus tam tikro elemento normos kvadratui.

Iš (15.8) gauname $||Tz|| \leq M||z||$, tay yra

$$||T|| \leq M. \tag{15.9}$$

(15.7) ir (15.9) įverčiai įrodo, kad $M = ||T||$.

Iš skaičiaus M apibrėžimo išplaukia, kad egzistuoja tokia elementų seka (x_n), kad $||x_n|| = 1$, $\langle Tx_n, x_n\rangle = M - \delta_n$, čia $\delta_n \to 0)$, kai $n \to \infty$. Be to, $||Tx_n|| \le ||T|| \cdot ||x_n|| = ||T|| = M$. Todėl

$$||Tx_n - Mx_n||^2 = \langle Tx_n - Mx_n, Tx_n - Mx_n\rangle = ||Tx_n||^2 - 2M\langle Tx_n, x_n\rangle$$
$$+ M^2||x_n||^2 \le M^2 - 2M(M - \delta_n) + M^2 = 2M\delta_n.$$

Iš čia gauname

$$||Tx_n - Mx_n|| \le \sqrt{2M\delta_n}.$$

Bet tai reiškia, kad $Tx_n - Mx_n \to 0$, $||x_n|| = 1$. Pritaikę 15.1 išvadą gauname, kad $M \in \sigma(T)$.

■

Iš šios teoremos išvedame, kad kiekvieno savijungio operatoriaus spektras yra netuščia aibė (**žr. bendresnį teiginį, suformuluotą po 15.6 pavyzdžio**).

15.7 pavyzdys. Dar kartą nagrinėkime operatorių

$$Tf(t) = tf(t), \quad t \in [0, 1],$$

tik šį kartą apibrėžtą Hilberto erdvėje $L_2(0, 1)$. Nesunkiai galime įsitikinti, kad $m = 0$, $M = 1$. Parodysime, kad visi intervalo $[0, 1]$ taškai priklauso spektrui. Tegu $0 \le \lambda \le 1$. Nagrinėkime intervalą $[\lambda, \lambda + \varepsilon] \subset [0, 1]$ (arba $[\lambda - \varepsilon, \lambda]$, jei $\lambda = 1$) ir apibrėžiame funkcijas

$$f_\varepsilon(t) = \begin{cases} \varepsilon^{-1/2}, & \text{kai } t \in [\lambda, \lambda + \varepsilon], \\ 0, & \text{kai } t \notin [\lambda, \lambda + \varepsilon]. \end{cases}$$

Nesunku suskaičiuoti, kad $||f_\varepsilon|| = 1$ ir $||T_\lambda f_\varepsilon||^2 = \varepsilon^2/3$. Todėl, kai $\varepsilon \to 0$, turime $||T_\lambda f_\varepsilon|| \to 0$ ir $||f_\varepsilon|| = 1$. Belieka pritaikyti 15.1 išvadą. Kaip ir ankstesniuose pavyzdžiuose??????????, nesunku įsitikinti, kad tikrinių reikšmių šis operatorius neturi.

Jei operatorius T – savijungis ir kompaktiškas, tai, apjungiant šio ir ankstesnio skyrelių rezultatus, gauname tokį šių operatorių spektro aprašymą: spektrą sudaro tik tikrinės reikšmės, kurių yra baigtinis skaičius arba skaiti aibė; visos tikrinės reikšmės yra intervale $[m, M]$, be to, abu intervalo galai – operatoriaus tikrinės reikšmės.

Skyrelį baigsime dviem svarbiomis teoremomis apie savijungio kompaktiško operatoriaus spektrą. Jos dažnai vadinamos Hilberto-Šmidto arba kompaktiškojo operatoriaus spektrinėmis teoremomis.

15.12 teorema. (Hilberto-Šmidto.) *Jei $T \in L(\mathbb{H})$ – kompaktiškasis savijungis operatorius, tai egzistuoja baigtinė arba skaiti ortonormuota operatoriaus T tikrinių elementų sistema (ψ_k), atitinkanti visas nelygias nuliui tikrines reikšmes (λ_k), t.y. $T\psi_k = \lambda_k\psi_k$, su kiekvienu $k \in \mathbb{N}$. Be to, su kiekvienu $x \in \mathbb{H}$ teisingos formulės*

$$x = \sum_{k=1}^{\infty}(x, \psi_k)\psi_k + x', \tag{15.10}$$

$Tx' = 0$ ir

$$Tx = \sum_{k=1}^{\infty}(x, \psi_k)\lambda_k\psi_k. \tag{15.11}$$

Įrodymas. Sakykime, λ_1 ir ψ_1 yra atitinkamai tikrinė reikšmė ir ją atitinkantis tikrinis elementas, kurie tenkina sąryšius $\lambda_1 = \langle T\psi_1, \psi_1\rangle)$, $||T|| = |\lambda_1| = \max_{||x||=1} |\langle Tx, x\rangle|$. Kad jie egzistuoja, išplaukia iš 15.8 ir 15.11 teoremų. Tarkime, kad jau rasti ortonormuotieji tikriniai elementai $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n$, atitinkantys tikrines reikšmes $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$. Be to, $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n| > 0$. Ieškosime tikrinės reikšmės λ_{n+1} ir ją atitinkančio tikrinio elemento ψ_{n+1}. Kaip žinome, tiesinis apvalkas $L_n = \text{tap}\{\psi_1, ..., \psi_n\}$ ir jo ortogonalusis papildinys $L_n^\perp$ yra erdvės $\mathbb{H}$ poerdviai. Be to, kiekvienas $x \in \mathbb{H}$ vieninteliu būdu užrašomas $x = y + z$, $y \in L_n, z \in L_n^\perp$. Imkime bet kurį $y \in L_n$. Tada $y = \sum_{k=1}^n \alpha_k\psi_k$ ir $Ty = \sum_{k=1}^n \alpha_k T\psi_k = \sum_{k=1}^n \alpha_k\lambda_k\psi_k \in L_n$. Tai rodo, kad poerdvis L_n yra invariantiškas operatoriaus T atžvilgiu. Kita vertus, su visais $y \in L_n$ ir $z \in L_n^\perp$ teisinga lygybė $(Tz, y) = (z, Ty) = 0$, nes $Ty \in L_n$. Vadinasi, ir poerdvis $L_n^\perp$ invariantiškas operatoriaus T atžvilgiu. Kadangi $L_n^\perp$ savo ruožtu yra Hilberto erdvė ir operatoriaus T siaurinys $T_n : L_n^\perp \to L_n^\perp$ – savijungis kompaktiškasis operatorius, tai, remiantis aukščiau minėtomis teoremomis, galime rasti tokią operatoriaus T tikrinę reikšmę λ_{n+1} ir ją atitinkantį tikrinį elementą $\psi_{n+1} \in L_n^\perp$, kad būtų $||\psi_{n+1}|| = 1$ ir $|\lambda_{n+1}| = ||T_n|| \leq ||T_{n-1}|| = |\lambda_n|$, nes $L_n^\perp \subset L_{n-1}^\perp$. Čia $||T_n||$ – operatoriaus T_n norma poerdvyje $L_n^\perp$, t. y.

$$||T_n|| = \sup_{x \in L_n,\ ||x|| \leq 1} ||T_n x||.$$

Vadinasi, įrodėme, kad tikrinė reikšmė λ_{n+1} ir tikrinis elementas ψ_{n+1} egzistuoja, jei $T \neq 0$ poerdvyje $L_n^\perp$.

Atskirai tirsime du galimus atvejus:

1) egzistuoja toks numeris m, kad $T = 0$ poerdvyje $L_m^\perp$;

2) $||T||_m > 0$ su visais $m \in \mathbb{N}$.

Pirmuoju atveju kiekvienas $x \in \mathbb{H}$ vieninteliu būdu išdėstomas $x = y + x'$, čia $y = \sum_{k=1}^m \alpha_k \psi_k \in L_m$, o $x' \in L_m^\perp$; be to, $\alpha_k = \langle y, \psi_k \rangle = \langle x, \psi_k \rangle, k = 1, 2, ..., m$. Tada $x = \sum_{k=1}^m \langle x, \psi_k \rangle \psi_k + x'$ ir $Tx = \sum_{k=1}^m \langle x, \psi_k \rangle T\psi_k + Tx' = \sum_{k=1}^m \langle x, \psi_k \rangle \lambda_k \psi_k$, nes $Tx' = 0$. Vadinasi, šiuo atveju (15.10) ir (15.11) formulės įrodytos.

Antruoju atveju, kaip matyti iš teoremos pirmosios dalies įrodymo, egzistuoja skaičioji nelygių nuliui operatoriaus T tikrinių reikšmių sistema (λ_k) ir ją atitinkanti ortonormuota ir skaiti tikrinių elementų sistema (ψ_k): $T\psi_k = \lambda_k \psi_k$ su visais $k \in \mathbb{N}$, ir $|\lambda_1| \geq \cdots \geq |\lambda_n| \geq \cdots$. Remiantis 15.8 teorema,

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_n = 0.$$

Nagrinėkime erdvės $\mathbb{H}$ poerdvį $L = [\text{tap}\{\psi_k\}]$ ir jo ortogonalųjį papildinį $L^\perp$. Kiekvienas $y \in L$ yra užrašomas $y = \sum_{k=1}^\infty \langle y, \psi_k \rangle \psi_k$. Kita vertus, remdamiesi nelygybe

$$||T||_\infty \leq |\lambda_n|$$

su visais $n \in \mathbb{N}$, gauname, kad $T = 0$ poerdvyje $L^\perp$ (čia $||T||_\infty$ – operatoriaus T norma poerdvyje $L^\perp$). Remdamiesi kiekvieno elemento $x \in \mathbb{H}$ ortogonaliuoju dėstiniu $x = y + x', y \in L, x' \in L^\perp$, gauname $\langle y, \psi_k \rangle = \langle x, \psi_k \rangle$ su visais $k \in \mathbb{N}$. Vadinasi, $x = \sum_{k=1}^\infty \langle x, \psi_k \rangle \psi_k + x'$ ir $Tx = \sum_{k=1}^\infty \langle x, \psi_k \rangle \lambda_k \psi_k$, t.y. ir šiuo atveju (2.1), (2.2) formulės teisingos. ∎

Poerdvis $L^\perp$, figūruojantis teoremos įrodyme, yra sudarytas iš erdvės $\mathbb{H}$ nulio ir visų „tikrinių elementų", atitinkančių operatoriaus T „tikrinę reikšmę" $\lambda = 0$. Jei $\mathbb{H}$ – separabilioji erdvė, tai galime rasti skaičiąją arba baigtinę ortonormuotąją poerdvio $L^\perp$ bazę, sakykime, (ϕ_k). Tada ortonormuotoji sistema (ψ_k, ϕ_k), sudaryta iš operatoriaus T tikrinių elementų, yra erdvės $\mathbb{H}$ bazė. Šiuos samprotavimus sujungę su ..... teorema, įsitikiname, kad teisingas šis teiginys.

15.13 teorema. (Hilberto-Šmidto.) *Jei $\mathbb{H}$ separabilioji Hilberto erdvė ir $T \in L(\mathbb{H})$ – kompaktiškas savijungis operatorius, tai egzistuoja erdvės $\mathbb{H}$ ortonormuotoji bazė (e_n), sudaryta iš operatoriaus T tikrinių elementų. Jei $\dim(\mathbb{H}) = \infty$, tai atitinkamos tikrinės reikšmės (λ_n) konverguoja į nulį, kai $n \to \infty$, ir, jei*

$$x = \sum_{k=1}^\infty c_k e_k,$$

tai

$$Tx = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \lambda_k e_k.$$

Pastaroji teorema dažnai vadinama kompaktiškojo savijungio operatoriaus spektrine teorema.