VILNIAUS UNIVERSITETAS

Asta
MINCEVIČ

Reikšmių pasiskirstymo teoremos Lercho dzeta funkcijai

DAKTARO DISERTACIJOS SANTRAUKA

Gamtos mokslai,
matematika N 001

VILNIUS 2019

Disertacija rengta 2015 – 2019 metais Vilniaus universitete.

Mokslinis vadovas:
Prof. habil. dr. Antanas Laurinčikas (Vilniaus universitetas, gamtos mokslai, matematika – N 001).
Mokslinis konsultantas:
Prof. habil. dr. Artūras Dubickas (Vilniaus universitetas, gamtos mokslai, matematika – N 001).

Gynimo taryba:
Pirmininkas – **prof. habil. dr. Konstantinas Pileckas**
(Vilniaus universitetas, gamtos mokslai, matematika N – 001).

Nariai:
Dr. Igoris Belovas (Vilniaus universitetas, gamtos mokslai, matematika N – 001);
Prof. dr. Paulius Drungilas (Vilniaus universitetas, gamtos mokslai, matematika N – 001);
Prof. dr. Artūras Štikonas (Vilniaus universitetas, gamtos mokslai, matematika N – 001);
Prof. dr. Aleksej Ustinov (Rusijos mokslų akademijos taikomosios matematikos institutas, gamtos mokslai, matematika – N 001).

Disertacija ginama viešame Gynimo tarybos posėdyje 2019 m. gruodžio mėn. 17 d. 14:00 val. Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultete, 102 a.
Adresas: Naugarduko g. 24, LT-03225, Vilnius, Lietuva.
tel. +370 5 219 3050 el. paštas: mif@mif.vu.lt.
Disertaciją galima peržiūrėti Vilniaus universiteto bibliotekoje ir VU interneto svetainėje adresu:
https://www.vu.lt/naujienos/ivykiu-kalendorius

VILNIUS UNIVERSITY

Asta
MINCEVIČ

Value distribution theorems for the Lerch zeta-function

SUMMARY OF DOCTORAL DISSERTATION

Natural sciences,
mathematics N 001

VILNIUS 2019

The dissertation was written in 2015 – 2019 at Vilnius University.

Scientific supervisor:
Prof. Dr. Habil. Antanas Laurinčikas (Vilnius University, natural sciences, mathematics – N 001).
Scientific advisor:
Prof. Dr. Habil. Artūras Dubickas (Vilnius University, natural sciences, mathematics – N 001).
This doctoral dissertation will be defended in a public meeting of the Dissertation Defence Panel:
Chairman – Prof. Dr. Habil. Konstantinas Pileckas
(Vilnius University, natural sciences, mathematics – N 001).

Members:
Dr. Igoris Belovas (Vilnius University, natural sciences, mathematics – N 001);
Prof. Dr. Paulius Drungilas (Vilnius University, natural sciences, mathematics – N 001);
Prof. Dr. Artūras Štikonas (Vilnius University, natural sciences, mathematics – N 001);
Prof. Dr. Aleksej Ustinov (Russian Academy of Sciences, natural sciences, mathematics – N 001).

The dissertation shall be defended at a public meeting of the Dissertation Defence Panel at 14:00 pm on 17 th of December 2019 in Room 102 of the Faculty of Mathematics and Informatics, Vilnius University.
Address: Naugarduko 24, LT-03225, Vilnius, Lithuania.
Tel. +370 5 219 3050; e-mail: mif@mif.vu.lt.
The text of this dissertation can be accessed at the library of of Vilnius University, as well as on the website of Vilnius University:
www.vu.lt/lt/naujienos/ivykiu-kalendorius

Tyrimo objektas

Disertacijoje yra nagrinėjamas Lercho dzeta-funkcijos $L(\lambda, \alpha, s)$, $s = \sigma + it$, reikšmių pasiskirstymas daugiausiai dėmesio skiriant jos universalumui, t.y., analizinių funkcijų aproksimavimui postūmiais $L(\lambda, \alpha, s + i\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$.

Tegul $\lambda \in \mathbb{R}$ ir α, $0 < \alpha \leqslant 1$, yra fiksuoti parametrai. Lercho dzeta $L(\lambda, \alpha, s)$ funkcija pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibrėžiama Dirichlė eilute

$$L(\lambda, \alpha, s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \lambda m}}{(m + \alpha)^s}.$$

Kai parametras λ yra sveikasis skaičius, funkcija $L(\lambda, \alpha, s)$ tampa klasikine Hurvico dzeta funkcija

$$\zeta(s, \alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m + \alpha)^s}, \quad \sigma > 1.$$

Taigi, su $\lambda \in \mathbb{Z}$ funkcija $L(\lambda, \alpha, s)$ yra analiziškai pratęsiama i visą kompleksinę plokštumą, išskyrus tašką $s = 1$, kuris yra paprastasis polius su reziduumu 1. Jei $\lambda \notin \mathbb{Z}$, tuomet yra žinoma [8], kad $L(\lambda, \alpha, s)$ yra sveikoji funkcija. Apskritai, funkcija $L(\lambda, \alpha, s)$, skirtingai nuo Rymano dzeta funkcijos

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}, \quad \sigma > 1,$$

neturi Oilerio sandaugos pagal pirminius skaičius p. Šią sandaugą ji turi tik atvejais $L(k, 1, s) = \zeta(s)$,

$$L\Big(\frac{1}{2}, 1, s\Big) = \Big(1 - 2^{1-s}\Big)\zeta(s)$$

ir

$$L\Big(k, \frac{1}{2}, s\Big) = \Big(2^s - 1\Big)\zeta(s),$$

čia $k \in \mathbb{Z}$. Taigi, Lercho dzeta funkcija $L(\lambda, \alpha, s)$ yra klasikinių dzeta funkcijų $\zeta(s)$ ir $\zeta(s, \alpha)$ apibendrinimas. Funkciją $L(\lambda, \alpha, s)$ nepriklausomai apibrėžė ir pradėjo nagrinėti M. Lerchas (Lerch) [13] ir R. Lipšicas (Lipschitz) [14]. Be kitų rezultatų Lerchas įrodė funkcijai $L(\lambda, \alpha, s)$ funkcinę lygtį

$$L(\lambda, \alpha, 1-s) = \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s}\Big(\exp\{\frac{\pi i s}{2} - 2\pi i \alpha\lambda\}L(-\alpha, \lambda, s) + \exp\{-\frac{\pi i s}{2} + 2\pi i \alpha(1-\lambda)\}L(\alpha, 1-\lambda, s)\Big),$$

čia $0 < \lambda < 1$. Funkcija $L(\lambda, \alpha, s)$ nėra tiek svarbi, kiek $\zeta(s)$ ir $\zeta(s, \alpha)$, tačiau ji yra gana įdomus analizinis objektas, priklausantis nuo dviejų parametrų λ ir α aritmetinių savybių. Šiuolaikinė funkcijos $L(\lambda, \alpha, s)$ teorija yra pateikiama [8] monografijoje.

Tikslas ir uždaviniai

Funkcija $L(\lambda, \alpha, s)$, kaip ir dauguma kitų dzeta funkcijų, turi universalumo savybę, t.y., kai kurioms parametrų λ ir α klasėms plačios analizinių funkcijų klasės funkcijos yra aproksimuojamos postūmiais $L(\lambda, \alpha, s + i\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$. Disertacijos tikslas yra išplėsti funkcijos $L(\lambda, \alpha, s)$ universalumo savybę naujoms parametrų α ir λ klasėms. Darbo uždaviniai yra šie:

1. Tolydžios universalumo teoremos funkcijai $L(\lambda, \alpha, s)$ su transcendenčiuoju parametru α išplėtimas.

2. Diskrečios universalumo teoremos funkcijai $L(\lambda, \alpha, s)$ su transcendenčiuoju parametru išplėtimas.

3. Jungtinės tolydžios universalumo teoremos Lercho dzeta funkcijoms su algebriškai nepriklausomais parametrais išplėtimas.

4. Jungtinės diskrečios universalumo teoremos Lercho dzeta funkcijoms įrodymas.

5. Funkcinio nepriklausomumo funkcijai $L(\lambda, \alpha, s)$ su transcendenčiuoju parametru α išplėtimas.

6. Jungtinio funkcinio nepriklausomumo Lercho dzeta funkcijoms įrodymas.

Aktualumas

Analizinių funkcijų aproksimavimas yra viena is centrinių funkcijų teorijos problemų. Garsioji Mergeliano (Mergelyan) teorema tvirtina, kad kiekviena analizinė funkcija kompaktinėse aibėse su jungiuoju papildiniu gali būti aproksimuojama norimu tikslumu polinomais. Taigi, kiekvieną analizinę funkciją atitinka ją aproksimuojantis polinomas. Universalumo teoremų dzeta funkcijoms pranašumas prieš Mergeliano teoremą yra tas, kad ištisa klasė analizinių funkcijų yra aproksimuojama vienos ir tos pačios funkcijos postūmiais. Dzeta funkcijos, kaip ir polinomai, yra gana nesudėtingos funkcijos, kadangi jos yra aproksimuojamos Dirichlė polinomais (dalinė Dirichlė eilutės suma). Tai rodo, kad universalumo teoremos dzeta funkcijoms yra galingas instrumentas aproksimavimo teorijoje. Kadangi Lercho dzeta funkcija priklauso nuo dviejų parametrų, yra galimybė parinkti patogiausias aproksimacijas. Todėl yra svarbu išplėsti parametrų α ir λ klases, kurioms Lercho dzeta funkcija išlieka universali.

Dzeta funkcijų universalumas, įskaitant ir Lercho dzeta funkciją, turi eilę ir teorinių taikymų. Vienas iš tų taikymų siejasi su garsiomis Hilberto problemomis ir yra skirtas funkcijų nepriklausomumui, t.y., iš universalumo teoremų išplaukia dzeta funkcijų nepriklausomumas. Be to, universalumo teoremos dzeta funkcijoms be Oilerio sandaugos (funkcija $L(\lambda, \alpha, s)$ neturi Oilerio sandaugos) turi informaciją apie nulių pasiskirstymą. Šios ir kitos universalių dzeta funkcijų savybės daro universalumą viena iš svarbiausių šiuolaikinės analizinės skaičių teorijos savybių.

Metodai

Universalumo teoremų įrodymui yra naudojamas gana universalus tikimybinis metodas. Jis remiasi ribinėmis teoremomis apie silpnąjį tikimybinių matų konvergavimą analizinių funkcijų erdvėje su išreikštiniu ribinio mato pavidalu. Šių teoremų įrodymui yra naudojami Furjė analizės, Dirichlė eilučių ir Prochorovo teorijos elementai, siejantys tikimybinių matų šeimų reliatyvų kompaktiškumą su suspaustumu. Universalumo teoremos išplaukia iš minėtų ribinių teoremų ir Mergeliano teoremos apie analizinių funkcijų aproksimavimą polinomais.

Naujumas

Disertacijos rezultatai nauji. Universalumo teoremos yra buvo žinomos tik su transcendenčiuoju parametru α. Disertacijoje parametro α transcendentumas yra pakeičiamas silpnesne sąlyga. Jungtinis Lercho dzeta funkcijų universalumas buvo žinomas tik su algebriškai nepriklausomais parametrais $\alpha_1, ..., \alpha_r$. Šis reikalavimas yra pakeičiamas silpnesniu.

Problemos istorija ir rezultatai

Gana ilgą laiką Lercho dzeta funkcija buvo primiršta. Kai kurie autoriai pateikė tik naujus funkcinės lygties įrodymus. D. Klušas (Klush) nagrinėjo [5] Lercho dzeta funkcijos antrąjį momentą. Tolesnis progresas Lercho dzeta funkcijos teorijoje siejamas su R. Garunkščio, M. Kacurados (Katsurada), A. Laurinčiko, K. Macumoto (Matsumoto) ir J. Štaudingo (Steuding) darbais.

Kacurada nagrinėjo funkcijos $L(\lambda, \alpha, s)$ vidurkius parametro α atžvilgiu

$$\int_0^1 \left| L(\lambda, \alpha, s) \right|^2 d\alpha.$$

Daug dėmesio buvo skiriama Lercho dzeta funkcijos tikimybinėms ribinėms teoremoms. Tegul $\mathcal{B}(\mathbb{X})$ yra erdvės $\mathbb{X}$ Borelio σ kūnas, o P_n, $n \in \mathbb{N}$, ir P yra tikimybiniai matai erdvėje $\left(\mathbb{X}, \mathcal{B}(\mathbb{X})\right)$. Primename, kad P_n, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja į P, jei su kiekviena realia, tolydžia, aprėžta funkcija g erdvėje $\mathbb{X}$ yra teisinga lygybė

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{X}} g dP_n = \int_{\mathbb{X}} g dP.$$

Pirmasis tikimybinio pobūdžio rezultatas buvo R. Garunkščio ir A. Laurinčiko teorema apie

$$P_{T,\sigma}(A) = \frac{1}{T}\,\mathrm{meas}\Big\{t \in [0,T] : L(\lambda,\alpha,\sigma+it) \in A\Big\}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}),$$

silpnąjį konvergavimą, kai $T \to \infty$, pusplokštumėje $\sigma > \frac{1}{2}$.

Tarkime, kad G yra sritis kompleksinėje plokštumoje, o $H(G)$ yra funkcijų, analizinių srityje G, erdvė su tolygaus konvergavimo kompaktinėse aibėse topologija. Seka $\{g_n(s)\} \subset H(G)$ šioje topologijoje konverguoja į funkciją $g(s) \in H(G)$ tada ir tik tada, kai su kiekviena kompaktine aibe $K \subset G$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{s\in K} \Big| g_n(s) - g(s) \Big| = 0.$$

Aukščiau minėta teorema buvo išplėsta į analizinių funkcijų erdvę $H\Big(\big\{s \in \mathbb{C} : \sigma > \frac{1}{2}\big\}\Big)$.

Svarbią įtaką tolesniems tyrimams turėjo B. Bagčio (Bagchi) disertacija [1], kurioje buvo nurodytas būdas ribinio mato indentifikavimui kai kurių dzeta funkcijų ribinėse teoremose. Bagči metodas buvo sekmingai pritaikytas Laurinčiko darbuose Lercho dzeta funkcijai. Tegul γ yra vienetinis apskritimas kompleksinėje plokštumoje ir

$$\Omega = \prod_{m=0}^{\infty} \gamma_m,$$

čia $\gamma_m = \gamma$ su visais $m \in \mathbb{N}_0$. Su sandaugos topologija ir pataškine daugybos operacija toras Ω yra kompaktinė topologinė Abelio grupė. Todėl erdvėje $\Big(\Omega, \mathcal{B}(\Omega)\Big)$ egzistuoja tikimybinis Haro (Haar) matas m_H. Matas m_H skiriasi nuo kitų tikimybinių matų savo invariantiškumo savybe, kuri reiškia, kad su visomis aibėmis $A \in \mathcal{B}(\Omega)$ ir visais $\omega \in \Omega$ galioja lygybės

$$m_H(A) = m_H(\omega A) = m_H(A\omega).$$

Gauname tikimybinę erdvę $\big(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H\big)$. Šioje erdvėje apibrėžiame $H(\hat{D})$ reikšmį ($\hat{D} = \{s \in \mathbb{C} : \sigma > \frac{1}{2}\}$) atsitiktinį elementą

$$L(\lambda, \alpha, s, \omega) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \lambda m}\omega(m)}{(m+\alpha)^s}, \quad \omega \in \Omega.$$

čia $\omega(m)$ yra elemento $\omega \in \Omega$ m oji komponentė, $m \in \mathbb{N}_0$. Tegul P_L yra atsitiktinio elemento $L(\lambda, \alpha, s, \omega)$ pasiskirstymas, t.y.,

$$P_L(A) = m_H\Big\{\omega \in \Omega : L(\lambda, \alpha, s, \omega) \in A\Big\}, A \in \mathcal{B}(H(\hat{D})).$$

Primename, kad skaičius α yra vadinamas transcendenčiuoju, jei kiekvienam polinomui $p(s) \not\equiv 0$ su racionaliais koeficientais teisinga nelygybė $p(\alpha) \neq 0$. Darbe [6] buvo įrodyta, kad jei $\lambda \notin \mathbb{Z}$, o α yra transcendentusis skaičius, tuomet

$$P_T(A) = \frac{1}{T}\,\mathrm{meas}\Big\{\tau \in [0, T] : L(\lambda, \alpha, s+i\tau) \in A\Big\}, A \in \mathcal{B}(H(D)),$$

kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į matą P_L. Čia $\mathrm{meas}\,A$ žymi mačios aibės $A \subset \mathbb{R}$ Lebego matą.

R. Garunkštis su A. Laurinčiku nagrinėjo Lercho dzeta funkcijos ribines teoremas su svoriu, kurių ribinis matas buvo identifikuotas R. Garunkščio disertacijoje [3].

Dabar trumpai priminsime dzeta funkcijų universalumo istoriją. 1975m. Rymano dzeta funkcijos universalumo savybę atrado [17] S. M. Voroninas (Voronin). Jis įrodė, kad jei $0 < r < \frac{1}{4}$, yra fiksuotas skaičius, o funkcija $f(s)$ yra tolydi ir nevirstanti nuliu skritulyje

$|s| \leqslant r$, bei analizinė to skritulio viduje, tai kiekvieną $\varepsilon > 0$ atitinka toks skaičius $\tau = \tau(\varepsilon) \in \mathbb{R}$, kad

$$\max_{|s|\leqslant r} \Big| \zeta(s + \frac{3}{4} + i\tau) - f(s) \Big| < \varepsilon.$$

Ši įdomi Voronino teorema buvo greitai pastebėta skaičių teorijos specialistų ir truputį patobulinta. Tegul $D = \{s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1\}$, $\mathcal{K}$ yra juostos D kompaktinių aibių, turinčių jungiuosius papildinius klasė, o $H_0(K)$ su $K \in \mathcal{K}$ yra tolydžių, nevirstančių nuliu aibėje K ir analizinių aibės K viduje klasė. Tuomet šiuolaikinė Voronino teoremos versija turi tokį pavidalą.

Teorema. *Tarkime, kad* $K \in \mathcal{K}$ *ir* $f(s) \in H_0(K)$. *Tuomet su kiekvienu* $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \operatorname{meas} \Big\{ \tau \in [0, T] : \sup_{s\in K} \Big| \zeta(s + i\tau) - f(s) \Big| < \varepsilon \Big\} > 0.$$

Teoremos nelygybė rodo, kad yra be galo daug postūmių $\zeta(s+i\tau)$, aproksimuojančių duotą funkciją $f(s) \in H_0(K)$.

Pirmoji universalumo teorema Lercho dzeta funkcijai buvo gauta [8, 6.1.1 teorema] darbe. Išplečiame funkcijų klasę $H_0(K)$. Tegul $H(K)$ su $K \in \mathcal{K}$ yra tolydžių aibėje K funkcijų, kurios yra analizinės aibės K viduje, klasė. Taigi, $H_0(K) \subset H(K)$.

Teorema. *Tarkime, kad* $0 < \lambda \leqslant 1$, *o* α *yra transcendentusis skaičius. Tegul* $K \in \mathcal{K}$ *ir* $f(s) \in H(K)$. *Tuomet su kiekvienu* $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \operatorname{meas} \Big\{ \tau \in [0, T] : \sup_{s\in K} \Big| L(\lambda, \alpha, s + i\tau) - f(s) \Big| < \varepsilon \Big\} > 0.$$

Ši teorema 2 disertacijos skyriuje yra išplečiama naujai parametro

α klasei. Tegul

$$L(\alpha) = \Big\{ \log(m+\alpha) : m \in \mathbb{N}_0 \Big\}.$$

Pagrindinis skyriaus rezultatas yra tokia tolydžioji universalumo teorema.

Teorema 2.1. *Tarkime, kad aibė $L(\alpha)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš racionaliųjų skaičių kūno $\mathbb{Q}$ ir $0 < \lambda \leqslant 1$. Tegul $K \in \mathcal{K}$ ir $f(s) \in H(K)$. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$,*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \operatorname{meas} \Big\{ \tau \in [0,T] : \sup_{s\in K} \Big| L(\lambda, \alpha, s+i\tau) - f(s) \Big| < \varepsilon \Big\} > 0.$$

Nesunku matyti, kad su transcendenčiuoju α aibė $L(\alpha)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$. Taigi, teoremos sąlyga yra silpnesnė už darbo [7] sąlyga.

Primename, kad skaičius α vadinamas algebriniu, jei egzistuoja toks polinomas $p(s) \not\equiv 0$ su racionaliaisiais koeficientais, kad $p(\alpha) = 0$. Pavyzdžiui, skaičiai $\alpha = \frac{1}{2}$ ir $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ yra algebriniai, nes yra polinomų $2s - 1$ ir $2s^2 - 1$ šaknys.

Garsi Kaselso (Cassels) teorema [2] tvirtina, kad bent 51% aibės $L(\alpha)$ su algebriniu iracionaliuoju α elementų tankio prasme yra tiesiškai nepriklausomi virš $\mathbb{Q}$. Todėl gali atsitikti, kad aibė $L(\alpha)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$ ir su kuriuo nors algebriniu iraciuonaliuoju α, o 2.1 teorema išlieka teisinga su tuo α. Deja, šiuo momentu nėra žinomas nė vienas algebrinis iracionalusis skaičius α, kuriam aibė $L(\alpha)$ būtų tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$. 2.1 teoremai teisinga tokia modifikacija.

Teorema 2.2. *Tarkime, kad aibė $L(\alpha)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš*

$\mathbb{Q}$ ir $0 < \lambda \leqslant 1$. Tegul $K \in \mathcal{K}$ ir $f(s) \in H(K)$. Tuomet riba

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \operatorname{meas}\left\{\tau \in [0,T] : \sup_{s\in K}\left|L(\lambda,\alpha,s+i\tau) - f(s)\right| < \varepsilon\right\} > 0$$

egzistuoja su visais $\varepsilon > 0$ išskyrus, galbūt, ne daugiau negu skaičią jų aibę.

2.1 ir 2.2 teoremų įrodymai remiasi ribine teorema funkcijai $L(\lambda,\alpha,s)$ analizinių funkcijų erdvėje $H(D)$. Tegul

$$P_T(A) = \frac{1}{T} \operatorname{meas}\left\{\tau \in [0,T] : L(\lambda,\alpha,s+i\tau) \in A\right\}, A \in \mathcal{B}(H(D)),$$

o P_L yra $H(D)$ reikšmio atsitiktinio elemento

$$L(\lambda,\alpha,s,\omega) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i\lambda m}\omega(m)}{(m+\alpha)^s}, s \in D, \omega \in \Omega,$$

pasiskirstymas.

Teorema 2.3. *Tarkime, kad aibė $L(\alpha)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$ ir $0 < \lambda \leqslant 1$. Tuomet P_T, kai $T \to \infty$ silpnai konverguoja į P_L.*

Vietoje postūmių $L(\lambda,\alpha,s+i\tau)$, kuriuose τ yra realusis bet koks skaičius, galima naudoti postūmius $L(\lambda,\alpha,s+i\varphi(k))$ su kuria nors funkcija, kai k perbėga neneigiamus sveikuosius skaičius. Ribinės ir universalumo teoremos su postūmiais $L(\lambda,\alpha,s+i\tau)$ yra vadinamos tolydžiomis teoremomis, o su postūmiais $L(\lambda,\alpha,s+i\varphi(k))$ - diskrečiosiomis. Taigi, 2.1-2.3 yra tolydžiosios teoremos. Paprasčiausia yra funkcija $\varphi(k) = kh$, $k \in \mathbb{N}$, su fiksuotu $h > 0$. Diskrečiąsias ribines teoremas Lercho dzeta funkcijai nagrinėjo savo disertacijoje [4] J. Ignatavičiūtė. Pateikiame vieną jos teoremą.

Teorema. *Tarkime, kad α yra transcendentusis skaičius, skaičius*

$\exp\left\{\frac{2\pi}{h}\right\}$ *yra racionalus ir* $\sigma > \frac{1}{2}$ *yra fiksuotas. Tuomet*

$$\frac{1}{N+1}\#\Big\{0 \leqslant k \leqslant N : L(\lambda, \alpha, \sigma + ikh) \in A\Big\}, A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}),$$

kai $N \to \infty$*, silpnai konverguoja į kompleksinio atsitiktinio elemento*

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \lambda m}\omega(m)}{(m+\alpha)^{\sigma}}, \quad \omega \in \Omega,$$

pasiskirstymą.

Čia N perbėga neneigiamus sveikuosius skaičius, o $\#A$ žymi aibės A elementų skaičių.
Transcendentiems ir racionaliems α minėta J. Ignatavičiūtės teorema turi analogą ir meromorfinių funkcijų erdvėje $M(\hat{D})$, $\hat{D} = \left\{s \in \mathbb{C} : \sigma > \frac{1}{2}\right\}$. Jei parametras α yra racionalus, tai tuomet reikalaujama, kad skaičius $\exp\{\frac{2\pi}{h}\}$ su visais $k \in \mathbb{N}$ būtų iracionalus.

Diskrečiąją Voronino universalumo teoremos versiją pasiūlė A. Raichas (Reich) [16] darbe. Jos pavidalas yra toks.

Teorema. *Tarkime, kad* $K \in \mathcal{K}$ *ir* $f(s) \in H_0(K)$*. Tuomet su kiekvienu* $\varepsilon > 0$,

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N+1}\#\Big\{0 \leqslant k \leqslant N : \sup_{s\in K}\Big|\zeta(s+ikh) - f(s)\Big| < \varepsilon\Big\} > 0.$$

Iš tikrųjų Raichas įrodė daugiau, būtent, jis gavo diskrečiąją universalumo teoremą algebrinių skaičių kūnų $\mathbb{K}$ Dedekindo dzeta funkcijoms $\zeta_{\mathbb{K}}(s)$. Kai $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, turime Rymano dzeta funkciją. Kitokį Raicho teoremos įrodymą savo disertacijoje [1] pasiūlė Bagčis. Jis tai pat įrodė pirmąją diskrečiąją universalumo teoremą funkcijai $L(\lambda, \alpha, s)$ su $\lambda \in \mathbb{Z}$, t.y., Hurvico dzeta funkcijai $\zeta(s, \alpha)$.

Teorema. *Tarkime, kad α yra racionalusis skaičius, $\alpha \neq \frac{1}{2}$, $\alpha \neq 1$. Tegul K yra kompaktinė silpnai jungioji ir lokaliai jungioji juostos D aibė, o $f(s)$ yra tolydi aibėje K ir analizinė jos viduje. Tada su visais $\varepsilon > 0$ ir $h > 0$*

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \#\Big\{0 \leqslant k \leqslant N : \sup_{s\in K} \Big|\zeta(s+ikh,\alpha) - f(s)\Big| < \varepsilon\Big\} > 0.$$

Ši teorema išplaukia iš lygybės

$$\zeta(s,\frac{a}{b}) = b^s \sum_{m=0;m\equiv a(\mathrm{mod} b)}^{\infty} \frac{1}{m^s}, 1 \leqslant a \leqslant b, (a,b) = 1, b \geqslant 3,$$

ir funkcijų poros

$$(b^s, \sum_{m=0;m\equiv a(\mathrm{mod} b)}^{\infty} \frac{1}{m^s})$$

jungtinių savybių. Pasirodo, jog transcendenčiojo α atvejis yra sudetingesnis už racionaliojo α atvejį, ir Bagčio teoremos analogas su visais $h > 0$ nėra žinomas. Pavyzdžiui, yra reikalaujama [9], kad $\exp\left\{\frac{2\pi}{h}\right\}$ būtų racionalusis skaičius.

Disertacijos 3 skyrius yra skirtas diskrečiosioms funkcijos $L(\lambda,\alpha,s)$ universalumo teoremoms. Tegul

$$L(\alpha,h,\pi) = \Big\{\Big(\log(m+\alpha) : m \in \mathbb{N}_0\Big), \frac{2\pi}{h}\Big\}, h > 0.$$

Ši aibė yra sudaryta iš visų logaritmų $\log(m+\alpha)$ ir skaičiaus $\frac{2\pi}{h}$. Pagrindiniai skyriaus rezultatai yra tokios teoremos.

Teorema 3.1. *Tarkime, kad aibė $L(\alpha,h,\pi)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$ ir $0 < \lambda \leqslant 1$. Tegul $K \in \mathcal{K}$ ir $f(s) \in H(K)$. Tuomet su* *kiekvienu* $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N+1}\#\Big\{0 \leqslant k \leqslant N : \sup_{s\in K}\Big|L(\lambda,\alpha,s+ikh)-f(s)\Big| < \varepsilon\Big\} > 0.$$

3.1 teorema turi tokią modifikuotą versiją.

Teorema 3.2. *Tarkime, kad aibė* $L(\alpha, h, \pi)$ *yra tiesiškai nepriklausoma virš* $\mathbb{Q}$ *ir* $0 < \lambda \leqslant 1$. *Tegul* $K \in \mathcal{K}$ *ir* $f(s) \in H(K)$. *Tuomet riba*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1}\#\Big\{0 \leqslant k \leqslant N : \sup_{s\in K}\Big|L(\lambda,\alpha,s+ikh)-f(s)\Big| < \varepsilon\Big\} > 0$$

egzistuoja su visais $\varepsilon > 0$*, išskyrus, galbūt, ne daugiau negu skaičią jų aibę.*

3.1 ir 3.2 teoremos gali būti apibendrintos sudėtinėms funkcijoms. Disertacijoje pateikiamas vienas toks pavyzdys.

Teorema 3.3. *Tarkime, kad aibė* $L(\alpha, h, \pi)$ *yra tiesiškai nepriklausoma virš* $\mathbb{Q}$*,* $0 < \lambda \leqslant 1$ *o* $F : H(D) \to H(D)$ *yra toks tolydus operatorius, kad su kiekviena atvirąja aibe* $G \subset H(D)$*, pirmavaizdis* $F^{-1}G$ *yra netuščias. Tegul* $K \in \mathcal{K}$ *ir* $f(s) \in H(K)$. *Tuomet su kiekvienu* $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N+1}\#\Big\{0 \leqslant k \leqslant N : \sup_{s\in K} \Big|F(L(\lambda,\alpha,s+ikh)) - f(s)\Big| < \varepsilon\Big\} > 0.$$

3.3 teorema yra 3.1 teoremos analogas sudetinei funkcijai $F(L(\lambda, \alpha, s + ikh))$. 3 skyriaus universalumo teoremų įrodymai remiasi ribine teorema matui

$$\frac{1}{N+1}\#\Big\{0 \leqslant k \leqslant N : L(\lambda,\alpha,s+ikh) \in A\Big\}, A \in \mathcal{B}(H(D)),$$

kai $N \to \infty$.

Pirmąją jungtinę teoremą apie Lercho dzeta funkcijų pasiskirstymą įrodė Laurinčikas ir Macumotas [10].

Teorema. *Tarkime, kad* $\min\limits_{1 \leqslant j \leqslant r} \sigma_j > \frac{1}{2}$*. Tuomet erdvėje* $\big(\mathbb{C}^r, \mathcal{B}(\mathbb{C}^r)\big)$ *egzistuoja toks tikimybinis matas* P*, kad*

$$\frac{1}{T} \operatorname{meas} \Big\{ t \in [0, T] :$$
$$\Big(L(\lambda_1, \alpha_1, \sigma_1 + it), ..., L(\lambda_r, \alpha_r, \sigma_r + it) \Big) \in A \Big\},$$

$A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^r)$*, kai* $T \to \infty$*, silpnai konverguoja į* P*.*

Kaip matome, šioje teoremoje nėra duotas ribinio mato išreikštinis pavidalas. Šis trūkumas buvo pašalintas antroje [12] darbo ribineje jungtinėje teoremoje Lercho dzeta funkcijoms erdvėje $H^r(D)$. Laurinčikas ir Macumotas tęsė statistinius Lercho dzeta funkcijų reikšmių pasiskirstymo tyrimus ir kituose darbuose. Voroninas pirmasis pradėjo nagrinėti jungtinį dzeta ir L funkcijų universalumą. Darbe [18] jis įrodė Dirichlė L-funkcijų $L(s, \chi_1), ..., L(s, \chi_r)$ su neekvivalenčiais Dirichlė charakteriais jungtinį universalumą. Dirichlė charakteriai yra vadinami neekvivalenčiais , jei jie nėra generuoti to paties primityvaus charakterio. Primename, kad Dirichlė L funkcija $L(s, \chi)$ pusplokštumoje $\sigma > 1$ yra apibrėžiama eilute

$$L(s, \chi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(m)}{m^s},$$

o kitur - analizinio pratęsimo pagalba, o Dirichlė charakteris moduliu q yra periodinė su periodu q, visiškai multiplikatyvi funkcija $\chi : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ $\big(\chi(mn) = \chi(m)\chi(n), m, n \in \mathbb{N}\big)$, $\chi(m) = 0$, kai $(m, q) > 1$, ir $\chi(m) \neq 0$, kai $(m, q) = 1$. Jungtinio Dirichlė L funkcijų universalumo atveju analizinės funkcijos iš klasių $H(K_1), ..., H(K_r)$, $K_1, ..., K_r \in \mathcal{K}$, tuo pačiu metu yra aproksimuojamos postūmiais

$L(s+i\tau,\chi_1),...,L(s+i\tau,\chi_r)$. Jungtinį Lercho dzeta funkcijų universalumą nagrinėjo daugelis autorių. Jie savo darbuose reikalavo, kad parametrai $\alpha_1,...,\alpha_r$ būtų algebriškai nepriklausomi virš $\mathbb{Q}$. Primename, kad skaičiai $\alpha_1,...,\alpha_r$ yra vadinami algebriškai nepriklausomais virš $\mathbb{Q}$, jei nėra polinomų $p(s_1,...,s_r)\not\equiv 0$ su racionaliaisiais koeficientais, kad $p(\alpha_1,...,\alpha_r)=0$. Formuluojame jungtinę universalumo teoremą iš [11].

Teorema. *Tarkime, kad skaičiai $\alpha_1,...,\alpha_r$ yra algebriškai nepriklausomi virš $\mathbb{Q}$, $\lambda_1=\dfrac{a_1}{q_1},...,\lambda_n=\dfrac{a_r}{q_r}$, $(a_1,q_1)=1,...,(a_r,q_r)=1$, čia $q_1,...,q_r$ yra skirtingi natūralieji skaičiai, $a_1,...,a_r$ yra natūralieji skaičiai, $a_1<q_1,...,a_r<q_r$. Tegul $K_1,...,K_r\in\mathcal{K}$ ir $f_1(s)\in H(K_1),...,f_r(s)\in H(K_r)$. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon>0$*

$$\liminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}\operatorname{meas}\Big\{\tau\in[0,T]:\sup_{1\leqslant j\leqslant r}\sup_{s\in K_j}$$
$$\Big|L(\lambda_j,\alpha_j,s+i\tau)-f_j(s)\Big|<\varepsilon\Big\}>0.$$

Kai kuriuose darbuose buvo nagrinėjamos Lercho dzeta funkcijų jungtinis universalumas su transcendenčiuoju $\alpha=\alpha_1=...=\alpha_r$.

4 disertacijos skyriuje yra įrodytos jungtinės universalumo teoremos Lercho dzeta funkcijoms nereikalaujant parametrų $\alpha_1,...,\alpha_r$ algebrinio nepriklausomumo. Taip pat nenaudojamos jokios sąlygos parametrams $\lambda_1,...,\lambda_r$.

Tegul

$$L(\alpha_1,...,\alpha_r)=\Big\{(\log(m+\alpha_1):m\in\mathbb{N}_0),...,(\log(m+\alpha_r):m\in\mathbb{N}_0)\Big\}.$$

Tuomet yra teisinga tokia teorema.

Teorema 4.1. *Tarkime, kad aibė $L(\alpha_1,...,\alpha_r)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$. Su kiekvienu $j=1,...,r$, tegul $K_j\in\mathcal{K}$, $f_j(s)\in H(K_j)$*

ir $0 < \lambda_j \leqslant 1$. *Tuomet su kiekvienu* $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \operatorname{meas} \Big\{ \tau \in [0,T] : \sup_{1\leqslant j\leqslant r} \sup_{s\in K_j} \Big| L(\lambda_j, \alpha_j, s+i\tau) - f_j(s) \Big| < \varepsilon \Big\} > 0.$$

Kaip ir kitos universalumo teoremos, 4.1 teorema turi tokią modifikaciją.

Teorema 4.2. *Tarkime, kad aibė* $L(\alpha_1, ..., \alpha_r)$ *yra tiesiškai nepriklausoma virš* $\mathbb{Q}$. *Su kiekvienu* $j = 1, ..., r$, *tegul* $K_j \in \mathcal{K}$, $f_j(s) \in H(K_j)$ *ir* $0 < \lambda_j \leqslant 1$. *Tuomet riba*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \operatorname{meas} \Big\{ \tau \in [0,T] : \sup_{1\leqslant j\leqslant r} \sup_{s\in K_j} \Big| L(\lambda_j, \alpha_j, s+i\tau) - f_j(s) \Big| < \varepsilon \Big\} > 0$$

egzistuoja su visais $\varepsilon > 0$, *išskyrus, galbūt, ne daugiau negu skaičią jų aibę.*

Nesunku matyti, kad tiesinis aibės $L(\alpha_1, ..., \alpha_r)$ nepriklausomumas virš $\mathbb{Q}$ yra silpnesnė sąlyga už skaičių $\alpha_1, ..., \alpha_r$ algebrinį nepriklausomumą.

5 disertacijos skyriuje yra pateikiamos jungtinės diskrečiosios universalumo teoremos Lercho dzeta funkcijoms. Mūsų žiniomis, tokios teoremos niekada nebuvo gautos. Tegul $h > 0$ ir

$$L(\alpha_1, ..., \alpha_r; h, \pi) = \Big\{ \Big(\log(m+\alpha_1) : m \in \mathbb{N}_0 \Big), ..., \Big(\log(m+\alpha_r) : m \in \mathbb{N}_0 \Big), \frac{2\pi}{h} \Big\}.$$

Pagrindiniai 5 skyriaus rezultatai yra tokios dvi teoremos.

Teorema 5.1. *Tarkime, kad aibė* $L(\alpha_1, ..., \alpha_r; h, \pi)$ *yra tiesiškai nepriklausoma virš* $\mathbb{Q}$. *Su kiekvienu* $j = 1, ..., r$, *tegul* $K_j \in \mathcal{K}$,

$f_j(s) \in H(K_j)$ ir $0 < \lambda_j \leqslant 1$. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \# \Big\{ 0 \leqslant k \leqslant N : \sup_{1\leqslant j\leqslant r} \sup_{s\in K_j} \Big| L(\lambda_j, \alpha_j, s+ikh) - f_j(s) \Big| < \varepsilon \Big\} > 0.$$

Teorema 5.2. *Tarkime, kad aibė $L(\alpha_1, ..., \alpha_r; h, \pi)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$. Su kiekvienu $j = 1, ..., r$, tegul $K_j \in \mathcal{K}$, $f_j(s) \in H(K_j)$ ir $0 < \lambda_j \leqslant 1$. Tuomet riba*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \# \Big\{ 0 \leqslant k \leqslant N : \sup_{1\leqslant j\leqslant r} \sup_{s\in K_j} \Big| L(\lambda_j, \alpha_j, s+ikh) - f_j(s) \Big| < \varepsilon \Big\} > 0$$

egzistuoja su visais $\varepsilon > 0$, išskyrus, galbūt, ne daugiau negu skaičią jų aibę.

Minėjome, kad vienas iš teorinių dzeta funkcijų universalumo taikymų yra glaudžiai susijęs su šių funkcijų funkciniu nepriklausomumu, kuriuo domėjosi ir Hilbertas. Gerai žinoma, kad 1900 m. Tarptautiniame Matematikų Kongrese Paryžiuje jis pateikė svarbiausių matematikos problemų, kurios turėtų būti sprendžiamos artimiausiame šimtmetyje, sąrašą. 18 osios problemos formulavime Hilbertas pastebėjo, kad Rymano dzeta funkcija $\zeta(s)$ negali tenkinti jokios algebrinės-diferencialinės lygties, t.y., nėra jokio polinomo $p(s_1, ..., s_n) \not\equiv 0$, kad

$$p(\zeta(s), \zeta'(s), ..., \zeta^{(n-1)}(s)) = 0,$$

ir kad tai išplaukia iš analogiško rezultato Oilerio gama funkcijai $\Gamma(s)$ ir funkcinės lygties funkcijai $\zeta(s)$

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma(\frac{1-s}{2})\zeta(1-s).$$

Be to, Hilbertas iškėlė hipotezę, kad algebrinio-diferencialinio nepriklausomumo savybę turi ir bendresnė funkcija

$$\zeta(s,\chi)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^m}{m^s}.$$

Šią Hilberto hipotezę įrodė Ostrovskis (Ostrowski) [15].
Panašias problemas Dirichlė L funkcijoms nagrinėjo A.G.Postnikovas (Postnikov). Voroninas ženkliai apibendrino minėtus rezultatus, jis įrodė [18] Rymano dzeta funkcijos funkcinį nepriklausomumą.

Teorema. *Su kiekvienu* $j=0,..n$, *tegul* $V_j:\mathbb{C}^k\to\mathbb{C}$ *yra tolydi funkcija ir tapatingai pagal* s

$$\sum_{j=0}^{n}s^jV_j\Big(\zeta(s),\zeta'(s),...,\zeta^{(k-1)}(s)\Big)=0.$$

Tuomet $V_j\equiv 0$, $j=0,...,n$.

Vėliau šią teoremą jis išplėtė Dirichlė L funkcijoms. Su transcendenčiuoju α buvo gautas [8] ir Lercho dzeta funkcijos funkcinis nepriklausomumas. Disertacijoje ši savybė įrodyta naudojant silpnesnę sąlygą negu α transcendentumas.

Teorema 6.1. *Tarkime, kad aibė* $L(\alpha)$ *yra tiesiškai nepriklausoma virš* $\mathbb{Q}$ *ir* $0<\lambda\leqslant 1$. *Su kiekvienu* $j=0,...,n$, *tegul* $V_j:\mathbb{C}^k\to\mathbb{C}$ *yra tolydi funkcija ir tapatingai pagal* s

$$\sum_{j=0}^{n}s^jV_j\Big(L(\lambda,\alpha,s),L'(\lambda,\alpha,s),...,L^{(k-1)}(\lambda,\alpha,s)\Big)=0.$$

Tuomet $V_j\equiv 0$, $j=0,...,n$.

Kitaip tariant, 6.1 teorema tvirtina, kad jei $V_0,V_1,...,V_n:\mathbb{C}^k\to\mathbb{C}$

yra tolydžios netapatingai lygios nuliui funkcijos, tada

$$\sum_{j=0}^{n} s^j V_j \Big(L(\lambda, \alpha, s), L'(\lambda, \alpha, s), ..., L^{(k-1)}(\lambda, \alpha, s) \Big) \neq 0$$

su kuriuo nors $s \in \mathbb{C}$.

Lercho dzeta funkcijos turi ir jungtinę funkcinio nepriklausomumo savybę, t.y., teisinga tokia teorema.

Teorema 6.2. *Tarkime, kad aibė $L(\alpha_1, ..., \alpha_r)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$ ir $0 < \lambda_j \leqslant 1$. Su kiekvienu $j = 0, ..., n$, tegul $V_j : \mathbb{C}^{k_1 + ... + k_r} \to \mathbb{C}$ yra tolydi funkcija ir tapatingai pagal s*

$$\sum_{j=0}^{n} s^j V_j \Big(L(\lambda_1, \alpha_1, s), L'(\lambda_1, \alpha_1, s), ..., L^{(k_1-1)}(\lambda_1, \alpha_1, s), ..., \\ L(\lambda_r, \alpha_r, s), L'(\lambda_r, \alpha_r, s), ..., L^{(k_r-1)}(\lambda_r, \alpha_r, s) \Big) = 0.$$

Tuomet $V_j \equiv 0$, $j = 0, ..., n$.

6.1 ir 6.2 teoremų įrodymui yra naudojamos universalumo teoremos, atitinkamai 2.1 ir 4.1 teoremos.

Išvados

1. Lercho dzeta funkcija $L(\lambda, \alpha, s)$ su parametru α, kuriam aibė $\{\log(m + \alpha) : m \in \mathbb{N}_0\}$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$, su visais $0 < \lambda \leqslant 1$ turi tolydžiąją universalumo savybę apie analizinių funkcijų aproksimavimą postūmiais $L(\lambda, \alpha, s + i\tau)$.

2. Lercho dzeta funkcija $L(\lambda, \alpha, s)$ su parametru α, kuriam aibė $\{(\log(m + \alpha) : m \in \mathbb{N}_0), \frac{2\pi}{h}\}$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$, su visais $0 < \lambda \leqslant 1$ turi diskrečiąją universalumo savybę apie analizinių funkcijų aproksimavimą postūmiais $L(\lambda, \alpha, s + ikh)$.

3. Lercho dzeta funkcijos $L(\lambda_1, \alpha_1, s), ..., L(\lambda_r, \alpha_r, s)$ su parametrais $\alpha_1, ..., \alpha_r$, kuriems aibė $\{\log(m + \alpha_j) : m \in \mathbb{N}_0, \quad j = 1, ..., r\}$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$ su visais $0 < \lambda_j \leqslant 1$ turi jungtinę tolydžiąją universalumo savybę apie analizinių funkcijų aproksimavimą postūmiais $(L(\lambda_1, \alpha_1, s + i\tau), ..., L(\lambda_r, \alpha_r, s + i\tau))$.

4. Lercho dzeta funkcijos $L(\lambda_1, \alpha_1, s), ..., L(\lambda_r, \alpha_r, s)$ su parametrais $\alpha_1, ..., \alpha_r$, kuriems aibė $\{(\log(m+\alpha_1) : m \in \mathbb{N}_0), ..., (\log(m+\alpha_r) : m \in \mathbb{N}_0), \dfrac{2\pi}{h}\}$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$, su visais $0 < \lambda_j \leqslant 1$ turi jungtinę diskrečiąją universalumo savybę apie analizinių funkcijų aproksimavimą postūmiais $(L(\lambda_1, \alpha_1, s+ikh), ..., L(\lambda_r, \alpha_r, s+ikh))$.

5. Lercho dzeta funkcija $L(\lambda, \alpha, s)$ su parametru α, kuriam aibė $\{\log(m+\alpha) : m \in \mathbb{N}_0\}$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$, yra funkciškai nepriklausoma.

6. Lercho dzeta funkcijos $L(\lambda_1, \alpha_1, s_1), ..., L(\lambda_r, \alpha_r, s_r)$ su parametrais $\alpha_1, ..., \alpha_r$, kuriems aibė $\{(\log(m+\alpha_1) : m \in \mathbb{N}_0), ..., (\log(m+\alpha_r) : m \in \mathbb{N}_0)\}$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$, yra funkciškai nepriklausomos.

Summary

In the thesis, the Lerch zeta-function $L(\lambda, \alpha, s)$, $s = \sigma + it$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, defined, for $\sigma > 1$, by the Dirichlet series

$$L(\lambda, \alpha, s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \lambda m}}{(m+\alpha)^s},$$

and by analytic continuation elsewhere, is investigated. The main attention is devoted to the universality of $L(\lambda, \alpha, s)$, i.e., to approximation of analytic functions by shifts $L(\lambda, \alpha, s + i\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$.

Continuous an discrete universality theorems for the function $L(\lambda, \alpha, s)$ are obtained. These theorems extend the known results for $L(\lambda, \alpha, s)$. The used conditions for the parameter α are expressed by the linear independence over the field of rational numbers $\mathbb{Q}$ of some sets.

For example, if the set $\left\{\left(\log(m+\alpha) : m \in \mathbb{N}_0\right), \frac{2\pi}{h}\right\}$ is linearly independent over $\mathbb{Q}$, then the function $L(\lambda, \alpha, s)$ has a discrete universality property. This means that if K is a compact set of the strip $\left\{s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1\right\}$ with connected complement, and $f(s)$ is a function continuous on K and analytic in interior of K, then, for every $\varepsilon > 0$,

$$\liminf_{N \to \infty} \frac{1}{N+1} \#\left\{0 \leqslant k \leqslant N : \sup_{s \in K} \left|L(\lambda, \alpha, s+ikh) - f(s)\right| < \varepsilon\right\} > 0.$$

Also, joint universality theorems for a collection of Lerch zeta-functions $L(\lambda_1, \alpha_1, s), ..., L(\lambda_r, \alpha_r, s)$ are obtained. In this case, a given collection of analytic functions $f_1(s), ..., f_r(s)$ are simultaneously approximated by shifts $L(\lambda_1, \alpha_1, s + i\tau), ..., L(\lambda_r, \alpha_r, s + i\tau))$, $\tau \in \mathbb{R}$.

Universality of the function $L(\lambda, \alpha, s)$ is applied to prove its functional independence.

The results of the thesis cover all known universality results for the function $L(\lambda, \alpha, s)$.

Aprobacija

Disertacijos rezultatai buvo pristatyti tarptautinėse MMA (Mathematical Modelling and Analysis) konferencijose (MMA2016, 2016 m. birželio 1 – 4, Tartu, Estija), (MMA2017, 2017 m. gegužės 30 – birželio 2, Druskininkai), (MMA2018, 2018 m. gegužės 29 – birželio 1 d., Sigulda, Latvija), XVI tarptautinėje konferencijoje Algebra, skaičių teorija ir diskrečioji geometrija: šiuolaikinės problemos ir taikymai (Gegužės 13 – 18, 2019, Tula, Rusija), Lietuvos matematikų draugijos konferencijose (2016, 2017, 2018, 2019) ir Vilniaus universiteto skaičių teorijos seminaruose.

Pagrindinės publikacijos

1. A. Laurinčikas, A. Mincevič, Discrete universality theorems for the Lerch zeta-functions, in: Anal. Probab. Methods Number Theory, A. Dubickas et al. (Eds) Vilnius University, Vilnius, 2017, 87-95.

2. Laurinčikas A., Mincevič A. Joint discrete universality for Lerch zeta-functions. Chebyshevskii Sbornik. **19** (1) 2018, 138-151.

3. A. Mincevič, Value distribution theorems for the Lerch zeta-function, in: Algebra, Number Theory and Discrete Geometry: Modern Problems and Appl., XVI intern. Conf., Tula, TGPU im. L. N. Tolstogo, 2019, pp. 197-199.

4. A. Mincevič, D. Mochov, On the discrete universality of the periodic Hurwitz zeta-function, Šiauliai Math. Semin. **10** (**18**) (2015), 81-89.

5. A. Mincevič, D. Šiaučiūnas, Joint universality theorems for

Lerch zeta-functions, Šiauliai Math. Semin **12** (**20**), 2017, 31-47.

6. A. Mincevič, A. Vaiginytė, Remarks on the Lerch zeta – function, Šiauliai Math. Semin **11** (**19**), 2016, 65-73.

Konferencijų pranešimų tezės

1. A. Mincevič, On universality of the Lerch zeta-function, Abstracts of MMA2016, June 1-4, 2016, Tartu, Inst. of Math. Statist. of Univ. Tartu, Tartu, Estonia. Abstracts, p.52.

2. A. Mincevič, On the discrete universality of the Lerch zeta-function, Abstracts of MMA 2017, May 30 - June 2, 2017, Druskininkai, VGTU, 2017, p.43.

3. D. Šiaučiūnas, A. Mincevič, Joint universality for the Lerch zeta-functions, Abstracts of MMA 2019, May 29 - June 1, 2018, Sigulda, University of Latvia, Ryga, 2018, p. 73.

Cituota literatūra

1. B. Bagchi, The statistical behaviour and universality properties of the Riemann zeta-function and other allied Dirichlet series, Ph. D. Thesis, Indian Statistical Institute, Calcutta, 1981.

2. J. W. S. Cassels, Footnote to a note of Davenport and Heilbronn, J. London Math. Soc. **36** (1961), 177-189.

3. R. Garunkštis, Value-distribution of the Lerch zeta-function, Doctoral thesis, Vilnius University, Vilnius, 1998,

4. J. Ignatavičiūtė, Value-distribution of the Lerch zeta-functions. Discrete version, Doctoral thesis, Vilnius University, Vilnius, 2003.

5. D. Klusch, Asymptotic equalities for the Lipschitz-Lerch zeta-function, Arch. Math., **49**(1)(1987), 38–43.

6. A. Laurinčikas, On limit distribution of the Lerch zeta-function, in: New Trends in Probability and Statistics, Vol. 4: Analytic and Probabilistic Methods in Number Theory. Proceedings of the Second Intern. Conf. in Honour of J. Kubilius, Palanga, Lithuania, 23–27 September 1996. Eds. A. Laurinčikas, E. Manstavičius and V. Stakėnas, Vilnius: TEV, Utrecht: VSP, 1997, 135–148.

7. A. Laurinčikas, The universality of the Lerch zeta-function, Lith. Math. J. **37**(199 7), 275-280.

8. A. Laurinčikas and R. Garunkštis, The Lerch Zeta-Function, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 2002.

9. A. Laurinčikas and R. Macaitienė, The discrete universality of the periodic Hurwitz zeta function, Integr. Transf. Spec. Func. **20**(9) (2009), 673-686.

10. A. Laurinčikas, K. Matsumoto, Joint value-distribution theorems on Lerch zeta-functions, Lith. Math. J. **38**(1998),239-249.

11. A. Laurinčikas, K. Matsumoto, The joint universality and the functional independence for Lerch zeta-functions, Nagoya Math. J. 157(2000), 211–227.

12. A. Laurinčikas and K. Matsumoto, Joint value distribution theorems on Lerch zeta-functions. II, Lith. Math. J. **46**(2006), 271-286

13. M. Lerch, Note sur la fonction $K(w, x, s) = \sum_{n \geq 0} \exp\{2\pi i n x\}(n + w)^{-s}$, Acta Math. **11** (1887), 19-24.

14. R. Lipschitz, Undersuchung einer aus vier Elementen gebildeten Reiche, J. Reine Angew. Math. **105** (1889), 127-156.

15. A. Ostrowski, Über Dirichletsche Reihen und algebraische Differentialgleichungen Math. Z. **8** (1920), 241-298.

16. A. Reich, Werteverteilung von Zeta-Funktionen, Arch. Math. **34**(1980), 440-451.

17. S. M. Voronin Theorem on the "universality" of the Riemann zeta-function, Math. USSR Izv. **9** (1975), 443-453 (in Russian.

18. S. M. Voronin, On the functional independence of Dirichlet L-functions, Acta Math. **27** (1975), 493-503 (in Russian).

Trumpos žinios apie autorių

Gimimo data ir vieta:

1991 m. sausio 18 d., Vilnius, Lietuva.

Išsilavinimas:

2009 m. Vilniaus Joachimo Lelevelio vidurinė mokykla.

2013 m. Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas, Matematika ir matematikos taikymai, bakalauras.

2015 m. Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas, Matematika, magistras.

Darbo patirtis:

2014-04 – 2015-05 – UAB NEB Finance, vadybininkė.

nuo 2016-01 – UAB Ermitažas, prekių duomenų analitikė.

UŽRAŠAMS

UŽRAŠAMS

UŽRAŠAMS

Vilniaus universiteto leidykla
Saulėtekio al. 9, LT-10222 Vilnius
El. p. info@leidykla.vu.lt,
www.leidykla.vu.lt
Tiražas 40 egz.