Retų aibių aritmetinės savybės

vadovas prof. A. Dubickas

Paulius Šarka

2013 m. spalio 4 d.
Vilnius

Apie disertaciją

Daktaro disertacija rengta 2009 – 2013 metais Vilniaus universitete ir mokslinių vizitų metu:

- Barselonos autonominiame universitete;
- Madrido autonominiame universitete;
- Lisabonos NOVA universitete;
- Poznanės Adomo Mickevičiaus universitete.

Apie disertaciją

Pagrindiniai disertacijos rezultatai išdėstyti penkiuose skyriuose:

1. Sidon poros aibėse su duota adityviąja energija
2. Begalinės aibės su maža sumų aibe
3. B_h aibės d-matėje erdvėje
4. Aibės su bekvadrate poaibių sumų aibe
5. Cauchy funkcinė lygtis, galiojanti pirminiams skaičiams

1. Sidon poros aibėse su duota adityviąja energija

Sidon poros aibėse su duota adityviąja energija

Apibrėžimas

Sveikųjų skaičių aibių A ir B *adityvioji energija* lygi

$$\mathrm{E}(A, B) = \#\{a + b = a' + b',\ \ a, a' \in A, b, b' \in B\}.$$

Apibrėžimas

Sveikųjų skaičių aibės A ir B sudaro *Sidon* porą, jei visos sumos

$$a + b,\ \ a \in A, b \in B$$

yra skirtingos.

Sidon poros aibėse su duota adityviąja energija

Klausimas

Duotoms vienodo dydžio sveikųjų skaičių aibėms

$$|A| = |B| = n$$

su fiksuota adityviąja energija

$$\mathrm{E}(A, B) = |A||B| + E,$$

kokio dydžio Sidon porą sudarančius poaibius $A' \subseteq A, B' \subseteq B$ visada galima rasti?

Panašų klausimą, apie Sidon poaibių radimą aibėse su aprėžta reprezentacine funkcija, nagrinėjo Alon ir Erdős (1985).

Sidon poros aibėse su duota adityviąja energija

Į šį klausimą atsakome logaritminio daugiklio tikslumu mažoms ir didelėms adityviosios energijos reikšmėms $E \ll n^2$ ir $E \gg n^3$. Pavyzdžiui, atveju $E = n^2$ gauname:

Teorema (Dubickas, Schoen, Silva, Š.)

Vienodo dydžio aibės $|A| = |B| = n$ su adityviąja energija lygia $\mathrm{E}(A, B) = 2n^2$ visuomet turi Sidon porą sudarančius poaibius $A' \subseteq A, B' \subseteq B$, jei jų dydžiai $|A'| = k, |B'| = \ell, k > \ell$ tenkina

$$k\ell^2 \ll n^2,$$

ir nebūtinai juos turi, jei jų dydžiai tenkina

$$k\ell^2 \gg n^2 \log^2 n.$$

2. Begalinės aibės su maža sumų aibe

Begalinės aibės su maža sumų aibe

Apibrėžimas

Sveikųjų skaičių aibės A *sumų aibe* vadinsime aibę

$$A + A = \{a + a',\ \ a, a' \in A\}.$$

Begalinės natūraliųjų skaičių aibės A elementus neviršijančius n pažymėsime

$$A[n] = A \cap [1, n].$$

Begalinės aibės su maža sumų aibe

Klausimas (Sós)

Apibūdinkite begalines natūraliųjų skaičių aibes su maža sumų aibe:

$$|A[n] + A[n]| \ll |A[n]|.$$

Įžymi Freiman teorema (1966) atsako į panašiai suformuluotą klausimą baigtinėms aibėms.

Begalinės aibės su maža sumų aibe

Disertacijoje apibrėžiame didelę klasę begalinių aibių, kurių sumų aibė nėra maža:

Teorema (Dubickas, Š.)

Jei begalinė natūraliųjų skaičių aibė $A = \{a_1, a_2, \cdots\}$ tenkina

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{|A[n]|}{n} = 0 \quad \text{ir} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \ll 1,$$

tai santykis $\frac{|A[n]+A[n]|}{|A[n]|}$ nėra aprėžtas.

3. B_h aibės d-matėje erdvėje

B_h aibės d-matėje erdvėje

Apibrėžimas

Sveikųjų skaičių ar d-matės erdvės $\mathbb{Z}^d$ elementų aibė A vadinama B_h *aibe*, jei visos sumos

$$a_1 + \cdots + a_h, \;\; a_i \in A$$

yra skirtingos.

B_h aibės d-matėje erdvėje

Klausimas

Kokią didžiausią B_h aibę galime rasti d-mačiame kube $[n]^d$?

Šį ir panašius klausimus vienmačiu atveju nagrinėjo Chen, Erdős, Green, Graham ir Jia.

Disertacijoje gauname tokios B_h aibės dydžio įverčius iš viršaus:

Teorema (Rackham, Š.)

Kiekviena B_{2k} aibė $A \subseteq [n]^d$ tenkina

$$|A| \le (k!)^{\frac{1}{k}} k^{\frac{d}{2k}} n^{\frac{d}{2k}} + O\left(n^{\frac{d^2}{2k(d+1)}}\right).$$

Kiekviena B_{2k-1} aibė $A \subseteq [n]^d$ tenkina

$$|A| \le (k!)^{\frac{2}{2k-1}} k^{\frac{d-1}{2k-1}} n^{\frac{d}{2k-1}} + O\left(n^{\frac{d^2}{(d+1)(2k-1)}}\right)).$$

4. Aibės su bekvadrate poaibių sumų aibe

Aibės su bekvadrate poaibių sumų aibe

Apibrėžimas

Sveikųjų skaičių aibės A *poaibių sumų aibe* vadinsime aibę

$$S_A = \{\sum_{a \in A'} a, \quad A' \subseteq A, |A'| < \infty\}.$$

Aibės su bekvadrate poaibių sumų aibe

Klausimas

Kaip lėtai gali augti begalinė natūraliųjų skaičių aibė A su bekvadrate poaibių sumų aibe S_A?

Luca (2002) sukonstravo dvigubo eksponentinio augimo aibę A, tenkinančią sąlygą. Šis klausimas baigtinių aibių atveju buvo suformuluotas Erdős.

Aibės su bekvadrate poaibių sumų aibe

Disertacijoje pateikima eksponentinio, su kaip norima mažu pagrindu, augimo aibė A, tenkinanti sąlyga:

Teorema (Dubickas, Š.)

Kiekvienam $\varepsilon > 0$ egzistuoja begalinė aibė $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ su bekvadrate poaibių sumų aibe S_A, tenkinanti

$$a_n \ll (1+\varepsilon)^n.$$

Dubickas ir Stankevičius (2007) šį rezultatą pagerino, sukonstravę polinominio augimo sąlygą tenkinančią aibę A.

5. Cauchy funkcinė lygtis, galiojanti pirminiams skaičiams

Cauchy funkcinė lygtis, galiojanti pirminiams skaičiams

Apibrėžimas

Funkcija $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ vadinama multiplikatyvia, jei

$$\mathrm{dbd}(a, b) = 1 \implies f(ab) = f(a)f(b).$$

Apibrėžimas

Lygtis funkcijoms $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad x, y \in \mathbb{Z}$$

yra vadinama *Cauchy funkcine lygtimi*. Gerai žinoma, kad ji turi vienintelį nenulinį multiplikatyvų sprendinį $f(n) = n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Cauchy funkcinė lygtis, galiojanti pirminiams skaičiams

Spiro (1992) išsprendė Cauchy funkcinę lygtį, su adityvumo sąlyga apribota pirminių skaičių aibėje:

$$f(p+q) = f(p) + f(q), \quad p, q \in \mathbb{P}.$$

Fang (2011) išsprendė trijų kintamųjų Cauchy funkcinę lygtį, su adityvumo sąlyga apribota pirminių skaičių aibėje:

$$f(p+q+r) = f(p) + f(q) + f(r), \quad p, q, r \in \mathbb{P}.$$

Cauchy funkcinė lygtis, galiojanti pirminiams skaičiams

Disertacijoje išsprendžiama daugelio kintamųjų Cauchy funkcinė lygtis, su adityvumo sąlyga apribota pirminių skaičių aibėje:

Teorema (Dubickas, Š.)

Tegu $k \geq 2$ natūralusis skaičius. Jei multiplikatyvi funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ tenkina

$$f(p_1 + \cdots + p_k) = f(p_1) + \cdots + f(p_k), \quad p_i \in \mathbb{P},$$

ir $f(p_0) \neq 0$ bent vienam pirminiui p_0, tai $f(n) = n$ visiems $n \in \mathbb{N}$.

Ačiū!