13 paskaita

13.1 Tiesiniai operatoriai

Šiame skyriuje nagrinėjamos normuotųjų erdvių tiesinės funkcijos – tiesiniai operatoriai. Baigtinės dimensijos erdvėms, kaip matysime, jie aprašomi matricomis. Taigi tiesinių operatorių teorija yra natūralus matricų teorijos apibendrinimas abstrakčioms tiesinėms erdvėms. Taip atvirkštinis operatorius (jam skirtas **??** skyrelis) apibendrina atvirkštinę matricą, jungtinis operatorius (jam skirtas **??** skyrelis) – transponuotą matricą.

Taikydami Bero teoremą apie kategorijas, įrodysime kertinius funkcinės analizės rezultatus: tolygiojo aprėžtumo principą ir uždarojo grafiko teoremą.

Labai svarbi tiesinių operatorių šeima – kompaktiškieji operatoriai. Jiems skirtas paskutinysis **??** skyrelis.

13.1.1 Sąvokos ir savybės

Tarkime, $\mathbb{E}, \mathbb{F}$ – tiesinės normuotos erdvės virš to paties skaliarų kūno $\mathbb{K}$, T – funkcija, apibrėžta aibėje $D(T) \subset \mathbb{E}$ ir įgyjanti reikšmes erdvėje $\mathbb{F}$. Funkcija T vadinama tiesiniu operatoriumi, jei

- aibė $D(T)$ yra tiesinė;
- $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$ su bet kuriais $x, y \in D(T)$ ir $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Vietoj $T(x)$ rašysime Tx, jei tik tai nekels painiavos. Aibė $D(T)$ vadinama operatoriaus T apibrėžimo sritimi, o aibė $R(T) = \{Tx : x \in D(T)\} = T(D(T))$ – reikšmių aibe.

Priminsime, kad atvaizdis $T : D(T) \to \mathbb{F}$ yra tolydus taške $x \in D(T)$, jei kiekvieną $\varepsilon > 0$ atitinka toks $\delta > 0$, kad

$$||Tx - Ty|| \leq \varepsilon, \quad \text{kai} \quad y \in D(T) \quad \text{ir} \quad ||x - y|| < \delta.$$

Atvaizdis T tolydus, jei jis tolydus kiekviename taške.

Patikrinti tolydumą dažnai lengviau pasinaudojus ekvivalenčiu apibrėžimu ribų terminais: T tolydus taške x tada ir tik tada, kai $\lim_{n\to\infty} Tx_n = Tx$ su kiekviena seka $(x_n) \subset D(T)$, kurios riba $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Atvaizdis T vadinama aprėžtu, jei jis kiekvieną aprėžtą aibę atvaizduoja į aprėžtą.

13.1 teorema. *Jei $F : D(T) \to \mathbb{F}$ – tiesinis operatorius, tai šie teiginiai yra ekvivalentūs:*

1) T tolydus nulyje;

2) T tolydus;

3) T aprėžtas;

4) egzistuoja toks skaičius $M \geq 0$, kad

$$||T(x)|| \leq M||x||, \quad \text{su visais} \quad x \in D(T).$$

Įrodymas. Šios teoremos įrodymas ekvivalentus **??** teoremos įrodymui, todėl paliekamas skaitytojui vietoj pratimo. ∎

Remiantis 13.1 teorema, tiesiniam tolydžiam operatoriui $T : D(T) \to \mathbb{F}$, skaičius

$$||T|| = \inf\{M \geq 0 : ||Tx|| \leq M||x|| \quad \text{su visais} \quad x \in D(T)\}$$

yra baigtinis. Jis vadinamas operatoriaus T norma. Dažnai naudojami šie ekvivalentūs operatoriaus normos apibrėžimai:

$$||T|| = \sup_{x\in D(T):||x||=1} ||Tx||;$$
$$||T|| = \sup_{x\in D(T):x\neq 0} \frac{||Tx||}{||x||};$$
$$||T|| = \sup_{x\in D(T):||x||\leq 1} ||Tx||.$$

Iš operatoriaus normos apibrėžimo išplaukia nelygybė

$$||Tx|| \leq ||T|| \cdot ||x|| \quad \text{teisinga su visais} \quad x \in D(T). \tag{13.1}$$

Dviejų operatorių $S : D(S) \to \mathbb{F}$ ir $T : D(T) \to \mathbb{F}$ suma $S + T$ apibrėžta aibėje $D(S + T) = D(S) \cap D(T)$: $(S + T)(x) = Sx + Tx, x \in D(S + T)$.

Skaliaro $\alpha \in \mathbb{K}$ ir operatoriaus $T : D(T) \to \mathbb{F}$ sandauga αT apibrėžta aibėje $D(T) : (\alpha T)(x) = \alpha Tx, x \in D(T)$. Lengva įsitikinti, kad tiesinių tolydžių operatorių suma yra tiesinis tolydus operatorius ir jo normai teisingas įvertis

$$||S + T|| \leq ||S|| + ||T||. \tag{13.2}$$

Tikrai, tarkime, operatoriai $S : D(S) \to \mathbb{F}$, $T : D(T) \to \mathbb{F}$ yra tiesiniai tolydūs. Imdami $x \in D(S) \cap D(T)$ su norma $||x|| \leq 1$, gauname

$$\begin{aligned} &||(T + S)x|| = ||Tx + Sx|| \leq \\ &||Tx|| + ||Sx|| \leq \\ &||T|| + ||S||. \end{aligned}$$

Vadinasi, operatorius $(T + S)$ yra aprėžtas ir jo normai teisinga (13.2) nelygybė. Taip pat lengva patikrinti, kad αT yra tiesinis tolydus operatorius, jei T tiesinis tolydus ir $\alpha \in \mathbb{K}$. Be to, $||\alpha T|| = |\alpha| \cdot ||T||$.

Tarkime, $\mathbb{E}, \mathbb{F}, \mathbb{G}$ – normuotos erdvės, $T : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$, $S : \mathbb{F} \to \mathbb{G}$ – tiesiniai operatoriai. Jei $D(S) \subset R(T)$, tai sandauga ST vadinamas operatorius apibrėžtas lygybe

$$ST(x) = S(Tx), \quad \text{kai} \quad x \in D(T) \subset \mathbb{E}.$$

Akivaizdu, kad operatorius ST atvaizduoja erdvę $\mathbb{E}$ į erdvę $\mathbb{G}$ ir yra tiesinis. Jis tolydus, jei abu operatoriai T ir S tolydūs. Šiuo atveju

$$||ST|| \leq ||S|| \cdot ||T||.$$

Analogiškai galime apibrėžti sumą ir sandaugą daugiau nei dviejų operatorių.

13.1.2 Tiesinių tolydžių operatorių pavyzdžiai

13.1 pavyzdys. Normuotoje erdvėje $\mathbb{E}$ apibrėžkime

$$I_{\mathbb{E}}x = x, \quad \text{kai} \quad x \in \mathbb{E}.$$

Operatorius $I_{\mathbb{E}} : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ vadinamas tapatinguoju. Akivaizdu, kad jis yra tiesinis tolydus ir jo norma lygi vienam.

13.2 pavyzdys. Šiame pavyzdyje išnagrinėsime baigtiniamačių erdvių tiesinius operatorius. Pirmiausia įrodysime šį rezultatą.

13.2 teorema. *Jei $\mathbb{E}$ – baigtiniamatė erdvė, tai kiekvienas tiesinis operatorius $T : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ tolydus.*

Įrodymas. Sakykime, $\dim \mathbb{E} = m$ ir $\{e_1, e_2, ..., e_m\}$ – erdvės $\mathbb{E}$ bazė. Imkime bet kurį $x \in \mathbb{E}$ ir konverguojančią į x seką $(x_n) \subset \mathbb{E}$. Tarkime, $x = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k e_k$ ir $x_n = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{nk} e_k$, $n \in \mathbb{N}$. Kadangi konvergavimas baigtiniamatėje erdvėje yra ekvivalentus kiekvienos koordinačių sekos konvergavimui, tai $\lim_{n\to\infty} \alpha_{nk} = \alpha_k$, kai $k = 1, ..., m$. Kita vertus, jei $T : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ – tiesinis operatorius, tai $Tx = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k Te_k$ ir $Tx_n = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{nk} Te_k$. Iš šių išraiškų matome, kad

$$\lim_{n\to\infty} Tx_n = \sum_{k=1}^{m} \lim_{n\to\infty} \alpha_{nk} Te_k = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k Te_k = Tx,$$

t.y. operatorius T tolydus. ■

Dabar, tarkime, abi erdvės $\mathbb{E}$ ir $\mathbb{F}$ yra baigtiniamatės $m = \dim \mathbb{E}$, $n = \dim \mathbb{F}$. Tegu $e_1, ..., e_m \in \mathbb{E}$ – erdvės $\mathbb{E}$ bazė, o $f_1, ..., f_n \in \mathbb{F}$ – erdvės F bazė. Jei $x \in \mathbb{E}$, o $y \in \mathbb{F}$ tai

$$x = \sum_{k=1}^{m} x_k e_k, \quad y = \sum_{k=1}^{n} y_k f_k.$$

Nagrinėkime tiesinį operatorių $T : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ ir tarkime, $Tx = y$. Tiesiškumas reiškia, kad

$$y = T\Big(\sum_{k=1}^{m} x_k e_k\Big) = \sum_{k=1}^{m} x_k T(e_k).$$

Kiekvieną elementą Te_k užrašę bazėje (f_j),

$$T(e_k) = \sum_{j=1}^{n} t_{jk} f_j, \quad k = 1, \ldots, m,$$

gauname

$$y = \sum_{j=1}^{n} y_j f_j = \sum_{k=1}^{m} x_k T(e_k) = \sum_{k=1}^{m} x_k \Big(\sum_{j=1}^{n} t_{jk} f_j\Big) =$$
$$\sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{k=1}^{m} t_{jk} x_k\Big) f_j.$$

Kadangi bazės elementai $f_1, \dots, f_n$ tiesiškai nepriklausomi, tai iš pastarosios nelygybės išvedamme tokį sąryšį tarp elementų x ir $y = Tx$ koordinačių:

$$y_j = \sum_{k=1}^{m} t_{jk} x_k, \quad j = 1, \dots, n.$$

Tai yra, elemento y koordinates $y_1, \dots, y_n$ gauname elemento x koordinates $x_1, \dots, x_m$ paveikę matrica

$$A = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1m} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nm} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}.$$

Taigi, kiekvieną tiesinį operatorių $T : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ atitinka $m \times n$ matrica $A = (t_{ij})$. Ir atvirkščiai, kiekvieną $m \times n$ matricą (t_{ij}) atitinka tiesinis operatorius $T : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$, apibrėžtas formule

$$Tx = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} t_{kj} x_k f_j,$$

kai $x = \sum_{k=1}^{m} x_k e_k$. Taip, baigtiniamačių tiesinių erdvių tiesinius operatorius įprasta sutapatinti su juos atitinkančiomis matricomis, t. y. $T = (t_{jk})$.

Operatoriaus $T = (t_{kj})$ norma priklauso nuo erdvių $\mathbb{E}$ ir $\mathbb{F}$ normų. Išnagrinėkime porą atvejų. Priminsime, kad erdvę $\mathbb{R}^n$ su norma $||x|| = \max_k |x_k|$, kai $x = (x_k)$, žymime ℓ_∞^m, o su norma $||x|| = \sum_{k=1}^{m} |x_k|$ – ℓ_1^m.

a) Nagrinėkime $T = (t_{jk}) : \ell_\infty^m \to \ell_\infty^n$.

Įrodysime, kad

$$||T|| = \max_j \sum_{k=1}^{m} |t_{jk}|.$$

Pažymėkime

$$L = \max_j \sum_{k=1}^{m} |t_{jk}|.$$

Kadangi

$$||Tx|| = \max_j |y_j| \le \max_j \sum_{k=1}^m |t_{jk}|x_k| \le ||x|| \max_j \sum_{k=1}^m |t_{jk}| = L||x||,$$

tai, $||T|| \le L$. Tegu j_0 yra toks indeksas su kuriuo $L = \sum_{k=1}^m |t_{j_0k}|$. Vektorių $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0m})$ apibrėškime imdami

$$x_{0k} = \mathrm{sign} t_{j_0k}, \quad k = 1, \dots, m.$$

Akivaizdu, kad $||x_0|| = 1$. Todėl

$$||T|| \ge ||Tx_0|| = \max_j \Big| \sum_{k=1}^m t_{jk} x_{0k} \Big| \ge \sum_{k=1}^m t_{j_0k} x_{0k} = \sum_{k=1}^m |t_{j_0k}| = L.$$

b) Nagrinėkime $T = (t_{jk}) : \ell_1^m \to \ell_1^n$.

Šiuo atveju

$$||T|| = \max_k \sum_{j=1}^n |t_{jk}|.$$

Pažymėkime

$$M = \max_k \sum_{j=1}^n |t_{jk}|.$$

Vėl galime vertinti

$$||Tx|| = \sum_{j=1}^n |y_j| \le \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m |t_{jk}|x_k| \le \sum_{k=1}^m \Big(\sum_{j=1}^n |t_{jk}| \Big) |x_k| \le M||x||,$$

todėl $||T|| \le M$. Tegu k_0 yra toks indeksas su kuriuo

$$M = \sum_{j=1}^n |t_{jk_o}|.$$

Paėmę vektorių $x_0 = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, kai vienetukas yra k_0 vietoje, gauname

$$||T|| \ge ||Tx_0|| = \sum_{j=1}^n \Big| \sum_{k=1}^m t_{jk} x_{0k} \Big| = M.$$

13.3 pavyzdys. Operatorius $T \in L(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ vadinamas baigtiniamačiu, jei jo reikšmių aibė yra baigtiniamatė, t.y. $\dim R(T) < \infty$.

Imkime operatorių $T : \mathbb{E} \to \mathbb{F}, T = z_0 \otimes f_0$, kai $f_0 \in \mathbb{E}^*, z_0 \in \mathbb{F}$, apibrėžtą formule

$$Tx = z_0 \otimes f_0(x) = f_0(x)z_0, \quad x \in \mathbb{E}.$$

Akivaizdu, kad T yra tiesinis tolydus ir jo norma $||z_0 \otimes f_0|| = ||z_0|| \cdot ||f_0||$.

13.1 teiginys. *Operatorius $T \in L(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ baigtiniamatis tada ir tik tada, kai jis išreiškiamas baigtine suma*

$$T = \sum_{k=1}^{n} z_k \otimes f_k, \tag{13.3}$$

čia $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{F}, f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{E}^*$.

Įrodymas. Pakankamumas. Akivaizdu, kad operatorius, aprašomas (13.3) formule yra baigtiniamatis.

Būtinumas. Tarkime, $\dim(R(T)) = n$. Kadangi $R(T)$ tiesinė erdvė, egzistuoja tokių n tiesiškai nepriklausomų vektorių, sakykime, $z_1, \ldots, z_n$, kad kiekvieną $y \in R(T)$ vienareikšmiškai galime išreikšti

$$y = Tx = \sum_{k=1}^{n} a_k z_k. \tag{13.4}$$

Remiantis **??** išvada, elementams $z_1, \ldots, z_n$ egzistuoja funkcionalai $g_1, \ldots, g_n \in \mathbb{F}^*$, kurie tenkina lygybes

$$g_k(z_j) = \delta_{kj}, \quad k, j = 1, \ldots, n.$$

Todėl $a_k = g_k(Tx)$ su kiekvienu $k = 1, \ldots, n$. Apibrėžkime funkcionalus $f_k : \mathbb{E} \to \mathbb{K}$, imdami

$$f_k(x) = g_k(Tx), \quad x \in \mathbb{E}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Nesunku įsitikinti, kad $f_k \in \mathbb{E}^*$ su visais $k = 1, \ldots, n$. Dabar (13.3) išplaukia iš (13.4). ∎

Baigtiniamačiai operatoriai yra tolydūs. Tai akivaizdu iš tik ką įrodytos jų reprezentacijos teoremos.

Labai reikšmingą vietą tiesinių tolydžiųjų operatorių teorijoje užima integraliniai operatoriai, veikiantys funkcijų erdvėse. Paprasčiausias integralinis operatorius funkcijai f, apibrėžtai intervale $[a, b]$ (čia inetervalas $[a, b]$ gali taip pat būti $(-\infty, \infty), (-\infty, b]$ arba $[a, \infty)$), priskiria funkciją Kf pagal formulę

$$Kf(s) = \int_a^b k(s,t)f(t)dt, \quad s \in [a,b]. \tag{13.5}$$

Dviejų argumentų funkcija k vadinama integralinio operatoriaus K branduoliu. Atsižvelgiant į braduolio savybes, gaunami operatoriai veikiantys įvairiose funkcijų erdvėse. Jie vadinami integraliniais Fredholmo operatoriais. Keletą pavyzdžių išnagrinėsime detaliau.

13.4 pavyzdys. Šiame pavyzdyje integralinį Fredholmo operatorių apibrėšime tolydinių funkcijų erdvėje $\mathcal{C}[a, b]$.

Sakykime, $k : [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}$ – tolydžioji funkcija. (13.5) lygtimi, kai $f \in \mathcal{C}[a, b]$, apibrėžiamas tiesinis tolydus operatorius $K : \mathcal{C}[a, b] \to \mathcal{C}[a, b]$. Be to,

$$||K|| = \max_{a \le s \le b} \int_a^b |k(s,t)|dt. \tag{13.6}$$

Operatoriaus K tiesiškumas akivaizdus. Pažymėkime

$$M = \max_{a \le s \le b} \int_a^b |k(s,t)|dt.$$

Iš nelygybės

$$||Kf|| \le \max_{a \le s \le b} \left| \int_a^b k(s,t)f(t)dt \right| \le ||f|| \max_{a \le s \le b} \int_a^b |k(s,t)|dt = M||f||$$

išplaukia operatoriaus T tolydumas ir įvertis $||K|| \le M$. Lieka įrodyti priešingą nelygybę. Kadangi integralas $\int_a^b |k(s,t)|dt$ yra tolydi argumento s funkcija, tai egzistuoja toks $s_0 \in [a, b]$ su kuriuo

$$M = \int_a^b |k(s_0,t)|dt.$$

Nagrinėkime funkcionalą $F : \mathcal{C}[a, b] \to \mathbb{R}$, apibrėžtą formule

$$F(f) = \int_a^b k(s_0,t)f(t)dt, \quad f \in \mathcal{C}[a,b].$$

Pasinaudoję **??** pavyzdžiu, su kiekvienu $\varepsilon > 0$ rasime tokią funkciją $f_\varepsilon \in \mathcal{C}[a, b]$, kad $||f_\varepsilon|| \leq 1$ ir

$$F(f_\varepsilon) \geq ||F|| - \varepsilon = \int_a^b |k(s_0, t)| dt - \varepsilon = M - \varepsilon.$$

Taigi

$$||K|| \geq ||K(f_\varepsilon)|| \geq \int_a^b k(s_0, t) f_\varepsilon(t) dt \geq M - \varepsilon.$$

Kadangi $\varepsilon > 0$ laisvai pasirenkamas, tai $||K|| \geq M$ ir (13.6) lygybė įrodyta.

13.5 pavyzdys. Šiame pavyzdyje integralinį Fredholmo operatorių nagrinėsime integruojamų funkcijų erdvėje $L_1(a, b)$. Paprastumo dėlei vėl tarkime, kad funkcija $k : [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}$ tolydi. Susilpninti šią sąlygą paliekame skaitytojui vietoj pratimo.

Lygtimi (13.5) kai $f \in L_1(a, b)$, apibrėžiamas tiesinis tolydus operatorius $K_1 : L_1(a, b) \to L_1(a, b)$, kurio norma yra

$$||K_1|| = \max_{a \leq t \leq b} \int_a^b |k(s, t)| ds. \tag{13.7}$$

Akivaizdu, kad operatorius K_1 apibrėžtas korektiškai, t. y., $K_1 f \in L_1(a, b)$ su visomis $f \in L_1(a, b)$. Jo tiesiškumas taip pat akivaizdus. Pažymėkime

$$M_1 = \max_{a \leq t \leq b} \int_a^b |k(s, t)| ds.$$

Pritaikę Fubinio teoremą apie integravimo tvarkos sukeitimą, išvedame

$$||K_1 f|| = \int_a^b \Big| \int_a^b k(s, t) f(t) dt \Big| ds \leq$$
$$\int_a^b \Big[\int_a^b |k(s, t)| ds \Big] |f(t)| dt \leq M_1 ||f||,$$

su visais $f \in L_1(a, b)$. Vadinasi, $||K_1|| \leq M_1$. Kaip ir pereitame pavyzdyje, parinkime $t_0 \in [a, b]$ tokį, kad

$$M_1 = \int_a^b |k(s, t_0)| ds.$$

Pasinaudoję funkcijos k tolydumu, kiekvienam $\varepsilon > 0$ rasime tokį $\delta > 0$, kad

$$|k(s', t') - k(s, t)| < \varepsilon, \quad \text{kai} \quad |s - s'| < \delta, |t - t'| < \delta.$$

Tarkime, taškai $t_1, t_2 \in [a,b]$ yra tokie, kad $t_0 \in [t_1, t_2]$ ir $0 < t_2 - t_1 < \delta$. Apibrėžkime funkciją

$$f_0(t) = \begin{cases} \frac{1}{t_2 - t_1}, & \text{kai } \ t \in [t_1.t_2], \\ 0, & \text{kitur.} \end{cases}$$

Akivaizdu, kad funkcija $f_0 \in L_1(a,b)$ ir jos norma $||f_0|| = 1$. Todėl

$$||K_1|| \geq ||K_1 f_0|| = \int_a^b \Big| \int_a^b k(s,t) f_0(t) dt \Big| ds =$$
$$\frac{1}{t_2 - t_1} \int_a^b \Big| \int_{t_1}^{t_2} k(s,t) dt \Big| ds \geq \frac{1}{t_2 - t_1} \int_a^b \Big| \int_{t_1}^{t_2} k(s,t_0) dt \Big| ds -$$
$$\frac{1}{t_2 - t_1} \int_a^b \int_{t_1}^{t_2} |k(s,t_0) - k(s,t)| dt ds = M_1 - \varepsilon(b-a).$$

Iš čia išplaukia, $||K_1|| \geq M_1$ ir tuo pačiu (13.7).

Atskiras integralinių Fredholmo operatorių atvejis yra integraliniai Voltero operatoriai, nusakomi lygybe

$$K_2 f(s) = \int_a^s k(s,t) f(t) dt, \quad s \in [a,b]. \tag{13.8}$$

Juos galime interpretuoti kaip Fredholomo operatorius su tokiu branduoliu k, kuriam $k(s,t) = 0$, kai $t > s$.

13.1.3 Erdvė $L(\mathbb{E}, \mathbb{F})$

Tiesinių tolydžių operatorių $T : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ aibę pažymėkime $L(\mathbb{E}, \mathbb{F})$.

13.3 teorema. *Aibė $L(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ yra tiesinė erdvė , o atvaizdis $||\cdot|| : L(\mathbb{E}, \mathbb{F}) \to \mathbb{R}$ operatoriui priskiriantis jo normą – tos erdvės norma. Be to, jei $\mathbb{F}$ Banacho erdvė, tai ir normuota erdvė $L(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ – Banacho.*

Įrodymas. Jau pereitame skyrelyje įsitikinome, kad erdvė $L(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ yra tiesinė ($S + T \in L(\mathbb{E}, \mathbb{F})$, $\alpha T \in L(\mathbb{E}, \mathbb{F})$, jei $S, T \in L(\mathbb{E}, \mathbb{F}), \alpha \in \mathbb{K}$). Dabar tarkime, $\mathbb{F}$ – Banacho erdvė ir (T_n) – erdvės $L(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ Koši seka. Sakykime, $\varepsilon > 0$ ir N

– toks sveikasis skaičius, kad $||T_n - T_m|| < \varepsilon$, kai $n, m \geq N$. Jeigu $x \in E$ ir $n, m \geq N$, tai

$$||T_n x - T_m x|| = ||(T_n - T_m)x|| \leq ||T_m - T_n|| \cdot ||x|| \leq \varepsilon ||x||.$$

Iš čia išplaukia, kad $(T_n x)$ – erdvės $\mathbb{F}$ Koši seka. Kadangi erdvė $\mathbb{F}$ yra pilna, tai seka $(T_n x)$ konverguoja. Sakykime,

$$Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x.$$

Šia lygybe apibrėžiamas atvaizdis $T : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$. Įrodysime, kad $T \in L(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ ir $\lim_{n\to\infty} T_n = T$.

Sakykime, $x, y \in \mathbb{E}$, $\alpha, \beta \in K$. Remiantis apibrėžimu,

$$\begin{aligned}
&T(\alpha x + \beta y) = \lim_{n\to\infty} T_n(\alpha x + \beta y) = \\
&\alpha \lim_{n\to\infty} T_n x + \beta \lim_{n\to\infty} T_n y = \\
&\alpha T x + \beta T y.
\end{aligned}$$

Tai įrodo, kad atvaizdis T yra tiesinis. Kadangi

$$Tx - T_n x = \lim_{m\to\infty} T_m x - T_n x = \lim_{m\to\infty} (T_m x - T_n x),$$

tai

$$||Tx - T_m x|| = \lim_{m\to\infty} ||T_m x - T_n x||.$$

Iš čia

$$||Tx - T_n x|| \leq \varepsilon ||x||.$$

Šis įvertis teisingas su visais $x \in \mathbb{E}$ ir $n \geq N$. Taigi

$$||Tx|| \leq ||Tx - T_N x|| + ||T_N|| \leq \varepsilon ||x|| + ||T_N|| \cdot ||x|| = (\varepsilon + ||T_N||)||x||.$$

Iš čia matome, kad atvaizdis T aprėžtas, t.y. $T \in L(\mathbb{E}, \mathbb{F})$. Kadangi

$$||T_n - T|| = \sup_{x:||x||\leq 1} ||T_n x - Tx|| \leq \varepsilon,$$

jei $n \geq N$, tai $\lim_{n\to\infty} T_n = T$. ∎

13.1.4 Tolygiojo aprėžtumo principas

13.4 teorema. (Banacho – Šteinhauzo.) *Sakykime,* $\mathbb{E}, \mathbb{F}$ *– Banacho erdvės,* $\mathcal{T} \subset L(\mathbb{E}, \mathbb{F})$*. Jei su kiekvienu* $x \in \mathbb{E}$ *aibė* $\{Tx; T \in \mathcal{T}\}$ *aprėžta, tai aprėžta ir aibė* $\mathcal{T}$*, t.y. egzistuoja toks baigtinis skaičius* $C > 0$*, kad*

$$||T|| \leq C \quad \textit{su visais} \;\; T \in \mathcal{T}.$$

Įrodymas. Pažymėkime

$$A_n = \{x \in \mathbb{E} : ||Tx|| \leq n \quad \text{su visais} \;\; T \in \mathcal{T}\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pirmiausia įsitikinkime, kad aibės A_n uždaros. Jei (x_n) – aibės A_m elementų konverguojanti seka ir $x = \lim_{k\to\infty} x_k$, tai $||Tx_k|| \leq m$ su visais $T \in \mathcal{T}, k \in \mathbb{N}$. Be to, $\lim_{k\to\infty} ||Tx_k|| = ||Tx||$. Iš čia matome, kad $||Tx|| \leq m$. Taigi $x \in A_m$. Vadinasi, aibė A_m uždara.

Iš aibių A_m apibrėžimo išplaukia, kad $\mathbb{E} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Remiantis erdvės $\mathbb{E}$ pilnumu ir Bero teorema apie kategorijas, egzistuoja toks $m \in \mathbb{N}$, kad aibė A_m kur nors tiršta erdvėje $\mathbb{E}$, t. y. egzistuoja toks rutulys, sakykime, $S_r(x_0)$, kad $S_r(x_0) \subset A_m$. Tegu $x \in \mathbb{E}$, $||x|| < r$. Kadangi $x + x_0 \in A_m$, nes $x + x_0 \in S_r(x_0)$, tai

$$||Tx|| = ||T(x + x_0 - x_0)|| \leq ||T(x + x_0)|| + ||Tx_0|| \leq 2m.$$

Imdami bet kurį $x \neq 0$, gauname

$$||Tx|| = \left\|T\Big(\frac{rx}{2||x||}\Big)\right\| \cdot \frac{2||x||}{r} \leq \frac{4m}{r}||x||.$$

Taigi $||T|| \leq 4m/r \quad$ su visais $\; T \in \mathcal{T}$. ∎

Banacho–Šteinhauzo teorema taip pat vadinama tolygiojo aprėžtumo principu. Labai svarbios šios jos išvados.

13.1 išvada. *Tarkime,* $\mathbb{E}, \mathbb{F}$ *– Banacho erdvės ir* $(T_n) \subset L(\mathbb{E}, \mathbb{F})$*. Jei su kiekvienu fiksuotu* $x \in \mathbb{E}$ *seka* $(T_n(x))$ *konverguoja erdvėje* $\mathbb{F}$ *tai egzistuoja toks skaičius* $C > 0$*, kad*

$$\sup_n ||T_n|| \leq C.$$

13.2 išvada. *Tarkime,* $\mathbb{E}$ *– Banacho erdvė ir* $(F_n) \subset \mathbb{E}^*$. *Jei su kiekvienu fiksuotu* $x \in \mathbb{E}$ *seka* $(F_n(x))$ *konverguoja, tai egzistuoja toks skaičius* $C > 0$, *kad*

$$\sup_n ||F_n|| \leq C.$$

13.1.5 Uždarojo grafiko teorema

Tarkime, $\mathbb{E}, \mathbb{F}$ – tiesinės normuotos erdvės, T – tiesinis operatorius, apibrėžtas aibėje $D(T) \subset \mathbb{E}$ ir reikšmes įgyjantis erdvėje $\mathbb{F}$.

13.1 apibrėžimas. *Tiesinis operatorius* $T : D(T) \to \mathbb{F}$ *vadinamas uždaruoju, jei su kiekviena tokia seka* $(x_n) \subset D(T)$, *kad*

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} x_n = x \ \ \textit{erdvėje} \ \ \mathbb{E}, \\ &\lim_{n\to\infty} Tx_n = y \ \textit{erdvėje} \ \ \mathbb{F}, \end{aligned}$$

būtinai $x \in D(T)$ *ir* $Tx = y$.

Šį apibrėžimą geriau suprasime įsivedę operatoriaus grafiko sąvoką. Priminsime, kad $\mathbb{E} \times \mathbb{F} = \{(x, y) : x \in \mathbb{E}, y \in \mathbb{F}\}$ – tiesinė normuota erdvė, kurioje tiesinės operacijos ir norma apibrėžiamos formulėmis

$$\begin{aligned} &(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \\ &\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y), \\ &||(x, y)|| = ||x|| + ||y||. \end{aligned}$$

Be to, jei $\mathbb{E}$ ir $\mathbb{F}$ – Banacho erdvės, tai ir erdvė $\mathbb{E} \times \mathbb{F}$ – Banacho (įsitikinkite).

13.2 apibrėžimas. *Aibė* $G(T) = \{(x, Tx) : x \in D(T)\} \subset \mathbb{E} \times \mathbb{F}$ *vadinama atvaizdžio* T *grafiku.*

Teisingas toks ekvivalentus uždarojo operatoriaus apibrėžimas.

13.1 lema. *Tiesinis operatorius* $T : D(T) \to \mathbb{F}$ *yra uždaras tada ir tik tada, kai jo grafikas* $G(T)$ *– uždara erdvės* $\mathbb{E} \times \mathbb{F}$ *aibė.*

Įrodymas. Tarkime, T – uždarasis operatorius ir seka $(x_n) \subset D(T)$ yra tokia, kad $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ir $\lim_{n\to\infty} Tx_n = y$. Iš lygybės

$$||(x_n, Tx_n) - (x, y)|| = ||x_n - x|| + ||Tx_n - y|| \tag{13.9}$$

išplaukia $\lim_{n\to\infty}(x_n, Tx_n) = (x, y)$ erdvėje $\mathbb{E} \times \mathbb{F}$. Kadangi grafikas $G(T)$ yra uždara tos erdvės aibė, tai $(x, y) \in G(T)$. Tai yra $x \in D(T)$ ir $Tx = y$.

Dabar tarkime, aibė $G(T) \subset \mathbb{E} \times \mathbb{F}$ - uždara. Tegu $((x_n, Tx_n)) \subset G(T)$ ir

$$\lim_{n\to\infty} (x_n, Tx_n) = (x, y). \tag{13.10}$$

Iš (13.10) išplaukia, kad $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ir $\lim_{n\to\infty} Tx_n = y$. Pagal prielaidą $x \in D(T)$ ir $Tx = y$. Taigi $(x, y) = (x, Tx) \in G(T)$. ∎

Akivaizdu, kad bet kuris tiesinis tolydus atvaizdis $T : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ yra uždaras. Atvirkščias teiginys yra šioje uždarojo grafiko teoremoje.

13.5 teorema. *Tarkime, $\mathbb{E}, \mathbb{F}$ – Banacho erdvės, $T : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ – uždaras tiesinis atvaizdis. Tuomet*

a) egzistuoja tokios teigiamos konstantos M ir r, su kuriomis $||Tx|| \le M$, kai $||x|| \le r$.

b) $T \in L(\mathbb{E}, \mathbb{F})$.

Įrodymas. Pirmiausia pastebėkime, kad iš (b) išplaukia iš (a). Tikrai, jei $x \in \mathbb{E}$ ir $x \ne 0$, paėmę $z = rx/2||x||$ turime, kad $||z|| < r$ todėl $||Tz|| \le M$. Bet $Tz = rTx/2||x||$, todėl

$$||Tx|| \le 2Mr^{-1}||x||.$$

Lieka pasiremti 13.1 teorema.

Norėdami įrodyti (a), apibrėžkime

$$E_n = \{x \in \mathbb{E} : ||Tx|| < n\}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Tada

$$\mathbb{E} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Kadangi $\mathbb{E}$ Banacho erdvė, aibė $\mathbb{E}$ yra antrosios kategorijos pagal Bero teoremą. Vadinasi egzistuoja bent viena aibė, sakykime, E_k kuri nėra niekur netiršta. Tai reiškia, kad tos aibės uždarinyje $[E_k]$ yra netuščias rutulys. Sakykime,

$$S_t(x_0) = \{x : ||x - x_0|| < t\} \subset [E_k].$$

Nemažindami bendrumo, galime laikyti, kad $x_0 \in E_k$ (kitaip reiktų centrą šiek tiek pastumti). Iš šio sąryšio išplaukia, kad aibė $E_k - x_0$ yra tiršta rutulyje $S_t = \{x : ||x|| < t\}$. Tikrai, jei $x \in S_t$ tai $x + x_0 \in S_t(x_0)$, todėl kiekvieną $\varepsilon > 0$ atitinka toks $z \in E_k$ su kuriuo

$$||x + x_0 - z|| < \varepsilon.$$

Pastebėję, kad $z - x_0 \in E_{2k}$, kai $z \in E_k$, nes

$$||T(z - x_0)|| \leq ||Tz|| + ||Tx_0|| < 2k,$$

gauname, kad E_{2k} tiršta aibėje S_t. Kadangi $x \in E_m$ tada ir tik tada, kai $x/m \in E_1$, aibė E_1 tiršta rutulyje

$$S_r = \{x : ||x|| < r = t/2k\}$$

ir su kiekvienu α, aibė E_α tiršta rutulyje $S_{\alpha r}$.

Tegu $\delta \in (0, 1)$ – laisvai pasirenkamas skaičius. Įrodysime, kad

$$S_r \subset E_{1/(1-\delta)}. \tag{13.11}$$

To mums ir reikia, nes (13.11) reiškia, kad $||Tx|| < (1 - \delta)^{-1}$, kai $||x|| < r$. Tegu $x \in S_r$. Kadangi E_1 tiršta rutulyje S_r, egzistuoja $x_1 \in E_1 \cap S_r$ toks, kad

$$||x - x_1|| < \delta r.$$

Savo ruožtu, tai reiškia kad $x_1 - x \in S_{\delta r}$. Dabar pasinaudokime tuo, kad aibė E_δ tiršta rutulyje $S_{r\delta}$. Reiškia egzistuoja toks $x_2 \in U_\delta$ su kuriuo

$$||x_2 + x_1 - x|| < \delta^2 r,$$

t.y. $x_2 + x_1 - x \in S_{\delta^2 r}$. Tęsdami šį procesą rasime $x_{n+1} \in E_{\delta^n} \cap S_{\delta^n r}$ su kuriuo

$$||\sum_{k=1}^{n+1} x_k - x|| < \delta^{n+1} r.$$

Kadangi $x_{n+1} \in E_{\delta^n}$ tai

$$||Tx_{n+1}|| \leq \delta^n.$$

Todėl

$$||T\sum_{i=j}^{k} x_i|| \leq \sum_{i=j}^{k} ||Tx_j|| \leq \delta^{j-1}\frac{1-\delta^{k-j+1}}{1-\delta} \to 0$$

kai $k, j \to \infty$. Vadinasi, $T\sum_{i=1}^{k} x_i$ yra Koši seka. Kadangi erdvė $\mathbb{F}$ pilna, egzistuoja $y \in \mathbb{F}$ prie kurio ta seka konverguoja. Kadangi, be to,

$$||\sum_{i=1}^{k} x_i - x|| < \delta^k r \to 0$$

ir operatorius T uždaras, tai $Tx = y$. Be to,

$$||y|| \leq \sum_{i=1}^{\infty} ||Tx_i|| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \delta^{i-1} = \frac{1}{1-\delta}.$$

Teorema įrodyta. ∎