VILNIAUS UNIVERSITETAS

VALENTAS KURAUSKAS

DU ATSITIKTINIŲ GRAFŲ MODELIAI

Daktaro disertacijos santrauka
Fiziniai mokslai, matematika (01P)

Vilnius, 2013 metai

Disertacija rengta 2009–2013 metais Vilniaus universitete.

Mokslinis vadovas:

prof. habil. dr. Mindaugas Bloznelis (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P).

Disertacija ginama Vilniaus universiteto Matematikos krypties taryboje.

Pirmininkas: prof. habil. dr. Eugenijus Manstavičius (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P);

Nariai:

doc. dr. Gintautas Bareikis (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P);

prof. habil. dr. Algimantas Jonas Bikelis (Vytauto Didžiojo universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P);

prof. habil. dr. Artūras Dubickas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P);

prof. habil. dr. Romanas Januškevičius (Lietuvos edukologijos universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P).

Oponentai:

prof. dr. Aleksandras Krylovas (Mykolo Romerio universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P);

doc. dr. Algirdas Mačiulis (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P).

Disertacija bus ginama viešame Matematikos krypties tarybos posėdyje 2013 m. gruodžio 13 d. 14 val. Matematikos ir informatikos fakulteto prof. Jono Kubiliaus (102) auditorijoje.

Adresas – Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius.

Disertacijos santrauka išsiuntinėta 2013 m. lapkričio 12 d.

Disertaciją galima peržiūrėti Vilniaus universiteto bibliotekoje.

VILNIUS UNIVERSITY

VALENTAS KURAUSKAS

ON TWO MODELS OF RANDOM GRAPHS

Summary of doctoral dissertation
Physical sciences, mathematics (01P)

Vilnius, 2013

The scientific work was carried out in 2009–2013 at Vilnius university.

Scientific supervisor:

prof. habil. dr. Mindaugas Bloznelis (Vilnius University, physical sciences, mathematics – 01P).

The council:

Chairman: prof. habil. dr. Eugenijus Manstavičius (Vilnius University, physical sciences, mathematics – 01P);

Members:

doc. dr. Gintautas Bareikis (Vilnius university, physical sciences, mathematics – 01P);

prof. habil. dr. Algimantas Jonas Bikelis (Vytautas Magnus University, physical sciences, mathematics – 01P);

prof. habil. dr. Artūras Dubickas (Vilnius University, physical sciences, mathematics – 01P);

prof. habil. dr. Romanas Januškevičius (Lithuanian University of Educational Sciences, physical sciences, mathematics – 01P).

Opponents:

prof. dr. Aleksandras Krylovas (Mykolas Romeris University, physical sciences, mathematics – 01P);

doc. dr. Algirdas Mačiulis (Vilnius University, physical sciences, mathematics – 01P).

The dissertation will be defended at the public meeting of the council in prof. Jonas Kubilius lecture room (room 102), Faculty of Mathematics and Informatics on 13 December 2013.

Address: Naugarduko 24, LT-03225 Vilnius.

The dissertation summary was distributed on 12 November 2013.

The dissertation is available at the library of Vilnius University.

Disertacijos aprašymas

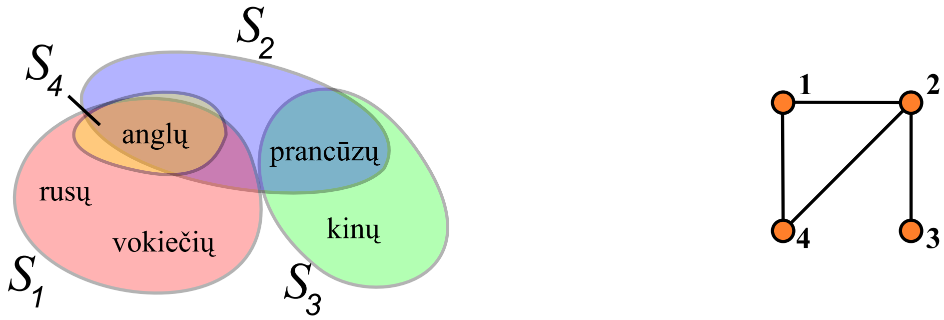
1 Įžanginis žodis

Šioje santraukoje pristatoma teikiama ginti mano disertacija „Du atsitiktinių grafų modeliai“. Disertaciją sudaro dvi dalys, jose sprendžiami uždaviniai, susiję su dviejų skirtingų tipų atsitiktiniais grafais. Pirmojoje dalyje (eiliškumas čia neturi reikšmės) pristatomi rezultatai gauti mano doktorantūros studijų metu, vadovaujant profesoriui Mindaugui Blozneliui. Antrosios dalies pradžia buvo mano magistrantūros studijos Oksfordo universitete, tuometiniam mano darbo vadovui profesoriui Colin McDiarmid pasiūlius tęsti magistrantūros darbe pradėtus tyrimus. Esu nuoširdžiai dėkingas abiem vadovams už jų pagalbą studijų metu.

2 Atsitiktiniai sankirtų grafai

2.1 Įvadas

Tarkime $S_1, S_2, \ldots, S_n$ yra baigtinės aibės. Apibrėžkime grafą, kurio viršūnių aibė yra $[n] = \{1, \ldots, n\}$, o briaunų aibė sudaryta iš visų (nesurikiuotų) porų uv, kur $u \neq v$ ir $S_u \cap S_v \neq \emptyset$. Toks grafas vadinamas aibių $S_1, S_2, \ldots, S_n$ *sankirtų grafu*, žr. 1 pav.



1 pav.: Pavyzdžiui, jei aibę S_v sudaro kalbos, kuriomis kalba v-asis žmogus, gauname sankirtų grafą, vaizduojantį visas tarpusavyje susikalbančių žmonių poras.

Imdami poaibius $S_1, \ldots, S_n$ atsitiktinai iš kokios nors baigtinės bazinės aibės W, gauname atsitiktinį sankirtų grafą. Aibės W dydis dažniausiai žymimas raide m, o jos elementai vadinami atributais (arba raktais). Pirmieji tokius atsitiktinius grafus 1999 m. nagrinėjo M. Karoński, E. R. Scheinerman ir K. B. Singer-Cohen. Šie autoriai įvedė *binominio atsitiktinio sankirtų grafo* modelį $G(n, m, p)$, kuriame aibės $S_1, S_2, \ldots, S_n$ apibrėžiamos taip: kiekvienas atributas $w \in W$ įtraukiamas į aibę S_v nepriklausomai su tikimybe $p \in (0, 1)$ ir nepriklausomai nuo kitų aibių S_u, $u \neq v$. Taigi kiekvienos aibės dydis turi binominį skirstinį su parametrais m ir p. Pastebėsime, kad bet kurioms grafo $G = G(n, m, p)$ viršūnėms u, v, w įvykiai $uv \in E(G)$ ir $vw \in E(G)$ yra priklausomi. Šios savybės neturi populiarusis Erdős ir Rényi atsitiktinis grafas, kurio briaunos yra nepriklausomos.

E. Godehardt ir J. Jaworski pasiūlė bendresnį *aktyviojo* atsitiktinio sankirtų grafo modelį, žymimą $G(n, m, P)$, čia P yra tikimybinis skirstinys aibėje $\{0, 1, \ldots, m\}$. Šis grafas konstruojamas taip: poaibiai $S_1, \ldots, S_n$ yra atsitiktiniai ir nepriklausomi, o poaibis S_v gaunamas dviem žingsniais: pradžioje generuojame atsitiktinį dydį X_v su tikimybiniu skirstiniu P, tuomet pasirenkame X_v dydžio poaibį $S_v \subseteq W$ atsitiktinai ir tolygiai: visi X_v dydžio poaibiai turi vienodas tikimybes $\binom{m}{X_v}^{-1}$.

Kiekvienas indeksuotas aibės W poaibių rinkinys $\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ turi dualų rinkinį $\{T_w : w \in W\}$, kur $T_w = \{v : w \in S_v\}$. Aibė T_w sankirtų grafe atitinka *kliką* (pografį, kur kiekviena viršūnė sujungta su kiekviena kita), o visų klikų T_w sąjunga apibrėžia sankirtų grafo briaunas. Sankirtų grafo pilnąjį pografį su viršūnėmis T_w vadinsime *vienspalve* klika.

Mokslinėje literatūroje atsitiktinių sankirtų grafų tyrimai dažnai motyvuojami tuo, kad tokie grafai tinka tam tikrų realių tinklų savybių modeliavimui. Pavyzdžiui, tinkamai parinkus parametrų $m = m(n)$ ir $P = P(n)$ reikšmes, galima gauti atsitiktinius sankirtų grafus $G = G(n, m, P)$, kurie (kai $n \to \infty$)

(a) yra *reti*, t. y. vidutinis viršūnės laipsnis yra aprėžtas;

(b) klasterizacijos koeficientas neartėja į nulį. *Klasterizacijos koeficientas* yra sąlyginė tikimybė, kad trys atsitiktinės grafo viršūnės sudaro trikampį, su sąlyga, kad pirmosios dvi yra sujungtos su trečiąja.

Publikuoti empiriniai tyrimai rodo, jog panašias savybes turi ir įvairūs iš realių didelės apimties duomenų (pavyzdžiui, mokslinių citavimų duomenų bazių arba socialinių tinklų) gauti grafai. Dar viena įdomi ir universali didelių realių tinklų savybė, postuluojama fizikų ir praktinių informatikų, yra laipsnio dėsnis viršūnių laipsnių[1] skirstiniui. Ją galime atkartoti ir grafe $G(n, m, P)$ imdami pradinį (aibės dydžio) skirstinį P su laipsnine uodega.

Toliau paeiliui aptarsime pirmojoje disertacijos dalyje nagrinėjamus uždavinius.

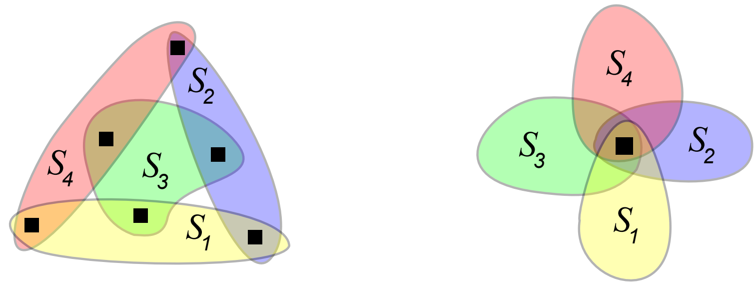
Pilnieji pografiai atsitiktiniame sankirtų digrafe

Tegul kaip ir anksčiau n – natūralusis skaičius, $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ – atributų aibė, o p_- ir p_+ – kokie nors fiksuoti skaičiai iš intervalo $(0, 1)$. Kiekvienai viršūnei $v \in [n]$ priskirkime ne po vieną, o po du aibės W poaibius D_v^- ir D_v^+, kur kiekvienas elementas iš aibės W įtraukiamas į poaibį D_v^- (D_v^+) nepriklausomai su tikimybe p_- (p_+). Galiausiai apibrėžkime digrafą $D = D(n, m, p_-, p_+)$ su viršūnių aibe $V(D) = [n]$ ir lankų aibe $E(D)$ susidedančia iš tų (sutvarkytų) porų uv, $u \neq v$, kurioms $D_u^- \cap D_v^+ \neq \emptyset$. Šį modelį galima interpretuoti taip: D_u^- atitinka aibę savybių, kurias u-asis individas „mėgsta“, o D_v^+ – aibę savybių, kurias v-asis individas „turi“.

Priminsime, kad pilnasis grafas, turintis h viršūnių ir $\binom{h}{2}$ briaunų, žymimas K_h. Karoński, Scheinerman ir Singer-Cohen nustatė kokioms parametro p reikšmėms esant binominis atsitiktinis sankirtų grafas $G(n, m, p)$ turi h dydžio kliką su tikimybe artima 1 (kai $n \to \infty$, o h yra fiksuotas); kritinė parametro p reikšmė vadinama K_h *gimimo slenksčiu* (angl. birth threshold). Paaiškėjo, kad fiksuoto dydžio klikoms, pakanka nagrinėti baigtinį poromis susikertančių aibių konfigūracijų skaičių ir palyginti kiekvienos iš jų pasirodymo grafe $G(n, m, p)$ tikimybes, o gimimo slenkstį realizuoja viena iš dviejų paprastų konfigūracijų (žr. 2 pav.).

Pirmajame disertacijos skyriuje sprendžiamas panašus uždavinys atsitiktiniam sankirtų digrafui. Fiksuotam skaičiui h nustatomi parametrų m, p_- ir p_+ rėžiai, su kuriais tikimybė, jog $D(n, m, p_-, p_+)$ turi pilnąjį pografį (t. y. digrafą su visomis įmanomomis briaunomis) iš h viršūnių artima 1 (arba 0). Priklausomai nuo parametrų m, p_-, p_+ tarpusavio santykio (jie visi gali priklausyti nuo n), pilnojo pografio „gimimo slenkstį“ gali realizuoti keturios

[1] Skirtingus terminus čia, deja, atitinka tas pats lietuviškas žodis: laipsnio dėsnis – angl. power law, viršūnės laipsnis (kaimynų skaičius grafe) – degree.



2 pav.: Dvi svarbiausios susikertančių aibių konfigūracijos, sankirtų grafe atitinkančios kliką iš 4 viršūnių.

skirtingos besikertančių aibių konfigūracijos. Dvi iš šių konfigūracijų neturi atitikmens neorientuoto grafo atveju.

Didžiausia klika

Iki šiol minėti uždaviniai susiję su mažais, t. y., fiksuoto dydžio pilnaisiais pografiais. O kaip nustatyti didžiausios klikos dydį (vadinamą *klikos skaičiumi*) atsitiktiniame sankirtų grafe? Bendresniais atvejais šis uždavinys gana sudėtingas, o taip yra dėl dviejų priežasčių. Pirmiausia, lokali klasterizacija sankirtų grafuose reiškia reikšmingą briaunų priklausomumą. Antra, klikos skaičius grafe $G(n, m, P)$ gali būti (stochastiškai) neaprėžtas n artėjant į begalybę, todėl besikertančių aibių konfigūracijų, pagaminančių tokią kliką, skaičius taip pat nėra baigtinis. Antrajame disertacijos skyriuje šis uždavinys sprendžiamas retiesiems atsitiktiniams sankirtų grafams $G(n, m, P)$.

Pažymėkime $D(n)$ atsitiktinės viršūnės (ekvivalenčiai, viršūnės 1) laipsnį grafe $G = G(n, m, P)$. Darbe buvo nustatyta, jog retųjų sankirtų grafų klikos skaičiaus asimptotika priklauso nuo atsitiktinio dydžio $D(n)$ uodegos. Jei $D(n)$ asimptotiškai tenkina laipsnio dėsnį su indeksu $\alpha \in (1, 2)$ (pavyzdžiui, Pareto atsitiktinis dydis X su $\mathbb{P}(X > t) = t^{-\alpha}$ tenkina laipsnio dėsnį su indeksu α), tai klikos skaičius yra polinominės eilės.

Tuo tarpu, jei viršūnių laipsnis grafe G turi aprėžtą dispersiją ($\sup_n VarD(n) < \infty$), įrodoma, kad didžiausia klika yra su didele tikimybe beveik vienspalvė (tai yra, pagaminta tik vieno atributo, kaip 2 pav. dešinėje), o jos dydis – logaritminės eilės. Šis reiškinys yra būdingas sankirtų grafams: beveik visuose kituose populiariuose retųjų atsitiktinių grafų modeliuose su baigtine viršūnės laipsnio dispersija klikos dydis su didele tikimybe neviršija konstantos.

Tiek laipsnio dėsnio, tiek aprėžtos dispersijos atveju gaunamas optimalus pirmojo asimptotinio nario įvertis.

Antrajame skyriuje taip pat nagrinėjami paprasti polinominiai algoritmai didžiausios klikos radimui grafe $G(n, m, P)$: kiekvieną iš dviejų „režimų“ atitinka skirtingas algoritmas. Įrodoma, kad su didele tikimybe atitinkamas algoritmas randa kliką, kurios dydis artimas klikos skaičiui ir baigia darbą per polinominį laiką. Disertacijos autorius mano, kad šie algoritmai gali būti perspektyvūs ne tik sankirtų grafų kontekste, tačiau ir bet kokių didelių realių tinklų tyrimams.

Sankirtų grafai, hypergrafai ir spalvinimas

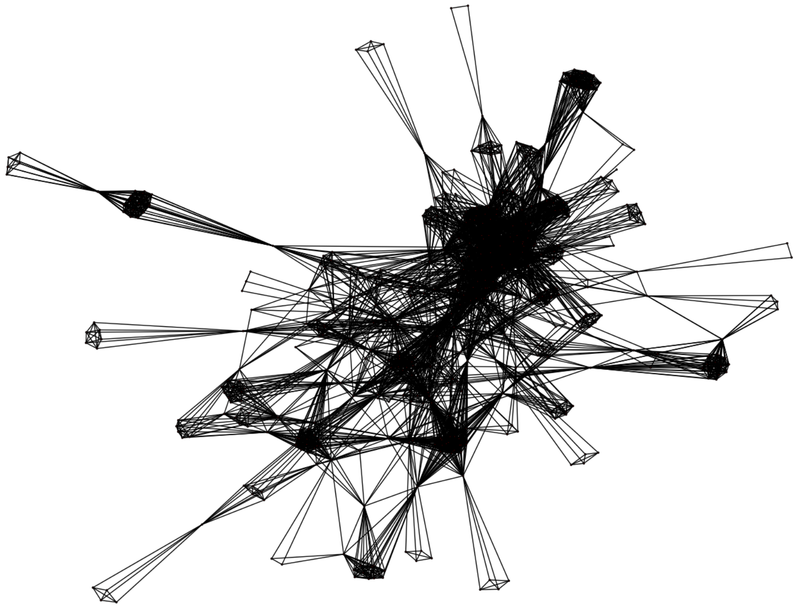
Hipergrafas yra pora $H = (V, F)$, kur V – viršūnių aibė, o F – V poaibių aibė. Čia leisime F būti ir multiaibe. Aibės F elementai vadinami hiperbriaunomis arba tiesiog *briaunomis*. Čia bus nagrinėjami tik hipergrafai su baigtinėmis aibėmis V ir F. Grafo G *chromatiniu (chromačiuoju) skaičiumi* vadinamas mažiausias toks skaičius $\chi = \chi(G)$, kad grafo viršūnes galime nuspalvinti χ spalvų taip, kad jokios dvi gretimos (briauna sujungtos) viršūnės negautų tos pačios spalvos. Hipergrafo H chromatiniu indeksu vadinamas toks mažiausias skaičius $\chi' = \chi'(H)$, kad H briaunas galime nuspalvinti panaudodami χ' spalvų taip, jog nebūtų dviejų tos pačios spalvos susikertančių briaunų.

Trečiajame disertacijos skyriuje nagrinėjamas atsitiktinis tolygusis hipergrafas $\mathbb{H}^{(k)}(m, n)$ su viršūnių aibe $[m]$ ir n briaunų, kuriame kiekviena briauna yra traukiama tolygiai[2] nepriklausomai iš visų $\binom{m}{k}$ aibės $[m]$ k dydžio poaibių. Keliamas uždavinys – nustatyti atsitiktinio hipergrafo $\mathbb{H}^{(k)}(m, n)$ chromatinio indekso priklausomybę nuo parametrų k, n ir m. Šis uždavinys ekvivalentus chromatinio skaičiaus nustatymo uždaviniui atsitiktiniam tolygiajam sankirtų grafui $G(n, m, k)$ ($G(n, m, k)$ yra specialus $G(n, m, P)$ atvejis, kai P – išsigimusio atsitiktinio dydžio skirstinys, $P(k) = 1$). Tuo atveju, kai skaičius k yra fiksuotas, o n artėja į begalybę daug greičiau nei m, uždavinys buvo išspręstas N. Pippenger ir J. Spencer 1989 m. Šių matematikų rezultatas yra labai bendras ir galioja ne tik atsitiktinių, bet ir deterministinių hipergrafų sekoms, tenkinančioms tam tikrą reguliarumo savybę. Disertacijoje šis rezultatas praplečiamas atsitiktinių hipergrafų atveju: įrodoma, kad panašus dėsnis galioja ir tuo atveju, kai parametras $k = k(n)$ lėtai auga į begalybę. Uždaviniui spręsti pasiūlomas randomizuotas „godusis“ briaunų spalvinimo algoritmas ir diferencialinių lygčių metodu įrodoma, kad šis algoritmas su didele tikimybe taisyklingai nuspalvina visas hipergrafo briaunas su asimptotiškai optimaliu spalvų skaičiumi.

Ar atsitiktinis sankirtų grafas tinka modeliuoti realius tinklus?

Disertacijoje taip pat trumpai minimi empiriniai tyrimai atlikti kartu su darbo vadovu. Viena iš svarbių atsitiktinių sankirtų grafų tyrimų problemų – nustatyti jų ryšį su realiais grafais. Darbo rengimo metu buvo vertinami įvairūs realių tinklų (pavyzdžiui, aktorių afiliacijų tinklo, kur du aktoriai paskelbiami gretimais, jei jie vaidino tame pačiame filme) ir kompiuteriu modeliuotų atsitiktinių sankirtų grafų statistiniai parametrai. Jie palyginami su teoriniais rezultatais.

[2] Čia ir toliau elementą X vadinsime *tolygiai atsitiktiniu* elementu iš baigtinės aibės $\mathcal{C}$, jei $\mathbb{P}(X = x) = |\mathcal{C}|^{-1}$ kiekvienam $x \in \mathcal{C}$.



3 pav.: Lietuviškų filmų aktorių afiliacijų tinklas (duomenys iš IMDB: `http://www.imdb.com`). Čia aiškiai atsispindi sankirtų grafų struktūros savybė: briaunas sudaro vienspalvių klikų (viena tokia klika susideda iš visų aktorių vaidinusių konkrečiame filme) sąjunga.

2.2 Mokslinė problema, objektai, tikslai ir aktualumas

Pirmosios disertacijos dalies tyrimo *objektas* yra atsitiktiniai sankirtų grafai ir digrafai, tiksliau jų sekos, kai viršūnių skaičius $n \to \infty$, o parametrai priklauso nuo n. Darbo *problema* yra ištirti kai kurias esmines asimptotines atsitiktinių sankirtų grafų savybes. Konkrečios savybės nagrinėjamos šioje disertacijoje yra šios: fiksuoto dydžio pilnojo pografio egzistavimas atsitiktiniame binominiame sankirtų digrafe $D(n, m, p_-, p_+)$, klikos bei chromatinis skaičiai atsitiktiniam aktyviajam sankirtų grafui $G(n, m, P)$. Darbo *tikslas* yra gauti griežtus matematinius įverčius kaip įmanoma bendresniems parametrų rėžiams bei geriau suprasti sankirtų grafų sąsają su realiais tinklais.

Kaip minėta įžanginėje dalyje, atsitiktinių grafų tyrimai yra *aktualūs* tuo, jog leidžia modeliuoti tam tikras realių tinklų savybes. Atsitiktinio sankirtų grafo modelis literatūroje buvo pasiūlytas bevielių sensorių tinklo realizacijai, naudotas socialinių bei epidemiologinių tyrimų kontekste. Teoriniai tyrimai rodo, kad dėl klasterizacijos savybės ir pakankamai didelio „lankstumo“ atsitiktiniai sankirtų grafai yra gana universalūs, todėl norėtųsi tikėti, kad jie užims svarbią vietą ir praktikoje.

Sankirtų grafų tyrimai svarbūs ir grynai teoriniu požiūriu. Kaip minėta, sankirtų grafas yra tiesiog tam tikra hipergrafo interpetacija. Tiek deterministiniai, tiek atsitiktiniai hipergrafai yra gana abstraktūs objektai, o jų terminais formuluojama daugelis gilių kombinatorikos bei informatikos teoremų ir hipotezių. Pavyzdžiui, grafo ir hipergrafo klikos skaičiaus bei chromatinio skaičiaus uždaviniai yra klasikiniai NP-pilni (angl. NP-complete) uždaviniai informatikoje, o polinominis algoritmas, kuris surastų optimalaus dydžio kliką net paprasčiausio atsitiktinio grafo su nepriklausomomis briaunomis atveju, nėra žinomas (todėl trečiajame disertacijos skyriuje pateikiami algoritmai yra įdomi išimtis). Kita vertus, atsitiktinių sankirtų grafų uždaviniai leidžia taikyti ir plėtoti metodus silpnai priklausomų atsitiktinių dydžių sekų funkcionalams tirti.

Pastarąjį dešimtmetį įvairiems sankirtų grafų modeliams buvo skirta nemažai dėmesio literatūroje. Disertacijoje pateikiami nauji teoriniai rezultatai, atsakantys į keletą iki tol neatsakytų sudėtingesnių klausimų, pritaikomi nauji metodai duotiems (ir panašiems) uždaviniams spręsti, taip pat pateikiami ir analizuojami nauji algoritmai ir kai kurie empirinės analizės tyrimai, kurie, tikima, bus naudingi ir praktikoje.

Darbe nagrinėjami uždaviniai trumpai buvo pristatyti įvadinėje dalyje, o svarbiausi rezultatai griežtai formuluojami kitame skyrelyje.

2.3 Moksliniai rezultatai

2.3.1 Maži pografiai atsitiktiniuose sankirtų digrafuose

Pažymėkime $\overrightarrow{K}_h$ digrafą su viršūnių aibe $[h] = \{1, \dots, h\}$ ir lankų aibe $E(\overrightarrow{K}_h) = \{(x, y) : x, y \in [h], x \neq y\}$. Darbe įvedama *diklikos* sąvoka: diklika vadinama aibių pora $C = (C^-, C^+)$, ją atitinka dvidalis grafas $D(C)$ su viršūnėmis $C^- \cup C^+$ ir lankais $\{(x, y) : x \in C^-, y \in C^+\}$. Atsitiktiniam sankirtų digrafui $D(n, m, p_-, p_+)$ su atributų aibe W apibrėžta *vienspalvė diklika* $C(w)$ generuota atributo $w \in W$: $C(w) = (C^-(w); C^+(w))$, čia $C^-(w) = \{v \in [n] : w \in D_v^-\}$ ir $C^+(w) = \{v \in [n] : w \in D_v^+\}$.

Diklikų šeima $\mathcal{C}$ atitinka digrafą $H(\mathcal{C})$ sudarytą iš digrafų sąjungos $\cup_{C \in \mathcal{C}} D(C)$ (digrafai nebūtinai nepriklausomi). Šeimą $\mathcal{C}$ vadiname digrafo $H(\mathcal{C})$ *diklikų denginiu*. Yra daug skirtingų digrafo $\overrightarrow{K}_h$ denginių. Nustatyta, kad svarbiausi yra keturi „simetriški“ denginiai:

- $\mathcal{C}_M = \{([h]; [h])\}$, „vienspalvis“ diklikų denginys;
- $\mathcal{C}_R = E(\overrightarrow{K}_h)$, „margasis“ diklikų denginys;
- $\mathcal{C}_{in} = \{([h] \setminus \{i\}; \{i\}) \ : \ i \in [h]\}$, denginys įcentrinėmis žvaigždėmis;
- $\mathcal{C}_{out} = \{(\{i\}; [h] \setminus \{i\}) \ : \ i \in [h]\}$, denginys išcentrinėmis žvaigždėmis.

Tarkime $\{D(k), k = 1, 2, \dots\}$ – atsitiktinių binominių sankirtų digrafų seka, čia $D(k) = D(n, m, p_-, p_+)$ ir $n = n(k), m = m(k), p_- = p_-(k), p_+ = p_+(k)$. Pažymėkime $A(k)$ įvykį, kad $D(k)$ turi pografį izomorfišką digrafui $\overrightarrow{K}_h$. Funkcija $\tau = \tau(n, m, p_-, p_+)$ vadinama $\overrightarrow{K}_h$ *gimimo slenksčio funkcija*, jei

$$\tau(n, m, p_-, p_+) \to 0 \implies P(A(k)) \to 0 \quad \text{ir}$$
$$\tau(n, m, p_-, p_+) \to \infty \implies P(A(k)) \to 1.$$

Pažymėkime:

$$\tau_1 = nm^{1/h}p_-p_+; \qquad \tau_2 = n^{1/(h-1)}mp_-p_+;$$
$$\tau_3 = nmp_-^{h-1}p_+; \qquad \tau_4 = nmp_-p_+^{h-1}.$$

Čia pateikiamas supaprastintas teoremos, įrodytos disertacijoje, variantas.

2.1 teorema. *Pažymėkime* $\alpha_0 = 1 - \frac{1}{(h-1)^2}$. *Tarkime* $m = \Theta(n^\alpha)$ *kokiam nors* $\alpha > 0$, $p_- \to 0$ *ir* $p_+ \to 0$. *Tada:*

(i) jei $\alpha < \alpha_0$ *ir*

(a) $m^{\frac{h-1}{h(h-2)}}p_- \to \infty$, *tai* τ_3 *yra* $\overrightarrow{K}_h$ *gimimo slenksčio funkcija;*

(b) $m^{\frac{h-1}{h(h-2)}}p_- \to 0$ $m^{\frac{h-1}{h(h-2)}}p_+ \to 0$, *tai* τ_1 *yra* $\overrightarrow{K}_h$ *gimimo slenksčio funkcija;*

(c) $m^{\frac{h-1}{h(h-2)}}p_+ \to \infty$, *tai* τ_4 *yra* $\overrightarrow{K}_h$ *gimimo slenksčio funkcija;*

(ii) jei $\alpha \geq \alpha_0$ *ir*

(a) $mp_+ \to 0$, *tai* τ_3 *yra* $\overrightarrow{K}_h$ *gimimo slenksčio funkcija;*

(b) $\alpha \neq \alpha_0$, $mp_- \to \infty$ *ir* $mp_+ \to \infty$, *tai* τ_1 *yra* $\overrightarrow{K}_h$ *gimimo slenksčio funkcija;*

(c) $mp_- \to 0$, *tai* τ_4 *yra* $\overrightarrow{K}_h$ *gimimo slenksčio funkcija.*

Be to, įrodyta, kad gimimo slenksčio funkciją atveju (i)(b) realizuoja denginys $\mathcal{C}_M$, atveju (ii)(b) – denginys $\mathcal{C}_R$, atvejais (i)(a) ir (ii)(a) – denginys $\mathcal{C}_{in}$, atvejais (i)(c) ir (ii)(c) – denginys $\mathcal{C}_{out}$. Taip pat išnagrinėtos parametrų reikšmės išvardytų režimų kraštuose, kur gimimo slenkstį realizuoja keletas skirtingų denginių; įrodyta bendresnė lema, leidžianti nustatyti bet kokio fiksuoto digrafo gimimo slenkstį nagrinėjant tik fiksuoto skaičiaus (priklausančio nuo duoto digrafo) skirtingų diklikų denginių tikimybes. Metodų, naudotų Karoński, Scheinerman ir Singer-Cohen digrafo atveju, nepakako, todėl esminė įrodymo dalis paremta nauja idėja.

2.3.2 Didelės klikos retuosiuose atsitiktiniuose sankirtų grafuose

Didžiausios klikos uždavinys binominiam sankirtų grafo modeliui $G(n, m, p)$ tam tikriems parametrų rėžiams buvo nagrinėtas P. G. Spirakis, S. Nikoletseas ir C. Raptopoulos 2009 m. Sankirtų grafui su vienodo (neatsitiktinio) dydžio aibėmis sprendimas išplaukia iš J. Balogh, T. Bohman ir D. Mubayi 2009 m. rezultatų. Disertacijoje nagrinėjamas aktyviojo sankirtų grafo modelis.

Nagrinėkime seką $\{G(n), n = 1, 2, \dots\}$ su $G(n) = G(n, m, P)$ ir $m = m(n)$, $P = P(n)$. Imkime atsitiktinį dydį $X(n)$ su skirstiniu $P(n)$ ir apibrėžkime $Y(n) := \sqrt{\frac{n}{m}}X(n)$. Nagrinėsime tokias sekas $G(n)$, kurioms[3]

$$\mathbb{E}\, Y(n) = O(1). \tag{1}$$

Ši sąlyga reikalinga tam, kad gautasis sankirtų grafas būtų retas. Darbe nustatyta, kad didžiausios klikos elgesį nulemia atsitiktinio dydžio $Y(n)$ uodegos savybės. Tarsime, kad yra skaičius $\alpha > 0$, lėtai kintanti funkcija L ir skaičius $0 < \epsilon_0 < 0.5$ tokie, kad kiekvienai sekai x_n tenkinančiai $n^{1/2-\epsilon_0} \le x_n \le n^{1/2+\epsilon_0}$

$$\mathbb{P}\left(Y(n) \ge x_n\right) \sim L(x_n) x_n^{-\alpha}. \tag{2}$$

Teigiamų skaičių sekoms $\{a_n\}$ ir $\{b_n\}$ rašome $a_n \sim b_n$, jei $a_n/b_n \to 1$, kai $n \to \infty$.

2.2 teorema. *Tarkime,* $1 < \alpha < 2$*; atsitiktinių grafų seka* $\{G(n)\}$ *tenkina (1), (2); ir kažkokiam* $\beta > \max\{2-\alpha, \alpha-1\}$ *galioja* $m = m(n) = \Omega(n^{\beta})$*. Tada grafo* $G(n)$ *klikos skaičius yra*[4]

$$\omega(G(n)) = (1 + o_P(1))\,(1-\alpha/2)^{-\alpha/2}\, K(n), \tag{3}$$

čia

$$K(n) = L\left((n \ln n)^{1/2}\right) n^{1-\alpha/2} (\ln n)^{-\alpha/2}.$$

Gautasis rezultatas atitinka rezultatus S. Janson, T. Łuczak ir I. Norros 2009 m. tirtame laipsniniame (ne sankirtų) grafe. Tai leidžia daryti išvadą, kad lokali klasterizacija šiuo atveju nedaro reikšmingos įtakos didžiausios klikos dydžiui.

Didžiausios vienspalvės klikos dydį sankirtų grafe G žymėsime $\omega'(G)$, o klikos skaičių $\omega(G)$. Taip pat rašysime $x \vee y = \min(x, y)$.

2.3 teorema. *Tarkime grafų seka* $\{G(n)\}$ *tenkina (1) ir* $VarY(n) = O(1)$*. Tada*

$$\omega(G(n)) = \omega'(G(n)) + O_P(1).$$

Jei, be to, kokiai nors teigiamų skaičių sekai $\{\epsilon_n\}$ *artėjančiai į 0*

$$n\mathbb{P}(Y(n) > \epsilon_n n^{1/2}) \to 0 \tag{4}$$

tai su absoliučia konstanta C*,*

$$\mathbb{P}\left(\omega(G(n)) \le C \vee (\omega'(G(n)) + 3)\right) \to 1.$$

Toliau darbe nagrinėjamas atsitiktinis dydis $\omega'(G)$. Priminsime gerai žinomą kamuoliukų ir dėžučių uždavinį. Į m dėžučių metame N kamuoliukų atsitiktinai, tai yra, i-asis

[3] Čia ir žemiau ribos – kai $n \to \infty$.

[4] $o_P(), O_P()$ yra literatūroje įprasti tikimybiniai žymėjimų $o()$, $O()$ atitikmenys. Žr. disertaciją.

kamuoliukas įdedamas į tolygiai atsitiktinę dėžutę nepriklausomai nuo kitų kamuoliukų. Pažymėkime $M(N,m)$ kamuoliukų skaičių dėžutėje, į kurią įkrito daugiausiai kamuoliukų. Atsitiktinio dydžio $M(N,m)$ asimptotinės savybės (kai $N, m \to \infty$) gerai žinomos (žr., pavyzdžiui, V. F. Kolchin ir kt. knygą „Random Allocations", 1972 m.). Taip pat pažymėkime $d_{TV}(\xi,\eta) = 2^{-1}\sum_{i\geq 0} |\mathbb{P}(\xi = i) - \mathbb{P}(\eta = i)|$ *pilnosios variacijos atstumą* tarp atsitiktinių dydžių ξ ir η tikimybinių skirstinių.

2.4 teorema. *Tarkime, atsitiktinių grafų seka $\{G(n)\}$ yra tokia, kad $\mathbb{E}Y(n) = \Theta(1)$ ir $VarY(n) = O(1)$. Tada*

$$d_{TV}(\omega'(G(n)), M(\lfloor (mn)^{1/2}\mathbb{E}Y(n)\rfloor, m)) \to 0.$$

Antrajame skyriuje taip pat įrodomas tiesioginis sąryšis tarp atsitiktinio dydžio $Y(n)$ ir viršūnės 1 laipsnio $D_1(n)$. Remiantis juo, pavyzdžiui, atveju $m = \Theta(n)$ aktyviajam grafui $G(n)$ su baigtine viršūnės laipsnio $D_1(n)$ dispersija turime neaprėžtą klikos skaičių: $\omega(G(n)) = \frac{\ln n}{\ln\ln n}(1 + o_P(1))$. Tuo tarpu kituose klasikiniuose atsitiktinių grafų modeliuose, su kuriais gaunami grafai turi panašias viršūnių laipsnių sekas, klikos skaičius grafo eilei n artėjant į begalybę lieka aprėžtas.

Galiausiai antrajame skyriuje pateikiami algoritmai, sukonstruojantys kliką grafe $G(n)$ 2.2 ir 2.4 teoremų atvejais, bei įrodoma, kad su didele tikimybe atitinkamas algoritmas randa optimalios eilės $\omega(G(n))(1-o_P(1))$ kliką per vidutinį polinominį laiką (angl. expected polynomial time). Žemiau pateikiamas algoritmo baigtinės dispersijos atveju pseudokodas.

```
MONO-CLIQUE(G):
    for uv ∈ E(G)
        D(uv) ← |Γ(u) ∩ Γ(v)|
    for uv ∈ E(G) mažėjančia D(uv) seka
        S ← Γ(u) ∩ Γ(v)
        if S yra klika then
            return S ∪ {u, v}
    return {1} ∩ V(G)
```

Čia $\Gamma(v)$ – v kaimynų aibė grafe G.

2.3.3 Atsitiktinio hipergrafo briaunų spalvinimas

Hipergrafo $H = (V, F)$ *taisyklingu spalvinimu* su s spalvų vadinsime funkciją $c : F \to \{1, \ldots, s\}$, tokią, kuri tenkina šią savybę: jei e_1, e_2 yra dvi skirtingos briaunos iš F ir $e_1 \cap e_2 \neq \emptyset$, tai $c(e_1) \neq c(e_2)$. Ketvirtajame disertacijos skyriuje įrodomas šis rezultatas:

2.5 teorema. *Kiekvienam $\epsilon > 0$ egzistuoja toks $c_\epsilon > 0$, kad galioja tolesnis teiginys. Tarkime, kad $k, n, m \geq 2$ – natūralieji skaičiai. Pažymėkime $\bar{d} = \frac{nk}{m}$. Jei*

$$k \leq c_\epsilon \ln\left(\frac{m}{\ln \bar{d}}\right) \quad ir \quad k \leq c_\epsilon \ln\left(\frac{\bar{d}}{\ln m}\right), \tag{5}$$

tai egzistuoja algoritmas, taisyklingai nuspalvinantis visas $\mathbb{H}^{(k)}(n,m)$ briaunas su $\lceil \bar{d}(1+\epsilon) \rceil$ spalvų su tikimybe ne mažesne kaip $1 - \frac{2}{n} - \frac{2}{\bar{d}}$.

Tarkime, kad $\{H(n), n = n_0, n_0+1, \dots\}$ yra hipergrafų, tenkinančių 2.5 teoremos prielaidas, seka: $H(n) = \mathbb{H}^{(k)}(n,m)$, čia $k = k(n)$, $m = m(n)$. Tuomet $\bar{d} = \bar{d}(n) = \frac{nk}{m} \to \infty$. Taip pat $H(n)$ su didele tikimybe turi viršūnę v su laipsniu ne mažesniu nei $\bar{d}$ (v laipsniu vadinamas ją uždengiančių briaunų skaičius), todėl

$$\chi'(H(n)) = \bar{d}(1 + o_P(1)).$$

Algoritmas, minimas teoremoje, yra paprastas „godusis“ spalvinimo algoritmas, kuris kiekvienai briaunai parenka atsitiktinę spalvą tolygiai iš visų „leidžiamų“ spalvų.

2.3.4 Empiriniai rezultatai

Tarkime, G yra grafas, o (v_1^*, v_2^*) – tolygiai atsitiktinė jo skirtingų viršūnių pora. M. Bloznelis apibrėžė *klasterizacijos funkciją cl_G*,

$$cl_G(r) = \mathbb{P}(v_1^* v_2^* \in E(G) \,|\, d(v_1^*, v_2^*) = r),$$

ir įrodė, kad atsitiktinių grafų sekoms tenkinančioms (1) ir tam tikras natūralias sąlygas ši funkcija artėja į funkciją su dviem laipteliais $c\mathbf{I}_{x\geq 1} + (1-c)\mathbf{I}_{x\geq 2}$, $c \in (0,1)$. 1.2 disertacijos skyriuje yra pateikti klasterizacijos funkcijos grafikai aktorių afiliacijų tinklams (remiantis vieša filmų duomenų baze „IMDB“) ir „Facebook“ trijų universitetų tinklams (remiantis M. A. Porter svetainėje anksčiau skelbtais duomenimis). Šiuose realiuose tinkluose, kaip ir teoriniuose skaičiavimuose, $cl_G(r)$ yra nemažėjanti funkcija. Taip pat pateikiami sąlyginio asortatyvumo koeficiento

$$\alpha^{[k]}(G) = \mathbb{P}(v_1^* v_2^* \in E(G) \,|\, v_1^* v_3^*, v_2^* v_3^* \in E(G), d(v_3^*) = k)$$

funkcijos grafikai prancūziškų filmų aktorių afiliacijų tinklui ((v_1^*, v_2^*, v_3^*) – tolygiai atsitiktinis skirtingų grafo G viršūnių trejetas). Čia pastebėtas skirtumas tarp atsitiktinių ir realių tinklų. Statistiniai įverčiai, pagrįsti sankirtų grafų modeliais, – dar ateities darbas.

3 Atsitiktiniai grafai iš minorinių klasių

3.1 Įvadas

Antrojoje disertacijos dalyje nagrinėjami grafai, kuriuose tam tikri pografiai yra uždrausti. Priminsime, kad jungusis grafas, neturintis ciklų, vadinamas *medžiu*. Beciklis, bet nebūtinai jungus grafas yra *miškas*. Taigi visų miškų klasė susideda iš grafų, kuriuose „uždraustas“ bet koks ciklas.

Žymėtųjų grafų klasei $\mathcal{A}$ (pavyzdžiui, medžių klasei), užrašas $\mathcal{A}_n$ reikš $\mathcal{A}$ poklasį, susidedantį iš visų grafų $G \in \mathcal{A}$ su viršūnių aibe $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$. Du esminiai kombinatorikos klausimai yra

(*) (asimptotiškai) įvertinti aibės $\mathcal{A}_n$ elementų skaičių;

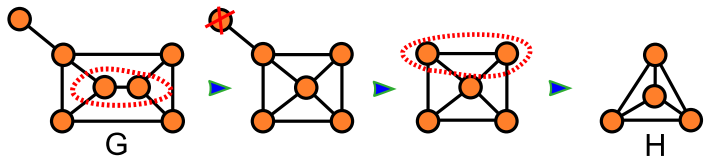
(**) nustatyti tipinių klasės $\mathcal{A}$ objektų struktūrą, t. y., tolygiai atsitiktinio grafo iš $\mathcal{A}_n$ savybes.

Pavyzdžiui, klasikinė A. Cayley 1868 m. teorema tvirtina, kad medžių su viršūnėmis $[n]$ skaičius yra n^{n-2}, o A. Rényi 1959 m. įrodė, kad miškų su ta pačia viršūnių aibe skaičius yra $\sqrt{e}n^{n-2}(1 + o(1))$ kai $n \to \infty$.

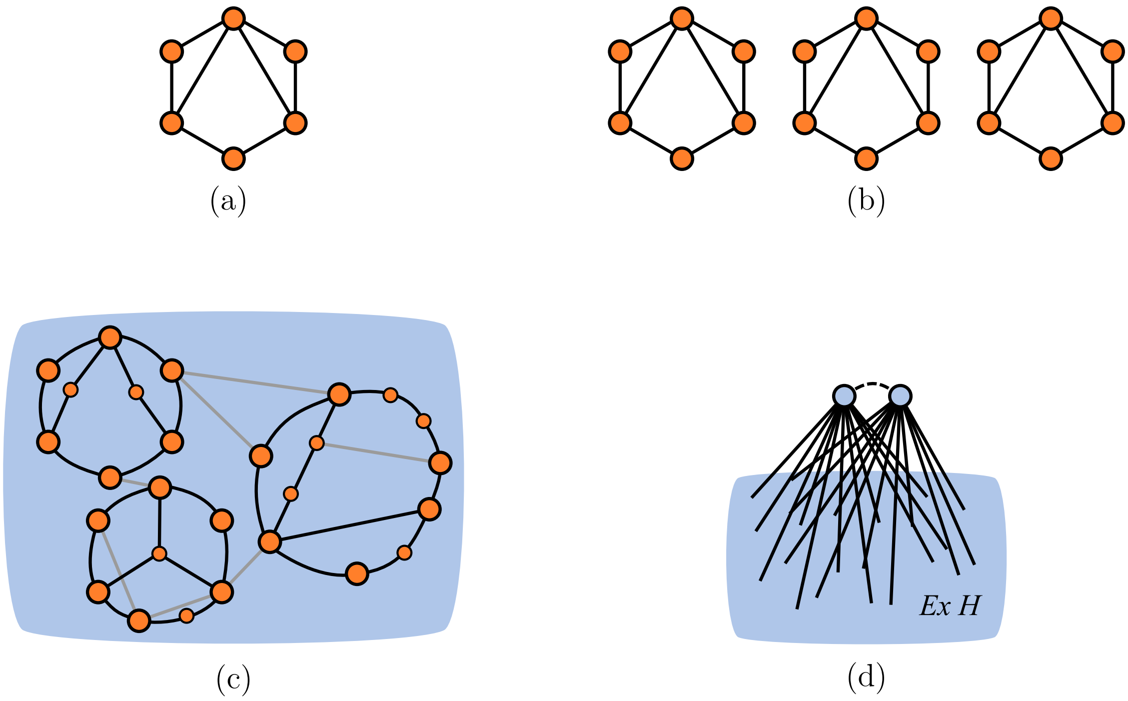
Antroji disertacijos dalis pradedama grafų be $k + 1$ nepriklausomų ciklų klasės analize. Čia natūralusis skaičius k fiksuotas, o grafus $H_1, \dots, H_t$ vadiname *nepriklausomais*, jei jų viršūnių aibės yra poromis nesikertančios. P. Erdős ir L. Pósa 1965 m. įrodė, kad kiekvienam k galima rasti tokią konstantą c_k, kad kiekvieną grafą be $k + 1$ nepriklausomų ciklų galima paversti becikliu grafu (mišku) iš to grafo atėmus ne daugiau kaip c_k viršūnių (kad ir koks didelis būtų duotasis grafas). Taip pat yra žinoma, jog minimalios tokios c_k eilė yra $k \ln k$.

Šeštajame skyriuje pateikiamas įrodymas, kad tipinį grafą be $k+1$ nepriklausomų ciklų paversti becikliu galima atėmus tik k viršūnių. Dar daugiau, įrodoma, kad kai n didelis, atsitiktinio grafo tenkinančio šį apribojimą ir turinčio viršūnių aibę $[n]$ skirstinys labai artimas šiai paprastai konstrukcijai: a) iš aibės $[n]$ išrinkime tolygiai atsitiktinę aibę iš k elementų; b) ant likusių viršūnių $[n] \setminus S$ uždėkime tolygiai atsitiktinį mišką; c) kiekvienai porai $\{x, y\} \subset [n]$ su $S \cap \{x, y\} \neq \emptyset$ pridėkime briauną xy nepriklausomai su tikimybe 1/2.

Grafo G briaunos $e = xy$ *sutraukimu* vadinama operacija, kai viršūnės x ir y yra sutapatinamos – pakeičiamos nauja viršūne v_{xy}, incidenčia visoms buvusioms x arba y kaimynėms. Grafas H vadinamas grafo G *minoru*, jei H galime gauti pradėję nuo G ir atlikę kokią nors briaunų sutraukimo ir briaunų ar viršūnių ištrynimo operacijų seką (žr. 4 pav.). Grafų klasę $\mathcal{A}$ vadinsime *minorine* (angl. minor-closed), jei bet kuriam $G \in \mathcal{A}$ kiekvienas G minoras taip pat priklauso klasei $\mathcal{A}$. Giliausi rezultatai minorinių klasių tematikoje priklauso N. Robertson ir P. Seymour, jie įrodomi įspūdingoje daugiau nei dvidešimties straipsnių serijoje, paskelbtoje 1983–2004 m. Vienas šių rezultatų teigia, kad kiekvieną minorinę klasę



4 pav.: Viršūnių ištrynimų ir briaunų sutraukimų seka, parodanti, jog H yra grafo G minoras.



5 pav.: Grafų klasės, nagrinėjamos 7-ajame disertacijos skyriuje pavyzdys: (a) grafas H; (b) uždraustasis minoras – 3 nepriklausomos H kopijos; (c) grafas, turintis tris nepriklausomus uždraustuosius minorus; (d) tipinis grafas, neturintis trijų uždraustųjų minorų H.

$\mathcal{A}$ charakterizuoja baigtinė minimalių *uždraustųjų minorų* aibė $\mathcal{B}$. Tai reiškia, kad grafas G *nepriklauso* klasei $\mathcal{A}$ tada ir tik tada, kai G turi minorą izomorfišką kuriam nors iš grafų aibėje $\mathcal{B}$ (toliau trumpinsime „*minorą iš aibės* $\mathcal{B}$“). Šį faktą žymėsime $\mathcal{A} = \operatorname{Ex} \mathcal{B}$. Pavyzdžiui, daug ankstesni K. Kuratowski (1930) ir K. Wagner (1937) darbai atskleidė, jog plokščiųjų[5] grafų klasė charakterizuojama dviem uždraustaisiais minorais – $K_{3,3}$ ir K_5 ($K_{t,t}$ yra pilnasis dvidalis grafas, kuriame abi dalys turi po t viršūnių). Kiti minorinių klasių pavyzdžiai yra miškų, nuosekliai lygiagrečiųjų (angl. series-parallel), išoriškai plokščiųjų (angl. outerplanar) grafų, grafų atvaizduojamų (angl. embeddable) k-osios rūšies paviršiuje (angl. surface of genus k) klasės, grafų turinčių baigtinį medžio plotį (angl. treewidth), grafų be mazgų atvaizduojamų (angl. knotlessly embeddable) trimatėje euklidinėje erdvėje klasės ir t. t.

Kombinatoriniai plokščiųjų ir kitų minorinių grafų klasių tyrimai suaktyvėjo paskutinįjį dešimtmetį. Svarbiausi kitų autorių rezultatai apžvelgiami penktajame disertacijos skyriuje.

Grafų be $k+1$ nepriklausomų ciklų klasė – taip pat minorinė, o uždraustasis minoras

[5] Grafas vadinamas *plokščiuoju* (angl. planar), jei jį galima nupiešti plokštumoje taip, kad dvi skirtingos briaunos liestųsi nebent tik galais.

šiuo atveju yra grafas, sudarytas iš $k+1$ nepriklausomų K_3 kopijų. 7-asis disertacijos skyrius apibendrina 6-ojo skyriaus rezultatus grafams be $k+1$ nepriklausomų minorų iš fiksuotos aibės $\mathcal{B}$, tai yra, klasei grafų, kurie neturi nepriklausomų pografių H_1, ..., H_{k+1}, kurių kiekvienas turėtų uždraustąjį minorą aibėje $\mathcal{B}$. Tam, kad apibendrinimas galiotų, būtina pareikalauti apribojimo: klasei $\mathrm{Ex}\,\mathcal{B}$ negali priklausyti be galo dìdelės vėduoklės[6].

Antrosios dalies rezultatai griežtai formuluojami santraukos 3.3 skyrelyje, o kol kas juos iliustruosime konkrečiu pavyzdžiu, kai $k=2$ ir $\mathcal{B}=\{H\}$ sudaryta tik iš vieno konkretaus grafo su 6 viršūnėmis, žr. 5 (a) pav. Disertacijoje įrodomas rezultatas galioja klasei $\mathcal{A}$ su uždraustuoju minoru pavaizduotu 5 (b) pav. Grafai, kurie netenkina apribojimo ir nepatenka į klasę $\mathcal{A}$ yra kaip, pavyzdžiui, 5 (c) pav.: du iš paryškintų pografių gaunami *padalinant* (angl. subdivide) grafo H briaunas, o trečiojo grafo minorą izomorfišką H, gausime sutraukę briaunas incidenčias mažesniais skrituliukais pažymėtoms viršūnėms. Iš pagrindinio 6-ojo skyriaus rezultato išplaukia tikslus $|\mathcal{A}_n|$ asimptotinis įvertis bei svarbi savybė: dideliam n atsitiktinis grafas iš klasės $\mathcal{A}_n$ iš esmės susideda iš tolygiai atsitiktinio grafo iš $\mathrm{Ex}\,\mathcal{B}$ su $n-2$ viršūnėmis, dviejų papildomų viršūnių ir briaunų, gretimų papildomoms viršūnėms, atsirandančių nepriklausomai su tikimybe 1/2 (žr. 5 (d) pav.). Su tikimybe labai artima 1, šios dvi papildomos viršūnės grafe išsiskiria tiesiniu ($\approx \frac{n}{2}$) kaimynių skaičiumi.

Dviejuose paskutiniuosiuose disertacijos skyriuose gilinamasi į tolesnį grafų klasių su nejungiais uždraustaisiais minorais sluoksnį. Paprasčiausias tokios klasės pavyzdys – grafai, neturintys dviejų nepriklausomų minorų K_4. Šis konkretus atvejis $\mathcal{B}=\{K_4\}$ motyvuoja kur kas bendresnę analizę. 8-ajame skyriuje pateikiami „grubūs“ kombinatoriniai rezultatai (pvz., augimo konstantos egzistavimas) bet kokiai klasei be $k+1$ nepriklausomo minoro iš $\mathcal{B}$ tuo atveju, kai klasei $\mathrm{Ex}\,\mathcal{B}$ priklauso visos vėduoklės, bet $\mathcal{B}$ yra pakankamai „gera“. Atrasta naujo tipo dominuojanti konstrukcija, nulemianti klasės su tokiu apribojimu grafų skaičiaus asimptotiką.

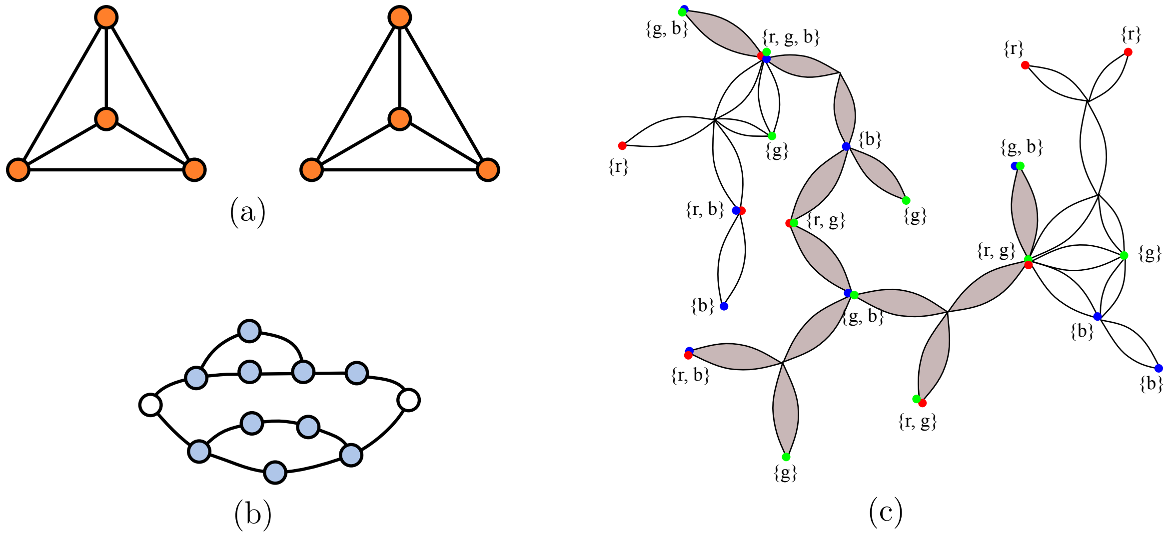
Grafai, neturintys nė vieno minoro K_4, vadinami *nuosekliai lygiagrečiaisiais* (angl. series-parallel). Nuosekliai lygiagrečios grandinės gerai žinomos elektronikos inžinerijoje, o tokius grafus pirmasis 1958 m. nagrinėjo B. A. Trachtenbrotas. Vėliau ši grafų klasė buvo taikoma tirti tokius grafų uždavinius, kuriems nežinomas efektyvus algoritmas, kai grafai yra be apribojimų. 9-ajame skyriuje gaunama tiksli pirmojo nario asimptotika grafų be $k+1$ nepriklausomų minorų K_4 skaičiui. Įrodoma, kad dideliam n tipinis grafas G su šiuo apribojimu ir viršūnėmis $[n]$ turi (vienintelę) aibę S viršūnių, kad:

(i) $|S|=2k+1$,

(ii) bet kuriam $x\in S$, iš G atėmę $S\setminus\{x\}$ gausime nuosekliai lygiagretųjį grafą

(iii) ir kiekviena aibės S viršūnė turi bent cn kaimynių grafe.

[6] *vėduokle* (angl. fan) vadinamas grafas, sudarytas iš tako ir vienos papildomos viršūnės sujungtos briaunomis su kiekviena to tako viršūne.



6 pav.: (a) Uždraustasis minoras: du nepriklausomi K_4; (b) nuosekliai lygiagretusis tinklas; (c) tipinio grafo, neturinčio dviejų nepriklausomų minorų K_4 „branduolys“. Visas grafas gaunamas pridėjus tris papildomas viršūnes x, y ir z bei sujungus jas briaunomis atitinkamai su kiekviena viršūne nuspalvinta raudonai (r), žaliai (g) ir mėlynai (b), pakeitus kiekvieną lapo formos figūrą nuosekliai lygiagrečiaisiais tinklais, ir „prikabinus“ prie kiekvienos viršūnės daugiau nuosekliai lygiagrečiųjų grafų. Nė viena iš viršūnių x, y, z atskirai negali kartu su likusiu grafu sudaryti pografio su minoru K_4.

9-ajame skyriuje gaunamas gana detalus tipinio didelio grafo be $k+1$ nepriklausomų minorų K_4 paveikslas. Kai kurios esminės savybės atveju $k = 1$ iliustruojamos 6 pav.

3.2 Mokslinė problema, objektai, tikslai ir aktualumas

Antrosios disertacijos dalies *objektas* – grafų su ribotu skaičiumi nepriklausomų uždraustųjų minorų klasės. Šios dalies *mokslinė problema* – atsakyti į bendrus klausimus (*) ir (**) tokio tipo grafų klasėms. Žinoma, atsakymai į šiuos klausimus gali būti skirtingo tikslumo. Vienas iš neatsakytų klausimų (O. Bernardi, M. Noy ir D. Welsh, 2010) šioje tematikoje – ar kiekviena netriviali minorinė grafų klasė $\mathcal{A}$ turi *augimo konstantą* $\gamma(\mathcal{A})$:

$$\left(\frac{|\mathcal{A}_n|}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} \to \gamma(\mathcal{A}), \qquad \text{kai } n \to \infty. \tag{6}$$

Darbo antrojoje dalyje *tikslas* – išsiaiškinti grafų su nejungiaisiais uždraustais minorais pagrindines savybes, taip pat įrodyti (6) tokioms klasėms ir galbūt gauti tikslesnius asimptotinius įverčius. Siekiant šio tikslo buvo sprendžiami uždaviniai apžvelgti ankstesniame skyrelyje.

Kaip minėta, minorinės klasės *aktualios* teorinėje informatikoje. XX a. pabaigoje išvystyta tokių klasių teorija dažnai įvardijama kaip vienas giliausių grafų teorijos pasiekimų. Jos teoremos apie grafų struktūrą naudojamos algoritmų sudėtingumo tyrimams, ji taip pat yra susijusi su daugeliu esminių grafų teorijos hipotezių (pvz., Hadwiger hipotezė).

Informatikoje svarbus klausimas – algoritmų su atsitiktiniais duomenimis sudėtingumas (angl. average-case complexity). Tarus, kad pradiniai duomenys yra iš klasės $\mathcal{A}$ su kokiu nors apribojimu, vienas natūraliausių šiam reikalui – tolygusis skirstinys (**). Kitas literatūroje minimas taikymas – didelės apimties realizacijų gavimas sistemų testavimui: programos pradiniams duomenims galime sukonstruoti visus įmanomus arba tolygiai atsitiktinius duoto dydžio objektus.

Klausimai, užduodami disertacijoje, išsiskiria tuo, kad jie formuluojami ne konkrečiai grafų klasei, bet visai šeimai panašių klasių, o įrodymuose remiamasi daugiau (ar vien tik) kombinatoriniais, o ne generuojančiųjų funkcijų argumentais. Šis būdas leidžia dirbti su žymiai sudėtingesnėmis struktūromis negu tos, kurioms galima tiesiogiai gauti generuojančiąsias funkcijas. Šios krypties pradininku galima laikyti autoriaus buvusį vadovą ir bendraautorį C. McDiarmid: jis kartu su A. Steger ir D. Welsh pirmasis įrodė augimo konstantos egzistavimą plokštiesiems grafams, o po to ir klasėms su bet kokiais 2-jungiais uždraustaisiais minorais. Tačiau daugelis svarbių minorinių klasių turi kitokius uždraustuosius minorus (pavyzdžiui, dvi nepriklausomos K_5 kopijos yra vienas iš uždraustųjų minorų grafų, atvaizduojamų ant toro klasei), todėl darbe buvo siekiama praplėsti supratimą apie tokias klases ir prisidėti prie naujos, bet įdomios, kombinatorikos srities vystymo.

3.3 Moksliniai rezultatai

Pateikiame tik svarbiausius antrosios disertacijos dalies rezultatus (kai kurie jų supaprastinti). Tarsime, kad visos čia minimos grafų klasės susideda iš žymėtųjų grafų ir yra uždaros izomorfizmo atžvilgiu.

3.3.1 Grafai be $k+1$ nepriklausomų ciklų

Tarkime $\mathcal{A}$ – grafų klasė. Pažymėkime $\mathrm{apex}^k\,\mathcal{A}$ klasę visų tokių grafų G, kuriems egzistuoja $S \subseteq V(G)$, $|S| \leq k$, tokia kad $G - S \in \mathcal{A}$. Taip pat pažymėkime $\mathcal{F}$ – žymėtųjų miškų klasę, $\mathrm{Ex}\, jC$ – grafų neturinčių j nepriklausomų ciklų klasę. 6-ajame disertacijos skyriuje įrodomas šis rezultatas

3.1 teorema. *Kiekvienam natūraliajam k, kai $n \to \infty$*

$$|(\mathrm{Ex}\,(k+1)C)_n| = (1 + e^{-\Omega(n)})\ |(apex^k\mathcal{F})_n|. \tag{7}$$

Prieš tai buvusią teoremą sujungę su kita, gauname tikslią grafų be $k+1$ nepriklausomų ciklų skaičiaus asimptotiką.

3.2 teorema. *Kiekvienam natūraliajam k, kai $n \to \infty$*

$$|(apex^k\mathcal{F})_n| \sim c_k 2^{kn} |\mathcal{F}_n|. \tag{8}$$

Čia $c_k = \left(2^{\binom{k+1}{2}} e^k k!\right)^{-1}$.

Pagrindinei, 3.1 teoremai įrodyti gaunama nauja svarbi lema – įvade minėtos Erdős ir Pósa teoremos praplėtimas. Remiantis pateiktomis teoremomis įrodoma daug svarbių tolygiai atsitiktinio grafo iš klasės $(\mathrm{Ex}\,(k{+}1)C)_n$ savybių, susijusių su grafo struktūra, jungumu, komponenčių skaičiumi, viršūnių laipsniais, chromatiniu ir klikos skaičiumi, taip pat nagrinėjamas ir „liekamasis poklasis“ $(\mathrm{Ex}\,(k{+}1)C) \setminus \mathrm{apex}^k\,\mathcal{F}$.

3.3.2 Grafai be $k+1$ nepriklausomų minorų iš $\mathcal{B}$, kai $\mathrm{Ex}\,\mathcal{B}$ nepriklauso visos vėduoklės

7-asis disertacijos skyrius apibendrina 6-ojo rezultatus. Tarkime $\mathcal{A}$ – minorinė grafų klasė, o $\mathcal{B}$ – jos minimalių uždraustų minorų baigtinė aibė, $\mathcal{A} = \mathrm{Ex}\,\mathcal{B}$. Klasę $\mathcal{A}$ vadinsime *pridedamąja* (angl. addable), jei visi aibės $\mathcal{B}$ grafai yra 2-jungūs. Grafų klasę vadinsime *tikrine*, jei ji nelygi visų grafų klasei. Duotai grafų aibei $\mathcal{B}$ pažymėsime $k\mathcal{B}$ aibę visų grafų turinčių lygiai k jungiųjų komponenčių $C_1, \ldots, C_k$, kurių kiekviena izomorfiška kuriam nors grafui iš $\mathcal{B}$. 3.1 teoremą (čia $\mathcal{B} = \{K_3\}$) apibendrina ši teorema:

3.3 teorema. *Tarkime $\mathcal{A}$ – tikrinė minorinė grafų klasė. Jei $\mathcal{A}$ yra pridedamoji ir jai nepriklauso visos vėduoklės, tai kiekvienam teigiamam k, kai $n \to \infty$*

$$|(\mathrm{Ex}\,(k{+}1)\mathcal{B})_n| = (1 + e^{-\Theta(n)})|(apex^k\,\mathcal{A})_n|. \tag{9}$$

Be to, įrodoma, kad jei klasei $\mathcal{A}$ priklauso visos vėduoklės, tai toks rezultatas (pakankamai dideliam k) nebegalioja. Taip pat gauname 3.2 teoremos apibendrinimą:

3.4 teorema. *Tarkime, kad $\mathcal{A}$ yra tikrinė pridedamoji minorinė grafų klasė su augimo konstanta γ, o k – fiksuotas natūralusis skaičius. Tada, kai $n \to \infty$*

$$|(apex^k\,\mathcal{A})_n| \;\sim\; c_k 2^{kn}\; |\mathcal{A}_n|,$$

čia $c_k = \left(2^{\binom{k+1}{2}} \gamma^k k!\right)^{-1}$.

Taip pat 7-ajame disertacijos skyriuje įrodomos atsitiktinių grafų iš klasės $(\mathrm{Ex}\,(k{+}1)\mathcal{B})_n$ savybės: jų struktūra, jungumas, komponenčių skaičius, chromatinis ir klikos skaičiai ir kt.

3.3.3 Grafai be $k+1$ nepriklausomų minorų aibėje $\mathcal{B}$, kai $\mathrm{Ex}\,\mathcal{B}$ priklauso visos vėduoklės

Ankstesniuose dviejuose skyriuose parodyta, kad „beveik visi“ grafai iš klasės $\mathrm{Ex}\,(k+1)\mathcal{B}$ priklauso klasei $\mathrm{apex}^k\,(\mathrm{Ex}\,\mathcal{B})$. Tačiau, jei klasei $\mathrm{Ex}\,\mathcal{B}$ priklauso visos vėduoklės, toks rezultatas nebegalioja. 8-ajame disertacijos skyriuje įrodoma, kad šiuo atveju klasės $\mathrm{Ex}\,(k+1)\mathcal{B}$ grafų skaičiaus augimo asimptotiką nulemia naujo tipo poklasis.

Tarkime, $\mathcal{A} = \mathrm{Ex}\,\mathcal{B}$ yra minorinė klasė. Grafo G viršūnių aibę Q vadinsime $\mathcal{B}$-*blokatoriumi* (angl. $\mathcal{B}$-blocker), jei $G - Q \in \mathrm{Ex}\,\mathcal{B}$. Jei, be to, kiekvienam $x \in Q$, $Q \setminus \{x\}$ taip pat yra grafo G $\mathcal{B}$-blokatorius, tai blokatorių Q vadinsime *pertekliniu*. Visų grafų, turinčių dydžio j perteklinį $\mathcal{B}$-blokatorių, klasę žymime $\mathrm{rd}_j\,\mathcal{B}$.

Grafų klasei $\mathcal{A}$ pažymėkime sekos (6) viršutinę ribą $\overline{\gamma}(\mathcal{A})$. Tada $\rho(\mathcal{A}) = \overline{\gamma}(\mathcal{A})^{-1}$ yra atitinkamos eksponentinės generuojančiosios funkcijos konvergavimo spindulys (čia laikome $0^{-1} = \infty$).

Grafą, gautą prie pilnojo dvidalio grafo $K_{s,t} = (S, T)$ pridėjus tako su viršūnių aibe T briaunas, vadinsime s-vėduokle (1-vėduoklė vadinama tiesiog vėduokle).

3.5 teorema. *Tarkime, kad $\mathcal{A}$ yra tikrinė pridedamoji minorinė grafų klasė su augimo konstanta γ, o $\mathcal{B}$ – jos minimalių uždraustųjų minorų aibė. Tarkime, klasei $\mathcal{A}$ priklauso visos vėduoklės, bet ne visos 2-vėduoklės ir ne visi dvidaliai grafai $K_{3,t}$.*

Tada egzistuoja natūralusis skaičius $k_0 = k_0(\mathcal{B})$, su kuriuo teisingas tolesnis teiginys. Bet kuriam natūraliajam k, jei $k \geq k_0$, tai

$$\rho(\mathrm{Ex}\,(k+1)\mathcal{B}) = \rho(rd_{2k+1}\,\mathcal{B}) < \rho\left((\mathrm{Ex}\,(k+1)\mathcal{B}) \cap apex^{2k-1}\,\mathcal{A}\right).$$

Jei $k < k_0$, tai klasė $\mathrm{Ex}\,(k+1)\mathcal{B}$ turi augimo konstantą $2^k\gamma$. Dar daugiau, jei $\rho(rd_{2k+1}\,\mathcal{B})^{-1} < 2^k\gamma$, tai galioja (9) įvertis.

Su stipresne prielaida įrodomas augimo konstantos egzistavimas. Grafas vadinamas *ratu* (angl. wheel), jei jis sudarytas iš ciklo C su $|V(C)| \geq 3$ ir papildomos viršūnės, briaunomis sujungtos su kiekviena to ciklo viršūne.

3.6 teorema. *Sakykime, k – fiksuotas natūralusis skaičius, $\mathcal{A}$ – tikrinė pridedamoji minorinė grafų klasė, o $\mathcal{B}$ – jos minimalių uždraustųjų minorų aibė. Tarkime, kiekvienas aibės $\mathcal{B}$ grafas yra 3-jungus, o klasei $\mathcal{A}$ nepriklauso nei visos 2-vėduoklės, nei visi dvidaliai grafai $K_{3,t}$, nei visi ratai. Tada $\mathrm{Ex}\,(k+1)\mathcal{B}$ turi augimo konstantą.*

Pagaliau 9-ajame skyriuje šie rezultatai pritaikomi konkrečiam atvejui $\mathcal{B} = \mathrm{Ex}\,\{K_4\}$ ir klasei $\mathrm{Ex}\,(k+1)\{K_4\}$ (supaprastintai žymėsime $\mathrm{Ex}\,K_4$ ir $\mathrm{Ex}\,(k+1)K_4$ ir t. t.).

3.7 teorema. *Tarkime, k – fiksuotas natūralusis skaičius. Tada:*

$$|(\mathrm{Ex}\,(k+1)K_4)_n| = (1 + e^{-\Theta(n)})|(rd_{2k+1}\,K_4)_n|.$$

Egzistuoja konstantos $c_k > 0$ ir $\gamma_k > 0$, kad

$$|(rd_{2k+1}\,K_4)_n| \sim c_k n^{-5/2} n! \gamma_k^n.$$

Atveju $k = 1$ turime $\gamma_1 = 23.5241...$

Konstantos c_k, γ_k mažiems $k = 1, 2, \ldots$ gali būti įvertintos norimu tikslumu naudojantis kompiuterinės algebros paketais. Taip pat 9-ajame skyriuje nagrinėjamos kai kurios atsitiktinių grafų $(\mathrm{Ex}\,(k+1)K_4)_n$ struktūros asimptotinės savybės (jungumo tikimybė, pografių skaičiai, perteklinio blokatoriaus vienatinumas, viršūnių laipsniai ir kt.).

Galiausiai 3.5 teorema ir 8–9 skyriuose išplėtoti metodai pritaikomi atvejui $\mathcal{B} = \{K_4, K_{2,3}\}$. Klasė $\mathrm{Ex}\,\{K_4, K_{2,3}\}$ yra vadinama išoriškai plokščiųjų (angl. outerplanar) grafų klase.

3.8 teorema. *Sakykime, $\mathcal{B} = \{K_{2,3}, K_4\}$. Kiekvienam $k = 1, 2, \ldots$ klasė $\mathrm{Ex}\,(k+1)\mathcal{B}$ turi augimo konstantą γ'_k. Egzistuoja konstanta $c > 0$, kad*

$$\gamma'_1 = \gamma(apex\,(\mathrm{Ex}\,\mathcal{B})) = 2\gamma(\mathrm{Ex}\,\mathcal{B}) > \gamma(rd_3\,\mathcal{B}) \quad ir \quad |(\mathrm{Ex}\,2\mathcal{B})_n| \sim cn^{-3/2}\gamma_1'^n n!.$$

Tačiau bet kuriam $k \geq 2$

$$\gamma'_k = \gamma(rd_{2k+1}\,\mathcal{B}) > \gamma(apex^k\,(\mathrm{Ex}\,\mathcal{B})) \quad ir \quad |(\mathrm{Ex}\,(k+1)\mathcal{B})_n| = e^{\Omega(n^{1/2})}\gamma_k'^n n!.$$

Darbe pateikiamos apytikslės konstantų γ'_k reikšmės mažiems k ir jų analizinė išraiška (angl. closed-form expression) atveju $k \geq 2$.

7, 8 ir 9 skyrių teoremoms įrodyti gaunami nauji netrivialūs teiginiai apie grafų struktūrą. Taip pat įrodoma bendra lema medžių, kuriuose lapai, vidinės viršūnės ir briaunos pakeistos skirtingų tipų grafais, skaičiavimui. Šie teiginiai galėtų būti pateikiami ir kaip savarankiški.

4 Metodų apžvalga

Disertacijos uždaviniams spręsti naudojami įvairūs metodai. Svarbiausi jų detaliau aptariami 1 ir 5 disertacijos skyriuose.

Tikimybių teorijos nelygybės ir tikimybinis metodas. Pirmojoje disertacijojos dalyje labai svarbūs klasikiniai tikimybių teorijos metodai, tokie kaip pirmojo ar antrojo momento metodas, Čebyševo ir Paley-Zygmund nelygybės, taip pat naudojami kai kurie mažiau įprasti metodai iš Ramzio teorijos (angl. Ramsey theory) ir atsitiktinių grafų srities.

Koncentracijos nelygybės. Abiejose dalyse įrodymams būtinos Černovo tipo nelygybės nepriklausomų atsitiktinių dydžių sumoms. Daugumai taikymų disertacijoje reikalinga tik tai, kad įverčiai būtų eksponentiniai, konstantos reikšmė eksponentėje nesvarbi. 4-ajame skyriuje naudojamos sudėtingesnės nelygybės martingalų koncentracijai iš C. McDiarmid (1998).

Diferencialinių lygčių metodas. Šis metodas pagrįstas koncentracijos nelygybėmis martingalams. Jį 1995 m. išplėtojo N. Wormald, tačiau panaši idėja atsitiktiniam grafo procesui buvo taikoma jau 1981 m. klasikiniame R. Karp ir M. Sipser darbe. Jo esmė – remiantis martingalų su aprėžtais pokyčiais savybėmis įrodyti, kad diskrečiojo atsitiktinio proceso parametro reikšmės kiekviename laiko taške t yra koncentruotos aplink vidurkį. O vidurkio kitimas aprašomas diferencialinėmis lygtimis. Šis metodas buvo taikomas atsitiktinio hipergrafo briaunų spalvinimo uždaviniui.

Minorinių grafų klasių teorija. Antrojoje disertacijos dalyje atspirties taškas – keletas pagrindinių N. Robertson ir P. Seymour grafų minorų teorijos rezultatų. Be minėtos charakterizacijos baigtine uždraustųjų minorų aibe, įrodymams labai svarbus faktas, jog medžio plotis (angl. treewidth) kiekvienai grafų klasei su uždraustu plokščiuoju minoru yra aprėžtas.

Analizinė kombinatorika. Antrojoje dalyje svarbūs analiziniai metodai eksponentinėms generuojančiosioms funkcijoms. Nors 6, 7 ir 8-ajame disertacijos skyriuose naudojami tik labai paprasti taikymai (kaip kad „eksponentinė formulė“, siejanti jungių grafų skaičių su visų grafų skaičiumi), 9-ajame skyriuje reikalingas pilnas „singuliarumų analizės“ metodo taikymas: gaunamas reikalingų grafų klasių „simbolinis“ aprašymas, iš jo gaunamos eksponentinės generuojančiosios funkcijos, įrodomi pagalbiniai kompleksinės analizės teiginiai ir pritaikomi bendri rezultatai koeficientų asimptotikai gauti (Flajolet ir Odlyzko metodas). Beveik visus naudojamus rezultatus galima rasti Ph. Flajolet ir R. Sedgewick, dabar jau klasika tapusioje 2009 m. knygoje „Analytic Combinatorics“, 9-ojo skyriaus rezultatams aktualūs A. Meir ir J. W. Moon 1989 m. darbai rekursyviai apibrėžtų strukūrų skaičiavimo tematikoje.

Kompiuteriniai metodai. Skaitiniai įverčiai antrojoje disertacijos dalyje gauti kompiuterinės algebros paketu `Maple`. Empirinei analizei pirmojoje dalyje reikėjo didelės apimties duomenų apdorojimo, tai buvo realizuota naudojant `Python` paketus `numpy` ir `matplotlib` ir įvykdyta VU MIF skaitmeninių tyrimų ir skaičiavimo centro klasteryje. Nedidelės `Python` ir `C++` programos buvo panaudotos tiesiogiai sukonstruoti ir suskaičiuoti visus įmanomus grafus susijusius su klasėmis be $k+1$ nepriklausomų minorų K_4. Dauguma disertacijos ir santraukos iliustracijų sukurtos su `Xfig` ir `Inkscape`. Disertacija ir santrauka buvo paruoštos su `XeLaTeX`.

Tiesioginiai pirmtakai. Pirmojoje disertacijos dalyje remiamasi kai kuriomis įžvalgomis iš M. Bloznelio, S. Janson, M. Karoński, T. Łuczak, I. Norros, E. R Scheinerman, K. B. Singer-Cohen, K. Rybarczyk ir kt. darbų. Antroji disertacijos dalis sujungia įvairius tos tematikos metodus iš O. Bernardi, O. Giménez, M. Kang, M. Noy, C. McDiarmid, A. Steger, D. Welsh ir kt. darbų, ypač svarbūs kai kurie bendri C. McDiarmid rezultatai.

Visų gaunamų rezultatų įrodymai yra matematiškai griežti. Mažame skyrelyje apie empirinius tyrimus buvo nagrinėjama tik keletas konkrečių tinklų, todėl gaunami grafikai skirti daugiau iliustravimui. Patikimumo sąvoka turėtų prasmę traktuojant ne tinklus, bet jų viršūnes kaip populiacijos elementus: pavyzdžiui, prancūzų aktorių tinklas turi $n = 43204$ aktorius ir $m = 5629$ filmus. Tačiau tam reikalingi tolesni tyrimai.

5 Rezultatų naujumas ir vertė

Visi disertacijoje gauti rezultatai yra originalūs ir gali būti vertinami kaip nauji. Visi pirmosios dalies uždaviniai buvo jau nagrinėti su panašiais atsitiktinių sankirtų grafų ar atsitiktinių hipergrafų modeliais, tačiau dar nenagrinėti su tais, kurie naudojami disertacijoje. Šioje dalyje atrasta nemažai naujų reiškinių ir struktūrų (pvz., atsitiktinio digrafo atveju), pasiūlyti nauji būdai spręsti minėtus ar panašius uždavinius (ekstremaliosios kombinatorikos, kamuoliukų ir dėžučių, diferencialinių lygčių metodų taikymai). Svarbus reiškinys, jog tam tikru atveju didžiausią kliką generuoja vienas atributas, šiek tiek anksčiau buvo nagrinėtas dar dviejų autorių grupių labiau ribotų modelių atvejais. Disertacijoje pasiūlyti nauji algoritmai, teoriškai pagrįstas jų efektyvumas (3 ir 4 disertacijos skyriai) ir tikimasi, kad jie bus naudingi praktikoje. Galiausiai pradėti praktiniu požiūriu labai reikalingi empiriniai didelių tinklų tyrimai.

Antrojoje disertacijos dalyje pristatomų darbų *indėlis* – prof. C. McDiarmid ir autoriaus pradėta ir išvystyta minorinių klasių su nejungiais uždraustaisiais minorais skaičiavimo teorija, gauti atsakymai į klausimus (*) ir (**) trims vis bendresnėms ir/arba sudėtingesnėms minorinių klasių šeimoms, į kurias įeina grafai su informatikoje ir grafų teorijoje aktualiais apribojimais. Visais nagrinėtais atvejais gautas teigiamas atsakymas į Bernardi, Noy ir Welsh klausimą. Be to, pademonstruota, kad tiek klasių su nejungiais uždraustaisiais minorais, tiek apskritai minorinių klasių skaičiavimo uždaviniai yra perspektyvūs ir įdomūs kombinatorikoje (šią temą pratęsė jau pora ne disertacijos autoriaus publikuotų darbų, naudojančių 6 ir 7 skyriuose pasiūlytus metodus).

6 Disertacijos struktūra

Disertacija parašyta anglų kalba. Joje 300 puslapių: įvadas, dvi rezultatų dalys (9 skyriai), išvados ir bibliografija; taip pat 22 iliustracijos. Visi pateikiami rezultatai originalūs, gauti disertacijos autoriaus ir/arba jo bendraautorių. Disertacija parengta pagal paskelbtų arba atiduotų spaudai mokslinių straipsnių medžiagą:

1.2 skyrius – pagal M. Bloznelio, J. Jaworski ir V. Kurausko straipsnį [1] (publikuotas „Electronic Journal of Probability“) ir M. Bloznelio ir V. Kurausko[7] 2012 m. straipsnį [2] (įteiktas redakcijai).

[7] Pastaba: šiuose dviejuose darbuose V. Kurausko indėlis apsiriboja iš esmės tik empirinės analizės realizavimu.

2-asis skyrius – pagal V. Kurausko straipsnį [4] (publikuotas „Discrete Mathematics“);

3-asis skyrius – pagal M. Bloznelio ir V. Kurausko straipsnį [3] (įteiktas redakcijai);

4-asis skyrius – pagal V. Kurausko ir K. Rybarczyk straipsnį [7] (įteiktas redakcijai);

6-asis skyrius – pagal V. Kurausko ir C. McDiarmid straipsnį [5] (publikuotas „Combinatorics, Probability and Computing“);

7-asis skyrius – pagal V. Kurausko ir C. McDiarmid straipsnį [6] (publikuotas „Random Structures and Algorithms“);

8-asis ir 9-asis skyriai – pagal V. Kurausko straipsnį [8] (įteiktas redakcijai).

Straipsnių [1, 2, 3, 4, 6, 7] rengimas ir publikavimas buvo iš dalies finansuojamas Lietuvos Mokslo Tarybos projektų MIP-052/2010, MIP-053/2011 ir MIP-067/2013.

7 Kiti duomenys

Šiame skyrelyje pateikiami kiti privalomi duomenys apie disertantą Valentą Kurauską.

Kvalifikacija:

2003–2007 m.: Vilniaus universitetas, matematikos bakalauras, su pagyrimu.

2007–2008 m.: Oksfordo universitetas, matematikos ir informatikos pagrindai, magistras (angl. MSc in Mathematics and Foundations of Computer Science), su pagyrimu (angl. distinction).

Akademinis darbas:

2010 m.: Matematikos ir informatikos institutas, sistemų analizės katedra, jaunesnysis mokslo darbuotojas.

2010, 2011 m. (pavasario semestrai): Vilniaus universitetas, matematinės informatikos katedra, asistentas (pratybų dėstytojas).

2011–2013 m. (su pertraukomis): Vilniaus universitetas, matematinės informatikos katedra, jaunesnysis mokslo darbuotojas.

Konferencijos ir seminarai, kuriose pristatyti pranešimai disertacijos tema:

1. 10-oji tarptautinė Vilniaus konferencija „Tikimybių teorija ir matematinė statistika“, Vilnius, 2010 m. birželio 28 – liepos 2 d. *Existence of small subgraphs in random intersection digraphs.*

2. 3-ioji Lenkijos kombinatorikos konferencija, Bendlevas, Lenkija, 2010 m. rugsėjo 24–30 d. *Small subgraphs in random intersection digraphs.*

3. Berlyno kombinatorikos mokyklos dalyvių konferencija, Berlynas, 2010 m. spalio 15 d. *Graphs with few disjoint cycles.*

4. Berlyno Freie universiteto seminaras „Methods for Discrete structures“, Berlynas, 2011 m. birželio 19 d. *Random graphs with few disjoint excluded minors.* `http://www3.math.tu-berlin.de/MDS/Vorlesungen-SS11/vl-20.06.html`.

5. 2011 m. rugsėjo 4–10 d. Palangoje vykusioje „5 Tarptautinėje analizinių ir tikimybinių skaičių teorijos metodų konferencijoje” (`http://www.mif.vu.lt/lmd/palanga/conf_5.html`). *Random graphs with few disjoint excluded minors.*

6. Jaunųjų mokslininkų konferencija, Vilnius, 2012 m. vasario 22 d., *Atsitiktiniai sankirtų grafai ir klikos* (pranešimas laimėjo INFOBALT jaunųjų mokslininkų stipendiją (`http://www.infobalt.lt/lt/activities/initiatives/80`).

7. LMD konferencija, Palanga, 2012 m. birželio 11 d. *Didžiausia klika atsitiktiniuose sankirtų grafuose.*

8. 4-ioji Lenkijos kombinatorikos konferencija, Bendlevas, Lenkija, 2012 m. rugsėjo 17–21 d.. *Largest clique in sparse random intersection graphs.* `http://4pcc.tcs.uj.edu.pl/program/`.

9. Poznanės Adomo Mickevičiaus universiteto kombinatorikos seminaras, 2012 m. gruodžio 4 d., Poznanė, Lenkija. *Random graphs with disjoint forbidden minors.* `http://www.staff.amu.edu.pl/~zmd/?q=aktualne_seminarium`.

10. 24-oji tarptautinė tikimybinių, kombinatorinių ir asimptotinių metodų algoritmų analizės konferencija (AofA 2013), Cala Galdana, Minorka, Ispanija, 2013 m. gegužės 27–31 d. *On the number of graphs with few disjoint excluded minors* (stendinis pranešimas), `http://web.vu.lt/mif/v.kurauskas/files/2013/08/menorca_blue.pdf`.

11. 16-oji tarptautinė atsitiktinių struktūrų ir algoritmų konferencija (RS&A 2013), Poznanė, Lenkija, 2013 m. rugpjūčio 5–9 d. *On graphs containing few disjoint excluded minors.* `http://rsa2013.amu.edu.pl/program.php`.

Dalyvavimas doktorantų kursuose ir mokslinės stažuotės:

- 2010 m. kovo 12–20 d., 2012 m. gegužės 27 d. – birželio 2 d., 2012 m. rugsėjo 5–7 d. Oksfordo universitetas, Oksfordas, Didžioji Britanija.

- 2010 m. spalio 4 d. – lapkričio 26 d. Freie universitetas, Berlynas, Vokietija. Berlyno analizinės ir skaičiuojamosios kombinatorikos doktorantų mokykla.

- 2011 gruodžio 11–17 d. Jogailos universitetas, Krokuva, Lenkija. Doktorantų kursas „Regularity, Graph Limits and Flag Algebras“.

- 2012 m. lapkričio 25 d. – gruodžio 9 d.: Adomo Mickevičiaus universitetas, Poznanė, Lenkija.

Literatūra

[1] M. Bloznelis, J. Jaworski and V. Kurauskas, Assortativity and clustering in sparse random intersection graphs. *Electronic Journal of Probability* **18** (2013), 1–24.

[2] M. Bloznelis and V. Kurauskas, Clustering function: a measure of social influence, arXiv:1207.4941 [math.PR] (2012), įteikta redakcijai.

[3] M. Bloznelis and V.Kurauskas, Large cliques in sparse random intersection graphs, arXiv:1302.4627 [math.CO] (2013), įteikta redakcijai.

[4] V. Kurauskas, On small subgraphs in a random intersection digraph. *Discrete Mathematics* **313** (2013) 872–885.

[5] V. Kurauskas and C. McDiarmid, Random graphs with few disjoint cycles, *Combinatorics, Probability and Computing*, **20** (2011) 763–775.

[6] V. Kurauskas and C. McDiarmid, Random graphs containing few disjoint excluded minors, *Random Structures and Algorithms*, doi: 10.1002/rsa.20447.

[7] V. Kurauskas and K. Rybarczyk, On the chromatic index of random uniform hypergraphs, įteikta redakcijai.

[8] V. Kurauskas, On graphs containing few disjoint excluded minors. Asymptotic number and structure of graphs containing few disjoint minors K4, įteikta redakcijai.

Summary

This paper summarizes (in Lithuanian) the doctoral dissertation ”On two models of random graphs” (in English) by V. Kurauskas. The results presented in the dissertation are based on joint work with Bloznelis, Jaworski, McDiarmid and Rybarczyk.

In the first part of the dissertation the following problems are solved:

1. Given a set of vertices V and a set of attributes W let each vertex $v \in V$ include an attribute $w \in W$ into a set $S^-(v)$ with probability p_- and let it include w into a set $S^+(v)$ with probability p_+ independently for each $w \in W$. The random binomial intersection digraph on the vertex set V is defined as follows: for each $u, v \in V$ the arc uv is present if $S^-(u)$ and $S^+(v)$ are not disjoint. For any $h = 2, 3, \dots$ we determine the birth threshold of the complete digraph on h vertices and describe the configurations of intersecting sets that realise the threshold.

2. Given positive integers n and m, and a probability measure P on $\{0, 1, \dots, m\}$, the random intersection graph $G(n, m, P)$ on vertex set $V = \{1, 2, \dots, n\}$ and with attribute set $W = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ is defined as follows. Let $S_1, S_2, \dots, S_n$ be independent random subsets of W such that for any $v \in V$ and any $S \subseteq W$ we have $\mathbb{P}(S_v = S) = P(|S|)/\binom{m}{|S|}$. The edge set of $G(n, m, P)$ consists of those pairs $\{u, v\} \subseteq V$ for which $S_u \cap S_v \neq \emptyset$.

   We study the asymptotic order of the clique number $\omega(G(n, m, P))$ of sparse random intersection graphs. For instance, for $m = \Theta(n)$ we show that the maximum clique is of size

   $$(1-\alpha/2)^{-\alpha/2} n^{1-\alpha/2} (\ln n)^{-\alpha/2} (1 + o_P(1))$$

   in the case where the vertex degree distribution is a power-law with exponent $\alpha \in (1m2)$, and it is of size $\frac{\ln n}{\ln \ln n}(1 + o_P(1))$ in the case where the degree distribution has a finite variance. In each case there is a polynomial algorithm which finds a clique of size $\omega(G(n, m, P))(1 - o_P(1))$.

3. Let $H^{(k)}(m, n)$, where $k \geq 2$, be a random hypergraph on vertex set $[m] = \{1, 2, \dots, m\}$ with n edges drawn independently with replacement from all subsets of $[m]$ of size k. For $\bar{d} = kn/m$ and any $\epsilon > 0$ we show that if $k = o(\ln(\bar{d}/\ln m))$ and $k = o(\ln(m/\ln \bar{d}))$, then with probability $1 - o(1)$ a random greedy algorithm produces a proper edge-colouring of $H^{(k)}(m, n)$ with at most $\bar{d}(1+\epsilon)$ colours. This yields the asymptotic chromatic number of the corresponding uniform random intersection graph.

4. We present some plots of empirical real-world networks (social networks, actor affiliation networks) and compare their parameters with theoretical estimates.

In the second part we solve the following problems:

1. The classical Erdős-Pósa theorem states that for each positive integer k there is an $f(k)$ such that, in each graph G which does not have $k+1$ disjoint cycles, there is a blocker of size at most $f(k)$; that is, a set B of at most $f(k)$ vertices such that $G - B$ has no cycles. We show that, amongst all such graphs on vertex set $[n] = \{1, \dots, n\}$, all but an exponentially small proportion have a blocker of size k. We also give further properties of a random graph sampled uniformly from this class; concerning uniqueness of the blocker, connectivity, chromatic number and clique number.

   A key step in the proof of the main theorem is to show that there must be a blocker as in the Erdős-Pósa theorem with the extra ‘redundancy’ property that $B - v$ is still a blocker for all but at most k vertices $v \in B$.

2. Robertson and Seymour (1986) give an extension of the Erdős-Pósa theorem concerning any minor-closed class $\mathcal{A}$ of graphs, as long as $\mathcal{A}$ does not contain all planar graphs: in each graph G which contains at most k disjoint excluded minors for $\mathcal{A}$, there is a set B of at most $g(k)$ vertices such that $G - B$ is in $\mathcal{A}$.

   We extend the results on graphs with few disjoint cycles for any minor-closed graph class $\mathcal{A} = \mathrm{Ex}\,\mathcal{B}$ where $\mathcal{B}$ consists of 2-connected excluded minors, as long as $\mathcal{A}$ does not contain all fans (here a 'fan' is a graph consisting of a path together with a vertex joined to each vertex on the path). We show that amongst all graphs G on $[n]$ which contain at most k disjoint excluded minors for $\mathcal{A}$, all but an exponentially small proportion contain a set B of k vertices such that $G - B$ is in $\mathcal{A}$,. (This is not the case when $\mathcal{A}$ contains all fans.) For a random graph R_n sampled uniformly from the graphs on $[n]$ with at most k disjoint excluded minors for $\mathcal{A}$, we consider also vertex degrees and the uniqueness of small blockers, the clique number and chromatic number, and the probability of being connected.

3. Finally, we consider the case when $\mathcal{A} = \mathrm{Ex}\,\mathcal{B}$ contains all fans. Firstly, for good enough $\mathcal{B}$ we obtain results on asymptotics of $|\mathcal{D}_n|$, where $\mathcal{D}$ is the class of graphs without $k+1$ disjoint minors in $\mathcal{B}$. For example, we give a sufficient condition for the sequence $y_n = (|\mathcal{D}_n|/n!)^{1/n}$ to have a limit (a growth constant) as $n \to \infty$. A $\mathcal{B}$-blocker Q of G is redundant if for each $x \in Q$, $Q \setminus \{x\}$ is still a $\mathcal{B}$-blocker. Let R_n be a graph drawn uniformly at random from $\mathcal{A}_n$. For large enough constant k we show that the upper limit of y_n is realised by the subclass of graphs that have a redundant $\mathcal{B}$-blocker Q of size $2k+1$, and there are $n' \to \infty$ such that $R_{n'}$ has no $\mathcal{B}$-blocker smaller than $2k$ with probability $1 - e^{-\Omega(n')}$. Secondly, we explore the structure of graphs that have at most k disjoint minors K_4 (i.e., $\mathcal{B} = \{K_4\}$). For $k = 0$ this is the class of series-parallel graphs. For $k = 1, 2, \ldots$ we show that there are constants c_k, γ_k, such that $|\mathcal{A}_n| = c_k n^{-5/2} \gamma_k^n n!(1 + o(1))$. We prove that the random graph R_n with probability $1 - e^{-\Omega(n)}$ has a redundant $\{K_4\}$-blocker Q of size $2k+1$ and each vertex of Q has a linear degree. Additionally, we consider the case $\mathcal{B} = \{K_{2,3}, K_4\}$ related to outerplanar graphs.