VILNIAUS UNIVERSITETAS

PAULIUS ŠARKA

RETŲ AIBIŲ ARITMETINĖS SAVYBĖS

Daktaro disertacijos santrauka

Fiziniai mokslai, matematika (01P)

Vilnius, 2013

Disertacija rengta 2009–2013 metais Vilniaus universitete.

Mokslinis vadovas

prof. habil. dr. Artūras Dubickas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

Mokslinis konsultantas

doc. dr. Paulius Drungilas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

Disertacija gynimo taryba:

Pirmininkas

akad. prof. habil. dr. Eugenijus Manstavičius (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

Nariai:

prof. dr. Ramūnas Garunkštis (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

prof. dr. Aleksandras Krylovas (Mykolo Romerio universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

akad. prof. habil. dr. Antanas Laurinčikas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

prof. dr. Darius Šiaučiūnas (Šiaulių universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

Oponentai:

prof. habil. dr. Mindaugas Bloznelis (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

prof. dr. Roma Kačinskaitė (Šiaulių universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

Disertacija bus ginama viešame disertacijos gynimo tarybos posėdyje 2013 m. spalio 4 d. 15 val. 45 min. VU Matematikos ir informatikos fakultete, 102 a., Naugarduko g. 24.

Adresas: Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius, Lietuva.

Disertacijos santrauka išsiuntinėta 2013 m. rugpjūčio 1 d.

Su disertacija galima susipažinti Vilniaus universiteto bibliotekoje.

VILNIUS UNIVERSITY

PAULIUS ŠARKA

ARITHMETIC PROPERTIES OF SPARSE SETS

Summary of doctoral dissertation

Physical sciences, mathematics (01P)

Vilnius, 2013

Doctoral dissertation was written in 2009–2013 at Vilnius University

Scientific supervisor

prof. habil. dr. Artūras Dubickas (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01P)

Scientific adviser

doc. dr. Paulius Drungilas (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01P)

The council:

Chairman

acad. prof. habil. dr. Eugenijus Manstavičius (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01P)

Members:

prof. dr. Ramūnas Garunkštis (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01P)

prof. dr. Aleksandras Krylovas (Mykolas Romeris University, Physical sciences, Mathematics – 01P)

acad. prof. habil. dr. Antanas Laurinčikas (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01P)

prof. dr. Darius Šiaučiūnas (Šiauliai University, Physical sciences, Mathematics – 01P)

Opponents:

prof. habil. dr. Mindaugas Bloznelis (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01P)

prof. dr. Roma Kačinskaitė (Šiauliai University, Physical sciences, Mathematics – 01P)

The dissertation will be defended at the public meeting of the council on October 4, 2013 in Vilnius University, Faculty of Mathematics and informatics, lecture room 102, Naugarduko st. 24 at 15:45 pm.

Address: Naugarduko st. 24, LT-03225 Vilnius, Lithuania.

The summary of the dissertation was distributed on 1 August, 2013

The dissertation is available at the library of Vilnius University.

1 Įžanga

Disertacijoje, kuri pristatoma šioje santrumpoje, nagrinėjamos aritmetinės sveikųjų skaičių poaibių savybės. Mus dominantys reiškiniai kyla iš vienos iš paprasčiausių matematinių operacijų – *sudėties*, netikėtai vedančios prie įdomių ir komplikuotų kombinatorinių objektų. Pirmasis iš jų yra dviejų aibių A ir B *sumų aibė*:

$$A + B = \{a + b,\ a \in A, b \in B\}.$$

Daugiausiai tyrinėtas sumų aibės aspektas yra jos dydis. Nesunku įrodyti gerai žinomą įvertį $|A + B| \geqslant |A| + |B| - 1$, galiojantį baigtiniams sveikųjų skaičių poaibiams, kaip ir pastebėjimą, kad lygybė galima tik tuo atveju, kai A ir B yra vienodo skirtumo aritmetinės progresijos. Susilpninę sąlygą ir paklausę, kokioms aibėms lygybė negalioja, bet jų sumų aibė vis vien yra *maža*, pataikysime tiesiai į vieną iš centrinių adityviosios kombinatorikos klausimų. Atsakymas į jį yra žymioji Freiman teorema, įrodyta 1966 metais ir nuo to laiko ne kartą pagerinta.

Glaudžiai su sumų aibe susijęs dydis yra *adityvioji energija*. Ji žymi, kaip dažnai sumuodami elementus iš aibių A ir B, gausime vienodas sumas:

$$\mathsf{E}(A, B) = |\{(a, a', b, b'),\ a + b = a' + b', a, a' \in A, b, b' \in B\}|.$$

Sąsaja tarp sumų aibės dydžio ir adityviosios energijos yra tiesioginė dviem atvejais – aibės su maža sumų aibe turi didelę adityviąją energiją, o aibės su maža aditiviąja energija turi didelę sumų aibę (sąvokas maža ir didelė reikia suprasti kaip asimptotiškai per pastovų daugiklį besiskiriančias nuo mažiausios įmanomos ir didžiausios įmanomos). Atvirkščias teiginys nėra teisingas – aibės gali turėti ir didelę sumų aibę, ir aditiviąją energiją vienu metu, tad šiuo atveju sąsaja yra subtilesnė: gerai žinoma Balog-Szemerédi-Gowers teorema teigia, kad aibės su didele adityviąja energija turi didelius poaibius su maža sumų aibe.

Aibių A ir B sumų aibę ir adityviąją energiją galima rasti žinant jų *reprezentacinę funkciją*, kuri kiekviename taške x įgyja reikšmę lygią skaičiui išraiškų $x = a + b,\ a \in A, b \in B$. Nesunku atpažinti, kad reprezentacinė funkcija yra ne kas kita, kaip aibių A ir B indikatorinių funkcijų sąsuka, tad pažymėję indikatorius tokiomis pat raidėmis, kaip ir pačias aibes, ją galime užrašyti taip:

$$A * B(x) = \sum_i A(x - i)B(i).$$

Žymiosios *Sidon* aibės yra apibrėžtos, kaip aibės A su skirtingomis sumomis $a + a', a, a' \in A$. Kitaip jas galima apibrėžti kaip turinčias *ekstremalią* reprezentacinę funkciją $A * A$ – aprėžta skaičiumi 2. Kuo tankesnių Sidon aibių radimas yra intensyviai tyrinėta, bet vis dar atvira problema.

2 Disertacijos mokslinė problema ir tyrimo objektas

Disertacijos tyrimų objektas yra aritmetinės prigimties aibės (sumų aibė, poaibių sumų aibė, Sidon aibės ir poros) ir dydžiai (adityvioji energija, maksimali reprezentacinės funkcijos reikšmė). Disertacijos mokslinė problema yra šių aibių, tenkinančių ekstremalias kombinatorine prasme sąlygas, egzistavimo, dydžio ir struktūros nustatymas.

3 Pagrindiniai uždaviniai

Disertacijoje nagrinėjami šie uždaviniai:

1. **Sidon porą sudarančių poaibių radimas.** Trečiajame disertacijos skyriuje nagrinėjami sąryšiai tarp kelių *nestruktūrizuotų* aibių sampratų. Pagrindinis skyriaus uždavinys yra Alon ir Erdős teoremos išplėtimas: duotoms vienodo dydžio baigtinėms aibėms $A, B \in \mathbb{Z}, |A| = |B| = n$ su fiksuota adityviąja energija $\mathsf{E}(A, B) = |A||B| + E$, kokio dydžio *Sidon porą* sudarančius poaibius $A' \subseteq A, B' \subseteq B$ (t.y. poaibius, kurių visos sumos $a + b$, $a \in A', b \in B'$ skirtingos) visada galima rasti? Šis klausimas atsakytas logaritminio daugiklio tikslumu mažoms ir didelėms adityviosios energijos reikšmėms $E \ll n^2$ ir $E \gg n^3$ ir mažesniu tikslumu likusiam adityviosios energijos reikšmių intervalui.

2. **Begalinės aibės su maža sumų aibe.** Ketvirtajame skyriuje nagrinėjamos begalinės aibės su maža sumų aibe, tai yra tenkinančios sąlyga $|A[n] + A[n]| \ll |A[n]|$, kur $A[n] = A \cap [1, n]$. Begalinių aibių su maža sumų aibe apibūdinimo uždavinį iškėlė Sós ir jis iki šiol yra atviras. Šiame skyriuje pateikamas dalinis jo sprendimas retoms aibėms su aprėžtais šuoliais, taip pat gautas sumų aibės dydžio įvertis polinominio augimo aibėms.

3. **B_h aibės d-matėje erdvėje.** Aibę A vadinsime B_h, jei visos jos h elementų sumos $a_1 + \cdots + a_h$ yra skirtingos. Penktame skyriuje nagrinėjamas žymaus tankiausios Sidon aibės radimo uždavinio apibendrinimas: ieškoma kokio maksimalaus dydžio B_h aibę galima rasti d-mačiame kube $[n]^d$. Gauti viršutiniai įverčiai šių aibių dydžiui

apibendrina Chen, Jia, Graham ir Green rezultatus. Taip pat šiame skyriuje nagrinėjamos begalinės B_h aibės lyginėms h reikšmėms ir gaunami Erdős, Chen bei Cilleruelo rezultatų apibendrinimai.

4. **Aibės su bekvadrate poaibių sumų aibe** Šeštajame skyriuje ieškoma lėtai augančių begalinių aibių, kurių baigtinių poibių sumos nėra kvadratai arba, bendresniu atveju, sveikųjų skaičių laipsniai. Abiem atvejais yra randama sąlygą tenkinanti eksponentinio (kaip norima mažu pagrindu) augimo aibė. Taip pat šiame skyriuje apžvelgiama rezultatą pagerinanti Dubicko ir Stankevičiaus polinominio augimo aibės konstrukcija.

5. **Cauchy funkcinė lygtis apribota ant pirminių skaičių aibės**. Septintame skyriuje ieškoma multiplikatyvių apibendrintos Cauchy funkcinės lygties sprendinių $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, su adityvumo sąlyga apribota ant pirminių skaičių aibės: $f(p_1+\cdots+p_k) = f(p_1)+\cdots+f(p_k)$. Parodoma, kad jei $f(p) \neq 0$ bent vienam pirminiam p, tai f būtinai turi būti tapatingoji funkcija $f(n) = n, n \in \mathbb{N}$. Šis rezultatas atskiru atveju $k = 2$ buvo gautas Spiro, o atveju $k = 3$ Fang.

4 Tyrimų metodika

Adityviojoje kombinatorikoje ir skaičių teorijoje naudojami metodai iš įvarių matematikos sričių. Keletas iš jų panaudoti ir šiame darbe, trumpai juos apžvelgsime.

Konstruojant aibes be didelių Sidon porą sudarančių poaibių naudojamas „tikimybinis metodas“, leidžiantis nekonstruktyviai įrodyti sudėtingų kombinatorinių struktūrų egzistavimą. Jo taikymo metu gaunamų indikatorinių atsitiktinių dydžių sumų ir daugianarių koncentracijai įvertinti naudojamos Chernoff ir Kim-Vu nelygybės. Taip pat remiamasi naujai gautu Kohayakawa, Lee, Rödl ir Samotij rezultatu apie nepriklausomų aibių balansuotuose grafuose struktūrą.

Rezultatams apie begalinių polinominio augimo ir aprėžtų šuolių aibių sumų aibės dydį gauti naudojama efektyvi Freiman teorema (įrodyta Konyagin), kuri tiksliai (kiekybiškai ir kokybiškai) apibūdina baigtines aibes su maža sumų aibe.

Dauguma įverčių d-mačių B_h aibių dydžiui gaunami elementariais kombinatoriais samprotavimais. Patys tiksliausi įverčiai gaunami naudojantis Furje analize.

Begalinės tankios aibės su bekvadratėmis (ar, bendru atveju, neturinčiomis laipsnių) baigtinių poaibių sumų aibėmis konstruojamos naudojantis nesudėtingomis natūraliųjų skaičių dalumo savybėmis.

Apibendrintos Cauchy lygties, su adityvumo sąlyga apribota ant pirminių skaičių, sprendimui naudojami žinomi įverčiai binarinei ir ternarinei Goldbach hipotezei bei Tao rezultatas apie tai, kad bet kuris nelyginis skaičius gali būti išreikštas 5 ar mažiau pirminių skaičių suma.

5 Moksliniai rezultatai

5.1 Sidon porą sudarančių poaibių radimas

Prisiminkime, kad dviejų aibių adityvioji energija yra dydis matuojantis jų bendrą aritmetinę struktūrą:

$$\mathsf{E}(A,B) = |\{(a,a',b,b'),\ a+b=a'+b' \mid a,a' \in A, b,b' \in B\}|.$$

Dviejų vienodo dydžio aibių $|A| = |B| = n$ adityvioji energija įgija reikšmes tarp n^2 ir $2n^3/3 + n/3$, atitinkančias mažą bendrą aritmetinę struktūrą ir didelę bendrą aritmetinę struktūrą. Mažos bendros aritmetinės struktūros atveju galime tikėtis rasti didelius Sidon porą sudarančius poaibius $A' \subseteq A, B' \subseteq B$, (t.y. poabius kurių visos sumos $a+b, a \in A', b \in B'$ skirtingos), o didelės bendros aritmetinės struktūros atveju galime tikėtis, kad didelių Sidon porą sudarančių poaibių rasti nepavyks. Disertacijoje gauti rezultatai patvirtina šią intuiciją. Didelės ir mažos bendros struktūros atvejais įrodymų strategijos skiriasi, tad rezultatai suformuluoti 4 teoremose – po dvi viršutiniams ir apatiniams įverčiams.

5.1.1 teorema. *Tegu aibių A, B adityvioji energija lygi*

$$\mathsf{E}(A,B) - |A||B| = E \neq 0.$$

Visiems k, ℓ tenkinantiems $1 \leqslant k \leqslant |A|/2$, $1 \leqslant \ell \leqslant |B|$ ir

$$k\ell^2 \leqslant \frac{|A|^2|B|^2}{2E} \tag{1}$$

egzistuoja Sidon porą sudarantys poaibiai $A' \subseteq A, B' \subseteq B$ tenkinantys $|A'| = k, |B'| = \ell$.

Tuo atveju, kai (netrivialioji) adityvioji energija maža $E \ll n^2$ ir poaibių A', B' ieškome vienodo dydžio, juos galima rasti tenkinančius $|A'| = |B'| \gg n^{2/3}$, su sumų aibe tenkinančia $|A' + B'| \gg n^{4/3}$, panašiai kaip ir Alon ir Erdős teoremoje. Kita vertus, jei poabių ieškome nebūtinai skirtingo dydžio, tai juos galime rasti tenkinančius $|A'| \gg n, |B'| \gg n^{1/2}$, t.y. su didesne sumų aibe $|A' + B'| \gg n^{3/2}$. Ši teorema yra labai netiksli, kai adityvioji energija yra didelė. Šiuo atveju rezultatą galima pagerinti naudojantis Komlós, Sulyok ir Szemerédi teoremos idėjomis:

5.1.2 teorema. *Tegu A, B vienodo dydžio aibės $|A| = |B| = n$, kur $n \geqslant 10^6$. Tuomet visiems k, ℓ tenkinantiems*

$$k\ell \leqslant n/12800, \tag{2}$$

egzistuoja Sidon porą sudarantys poaibiai $A' \subseteq A$, $B' \subseteq B$ tenkinantys $|A'| = k$, $|B'| = \ell$.

Teoremų 5.1.1 ir 5.1.2 gauti įverčiai iš apačios yra beveik optimalūs adityviosios energijos reikšmių intervalo galuose. Tą įrodo gauti įverčiai iš viršaus:

5.1.3 teorema. *Tegu n pakankamai didelis natūralusis skaičius, o E tenkina $n \leqslant E \leqslant 2n^3/3$. Tuomet egzistuoja tokios vienodų dydžių aibės $|A| = |B| = n$ su adityviaja energija lygia $\mathsf{E}(A, B) = |A||B| + E(1 + o(1))$, kad bet kuriems k, ℓ, tenkinantiems $k \geqslant 2\ell$ ir*

$$k\ell^2 \geqslant 40n^2 \log n\Big(1 + \frac{3n^2}{E} \log n\Big), \tag{3}$$

jokie poaibiai $A' \subseteq A, B' \subseteq B$, tenkinantys $|A'| = k, |B'| = \ell$, nesudaro Sidon poros.

Palyginę įvertį (3) su (1) (kuris atveju $|A| = |B| = n$ tampa $k\ell^2 \leqslant n^4/2E$) matome, kad reikšmėms $n \leqslant E \ll n^2$ jie skiriasi tik per daugiklį $\log^2 n$.

5.1.4 teorema. *Tegu n pakankamai didelis natūralusis skaičius, o E tenkina $n^2 \leqslant E \leqslant 2n^3/3$. Tuomet egzistuoja tokios vienodų dydžių aibės $|A| = |B| = n$ su adityviaja energija lygia $\mathsf{E}(A, B) = |A||B| + E(1 + o(1))$, kad bet kuriems k, ℓ, tenkinantiems $k \geqslant \ell$ ir*

$$k\ell \geqslant \frac{4n^4}{3E}, \tag{4}$$

jokie poaibiai $A' \subseteq A, B' \subseteq B$, tenkinantys $|A'| = k, |B'| = \ell$, nesudaro Sidon poros.

Šiuo atveju palyginė įverčius (4) ir (2) matome, kad jie skiriasi tik per pastovų daugiklį, kai adityvioji energija patenka į intervalą $n^3 \ll E \leqslant 2n^3/3$.

5.2 Begalinės aibės su maža sumų aibe

Vienas iš centrinių adityviosios kombinatorikos rezultatų, Freiman teorema, apibūdina baigtines aibes su maža sumų aibe. Sós analogiško klausimo paklausė apie begalines aibes su maža sumų aibe. Disertacijoje įrodomas dalinis rezultatas apibrėžia plačią klasę aibių (retų, su aprėžtais šuoliais), kurių sumų aibė nėra maža:

5.2.1 teorema. *Tegu $A = \{a_1, a_2, \cdots\} \subseteq \mathbb{N}$ begalinis natūraliųjų skaičių poaibis tenkinantis*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{|A[n]|}{n} = 0 \quad ir \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \ll 1.$$

Tuomet santykis $\frac{|A[n]+A[n]|}{|A[n]|}$ nėra aprėžtas.

Abi šios teoremos sąlygos yra būtinos. Visos tankios begalinės aibės (tenkinančios $\frac{|A[n]|}{n} \gg 1$) turi mažą sumų aibę, ir taip pat nėra sunku rasti aibę su neaprėžtais šuoliais ir maža sumų aibe. Disertacijoje pateikiamas konkretus tokios aibės pavyzdys, turintis papildomus augimo apribojimus:

5.2.2 teorema. *Tegu σ ir ε tenkina $0 < \sigma < \sigma + \varepsilon < 1$, tuomet egzistuoja konstantos $N = N(\sigma, \varepsilon)$, $\mu = \mu(\sigma, \varepsilon)$ ir aibė $A \subset \mathbb{N}$ tokia, kad*

$$n^{\sigma} \leqslant |A[n]| \leqslant n^{\sigma+\varepsilon}$$

visiems $n \geqslant N$ ir

$$\frac{|A[n] + A[n]|}{|A[n]|} < \mu$$

visiems $n \geqslant 1$.

Aprėžtų šuolių sąlygą galima pastiprinti ir nagrinėti *polinominio augimo* aibes. Šioms aibėms galima įvertinti jų sumų aibės augimo greitį iš apačios. Atkreipsime dėmesį, kad šiuo atveju mus domina dydis $|(A + A)[n]|$:

5.2.3 teorema. *Tegu A begalinis natūraliųjų poaibis, tenkinantis*

$$0 < \liminf_{n\to\infty} |A[n]|n^{-\sigma} \leqslant \limsup_{n\to\infty} |A[n]|n^{-\sigma} < \infty \tag{5}$$

su fiksuota $0 < \sigma < 1$ reikšme. Tuomet egzistuoja tokia konstanta $c(\sigma)$, kad

$$\frac{|(A + A)[n]|}{|A[n]|} > c(\sigma)\frac{\log n}{(\log\log n)^3 \log\log\log n(\log\log\log\log n)^3}, \tag{6}$$

visoms pakankamai didelėms n reikšmėms.

Gautas įvertis yra labai arti geriausio įmanomo:

5.2.4 teorema. *Kiekvienam $\varepsilon > 0$ egzistuoja aibė $A \subset \mathbb{N}$ tenkinanti (5) ir*

$$\frac{|(A + A)[n]|}{|A[n]|} < \varepsilon \log n, \tag{7}$$

visoms pakankamai didelėms n reikšmėms.

Disertacijoje iškeliama hipotezė, kad įvertis iš apačios (6) turėtų būti $\log n$ eilės, t.y. sutapti su gautu įverčiu iš viršaus.

5.3 B_h aibės d-matėje erdvėje

Tankių B_h aibių radimo uždavinys pirmą kartą buvo suformuluotas Sidon 1932 metais. Disertacijoje nagrinėjamas jo apibendrinimas d-matėje erdvėje $\mathbb{N}^d$.

Begalinių aibių atveju nesunku įsitikinti, kad bet kuri B_h aibė $A \subseteq \mathbb{N}^d$ turi tenkinti $|A[n]| \ll n^{d/h}$. Šį įvertį įmanoma pagerinti kai $h = 2k$ yra lyginis, vienmačiu atveju tą padarė Erdős ($k = 1$) ir Chen ($k \in \mathbb{N}$). Disertacijoje šie rezultatai apibendrinami į d-matę erdvę:

5.3.1 teorema. *Kiekviena B_{2k} aibė $A \subseteq \mathbb{N}^d$ tenkina*

$$\liminf_{n\to\infty} A[n]^d \frac{\log^{1/2k} n}{n^{d/k}} < \infty.$$

Baigtinės B_h aibės $A \subseteq [n]^d$ taip pat tenkina elementarų dydžio apribojimą $|A| \ll n^{d/h}$, ir, priešingai nei begaliniu atveju, galima sukonstruoti aibes, kurios šį įvertį iš viršaus pasiekia (pastovaus daugiklio tikslumu). Šiuo atveju įdomu yra nustatyti tikslią asimptotinio dydžio eilę, ar bent jau gauti tikslesnį įvertį iš viršaus. Disertacijoje toks įvertis yra gaunamas d-matės erdvės poaibiams:

5.3.2 teorema. *Kiekviena B_{2k} aibė $A \subseteq [n]^d$ tenkina*

$$|A| \leqslant (k!)^{\frac{1}{k}} k^{\frac{d}{2k}} n^{\frac{d}{2k}} + O\big(n^{\frac{d^2}{2k(d+1)}}\big).$$

5.3.3 teorema. *Kiekviena B_{2k-1} aibė $A \subseteq [n]^d$ tenkina*

$$|A| \leqslant (k!)^{\frac{2}{2k-1}} k^{\frac{d-1}{2k-1}} n^{\frac{d}{2k-1}} + O\big(n^{\frac{d^2}{(d+1)(2k-1)}}\big).$$

Galiausiai, didelėms h reikšmėms viršuje esančius įverčius galima pagerinti naudojantis Furje analizės metodais, išvystytais Green vienmačiam atvejui:

5.3.4 teorema. *Kiekviena B_{2k} aibė $A \subseteq [n]^d$, kur k pakankamai didelis, tenkina*

$$|A| \leqslant (\pi d)^{\frac{d}{4k}} (1+\epsilon(k)) k^{\frac{d}{4k}} (k!)^{\frac{1}{k}} n^{\frac{d}{2k}} + O\big(n^{\frac{d^2}{2k(d+1)}}\big).$$

5.3.5 teorema. *Kiekviena B_{2k-1} aibė $A \subseteq [n]^d$, kur k pakankamai didelis, tenkina*

$$|A| \leqslant (\pi d)^{\frac{d}{2(2k-1)}} (1+\epsilon(k)) k^{\frac{d-2}{2(2k-1)}} (k!)^{\frac{2}{2k-1}} n^{\frac{d}{2k-1}} + O\big(n^{\frac{d^2}{(2k-1)(d+1)}}\big).$$

5.4 Aibės su bekvadrate poaibių sumų aibe

Natūraliųjų skaičių poaibiui A (baigtiniam ar begaliniam) apibrėžkime jo poaibių sumų aibę S_A, kaip aibę visų jos baigtinių poaibių sumų:

$$S_A = \{\sum_{a\in A'} a \mid A' \subseteq A, |A'| < \infty\}.$$

Vienas iš žinomų adityviosios skaičių teorijos klausimų, užduotas Erdős ir suformuluotas žymiojoje Guy knygoje *Unsolved problems in number theory* yra radimas tankiausios aibės

$A \subseteq [n]$, kurios poaibių sumų aibė S_A būtų be kvadratų. Disertacijoje nagrinėjamas šis klausimas begalinių aibių atveju.

Pirmoji teorema įrodo tokios begalinės aibės egzistavimą daug bendresniu atveju, kai aibė, kurios elementų bandoma išvengti, turi nulinį apatinį tankį (aibė B turi nulinį apatinį tankį, kai tenkinama $\liminf_{n\to\infty} \frac{|B[n]|}{n} = 0$):

5.4.1 teorema. *Duotam $m \in \mathbb{N}$ ir aibei B su nuliniu apatiniu tankiu visada egzistuoja tokia begalinė aibė A, kad bet kuri jos elementų suma, kurioje ne daugiau nei m elementų yra vienodi, nepriklauso aibei B.*

Sukonstruoti konkrečią aibę A, kurios poaibių sumų aibė S_A būtų bekvadratė yra kiek sunkiau. Tą pirmas padarė Luca, sukonstravęs aibę kurios augimo greitis yra asimptotiškai dvigubai eksponentinis, t.y. $A[n] \sim \log\log n$. Disertacijoje pateikiamos paprastos eksponentinio augimo aibės pavyzdys $\{2^{2n-1}, n \in \mathbb{N}\}$ ir sukonstruojamos aibės, kurių augimo greitis yra eksponentinis, bet su kiek norima artimu vienetui pagrindu:

5.4.2 teorema. *Kiekvienam $\varepsilon > 0$ egzistuoja konstanta $K = K(\varepsilon)$ ir begalinė aibė $A = \{a_1 < a_2 < a_3 < \dots\} \subset \mathbb{N}$ tenkinanti $a_n < K(1+\varepsilon)^n$ su kiekvienu $n \in \mathbb{N}$, kurios poaibių sumų aibė yra bekvadratė.*

Taip pat įrodoma stipresnė šios teoremos versija, sukonstruojant tokio paties augimo aibes, kurių poaibių sumos nėra sveikųjų skaičių laipsniai (kvadratai, kubai ar panašiai):

5.4.3 teorema. *Kiekvienam $\varepsilon > 0$ egzistuoja konstanta $K = K(\varepsilon)$ ir begalinė aibė $A = \{a_1 < a_2 < a_3 < \dots\} \subset \mathbb{N}$ tenkinanti $a_n < K(1+\varepsilon)^n$ su kiekvienu $n \in \mathbb{N}$, kurios poaibių sumų aibėje nėra sveikųjų skaičių laipsnių.*

5.5 Cauchy funkcinė lygtis apribota ant pirminių skaičių aibės

Cauchy funkcinė lygtis $f(x+y) = f(x) + f(y)$ yra viena žymiausių funkcinių lygčių. Jos sprendimas ir sprendinių aibė priklauso nuo ieškomų funkcijų apibrėžimo srities ir joms keliamų papildomų sąlygų. Viena iš tokių sąlygų yra *multiplikatyvumas*: funkcija vadinama multiplikatyvia, jei

$$f(ab) = f(a)f(b) \quad \text{visiems} \quad a, b \in \mathbb{N} \quad \text{tenkinantiems} \quad \mathrm{dbd}(a,b) = 1.$$

Gerai žinoma, kad Cauchy funkcinė lygtis turi du multiplikatyviuosius sprendinius apibrėžtus natūraliuosiuose skaičiuose: $f(x) = x$ ir nulinį $f(x) = 0$. Spiro sprendė Cauchy lygtį su silpnesne adityvumo sąlyga. Jis parodė, kad tokia funkcinė lygtis taip pat turi iš esmės vienintelį nenulinį multiplikatyvų sprendinį, kai adityvumo sąlyga yra apribota ant pirminių skaičių, t.y. multiplikatyvi funkcija turi tenkinti $f(p+q) = f(p) + f(q)$ visiems pirminiams p, q. Fang tokį patį rezultatą gavo spręsdamas bendresnę funkcinę lygtį – su adityvumo sąlyga $f(p+q+r) = f(p) + f(q) + f(r)$ visiems pirminiams p, q, r.

Disertacijoje yra išsprendžiama analogiška Cauchy funkcinė lygtis su bet kokiu skaičiumi kintamųjų:

5.5.1 teorema. *Tegu $k \geqslant 2$ fiksuotas sveikasis skaičius. Jei multiplikatyvi funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ tenkina*

$$f(p_1 + p_2 + \cdots + p_k) = f(p_1) + f(p_2) + \cdots + f(p_k) \tag{8}$$

visiems $p_1, p_2, \ldots, p_k$ ir $f(p_0) \neq 0$ bent vienam pirminiui p_0, tai $f(n) = n$ visiems $n \in \mathbb{N}$.

6 Darbo mokslinis naujumas ir aktualumas

Dauguma disertacijoje pristatytų rezultatų yra originalūs ir daugiau ar mažiau atitinka šešių mokslinių publikacijų (žr. skyrių „Pagrindinės publikacijos“) turinį. Likę keletas rezultatų yra arba gerai žinomos lemos, kurias įrodome darbo pilnumo vardan, arba nedideli nepublikuoti pastebėjimai. Disertacijoje gauti rezultatai buvo sėkmingai pristatyti tarptautinėse konferencijose ir seminaruose srities specialistams (žr. skyrių „Rezultatų sklaida“).

7 Darbo struktūra ir apimtis

Disertacija parašyta anglų kalba. Disertaciją sudaro 9 skyriai: įvadas, literatūros apžvalga, 5 moksliniams rezultatams paskirti skyriai, išvados ir literatūros sąrašas. Bendra darbo apimtis yra 95 puslapiai.

8 Pagrindinės publikacijos

Pristatomos disertacijos rezultatai publikuojami 6 moksliniuose straipsniuose:

1. A.Dubickas, P.Šarka, On multiplicative functions which are additive on sums of primes, *to appear in Aequationes Math.*

2. J.Rué, P.Šarka, A.Zumalacárregui, On the error term of the logarithm of the lcm of a quadratic sequence, *to appear in J. Théor. Nombres Bordx.*

3. A.Dubickas, T.Schoen, M.Silva, P.Šarka, Finding large co-Sidon subsets in sets with a given additive energy, *Eur. J. Comb.* **34** (2013), 1144–1157.

4. A.Dubickas, P.Šarka, Sumsets of sparse sets, *Period. Math. Hung.* **64** (2) (2012), 169–179.

5. L.Rackham, P.Šarka, B_h Sequences in higher dimensions, *Electron. J. Comb.* **17** (2010), #35.

6. A.Dubickas, P.Šarka, Infinite sets of integers whose distinct elements do not sum to a power, *J. Integer Seq.* **9** (4) (2006), 9p.

9 Rezultatų sklaida

Disertacijoje gauti rezultatai buvo pristatyti šiose mokslinėse konferencijose ir seminaruose:

1. *Diskrečiosios matematikos seminaras*, Adomo Mickevičiaus universitetas, Poznanė, Lenkija, 2013 m. sausio 22 d.
2. *4th Polish Combinatorial Conference*, Bedlewo, Lenkija, 2012 m. rugsėjo 17–21 d.
3. *Lietuvos matematikų draugijos konferencija*, Klaipėda, Lietuva, 2012 m. birželio 10–12 d.
4. *Diskrečiosios matematikos seminaras*, Adomo Mickevičiaus universitetas, Poznanė, Lenkija, 2012 m. vasario 28 d.
5. *27th Journées Arithmétiques*, Vilnius, Lietuva, 2011 m. birželio 27 d.–liepos 1 d.
6. *Young Researchers in Additive Combinatorics*, Madridas, Ispanija, 2011 m. birželio 20–24 d.
7. *DocCourse in Additive Combinatorics*, Barselona, Ispanija, 2008 m. sausio 5 d.–kovo 15 d.
8. *PhD Summer School in Number Theory and Probability*, Druskininkai, Lietuva, 2007 m. rugsėjo 17–22 d.

10 Stažuotės

Dalis disertacijoje gautų rezultatų buvo gauti stažuočių užsienio mokslo centruose metu:

1. 2013 m. sausio 3–30 d. Adomo Mickevičiaus universitetas, Poznanė, Lenkija (stažuotės vadovas prof. Tomasz Schoen)
2. 2012 m. vasario 15 d.– kovo 7 d. Adomo Mickevičiaus universitetas, Poznanė, Lenkija (stažuotės vadovas prof. Tomasz Schoen)
3. 2011 m. sausio 1 d.–kovo 31 d. Madrido autonominis universitetas, Madridas, Ispanija (stažuotės vadovas prof. Javier Cilleruelo)

11 Išvados

Disertacijoje gautos tokios išvados:

- Didžiausios Sidon poaibių $A' \subseteq A, B' \subseteq B$ poros dydis priklauso nuo aibių adityviosios energijos dydžio $\mathsf{E}(A, B)$.
- Begalinės retos aibės su aprėžtais šuoliais negali turėti mažos sumų aibės.
- B_{2k} aibių d-mačiame kube $[n]^d$ dydis asimptotiškai neviršija $(k!)^{\frac{1}{k}} k^{\frac{d}{2k}} n^{\frac{d}{2k}}$. B_{2k-1} aibių d-mačiame kube $[n]^d$ dydis asimptotiškai neviršija $(k!)^{\frac{2}{2k-1}} k^{\frac{d-1}{2k-1}} n^{\frac{d}{2k-1}}$.
- Skaičių dalumo savybės leidžia sukonstruoti tankias aibes, kurių poaibių sumos nėra kvadratai ar sveikųjų skaičių laipsniai.
- Cauchy funkcinė lygtis su adityvumo sąlyga apribota ant pirminių skaičių turi iš esmės vienitelį sprendinį.

12 Summary

In the thesis various phenomena and concepts of arithmetic nature, such as *sumsets*, *additive energy* and *Sidon sets* are investigated. The results are of theoretic nature and are divided into 5 chapters.

In the first chapter we investigate connections between several measures of arithmetic structure of two sets. We obtain lower and upper bounds for the size of largest co-Sidon subsets of sets with given additive energy.

In the second chapter we show that an infinite sparse set with bounded jumps can not have a bounded doubling coefficient, settling a special case of question posed by Sós. We also estimate the size of the doubling coefficient for sets of polynomial growth.

In the third chapter we give asymptotical estimates for the size of the largest B_h subset of d-dimentional cube and the growth of the largest infinite B_h subset of $\mathbb{N}^d$.

In the fourth chapter we construct dense infinite sets of number theoretical nature which have square (or more generally power) free iterated sumset.

In the fifth chapter we solve a generalized Cauchy equation with the additivity condition restricted on primes for multiplicative functions and show that the solution is essentially unique.

The thesis also contains an introduction, literature review, conclusions and bibliography. Aditionally to the thesis, an extensive summary in Lithuanian is provided. Aditionally to the summary in Lithuanian, a summary of the summary is provided in English within the summary in Lithuanian.

13 Trumpos žinios apie autorių

Išsilavimas

2004 Kretingos Jurgio Pabrėžos gimnazija (su pagyrimu)

2009 Vilniaus universiteto *Magna cum laude* matematikos magistras

Mokslinio darbo patirtis

2013 – Vilniaus universiteto jaunesnysis mokslinis darbuotojas

2011 – Matematikos ir informatikos instituto specialistas

2006 – 2009 Vilniaus universiteto laborantas

2005 – 2007 Matematikos ir informatikos instituto laborantas

Pedagoginio darbo patirtis

2012 – 2013 Vilniaus universiteto asistentas

2012 – 2013 Vilniaus Licėjaus mokytojas

2006 – 2009 Nacionalinės moksleivių akademijos lektorius

2006 – 2009 Matematikos olimpo lektorius

Kita darbo patirtis

2013 – Matematikos konkurso *Kengūra* užduočių rengėjas

2013 – Lietuvos kosmoso asociacijos ekspertas

2011 – 2012 Matematikos ir matematikos taikymų studijų programos atnaujinimo projekto dalyvis

Kita matematinė veikla

2009 – *Matematikos knygos* bendraautorius

2006 – Tinklapio olimpiados.lt administratorius