ALGIRDAS AMBRAZEVIČIUS
ALEKSAS DOMARKAS

MATEMATINĖS

FIZIKOS

LYGTYS

2 dalis

Vilnius
1999

TURINYS

1 SKYRIUS

Pagrindinės sąvokos

1.1. APIBRĖŽIMAI IR ŽYMENYS

Šioje knygoje vartosime tokius žymenis:

$\mathbb{R}^n$ – n-matė euklidinė erdvė, $n \geq 2$; $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ – realiųjų skaičių aibė.

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ – išplėstinė realiųjų skaičių aibė.

$x = (x_1, \ldots, x_n)$ – taškas erdvėje $\mathbb{R}^n$. Kartais jį apibrėšime kaip vektorių stulpelį. Šiuo atveju rašysime $x = \mathrm{colon}(x_1, \ldots, x_n)$. Abiem atvejais

$$|x| = \Big(\sum_{i=1}^n x_i^2\Big)^{1/2}.$$

$\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ – puserdvė erdvėje $\mathbb{R}^n$.

Ω – sritis erdvėje $\mathbb{R}^n$, t.y. atvira jungioji aibė; $S = \partial\Omega$ – srities Ω kraštinių taškų aibė; $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ – uždaroji sritis, t.y. srities Ω uždarinys; Ω' – griežtai vidinė sritis, t.y. $\overline{\Omega'}$ yra kompaktas ir $\overline{\Omega'} \subset \Omega$; $|\Omega|$ – srities Ω tūris. Visoje knygoje, jeigu nenurodyta priešingai, Ω yra aprėžta sritis.

$\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_n)$ – išorinis srities Ω atžvilgiu vienetinis paviršiaus S normalės vektorius. Norėdami pažymėti, kad normalės vektorius yra skaičiuojamas taške $x \in S$, rašysime $\mathbf{n}_x$.

$S_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| = r\} \subset \mathbb{R}^n$ – sfera, kurios centras yra taške x ir spindulys r; sferos S_r plotas $|S_r| = r^{n-1}|S_1|$; vienetinės sferos plotas $|S_1| = 2\pi^{n/2}/\Gamma\left(n/2\right)$, Γ – gama funkcija.

$B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < r\} \subset \mathbb{R}^n$ – rutulys, kurio centras yra taške x ir spindulys r; rutulio B_r tūris $|B_r| = |S_1|r^n/n$; jeigu taškas x sutampa su koordinačių pradžia, t.y. $x = 0$, sferą $S_r(x)$ ir rutulį $B_r(x)$ žymėsime trumpiau: S_r ir B_r.

$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ – multiindeksas, $|\alpha| = \sum\limits_{i=1}^n \alpha_i$, α_i – sveikieji neneigiami skaičiai.

$D^\alpha u = \partial^{|\alpha|}u/\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}$ – funkcijos u dalinė $|\alpha|$-osios eilės išvestinė[1]; pirmosios eilės dalinę išvestinę $\partial u/\partial x_i$ žymėsime u_{x_i}; antrosios eilės dalinę išvestinę

[1]Jeigu funkcija $u = u(x, y)$, tai norėdami pabrėžti, kad dalinė išvestinė $D^\alpha u$ skaičiuojama kintamuojo x atžvilgiu, rašysime $D_x^\alpha u$.

$\partial^2 u/\partial x_i \partial x_j$ žymėsime $u_{x_i x_j}$; $u_x = (u_{x_1}, \ldots, u_{x_n})$ – funkcijos u gradientas;

$$|u_x| = \Big(\sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2\Big)^{1/2}, \quad |u_{xx}| = \Big(\sum_{i,j=1}^{n} u_{x_i x_j}^2\Big)^{1/2}.$$

$\mathrm{L_p}(\Omega)$ – mačiųjų srityje Ω funkcijų, turinčių baigtinę normą

$$\|u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} = \Big(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx\Big)^{1/p},$$

Banacho erdvė; kai $p = 1$, Banacho erdvę $\mathrm{L}_1(\Omega)$ žymėsime $\mathrm{L}(\Omega)$. Jeigu $u \in \mathrm{L}(\Omega)$, tai sakysime, kad u yra sumuojama srityje Ω funkcija; kai $p = 2$, erdvė $\mathrm{L}_2(\Omega)$ yra Hilberto erdvė. Skaliarinę sandaugą joje galima apibrėžti taip:

$$(u, v)_{\mathrm{L}_2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)\overline{v(x)} \, dx, \quad \forall u, v \in \mathrm{L}_2(\Omega).$$

Jeigu $\mathrm{L}_2(\Omega)$ yra realiųjų funkcijų erdvė, tai brukšnys nerašomas. Kartais skaliarinę sandaugą $(\cdot, \cdot)_{\mathrm{L}_2(\Omega)}$ ir ją atitinkančią normą $\|\cdot\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)}$ žymėsime atitinkamai $(\cdot, \cdot)$ ir $\|\cdot\|$.

$\mathrm{L_{p,loc}}(\Omega)$ – mačiųjų ir lokaliai integruojamų laipsniu p srityje Ω funkcijų tiesinė erdvė. Erdvę $\mathrm{L_{1,loc}}(\Omega)$ žymėsime $\mathrm{L_{loc}}(\Omega)$.

$\mathrm{L}_\infty(\Omega)$ – iš esmės aprėžtų mačiųjų srityje Ω funkcijų, turinčių baigtinę normą

$$\|u\|_{\mathrm{L}_\infty(\Omega)} = \operatorname*{vrai\,sup}_{x \in \Omega} |u(x)|,$$

Banacho erdvė.

$\mathrm{C^k}(\overline{\Omega})$ – tolygiai tolydžių uždaroje srityje $\overline{\Omega}$ (sritis gali būti ir neaprėžta) funkcijų, turinčių tolygiai tolydžias dalines išvestines iki k-osios eilės imtinai ir baigtinę normą

$$\|u\|_{\mathrm{C^k}(\overline{\Omega})} = \sum_{|\alpha| \le k} \sup_{x \in \Omega} |\, D^\alpha \, u(x)|,$$

Banacho erdvė. Čia k – sveikasis neneigiamas skaičius. Kai $k = 0$, erdvę $\mathrm{C}^0(\overline{\Omega})$ žymėsime $\mathrm{C}(\overline{\Omega})$.

$\mathrm{C^k}(\Omega)$ – tolydžių srityje Ω funkcijų, turinčių tolydžias dalines išvestines iki k-osios eilės imtinai, aibė. Kai $k = 0$, aibę $\mathrm{C}^0(\Omega)$ žymėsime $\mathrm{C}(\Omega)$.

$\mathrm{C}^\infty(\Omega)$ – be galo diferencijuojamų srityje Ω funkcijų aibė.

$\operatorname{supp} u$ – funkcijos u *atrama*, t.y. aibės $\{x : u(x) \neq 0\}$ uždarinys erdvėje $\mathbb{R}^n$. Funkcija u yra *finičioji* srityje Ω, jeigu $\operatorname{supp} u$ yra kompaktas ir $\operatorname{supp} u \subset \Omega$.

$\mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$ – be galo diferencijuojamų finičiųjų srityje Ω funkcijų aibė.

$\operatorname{osc}\{u;\Omega\}$ – funkcijos u svyravimas srityje Ω, t.y. skirtumas tarp $\sup\limits_{\Omega} u(x)$ ir $\inf\limits_{\Omega} u(x)$.

$\operatorname{diam}\Omega = \sup\limits_{x,y\in\Omega} |x-y|$ – srities Ω skersmuo.

$\operatorname{dist}\{x,Q\} = \inf\limits_{y\in Q} |x-y|$ – taško $x \in \mathbb{R}^n$ atstumas iki aibės Q.

$\operatorname{dist}\{P,Q\} = \inf\limits_{x\in P, y\in Q} |x-y|$ – atstumas tarp aibių P ir Q.

Sakysime, S yra $\mathrm{C^k}$ klasės paviršius, jeigu kiekvieno jo taško aplinkoje jį galima apibrėžti lygtimi

$$y_n = f(y_1,\dots,y_{n-1});$$

čia f yra $\mathrm{C^k}$ klasės funkcija, $y_1, y_2, \dots, y_n$ – vietinė ortogonali koordinačių sistema, ašis y_n nukreipta normalės kryptimi, o ašys $y_1,\dots,y_{n-1}$ yra liečiamojoje plokštumoje. Kai $k=1$, paviršių S vadinsime glodžiuoju paviršiumi.

Sakysime, funkcija u, apibrėžta uždaroje srityje $\overline{\Omega}$, tenkina šioje srityje Helderio sąlygą su rodikliu $\lambda \in (0,1]$ ir Helderio konstanta M, jeigu

$$\langle u\rangle_\Omega^\lambda \equiv \sup\left\{\rho^{-\lambda}\operatorname{osc}\{u;\Omega_\rho\}\right\} = M < \infty, \quad \rho \le \rho_0;$$

čia Ω_ρ yra srities Ω ir rutulio, kurio spindulys ρ, sankirta, o supremumas imamas pagal ρ.

Sakysime, funkcija u, apibrėžta uždaroje srityje $\overline{\Omega}$, tenkina šioje srityje Lipšico sąlygą, jeigu ji tenkina Helderio sąlygą su $\lambda = 1$.

Jeigu srities Ω kraštas $\partial\Omega$ yra pakankamai glodus, pavyzdžiui, $\mathrm{C^1}$ klasės, tai $\langle u\rangle_\Omega^\lambda$ galima apibrėžti ir taip:

$$\langle u\rangle_\Omega^\lambda \equiv \sup_{\substack{x,y\in\Omega\\ x\ne y}} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\lambda}.$$

$\mathrm{C^{k+\lambda}}(\overline{\Omega})$ – tolygiai tolydžių uždaroje srityje $\overline{\Omega}$ funkcijų, turinčių tolygiai tolydžias dalines išvestines iki k-osios eilės imtinai ir baigtinę normą

$$\|u\|_{\mathrm{C^{k+\lambda}}(\overline{\Omega})} = \sum_{|\alpha|=0}^{k} \sup_{\Omega} |D^\alpha u(x)| + \sum_{|\alpha|=k} \langle D^\alpha u\rangle_\Omega^\lambda, \quad \lambda \in (0,1),$$

Banacho erdvė; sakysime, funkcija u priklauso aibei $\mathrm{C^{k+\lambda}}(\Omega)$, jeigu ji priklauso erdvei $\mathrm{C^{k+\lambda}}(\overline{\Omega'})$ kiekvienoje griežtai vidinėje srityje Ω'.

Integralus žymėsime vienu integralo ženklu. Jeigu x yra integravimo kintamasis erdvėje $\mathbb{R}^n$, tai simboliu dx žymėsime tūrio elementą (Lebego matą). Jeigu kelių kintamųjų funkcija $f(x,y)$ yra integruojama kurio nors vieno kintamojo (pavyzdžiui, y) atžvilgiu paviršiumi S, tai paviršiaus S ploto elementą žymėsime dS_y.

Įvertinant reiškinius pastovius dydžius patogu žymėti viena bendra konstanta. Ją žymėsime raide C. Atkreipsime dėmesį, kad pereinant nuo vieno reiškinio prie kito, paprastai gaunamos skirtingos konstantos. Vis dėlto jas dažniausiai žymėsime ta pačia raide C. Jeigu reikia pabrėžti, kad konstanta priklauso nuo kokio nors parametro ε, tai tokią konstantą žymėsime C_ε.

Kiekviename skyriuje yra sava formulių, lemų, teoremų ir paveikslėlių numeracija. Numeris žymimas dviem skaičiais. Pirmasis iš jų nurodo skyriaus, o antrasis – formulės, lemos, teoremos arba paveikslėlio numerį. Teoremos arba lemos įrodymą pradėsime ženklu $\lhd$. Įrodymo pabaigą žymėsime ženklu $\rhd$. Be to, kartais naudosime tokius ženklus: $\forall$ – su visais; $\iff$ – tada ir tik tada; $\to$ – konverguoja, arba artėja; $\rightrightarrows$ – tolygiai konverguoja; b.v. – beveik su visais (beveik visiems); $\hookrightarrow$ – įsideda.

1.2. KAI KURIOS DAŽNAI VARTOJAMOS NELYGYBĖS

1. Tegu $p > 1$. Tada $\forall a, b \in \mathbb{R}^1$ yra teisinga *Jungo nelygybė*:

$$|ab| \leq \frac{1}{p}|a|^p + \frac{1}{p'}|b|^{p'}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1. \tag{1.1}$$

   Iš jos lengvai išvedama nelygybė

$$|ab| \leq \frac{\varepsilon}{p}|a|^p + \frac{\varepsilon^{-p'/p}}{p'}|b|^{p'}, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

   kuri, kai $p = 2$, virsta tokia:

$$|ab| \leq \frac{\varepsilon}{2}|a|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}|b|^2, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

2. Tegu $p > 1$. Tada $\forall f \in \mathrm{L_p}(\Omega), \forall g \in \mathrm{L_{p'}}(\Omega)$ yra teisinga *Helderio nelygybė*:

$$\Big|\int\limits_\Omega f(x)g(x)\,dx\Big| \leq \|f\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}\|g\|_{\mathrm{L_{p'}}(\Omega)}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1. \tag{1.2}$$

   Taikant matematinės indukcijos metodą, Jungo ir Helderio nelygybes galima apibendrinti. Tiksliau, yra teisingos tokios nelygybės:

$$|a_1 \cdot \ldots \cdot a_N| \leq \sum_{i=1}^N \frac{1}{p_i}|a_i|^{p_i}, \quad \Big|\int\limits_\Omega f_1 \cdot \ldots \cdot f_N\,dx\Big| \leq \prod_{i=1}^N \|f_i\|_{\mathrm{L_{p_i}}(\Omega)};$$

   čia $a_i \in \mathbb{R}^1$, $f_i \in \mathrm{L_{p_i}}(\Omega)$, $p_i > 1$, $\forall i = 1, 2, \ldots, N$ ir $\sum\limits_{i=1}^N \frac{1}{p_i} = 1$.

3. Tegu $p \geq 1$. Tada $\forall f, g \in \mathrm{L_p}(\Omega)$ yra teisinga *Minkovskio nelygybė*:

$$\|f + g\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} \leq \|f\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} + \|g\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}. \tag{1.3}$$

4. Tegu Ω yra aprėžta sritis erdvėje $\mathbb{R}^n$. Tada $\forall y \in \mathbb{R}^n$ yra teisinga nelygybė

$$\int\limits_\Omega |x - y|^{-\varepsilon}\,dx \leq |S_1|\frac{(2d)^{n-\varepsilon}}{n - \varepsilon}, \quad 0 \leq \varepsilon < n; \tag{1.4}$$

   čia $d = \operatorname{diam}\Omega$.

5. Tegu $1 \leq p < \infty$, $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$ ir f – apibrėžta, mačioji aibėje $X \times Y$ funkcija. Tada yra teisinga *Minkovskio nelygybė kartotiniams integralams*

$$\Big(\int\limits_X \Big|\int\limits_Y f(x, y)\,dy\Big|^p dx\Big)^{1/p} \leq \int\limits_Y \Big(\int\limits_X |f(x, y)|^p\,dx\Big)^{1/p} dy, \tag{1.5}$$

jeigu tik integralas (1.5) nelygybės dešinėje yra baigtinis.

Šią nelygybę įrodysime, kai abu integralai yra baigtiniai. Pažymėkime

$$F(x) = \Big| \int_Y f(x,y)\,dy \Big|.$$

Tada

$$\int_X F^p(x)\,dx \le \int_X F^{p-1}(x) \int_Y |f(x,y)|\,dydx =$$
$$= \int_Y \int_X |f(x,y)| F^{p-1}(x)\,dxdy \le$$
$$\le \int_Y \Big(\int_X |f(x,y)|^p\,dx \Big)^{1/p} \Big(\int_X F^p(x)\,dx \Big)^{1/p'} dy.$$

Įvertindami pastarąjį integralą, pasinaudojome Helderio nelygybe. Suprastinę kairiąją ir dešiniąją gautos nelygybės puses, iš

$$\Big(\int_X F^p(x)\,dx \Big)^{1/p'}$$

gausime (1.5) nelygybę.

6. Tegu f yra pustiesėje $t > 0$ diferencijuojama funkcija ir jos išvestinė $f' \in \mathrm{L_p}(\mathbb{R}^1_+)$, $p > 1$. Tada yra teisinga *Hardžio nelygybė*

$$I \equiv \int_0^\infty t^{-p} |f(t) - f(0)|^p\,dt \le \Big(\frac{p}{p-1} \Big)^p \int_0^\infty |f'(t)|^p\,dt. \tag{1.6}$$

Pagal Niutono–Leibnico formulę

$$t^{-1}(f(t) - f(0)) = t^{-1} \int_0^t f'(\tau)\,d\tau = \int_0^1 f'(st)\,ds.$$

Todėl

$$I = \int_0^\infty \Big| \int_0^1 f'(st)\,ds \Big|^p dt.$$

Pagal Minkovskio nelygybę

$$I^{1/p} \le \int_0^1 \Big(\int_0^\infty |f'(st)|^p\,dt \Big)^{1/p} ds = \int_0^1 s^{-1/p}\,ds \Big(\int_0^\infty |f'(t)|^p\,dt \Big)^{1/p}.$$

Apskaičiavę integralą nuo $s^{-1/p}$ ir pakėlę abi gautos nelygybės puses laipsniu p, gausime (1.6) nelygybę.

Pirmų keturių nelygybių įrodymą galima rasti [1] knygoje.

1.3. KAI KURIE MATEMATINĖS IR FUNKCINĖS ANALIZĖS TEIGINIAI

Tegu Ω yra aprėžta erdvėje $\mathbb{R}^n$ sritis, $S = \partial\Omega$ – dalimis glodus paviršius, o funkcijos $u, v \in \mathrm{C}^1(\overline{\Omega})$. Tada yra teisinga *integravimo dalimis formulė*:

$$\int\limits_{\Omega} u_{x_k} v\, dx = \int\limits_{S} uv \cos(\mathbf{n}, x_k)\, dS - \int\limits_{\Omega} uv_{x_k}\, dx. \tag{1.7}$$

Tuo atveju, kai viena iš funkcijų u arba v paviršiuje S lygi nuliui, integravimo dalimis formulė supaprastėja ir ją galima perrašyti taip:

$$\int\limits_{\Omega} u_{x_k} v\, dx = -\int\limits_{\Omega} uv_{x_k}\, dx. \tag{1.8}$$

Tegu X, Y yra Banacho erdvės. Aibė $Q \subset \mathrm{X}$ yra *sąlyginis kompaktas* erdvėje X, jeigu iš bet kurios jos sekos galima išskirti konverguojantį posekį. Sakysime, operatorius (gali būti ir netiesinis) $A : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ yra *aprėžtas*, jeigu jis bet kokią aprėžtą erdvėje X aibę perveda į aprėžtą erdvėje Y aibę. Operatorius A yra *visiškai tolydus* (kompaktinis), jeigu jis yra tolydus ir bet kokią aprėžtą erdvėje X aibę perveda į sąlyginį kompaktą erdvėje Y.

Tegu X, Y yra tiesinės erdvės. Operatorius $A : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ yra *tiesinis*, jeigu

$$A(\lambda x + \mu y) = \lambda Ax + \mu Ay,\ \forall x, y \in \mathrm{X},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Jeigu $A : \mathrm{X} \to \mathbb{R}$, tai operatorių A vadinsime *funkcionalu*.

Tegu X yra Banacho erdvė, $A : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ tiesinis aprėžtas operatorius. Sakysime, skaičius λ yra operatoriaus A *tikrinė reikšmė*, o elementas $x \in \mathrm{X}$ – ją atitinkanti *tikrinė funkcija*, jeigu x yra netrivialus lygties

$$Ax = \lambda x$$

sprendinys erdvėje X. Sakysime, skaičius μ yra operatoriaus A *charakteristinė reikšmė*, jeigu lygtis

$$\mu Ax = x$$

turi netrivialų sprendinį erdvėje X.

Tegu X yra tiesinė erdvė. Visų tiesinių, tolydžiųjų funkcionalų $f : \mathrm{X} \to \mathbb{R}$ aibę vadinsime *jungtine erdve* erdvei X ir žymėsime simboliu X^*. Jungtinė erdvė X^* yra pilna. Jeigu erdvė X yra normuota, tai jungtinė erdvė taip pat normuota ir normą joje galima apibrėžti taip:

$$\|f\|_{\mathrm{X}^*} = \sup_{\|u\| \le 1} |f(u)|.$$

Kaip įprasta, funkcionalo $f \in \mathrm{X}^*$ reikšmę taške $u \in \mathrm{X}$ žymėsime $f(u)$. Kartais lygiagrečiai vartosime žymenį $\langle f,\, u\rangle$. Reiškinys $f(u) = \langle f,\, u\rangle$ yra tiesinis pagal f ir pagal u. Be to,

$$|f(u)| = |\,\langle f,\, u\rangle\,| \le \|f\|_{\mathrm{X}^*} \|u\|_{\mathrm{X}}, \qquad \forall f \in \mathrm{X}^*, \quad \forall u \in \mathrm{X}.$$

Erdvei X galima apibrėžti antrąją jungtinę erdvę $\mathrm{X}^{**} = (\mathrm{X}^*)^*$. Erdvė X izometriškai įsideda į X^{**}, t.y. $\mathrm{X} \subset \mathrm{X}^{**}$. Jeigu $\mathrm{X} = \mathrm{X}^{**}$, tai erdvė X vadinama *refleksyviąja*. Kiekvienas refleksyviosios erdvės tiesinis poerdvis taip pat yra refleksyvioji erdvė.

Tegu $A : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ yra tiesinis tolydus operatorius ir $g \in \mathrm{Y}^*$. Tada $g \circ A$ yra tiesinis tolydus funkcionalas, apibrėžtas erdvėje X. Kiekvieną funkcionalą $g \in \mathrm{Y}^*$ atitinka funkcionalas $f = g \circ A \in \mathrm{X}^*$. Ši atitiktis apibrėžia operatorių, veikiantį iš erdvės Y^* į erdvę X^*. Gautas operatorius vadinamas *jungtiniu* operatoriui A. Jį žymėsime A^*.

Tegu H yra Hilberto erdvė. Sakysime, seka $\{u_n\} \subset \mathrm{H}$ *silpnai konverguoja* į elementą $u \in \mathrm{H}$ ir rašysime $u_n \rightharpoonup u$, jeigu

$$(u_n - u, v) \to 0, \quad \forall v \in \mathrm{H},$$

kai $n \to \infty$. Jeigu seka $\{u_n\}$ aprėžta ir

$$(u_n - u, v) \to 0, \quad \forall v \in Q,$$

kai $n \to \infty$, tai $u_n \rightharpoonup u$; čia Q – tiršta erdvėje H aibė. Jeigu $u_n \to u$, tai $u_n \rightharpoonup u$. Atvirkštinis teiginys yra neteisingas. Tačiau jeigu $u_n \rightharpoonup u$ ir $\|u_n\| \to \|u\|$, tai $u_n \to u$ erdvėje H.

1.1 teorema. *Tegu $\{u_k\}$ yra aprėžta Hilberto erdvėje H seka. Tada iš jos galima išskirti silpnai konverguojantį posekį.*

1.2 teorema. *Jeigu seka $\{u_k\} \subset \mathrm{H}$ silpnai konverguoja į elementą $u \in \mathrm{H}$, tai*

$$\|u\| \le \varliminf_{n\to\infty} \|u_n\| \le \varlimsup_{n\to\infty} \|u_n\| < \infty.$$

Tegu X yra Banacho erdvė. Sakysime, seka $\{u_n\} \subset \mathrm{X}$ *silpnai konverguoja* į elementą $u \in \mathrm{X}$ ir rašysime $u_n \rightharpoonup u$, jeigu

$$\langle f,\, u_n - u\rangle \to 0, \quad \forall f \in \mathrm{X}^*.$$

1.3 teorema. *Banacho erdvė X yra refleksyvioji tada ir tik tada, kai iš kiekvienos aprėžtos (pagal normą) sekos galima išrinkti silpnai konverguojantį posekį.*

Kiekviena konverguojanti seka konverguoja silpnai. Atvirkščias teiginys yra neteisingas. Pavyzdžiui, $\sin nx \rightharpoonup 0$ erdvėje $\mathrm{L}_2(0,\pi)$, kai $n \to \infty$. Tačiau $\sin nx \not\to 0$, kai $n \to \infty$, nes atstumas tarp bet kurių dviejų skirtingų šios sekos elementų

$$\|\sin nx - \sin mx\|_{\mathrm{L}_2(0,\pi)} = \sqrt{\pi}.$$

Baigtiniamatės erdvės atveju silpnasis konvergavimas sutampa su konvergavimu pagal normą. Plačiau apie silpnąjį konvergavimą žr. [50], [19], [33], [34].

Tegu X yra Banacho erdvė, $A : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ – tiesinis visiškai tolydus operatorius, $A^* : \mathrm{X}^* \to \mathrm{X}^*$ – jungtinis operatorius. Šiuo atveju X^* taip pat yra Banacho erdvė, o A^* – visiškai tolydus operatorius.

1.4 teorema. *Lygtis*

$$x - Ax = y, \quad y \in \mathrm{X}, \tag{1.9}$$

turi sprendinį $x \in \mathrm{X}$ *tada ir tik tada, kai* $f(y) = 0$, $\forall f \in \mathrm{X}^*$:

$$f - A^* f = 0. \tag{1.10}$$

I š v a d a . *Jeigu* (1.10) *lygtis turi tik trivialų sprendinį, tai* (1.9) *lygtis turi sprendinį* $\forall y \in \mathrm{X}$.

1.5 teorema. *Homogeninės lygtys*

$$x - Ax = 0, \tag{1.11}$$

$$f - A^* f = 0$$

turi vienodą skaičių tiesiškai nepriklausomų sprendinių.

1.6 teorema. *Nehomogeninė* (1.9) *lygtis turi sprendinį* $\forall y \in \mathrm{X}$ *tada ir tik tada, kai homogeninė* (1.11) *lygtis turi tik trivialų sprendinį. Be to, jeigu* (1.11) *lygtis turi tik trivialų sprendinį, tai* (1.9) *lygtis* $\forall y \in \mathrm{X}$ *turi vienintelį sprendinį ir operatorius* $(\mathrm{I} - A)^{-1}$ *yra aprėžtas. Tuo atveju, kai* (1.11) *lygtis turi netrivialų sprendinį, bendrąjį* (1.9) *lygties sprendinį galima išreikšti formule*

$$x = x_0 + x';$$

čia x' *yra atskirasis* (1.9) *lygties sprendinys, o* x_0 *– bendrasis* (1.11) *lygties sprendinys.*

1.7 teorema. *1. Operatoriaus* A *tikrinių reikšmių aibė yra baigtinė arba skaičioji ir, jeigu ji yra skaičioji, tai sudaro artėjančių į nulį skaičių seką.*

2. Jeigu skaičius $\lambda \neq 0$ *yra operatoriaus* A *tikrinė reikšmė, tai ją atitinkančių tikrinių tiesiškai nepriklausomų funkcijų aibė yra baigtinė.*

Šios keturios teoremos yra tiesinių integralinių lygčių teorijoje žinomų Fredholmo teoremų analogas. Todėl jas vadinsime *Fredholmo teoremomis.*

Tegu H yra Hilberto erdvė. Aprėžtas tiesinis operatorius $A : \mathrm{H} \to \mathrm{H}$ yra savijungis, jeigu $A = A^*$, t.y. jeigu

$$(A\,x, y) = (x, A\,y), \quad \forall x, y \in \mathrm{H}.$$

1.8 teorema. *Tegu* H *yra Hilberto erdvė,* $A : \mathrm{H} \to \mathrm{H}$ *– savijungis, visiškai tolydus operatorius. Tada operatorius* A *turi bent vieną tikrinę reikšmę.*

Tegu $\{\lambda_i\}$ yra tikrinių operatoriaus A reikšmių sistema, $N_i = \{x \in \mathrm{X} : Ax = \lambda_i x\}$. Jeigu $\lambda_0 = 0$ yra tikrinė operatoriaus A reikšmė, tai $N_0 = \{x \in \mathrm{X} : Ax = 0\}$.

1.9 teorema. *Tegu* H *yra Hilberto erdvė ir* $A : \mathrm{H} \to \mathrm{H}$ *– savijungis, visiškai tolydus operatorius. Tada*

$$\mathrm{H} = N_0 \oplus \sum_i N_i;$$

čia $\oplus$ *– tiesioginė suma.*

1.10 teorema. (Ryso) *Tegu f yra tiesinis aprėžtas (tolydus) funkcionalas Hilberto erdvėje H. Tada egzistuoja toks vienintelis elementas $x_0 \in \mathrm{H}$, kad*

$$f(x) = (x, x_0), \ \forall x \in \mathrm{H}, \tag{1.12}$$

ir $\|f\| = \|x_0\|$. Atvirkščiai, (1.12) lygybė $\forall x_0 \in \mathrm{H}$ apibrėžia tiesinį aprėžtą (tolydų) funkcionalą f su $\|f\| = \|x_0\|$.

1.11 teorema. (Hano–Banacho) *Tegu X yra realioji normuota erdvė, E – tiesinis poerdvis erdvėje X, $f : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ – tiesinis aprėžtas funkcionalas. Tada egzistuoja toks apibrėžtas visoje erdvėje X funkcionalo f tęsinys $\tilde{f}$, kad*

$$\|\tilde{f}\| = \|f\| \quad \textit{ir} \quad \langle \tilde{f}, x\rangle = \langle f, x\rangle\,, \quad \forall x \in \mathrm{E}.$$

Tegu X, Y yra Banacho erdvės, $\mathrm{L}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ – tiesinių tolydžių operatorių, veikiančių iš erdvės X į erdvę Y, aibė. Aibė $\mathrm{L}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ su joje apibrėžta norma

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \le 1} \|Ax\|, \quad A \in \mathrm{L}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$$

yra normuota erdvė. Jeigu operatorius $A \in \mathrm{L}(\mathrm{X}, \mathrm{X})$, tai jo normą žymėsime $\|A\|_{\mathrm{X}}$.

1.12 teorema. *Tegu X, Y ir Z yra Banacho erdvės, $A \in \mathrm{L}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}), B \in \mathrm{L}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z})$. Jeigu bent vienas iš operatorių A arba B yra visiškai tolydus, tai jų sandauga $B\,A$ yra visiškai tolydus operatorius, veikiantis iš erdvės X į erdvę Z.*

1.13 teorema. *Tegu $A, A_n \in \mathrm{L}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}), n = 1, 2, \ldots,$ ir operatoriai A_n yra visiškai tolydūs. Jeigu $\|A_n - A\| \to 0$, kai $n \to \infty$, tai operatorius A taip pat yra visiškai tolydus.*

1.14 teorema. (Banacho–Šteingauzo) *Tegu X, Y yra Banacho erdvės. Seka $\{A_n\} \subset \mathrm{L}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ konverguoja į elementą $A \in \mathrm{L}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ tada ir tik tada, kai:*

1. *Seka $\{\| A_n \|\}$ yra aprėžta.*
2. *Seka $\{A_n\}$ konverguoja į elementą A kokiame nors erdvės X tiesiniame tirštame poerdvyje E.*

1.15 teorema. (Hausdorfo) *Tegu X – metrinė erdvė ir aibė $K \subset \mathrm{X}$.*

1. *Tam, kad aibė K būtų sąlyginis kompaktas erdvėje X būtina, o jeigu X pilna erdvė, tai ir pakankama, kad $\forall \varepsilon > 0$ aibei K egzistuotų baigtinis ε tinklas.*
2. *Tegu X – pilna metrinė erdvė. Tada aibė K yra sąlyginis kompaktas erdvėje X, jeigu $\forall \varepsilon > 0$ aibei K egzistuoja sąlygiškai kompaktinis ε tinklas.*

1.16 teorema. (Arcelà) *Aibė U yra sąlyginis kompaktas erdvėje $\mathrm{C}(\overline{\Omega})$ tada ir tik tada, kai ji yra aprėžta, t.y.*

$$\sup_{u\in U}\|u\|_{\mathrm{C}(\overline{\Omega})}\leq M,$$

ir vienodai tolydi, t.y.

$$\sup_{u\in U}\sup_{|z|<h}\|u(x+z)-u(x)\|_{\mathrm{C}(\overline{\Omega})}\to 0,\quad \text{kai } h\to 0.$$

Šitų teoremų įrodymą galima rasti [19], [33] knygose.

1.17 teorema. (Fubinio) *Tegu P yra mati erdvėje $\mathbb{R}^n$ aibė, Q – mati erdvėje $\mathbb{R}^m$ aibė, $E=P\times Q$, f – sumuojama aibėje E funkcija. Tada funkcija*

$$v(x)=\int\limits_Q f(x,y)\,dy$$

yra sumuojama aibėje P ir

$$\int\limits_{P\times Q} f(x,y)\,dydx=\int\limits_P\Big(\int\limits_Q f(x,y)\,dy\Big)dx. \tag{1.13}$$

1.18 teorema. (Tonelio) *Tegu P yra mati erdvėje $\mathbb{R}^n$ aibė, Q – mati erdvėje $\mathbb{R}^m$ aibė, $E=P\times Q$, f – neneigiama mati aibėje E funkcija. Tada:*

1. *Formulė (1.13) teisinga (netgi tuo atveju, kai funkcija f nėra sumuojama aibėje E).*

2. *Jeigu funkcija*

$$v(x)=\int\limits_Q f(x,y)\,dy$$

sumuojama aibėje P, tai funkcija f sumuojama aibėje E.

Šių teoremų įrodymą galima rasti [54], [18] knygose.

1.19 teorema. (Vieneto skaidinys) *Tegu $\mathcal{U}$ yra aibės $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ atvirasis denginys. Tada egzistuoja tokia apibrėžtų atviroje aibėje $Q\supset\Omega$ ir be galo diferencijuojamų funkcijų šeima Φ, kad:*

1. *Kiekvienai funkcijai $\varphi\in\Phi$*

$$0\leq\varphi(x)\leq 1,\quad \forall x\in Q;$$

2. *Kiekvienam taškui $x\in\Omega$ egzistuoja jo atvira aplinka, kurioje tik baigtinis skaičius funkcijų iš Φ yra nelygus nuliui;*

3. *Kiekvienam taškui* $x \in \Omega$
$$\sum_{\varphi \in \Phi} \varphi(x) = 1$$
(pagal 2 teiginį kiekvieno taško $x \in \Omega$ *pakankamai mažoje aplinkoje sumos narių yra tik baigtinis skaičius);*

4. *Kiekvienai funkcijai* $\varphi \in \Phi$ *egzistuoja tokia atvira aibė* $U \subset \mathcal{U}$, *kad*
$$\operatorname{supp} \varphi \subset U.$$

Šios teoremos įrodymą galima rasti [46] knygoje.

Funkcija u yra *absoliučiai tolydi* segmente $[a, b]$, jeigu $\forall \varepsilon > 0$ galima rasti tokį skaičių $\delta > 0$, kad bet kuriam baigtiniam segmento $[a, b]$ skaidiniui
$$a \le x_1 < x_1' \le \ldots \le x_m < x_m' \le b$$
teisinga nelygybė
$$\sum_{i=1}^{m} |f(x_i') - f(x_i)| \le \varepsilon,$$
jeigu tik
$$\sum_{i=1}^{m} (x_i' - x_i) \le \delta.$$

Šioje knygoje dažnai vartosime kitą ekvivalentų apibrėžimą (žr., pvz., [22], [54]): apibrėžta segmente $[a, b]$ funkcija u yra *absoliučiai tolydi*, jeigu egzistuoja tokia funkcija $v \in \mathrm{L}(a, b)$, kad
$$u(x) = u(a) + \int_a^x v(y)\, dy, \quad \forall x \in [a, b].$$
Be to, b.v. $x \in [a, b]$ funkcija u yra diferencijuojama ir $u'(x) = v(x)$.

1.1 lema. (Gronuolo) *Tarkime, neneigiama funkcija* y *yra absoliučiai tolydi segmente* $[0, T]$ *ir b.v.* $t \in [0, T]$ *tenkina nelygybę*
$$y'(t) \le c_1(t) y(t) + c_2(t); \tag{1.14}$$
čia c_1, c_2 *– integruojamos intervale* $(0, T)$ *funkcijos. Tada*
$$y(t) \le \exp\Big\{ \int_0^t c_1(s)\, ds \Big\} \Big[y(0) + \int_0^t c_2(s) \exp\Big\{ - \int_0^s c_1(\tau)\, d\tau \Big\}\, ds \Big]. \tag{1.15}$$
Be to, jeigu $y(0) = 0,\ c_1(t) = C \ge 0,\ c_2(t) \ge 0$ *ir funkcija* c_2 *yra nemažėjanti, tai*
$$y(t) \le \frac{e^{Ct} - 1}{C} c_2(t), \quad y'(t) \le c_2(t) e^{Ct}. \tag{1.16}$$

◁ Padauginę (1.14) nelygybę iš $\exp\Big\{-\int\limits_0^t c_1(s)\,ds\Big\}$, perrašysime ją taip:

$$\frac{d}{dt}\Big(y(t)\exp\Big\{-\int\limits_0^t c_1(s)\,ds\Big\}\Big) \le c_2(t)\exp\Big\{-\int\limits_0^t c_1(s)\,ds\Big\}.$$

Integruodami šią nelygybę nuo 0 iki t, gausime (1.15) nelygybę. Tuo atveju, kai $y(0) = 0$, $c_1(t) = C \ge 0$, $c_2(t) \ge 0$, iš (1.15) ir (1.14) nelygybių išvedamos (1.16) nelygybės. ▷

1.4. IŠKILOSIOS AIBĖS IR IŠKILIEJI FUNKCIONALAI

Tegu X yra normuota erdvė, $M \subset \mathrm{X}$, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ – išplėstinė realiųjų skaičių aibė.

A p i b r ė ž i m a s. Aibė $M \subset \mathrm{X}$ vadinama *iškiląja*, jeigu

$$\lambda u + (1-\lambda)v \in M, \qquad \text{kai} \quad u, v \in M, \quad \lambda \in [0,\,1].$$

1.20 teorema. *Tegu* X *yra Banacho erdvė,* $M \subset \mathrm{X}$ *– iškiloji aibė. Tada ekvivalentūs tokie teiginiai:*

1. *Aibė* M *yra uždara*[2].
2. *Aibė* M *yra silpnai uždara.*

Šios teoremos įrodymą galima rasti [33] knygoje.

Jeigu aibė M yra silpnai uždara, tai ji yra ir uždara. Atvirkščias teiginys bendru atveju yra neteisingas. Todėl silpno uždarumo sąlyga yra stipresnė negu uždarumo sąlyga.

A p i b r ė ž i m a s. Tegu $M \subset \mathrm{X}$ yra iškiloji aibė, $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ – funkcionalas (nebūtinai tiesinis). Funkcionalas f vadinamas *iškiluoju* aibėje M, jeigu $\forall u, v \in M$ yra teisinga nelygybė

$$f(\lambda u + (1-\lambda)v) \le \lambda f(u) + (1-\lambda) f(v), \quad \forall \lambda \in [0,1], \tag{1.17}$$

ir dešinioji šios nelygybės pusė turi prasmę (t.y. išskyrus atvejį, kai $f(u) = -f(v) = \pm\infty$). Jeigu $\forall u \neq v$ ir $\lambda \in (0,1)$ yra teisinga griežta nelygybė, tai funkcionalas vadinamas *griežtai iškiluoju.*

1.21 teorema. (Jenseno nelygybė) *Tegu* $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ *yra iškilasis funkcionalas,* $M \subset \mathrm{X}$ *– iškiloji aibė,* $u_k \in M$ *,* $\lambda_k \ge 0$ *,* $k = 1, \dots, n$ *,* $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$*. Tada su bet kuriuo* $n \in \mathbb{N}$ *yra teisinga nelygybė*

$$f\Big(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k\Big) \le \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(u_k), \tag{1.18}$$

jeigu tik reiškinys šios nelygybės dešinėje turi prasmę.

A p i b r ė ž i m a s. Aibė

$$\operatorname{dom} f = \{u : u \in \mathrm{X}, f(u) < +\infty\}$$

vadinama funkcionalo $f : \mathrm{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ *efektyvumo sritimi.*

Iškilojo funkcionalo efektyvumo sritis yra iškila aibė.

[2] Aibė M yra uždara (silpnai uždara), jeigu bet kokios konverguojančios (silpnai konverguojančios) sekos $\{u_n\} \subset M$ ribinis elementas $u \in M$.

A p i b r ė ž i m a s. Aibė

$$\operatorname{epi} f = \{(u, a) : u \in \mathrm{X}, a \in \mathbb{R}, f(u) \leq a\}.$$

vadinama funkcionalo f *viršgrafikiu.*

1.22 teorema. *Funkcionalas* $f : \mathrm{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ *yra iškilas tada ir tik tada, kai jo viršgrafikis yra iškiloji aibė.*

$\triangleleft$ Tegu f yra iškilas ir taškai (u, a) ir (v, b) priklauso $\operatorname{epi} \mathrm{f}$. Tada pagal apibrėžimą

$$f(u) \leq a < +\infty, \quad f(v) \leq a < +\infty.$$

Kadangi f iškilas, tai su kiekvienu $\lambda \in [0, 1]$ yra teisinga nelygybė

$$f(\lambda u + (1 - \lambda)v) \leq \lambda f(u) + (1 - \lambda)f(v) \leq \lambda a + (1 - \lambda)b.$$

Vadinasi, $\lambda(u, a) + (1 - \lambda)(v, b) \in \operatorname{epi} \mathrm{f}$. Todėl $\operatorname{epi} \mathrm{f}$ yra iškiloji aibė.

Tegu $\operatorname{epi} \mathrm{f}$ yra iškila aibė. Jos projekcija $\operatorname{dom} \mathrm{f}$ taip pat yra iškila aibė. Todėl pakanka įrodyti, kad (1.17) nelygybė teisinga aibėje $\operatorname{dom} \mathrm{f}$. Imkime taškus u, v iš $\operatorname{dom} \mathrm{f}$ ir $a \geq f(u)$, $b \geq f(v)$. Kadangi $\operatorname{epi} \mathrm{f}$ iškila aibė, tai

$$\lambda(u, a) + (1 - \lambda)(v, b) \in \operatorname{epi} \mathrm{f}, \quad \forall \lambda \in [0, 1].$$

Todėl

$$f(\lambda u + (1 - \lambda)v) \leq \lambda a + (1 - \lambda)b, \quad \forall \lambda \in [0,\, 1]. \tag{1.19}$$

Jei taškuose u ir v funkcionalas f įgyja baigtines reikšmes, tai (1.19) nelygybėje paėmę $a = f(u)$, $b = f(v)$, gausime (1.17) nelygybę. Jeigu $f(u) = -\infty$ arba $f(v) = -\infty$, tai (1.19) nelygybėje perėjus prie ribos, kai a arba b artėja į $-\infty$, vėl gausime (1.17) nelygybę. Todėl funkcionalas f yra iškilas. $\triangleright$

2 SKYRIUS

Apibendrintosios išvestinės. Erdvės $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$

Klasikinėje dalinių išvestinių lygčių teorijoje nagrinėjamų lygčių sprendiniai yra ieškomi pakankamai glodžių funkcijų klasėje. Tačiau praktikškai dažnai susiduriama su tokiomis lygtimis, kurios negali turėti glodžių sprendinių, nors aprašo paprastus ir dažnai gamtoje pasitaikančius reiškinius. Pavyzdžiui, bangavimo lygtis

$$u_{tt} - a^2(x)u_{xx} = 0$$

su trūkiu koeficientu a aprašo nevienalytės stygos svyravimą. Akivaizdu, kad tokios lygties sprendinys negali turėti tolydžių antrosios eilės išvestinių.

Iš pateikto pavyzdžio matome, kad nagrinėjant tokias dalinių išvestinių lygtis jų sprendiniams reikia suteikti kitą, platesnę prasmę. Tiksliau, sprendinių reikia ieškoti platesnėje funkcijų klasėje, kuriai priklausytų ir trūkios funkcijos. Kartu ši funkcijų klasė neturi būti labai plati. Ją reikia parinkti taip, kad apibendrintasis sprendinys būtų vienintelis. Be to, trūkios funkcijos neturi klasikinių išvestinių. Todėl reikia įvesti kitą (apibendrintą) išvestinės sąvoką.

Įvairūs apibendrintos išvestinės apibrėžimo variantai buvo siūlomi jau trečiame šio amžiaus dešimtmetyje. Tačiau tik ketvirto dešimtmečio pabaigoje S. L. Sobolevas įvedė apibendrintosios išvestinės sąvoką, kuri šiuo metu visuotinai priimta; apibrėžė funkcijų erdves $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$, $\mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ ir nustatė pagrindinius tokių erdvių sąryšius. Erdvės $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$, $\mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ plačiai naudojamos šiuolaikinių diferencialinių dalinių išvestinių lygčių teorijoje.

2.1. VIDUTINĖS FUNKCIJOS. JŲ SAVYBĖS

Tegu Ω yra sritis erdvėje $\mathbb{R}^n$, u – sumuojama srityje Ω funkcija. Prilyginę ją nuliui srities Ω išorėje, gausime funkciją (ją žymėsime ta pačia raide), apibrėžtą visoje erdvėje $\mathbb{R}^n$. Kiekvienai tokiai funkcijai sukonstruosime vidutinių funkcijų seką, kurios elementai yra glodžios ir tam tikra prasme artimos u funkcijos.

Tegu $\omega \in \mathrm{C}^\infty[0,\infty)$, $\omega(t) > 0$, $\forall t \in [0,1)$ ir $\omega(t) = 0$, $\forall\, t \in [1,\infty)$. Apibrėžkime funkcijų seką

$$\omega_\rho(x) = c\rho^{-n}\omega(\rho^{-2}|x|^2), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \rho > 0;$$

čia c – teigiama konstanta. Integralas

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega_\rho(x)\,dx = c\rho^{-n} \int\limits_{|x|<\rho} \omega(\rho^{-2}|x|^2)\,dx =$$

$$= c\rho^{-n}|S_1| \int\limits_0^\rho \omega(\rho^{-2}|r|^2) r^{n-1}\,dr = c|S_1| \int\limits_0^1 \omega(t^2)t^{n-1}\,dt > 0$$

ir nepriklauso nuo parametro ρ. Parinkime konstantą c taip, kad

$$\int_{\mathbb{R}^n} \omega_\rho(x)\, dx = 1, \quad \forall \rho > 0. \tag{2.1}$$

Su kiekvienu $\rho > 0$ funkcija $\omega_\rho \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ ir

$$\omega_\rho(x) > 0, \quad \text{kai} \quad |x| < \rho,$$

$$\omega_\rho(x) = 0, \quad \text{kai} \quad |x| \geq \rho.$$

Funkcija

$$u_\rho(x) = \int \omega_\rho(x-y)u(y)\, dy \tag{2.2}$$

yra vadinama funkcijos u *vidutine funkcija*. Šioje formulėje specialiai nenurodėme integravimo srities. Kartais taip darysime ir ateityje. Galima manyti, kad integravimo sritis yra Ω arba net visa erdvė $\mathbb{R}^n$. Tačiau iš tikrųjų integravimo sritis yra

$$\Omega \cap \{y \in \mathbb{R}^n : |x-y| < \rho\},$$

nes funkcija u yra lygi nuliui srities Ω išorėje, o funkcija $\omega_\rho(x-y) = 0$, kai $|x-y| \geq \rho$.

Išnagrinėsime pagrindines tokių funkcijų savybes.

1. Funkcija $\omega_\rho \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Be to, (2.2) formulėje integravimo sritis yra baigtinė. Todėl vidutinė funkcija $u_\rho \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ ir ją galima diferencijuoti po integralo ženklu:
$$D^\alpha u_\rho(x) = \int D_x^\alpha\, \omega_\rho(x-y)u(y)\, dy. \tag{2.3}$$

2. Tegu $x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}\{x, \Omega\} \geq \rho$. Tada (2.2) formulėje pointegralinis reiškinys lygus nuliui ir vidutinė funkcija $u_\rho(x) = 0$.

3. Tegu $u \in \mathrm{L_p}(\Omega),\ p \in [1, \infty]$. Tada
$$\|u_\rho\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} \leq \|u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}. \tag{2.4}$$

   $\triangleleft$ Funkcija ω_ρ yra neneigiama. Todėl
$$|u_\rho(x)| \leq \int \omega_\rho(x-y)|u(y)|\, dy. \tag{2.5}$$

   Kai $p = \infty$, (2.4) įvertis tiesiogiai išplaukia iš (2.5) nelygybės ir (2.1) formulės. Kai $p = 1$, šitas įvertis gaunamas integruojant (2.5) nelygybę sritimi Ω. Tegu $p \in (1, \infty)$. Šiuo atveju
$$\omega_\rho(x-y)|u(y)| = \omega_\rho^{1/p\prime}(x-y)\omega_\rho^{1/p}(x-y)|u(y)|, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p\prime} = 1.$$

Pritaikę tokiai funkcijų sandaugai Helderio nelygybę bei (2.1) formulę gausime

$$|u_\rho(x)| \le \left(\int \omega_\rho(x-y)|u(y)|^p \, dy \right)^{1/p}.$$

Pakėlę abi šios nelygybės puses p laipsniu ir suintegravę sritimi Ω, perrašysime gautą nelygybę taip:

$$\int_\Omega |u_\rho(x)|^p \, dx \le \int_\Omega \int \omega_\rho(x-y)|u(y)|^p \, dydx.$$

Paskutinio integralo pointegralinė funkcija yra neneigiama. Todėl galime keisti integravimo tvarką. Be to,

$$\int \omega_\rho(x-y) \, dx \le \int_{\mathbb{R}^n} \omega_\rho(x-y) \, dx = 1.$$

Taigi

$$\int_\Omega |u_\rho(x)|^p \, dx \le \int_\Omega |u(y)|^p \, dx.$$

Iš šio įverčio išplaukia (2.4) nelygybė. $\triangleright$

4. Tegu $u \in \mathrm{L}_\mathrm{p}(\Omega),\ p \in [1, \infty)$. Tada

$$\|u_\rho - u\|_{\mathrm{L}_\mathrm{p}(\Omega)} \to 0, \tag{2.6}$$

kai $\rho \to 0$.

$\triangleleft$ Pasinaudoję (2.1) formule, įvertinsime skirtumą

$$|u_\rho(x) - u(x)| = \left| \int \omega_\rho(x-y)\big(u(y) - u(x)\big) \, dy \right| \le$$

$$\le \int \omega_\rho(x-y)|u(y) - u(x)| \, dy. \tag{2.7}$$

Tegu $p > 1$. Pakartoję (2.4) nelygybės išvedimą, gausime

$$\int_\Omega |u_\rho(x) - u(x)|^p \, dx \le \int_\Omega \int \omega_\rho(x-y)|u(y) - u(x)|^p \, dydx \le$$

$$\le \sup_{|z|<\rho} \|u(x+z) - u(x)\|^p_{\mathrm{L}_\mathrm{p}(\Omega)}. \tag{2.8}$$

Toks pats įvertis yra teisingas ir kai $p = 1$. Tik, jį išvedant, nereikia taikyti Helderio nelygybės.

Iš (2.8) nelygybės išplaukia

$$\|u_\rho - u\|_{\mathrm{L}_\mathrm{p}(\Omega)} \le \sup_{|z|<\rho} \|u(x+z) - u(x)\|_{\mathrm{L}_\mathrm{p}(\Omega)}.$$

Funkcija $u \in \mathrm{L_p}(\Omega)$. Todėl ji yra tolydi $\mathrm{L_p}$ prasme[1], t.y.

$$\sup_{|z|<\rho} \|u(x+z) - u(x)\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} \leq \varepsilon(\rho)$$

ir $\varepsilon(\rho) \to 0$, kai $\rho \to 0$. Taigi

$$\|u_\rho - u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} \to 0, \quad \text{kai} \quad \rho \to 0. \triangleright$$

P a s t a b a. Kai $p = \infty$, tokios savybės nėra. Be galo diferencijuojamų funkcijų u_ρ sekos riba erdvės $\mathrm{L}_\infty(\Omega)$ normoje yra tolydi funkcija. Jeigu $u \in \mathrm{C}(\overline{\Omega})$, tai natūralu tikėtis, kad $u_\rho \rightrightarrows u$ srityje $\overline{\Omega}$, kai $\rho \to 0$. Tačiau šita savybė bus teisinga tik tuo atveju, jei funkciją u pratęsime į platesnę sritį išlaikydami glodumą. Pratęsę ją nuliu į srities Ω išorę, bendru atveju gausime trūkią funkciją. Todėl funkcijų $u \in \mathrm{C}(\Omega)$ vidutines funkcijas $u_\rho(x)$ nagrinėsime tik tokiems $x \in \Omega$, kuriems $\mathrm{dist}\{x, \partial\Omega\} > \rho$. Šiuo atveju (2.2) formulė išlieka teisinga nepriklausomai nuo funkcijos u pratęsimo į platesnę sritį.

5. Tarkime, funkcija $u \in \mathrm{C}(\Omega)$. Tada

$$u_\rho(x) \rightrightarrows u(x), \quad \forall \Omega' : \overline{\Omega'} \subset \Omega.$$

$\triangleleft$ Tegu $\Omega' \subset \Omega$ yra bet kokia griežtai vidinė sritis. Tada iš (2.7) nelygybės ir (2.1) formulės išplaukia

$$\sup_{x\in\Omega'} |u_\rho(x) - u(x)| \leq \sup_{x\in\Omega'} \sup_{|z|<\rho} |u(x+z) - u(x)| \to 0,$$

kai $\rho \to 0$. $\triangleright$

I š v a d a. Jeigu funkcija u yra tolydi ir finiti srityje Ω, tai

$$u_\rho(x) \rightrightarrows u(x), \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Įrodysime du teiginius.

2.1 teorema. *Aibė* $\mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$ *yra tiršta erdvėje* $\mathrm{L_p}(\Omega),\ \forall p \in [1, \infty)$.

$\triangleleft$ Tegu $u \in \mathrm{L_p}(\Omega)$. Tada $\forall \varepsilon > 0$ egzistuoja tokia griežtai vidinė sritis $\Omega' \subset \Omega$, kad

$$\|u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega\setminus\Omega')} \leq \varepsilon/2.$$

Apibrėžkime funkcijų seką

$$u^\varepsilon(x) = \begin{cases} u(x), & x \in \Omega', \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega'. \end{cases}$$

Akivaizdu, kad

$$\|u^\varepsilon - u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} \leq \varepsilon/2.$$

[1] Šio teiginio įrodymą galima rasti [44] knygoje.

Pakankamai mažiems $\rho > 0$ funkcija $u_\rho^\varepsilon \in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$. Pagal 4 vidutinių funkcijų savybę $u_\rho^\varepsilon \to u^\varepsilon$ erdvėje $\mathrm{L}_\mathrm{p}(\Omega)$, kai $\rho \to 0$. Pasirinkime tokį skaičių ρ, kad

$$\|u_\rho^\varepsilon - u^\varepsilon\|_{\mathrm{L}_\mathrm{p}(\Omega)} \le \varepsilon/2.$$

Tada

$$\|u_\rho^\varepsilon - u\|_{\mathrm{L}_\mathrm{p}(\Omega)} \le \|u_\rho^\varepsilon - u^\varepsilon\|_{\mathrm{L}_\mathrm{p}(\Omega)} + \|u^\varepsilon - u\|_{\mathrm{L}_\mathrm{p}(\Omega)} \le \varepsilon.$$

Taigi bet kokios funkcijos $u \in \mathrm{L}_\mathrm{p}(\Omega)$ pakankamai mažoje aplinkoje yra funkcija iš erdvės $\mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$. $\triangleright$

2.2 teorema. *Tarkime, funkcija* $u \in \mathrm{L}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ *ir integralas*

$$\int\limits_\Omega u\eta\,dx \;= 0, \quad \forall \eta \in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega).$$

Tada $u(x) = 0$ *b.v.* $x \in \Omega$.

$\triangleleft$ Tegu η yra bet kokia aprėžta, mati ir finiti srityje Ω funkcija. Parodysime, kad

$$\int\limits_\Omega u\eta\,dx \;= 0.$$

Pakankamai mažiems ρ funkcija $\eta_\rho \in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$. Pagal teoremos sąlygą

$$\int\limits_\Omega u\eta_\rho\,dx = 0. \tag{2.9}$$

Kadangi $\eta_\rho \to \eta$ erdvėje $\mathrm{L}(\Omega)$, kai $\rho \to 0$, tai egzistuoja tokia artėjančių į nulį teigiamų skaičių seka $\{\rho_k\}$, kad $\eta_{\rho_k}(x) \to \eta(x)$ b.v. $x \in \Omega$. Pagal 3 vidutinių funkcijų savybę

$$|\eta_{\rho_k}(x)| \le |\eta(x)|$$

b.v. $x \in \Omega$. Todėl b.v. $x \in \Omega$

$$|u(x)\eta_{\rho_k}(x)| \le |u(x)\eta(x)|.$$

Šios nelygybės dešinėje yra sumuojama srityje Ω funkcija. Todėl galime pasinaudoti Lebego teorema ir (2.9) formulėje pereiti prie ribos po integralo ženklu. Taigi

$$\int\limits_\Omega u\eta\,dx = 0;$$

čia η – bet kokia aprėžta, mati ir finiti srityje Ω funkcija. Imkime šioje formulėje

$$\eta(x) = \begin{cases} \operatorname{sign} u(x), & x \in \Omega', \\ 0, & x \in \Omega \setminus \Omega'; \end{cases}$$

čia $\Omega' \subset \Omega$ – bet kokia griežtai vidinė sritis. Tada

$$\int\limits_{\Omega'} |u(x)|\,dx = 0.$$

Iš šios lygybės išplaukia, kad $u(x) = 0$ b.v. $x \in \Omega'$. Kadangi sritį $\Omega' \subset \Omega$ pasirinkome laisvai, tai $u(x) = 0$ b.v. $x \in \Omega$. $\triangleright$

2.2. KOMPAKTIŠKUMO KRITERIJUS ERDVĖSE $\mathrm{L_p}(\Omega)$

Tegu Ω yra aprėžta erdvėje $\mathbb{R}^n$ sritis. Išvesdami kompaktiškumo kriterijų erdvėje $\mathrm{L_p}(\Omega)$, remsimės Hausdorfo teorema (žr. 1.3 skyrelio 1.15 teoremą).

Pagal ArcelΔa teoremą (žr. 1.3 skyrelio 1.16 teoremą) aibė U yra sąlyginis kompaktas erdvėje $\mathrm{C}(\overline{\Omega})$ tada ir tik tada, kai:

1. Aibė U yra aprėžta, t.y.
$$\sup_{u\in U}\|u\|_{\mathrm{C}(\overline{\Omega})} \le M.$$

2. Aibė U yra vienodai tolydi, t.y.
$$\sup_{u\in U}\sup_{|z|<h}\|u(x+z)-u(x)\|_{\mathrm{C}(\overline{\Omega})} \to 0,$$
kai $h\to 0$.

Analogiškas teiginys yra teisingas ir erdvėse $\mathrm{L_p}(\Omega)$.

2.3 teorema. *Tegu* $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ *yra aprėžta sritis,* $p\in[1,\infty)$ *ir* $U\subset \mathrm{L_p}(\Omega)$. *Aibė* U *yra sąlyginis kompaktas erdvėje* $\mathrm{L_p}(\Omega)$ *tada ir tik tada, kai:*

1. *Aibė* U *yra aprėžta, t.y.*
$$\sup_{u\in U}\|u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} \le M.$$

2. *Aibė* U *yra vienodai tolydi, t.y.*
$$\sup_{u\in U}\sup_{|z|<h}\|u(x+z)-u(x)\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} \to 0,$$
kai $h\to 0$.

$\triangleleft$ Tarkime, aibė U yra sąlyginis kompaktas. Tada ji yra aprėžta. Jeigu aibė U būtų neaprėžta, tai egzistuotų tokia funkcijų $u_n\in U$ seka, kad $\|u_n\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}\ge n$. Tačiau tai neįmanoma, nes iš tokios sekos negalima išskirti konverguojančio posekio.

Įrodysime, kad aibė U yra vienodai tolydi. Fiksuokime skaičių $\varepsilon>0$. Pagal Hausdorfo teoremą aibei U egzistuoja baigtinis $\varepsilon/4$ tinklas
$$u_1,u_2,\dots,u_N.$$

Kiekviena iš funkcijų $u_i\in\mathrm{L_p}(\Omega)$. Todėl ji yra tolydi $\mathrm{L_p}$ prasme, t.y.
$$\sup_{|z|<h}\|u_i(x+z)-u_i(x)\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}\to 0,\quad \forall i=1,2,\dots,N,$$
kai $h\to 0$. Kartu egzistuoja toks skaičius $h>0$, kad
$$\sup_{i=1,\dots,N}\sup_{|z|<h}\|u_i(x+z)-u_i(x)\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}\le\varepsilon/2.$$

Antra vertus, kiekvienai funkcijai $u \in U$ egzistuoja toks elementas u_i, kad

$$\|u - u_i\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} \le \varepsilon/4.$$

Pagal Minkovskio nelygybę

$$\sup_{u\in U}\sup_{|z|<h}\|u(x+z)-u(x)\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} \le \sup_{u\in U}\sup_{|z|<h}\|u(x+z)-u_i(x+z)\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}+$$

$$+\sup_{i=1,\dots,N}\sup_{|z|<h}\|u_i(x+z)-u_i(x)\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}+\sup_{u\in U}\sup_{|z|<h}\|u_i(x)-u(x)\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} \le \varepsilon.$$

Taigi aibė U yra vienodai tolydi.

Dabar tarkime, aibė U yra aprėžta ir vienodai tolydi. Įrodysime, kad ji yra sąlyginis kompaktas erdvėje $\mathrm{L_p}(\Omega)$. Su kiekvienu fiksuotu $\rho > 0$ aibė

$$U_\rho = \{u_\rho : u \in U\}$$

yra sąlyginis kompaktas erdvėje $\mathrm{C}(\overline{\Omega})$. Iš tikrųjų

$$\sup_{u_\rho\in U_\rho}\sup_{x\in\Omega}|u_\rho(x)| = \sup_{u\in U}\sup_{x\in\Omega}\left|\int \omega_\rho(x-y)u(y)\,dy\right| \le$$

$$\le \|\omega_\rho\|_{\mathrm{L_{p'}}(\Omega)}\sup_{u\in U}\|u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} \le C(\rho)M$$

ir

$$\sup_{u_\rho\in U_\rho}\sup_{|z|<h}\sup_{x\in\Omega}|u_\rho(x+z)-u_\rho(x)| =$$

$$=\sup_{u\in U}\sup_{|z|<h}\sup_{x\in\Omega}\left|\int\big[\omega_\rho(x+z-y)-\omega_\rho(x-y)\big]u(y)\,dy\right| \le$$

$$\le \sup_{x\in\Omega}\sup_{|z|<h}\|\omega_\rho(x+z-y)-\omega_\rho(x-y)\|_{\mathrm{L_{p'}}(\Omega)}\sup_{u\in U}\|u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} \le$$

$$\le M|\Omega|^{1/p'}\sup_{x,y\in\Omega}\sup_{|z|<h}|\omega_\rho(x+z-y)-\omega_\rho(x-y)| \to 0,$$

kai $h \to 0$. Kartu aibė U_ρ yra sąlyginis kompaktas ir erdvėje $\mathrm{L_p}(\Omega)$ (nes kiekviena seka, konverguojanti erdvėje $\mathrm{C}(\overline{\Omega})$, konverguoja ir erdvėje $\mathrm{L_p}(\Omega)$). Be to,

$$\sup_{u\in U}\|u_\rho(x)-u(x)\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} \le \sup_{u\in U}\sup_{|z|<h}\|u(x+z)-u(x)\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} \le \varepsilon(\rho);$$

čia $\varepsilon(\rho) \to 0$, kai $\rho \to 0$. Vadinasi, aibė U_ρ yra $\varepsilon(\rho)$ tinklas aibei U. Pagal Hausdorfo teoremą aibė U yra sąlyginis kompaktas erdvėje $\mathrm{L_p}(\Omega)$. ▹

Analogiškas teiginys yra teisingas ir neaprėžtos srities atveju. Tiksliau, yra teisinga tokia teorema.

2.4 teorema. *Tegu Ω yra neaprėžta sritis ir $1 < p < \infty$. Aibė U yra sąlyginis kompaktas erdvėje $\mathrm{L_p}(\Omega)$ tada ir tik tada, kai tenkinamos abi 2.3 teoremos sąlygos ir*

$$\sup_{u\in U}\|u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega\setminus B_R)} \le \delta(R);$$

čia $\delta(R) \to 0$, kai $R \to \infty$.

Šio teiginio įrodymą galima rasti [8] knygoje.

2.3. APIBENDRINTOSIOS IŠVESTINĖS IR JŲ SAVYBĖS

Tegu u ir η yra glodžios srityje Ω funkcijos, iš kurių bent viena yra finiti. Tada yra teisinga integravimo dalimis formulė

$$\int\limits_{\Omega} u\eta_{x_k}\,dx = -\int\limits_{\Omega} u_{x_k}\eta\,dx. \tag{2.10}$$

Remiantis šia formule, įvedama viena iš pagrindinių šiuolaikinės matematinės fizikos sąvokų – apibendrintoji išvestinė.

Apibrėžimas. Tegu $u, v \in \mathrm{L}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Funkcija v yra funkcijos u *apibendrintoji išvestinė* srityje Ω kintamojo x_k atžvilgiu, jeigu

$$\int\limits_{\Omega} u\eta_{x_k}\,dx = -\int\limits_{\Omega} v\eta\,dx, \quad \forall \eta \in \mathrm{C}_0^{\infty}(\Omega). \tag{2.11}$$

Kaip ir klasikiniu atveju, funkcijos u apibendrintą išvestinę žymėsime u_{x_k}. Toks žymėjimas neturėtų kelti painiavos, nes jei funkcija u turi klasikinę išvestinę, tai ji tenkina (2.10) integravimo dalimis formulę, kartu ir (2.11) tapatybę. Vadinasi, jeigu egzistuoja funkcijos u klasikinė išvestinė, tai egzistuoja ir jos apibendrinta išvestinė ir jos abi sutampa.

Analogiškai apibrėžiamos bet kurios eilės apibendrintos išvestinės.

Apibrėžimas. Tegu $u, v \in \mathrm{L}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – fiksuotas multiindeksas ir

$$\int\limits_{\Omega} u\, D^{\alpha}\,\eta\,dx = (-1)^{|\alpha|}\int\limits_{\Omega} v\eta\,dx, \quad \forall \eta \in \mathrm{C}_0^{\infty}(\Omega). \tag{2.12}$$

Tada $v := D^{\alpha}\,u$ yra funkcijos u *apibendrinta išvestinė* srityje Ω.

Apibendrintoms išvestinėms galioja didelė dalis (tačiau ne visos!) klasikinių išvestinių savybių. Paminėsime kai kurias iš jų.

1. Apibendrintos išvestinės apibrėžimas yra korektiškas. Tiksliau, jeigu $v = D^{\alpha}\,u$ srityje Ω, tai $v = D^{\alpha}\,u$ kiekvienoje srityje $\Omega' \subset \Omega$. Norint tuo įsitikinti, pakanka (2.12) integralinėje tapatybėje paimti funkciją η, kurios $\operatorname{supp}\eta \subset \Omega'$.

2. Tarkime, srityje Ω egzistuoja funkcijų u ir v apibendrintos išvestinės $D^{\alpha}\,u$ ir $D^{\alpha}\,v$. Tada egzistuoja ir jų tiesinio darinio $c_1u + c_2v$ apibendrinta išvestinė $D^{\alpha}(c_1u + c_2v)$ ir teisinga formulė

$$D^{\alpha}(c_1u + c_2v) = c_1\,D^{\alpha}\,u + c_2\,D^{\alpha}\,v.$$

   Ši formulė tiesiogiai išplaukia iš apibendrintos išvestinės apibrėžimo.

3. Jeigu srityje Ω egzistuoja funkcijos u apibendrinta išvestinė $D^{\alpha}\,u$, tai ji yra vienintelė. Įrodysime tai. Tegu $v_1 = D^{\alpha}\,u$ ir $v_2 = D^{\alpha}\,u$ yra funkcijos u apibendrintos išvestinės srityje Ω. Tada funkcija $v = v_1 - v_2$ tenkina integralinę tapatybę

$$\int\limits_{\Omega} v(x)\eta(x)\,dx = 0, \quad \forall \eta \in \mathrm{C}_0^{\infty}(\Omega)\,.$$

Pagal 2.2 teoremą $v(x) = 0$ b.v. $x \in \Omega$. Taigi $v_1 = v_2$.

4. Tarkime, srityje Ω egzistuoja funkcijos u apibendrinta išvestinė $v = D^\alpha u$ ir funkcijos v apibendrinta išvestinė $w = D^\beta v$. Tada srityje Ω egzistuoja funkcijos u apibendrinta išvestinė $D^{\alpha+\beta} u$ ir ji sutampa su w. Iš tikrųjų

$$\int\limits_\Omega u\, D^{\alpha+\beta}\, \eta\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega v\, D^\beta\, \eta\, dx = (-1)^{|\alpha+\beta|} \int\limits_\Omega w\eta\, dx.$$

Taigi $w = D^{\alpha+\beta} u$.

5. Bet kokioje griežtai vidinėje srityje $\Omega' \subset \Omega$ pakankamai mažiems ρ galima keisti vietomis vidurkinimo ir diferencijavimo operacijų tvarką. Įrodysime tai. Tegu $v = D^\alpha u$ yra funkcijos u apibendrinta išvestinė srityje Ω, $\delta = \operatorname{dist}\{\Omega', \partial\Omega\}$, $x \in \Omega'$ ir $\rho < \delta$. Kintamųjų y atžvilgiu funkcija $\omega_\rho(x-y) \in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$. Be to,

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\omega_\rho(x-y) = -\frac{\partial}{\partial y_k}\omega_\rho(x-y), \quad \forall k = 1, 2, \dots, n.$$

Todėl

$$D^\alpha u_\rho(x) = \int D_x^\alpha\, \omega_\rho(x-y) u(y)\, dy =$$

$$= (-1)^{|\alpha|} \int D_y^\alpha\, \omega_\rho(x-y) u(y)\, dy = \int \omega_\rho(x-y) v(y)\, dy = v_\rho(x).$$

Taigi

$$v_\rho(x) = D^\alpha u_\rho(x). \tag{2.13}$$

P a s t a b a . Kadangi funkcijos v_ρ ir u_ρ yra glodžios, tai (2.13) formulėje išvestinė D^α yra klasikinė.

Tegu funkcijos u apibendrinta išvestinė $D^\alpha u \in \mathrm{L_p}(\Omega),\ 1 \le p < \infty$. Tada iš (2.13) formulės ir 4 vidutinių funkcijų savybės išplaukia, kad

$$D^\alpha u_\rho = \big(D^\alpha u\big)_\rho \to D^\alpha u, \tag{2.14}$$

erdvėje $\mathrm{L_p}(\Omega'),\ \forall \Omega' : \ \overline{\Omega'} \subset \Omega$, kai $\rho \to 0$.

6. Dviejų funkcijų sandaugos apibendrintai išvestinei galioja įprasta formulė. Tiksliau, jeigu srityje Ω egzistuoja funkcijų u, v apibendrintos išvestinės u_{x_i}, v_{x_i} ir reiškinys $u_{x_i} v + u v_{x_i}$ yra lokaliai sumuojama srityje Ω funkcija, tai egzistuoja sandaugos uv apibendrinta išvestinė $(uv)_{x_i}$ ir teisinga formulė

$$(uv)_{x_i} = u_{x_i} v + u v_{x_i}. \tag{2.15}$$

Dėl paprastumo šį teiginį įrodysime, kai funkcijos u, v, u_{x_i} ir v_{x_i} yra lokaliai kvadratu integruojamos srityje Ω. Laisvai pasirenkame $\eta \in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$. Tada

$$\int\limits_\Omega u_\rho v_\rho \eta_{x_i}\, dx = -\int\limits_\Omega \big(u_{\rho x i} v_\rho + u_\rho v_{\rho x_i}\big)\eta\, dx, \quad \forall \rho > 0. \tag{2.16}$$

Be to,

$$u_\rho \to u, \quad v_\rho \to v, \quad u_{\rho x_i} \to u_{x_i}, \quad v_{\rho x_i} \to v_{x_i}$$

erdvėje $\mathrm{L}_2(\Omega')$, $\forall \Omega' : \overline{\Omega'} \subset \Omega$, kai $\rho \to 0$. Remiantis 3 vidutinių funkcijų savybe, (2.16) tapatybėje galima pereiti prie ribos. Taigi

$$\int\limits_\Omega uv\eta_{x_i}\,dx = -\int\limits_\Omega (u_{xi}v + uv_{x_i})\eta\,dx$$

ir teisinga (2.15) formulė.

Suformuluosime kitą apibendrintos išvestinės apibrėžimą ir įrodysime, kad abu apibrėžimai yra ekvivalentūs.

A p i b r ė ž i m a s. Tegu funkcijos u ir $v \in \mathrm{L}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Sakysime, funkcija v yra funkcijos u apibendrinta išvestinė srityje Ω ir rašysime $v = D^\alpha u$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ – fiksuotas multiindeksas, $|\alpha| = k$, jeigu egzistuoja tokia seka $\{u_m\} \subset \mathrm{C}^{\mathrm{k}}(\Omega)$, kad

$$u_m \to u,\ D^\alpha u_m \to v$$

erdvėje[2] $\mathrm{L}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, kai $m \to \infty$.

Tegu $v = D^\alpha u$ pagal pastarąjį apibrėžimą. Tada $\forall m = 1, 2, \ldots$ yra teisinga integravimo dalimis formulė:

$$\int\limits_\Omega u_m D^\alpha \eta\,dx = (-1)^{|\alpha|}\int\limits_\Omega D^\alpha u_m \eta\,dx, \quad \forall \eta \in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega). \tag{2.17}$$

Perėję šioje formulėje prie ribos, kai $m \to \infty$, gausime, kad funkcijos u ir v tenkina (2.12) tapatybę, t.y. $v = D^\alpha u$ pagal pirmąjį apibrėžimą.

Tegu $v = D^\alpha u$ pagal pirmąjį apibrėžimą. Tada $\forall\ \rho > 0$ vidutinės funkcijos $u_\rho \in \mathrm{C}^\infty(\Omega)$ ir

$$u_\rho \to u,\ D^\alpha u_\rho = \big(D^\alpha u\big)_\rho \to D^\alpha u$$

erdvėje $\mathrm{L}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, kai $\rho \to 0$. Vadinasi, $v = D^\alpha u$ pagal antrąjį apibrėžimą.

2.5 teorema. *Tarkime,* $\forall m = 1, 2, \ldots$ *funkcija* u_m *srityje* Ω *turi apibendrintą išvestinę* $D^\alpha u_m$ *ir*

$$u_m \to u, \qquad D^\alpha u_m \to v$$

erdvėje $\mathrm{L}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, *kai* $m \to \infty$. *Tada srityje* Ω *egzistuoja funkcijos* u *apibendrinta išvestinė* $D^\alpha u$ *ir ji lygi* v.

Norint įrodyti šią teoremą, pakanka (2.17) formulėje pereiti prie ribos, kai $m \to \infty$.

P a s t a b a. Teorema išlieka teisinga ir tuo atveju, kai sekos $\{u_m\}$ ir $\{D^\alpha u_m\}$ konverguoja silpnai, t.y. pakanka reikalauti, kad $\forall \eta \in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$

$$\int\limits_\Omega u_m\eta\,dx \to \int\limits_\Omega u\eta\,dx, \quad \int\limits_\Omega D^\alpha u_m\eta\,dx \to \int\limits_\Omega v\eta\,dx,$$

[2] Sakysime, seka $\{u_m\}$ konverguoja į funkciją u erdvėje $\mathrm{L}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, jeigu $u_m \to u$ erdvėje $\mathrm{L}(\Omega')$, kai $m \to \infty$; čia Ω' – bet kokia griežtai vidinė sritis.

kai $m \to \infty$.

Tarkime, srityje Ω egzistuoja funkcijos u pirmos eilės apibendrintos išvestinės $u_{x_i}, \forall i = 1, 2, \dots, n$, ir $y = y(x)$ – C^1 klasės difeomorfizmas, transformuojantis sritį Ω į sritį $\widetilde{\Omega}$. Įrodysime, kad funkcija $\tilde{u}(y) = u(x(y))$ srityje $\widetilde{\Omega}$ turi pirmosios eilės apibendrintas išvestines ir jos skaičiuojamos pagal įprastas formules. Pagal antrą apibendrintos išvestinės apibrėžimą egzistuoja tokia seka $\{u_m\} \subset \mathrm{C}^1(\Omega)$, kad

$$u_m \to u, \qquad u_{mx_i} \to u_{x_i}$$

erdvėje $\mathrm{L}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, kai $m \to \infty$. Tegu $\tilde{u}_m(y) = u_m(x(y))$. Tada

$$\tilde{u}_m \in \mathrm{C}^1(\widetilde{\Omega}), \quad \tilde{u}_{my_k} = \sum_{i=1}^{n} u_{mx_i} \frac{\partial x_i}{\partial y_k}$$

ir

$$\tilde{u}_m \to \tilde{u}, \qquad \tilde{u}_{my_k} \to \sum_{i=1}^{n} u_{x_i} \frac{\partial x_i}{\partial y_k}$$

erdvėje $\mathrm{L}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, kai $m \to \infty$. Pagal 2.5 teoremą srityje $\widetilde{\Omega}$ egzistuoja funkcijos $\tilde{u}$ pirmosios eilės apibendrintos išvestinės $\tilde{u}_{y_k}$ ir yra teisingos įprastos formulės

$$\tilde{u}_{y_k} = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i} \frac{\partial x_i}{\partial y_k}, \ \forall k = 1, 2, \dots, n.$$

Analogiškas teiginys teisingas ir aukštesniųjų eilių apibendrintoms išvestinėms.

Priminsime vieną paprastą faktą iš analizės: diferencijuojama funkcija, kurios visos pirmosios eilės išvestinės lygios nuliui, yra konstanta. Ši savybė yra teisinga ir apibendrintoms išvestinėms. Čia įrodysime bendresnį teiginį.

2.6 teorema. *Tarkime, funkcija u srityje Ω turi visas k-osios eilės apibendrintas išvestines ir jos visos lygios nuliui. Tada funkcija u yra $(k-1)$-ojo laipsnio polinomas srityje Ω.*

$\triangleleft$ Pagal teoremos sąlygą $\forall \Omega' : \overline{\Omega'} \subset \Omega$ ir pakankamai mažiems ρ teisinga lygybė

$$D^\alpha u_\rho = \big(D^\alpha u\big)_\rho = 0, \quad |\alpha| = k.$$

Kadangi u_ρ yra glodi funkcija ir visos jos k-osios eilės išvestinės lygios nuliui, tai

$$u_\rho(x) = P^{(\rho)}(x);$$

čia $P^{(\rho)}$ yra $(k-1)$-ojo laipsnio polinomas. Pagal 3 vidutinių funkcijų savybę

$$\|P^{(\rho)}\|_{\mathrm{L}(\Omega')} = \|u_\rho\|_{\mathrm{L}(\Omega')} \le \|u\|_{\mathrm{L}(\Omega')}.$$

Iš čia išplaukia, kad aibė $\big\{P^{(\rho)}\big\}_{\rho > 0}$ aprėžta. Kartu ji yra kompaktinė, nes $(k-1)$-ojo laipsnio polinomų aibė yra baigtinio matavimo erdvė. Todėl iš jos galima išskirti posekį

$$u_{\rho_k}(x) = P^{(\rho_k)}(x),$$

konverguojantį erdvėje $\mathrm{L}(\Omega')$. Tarkime, $(k-1)$-ojo laipsnio polinomas $P(x)$ yra šio posekio ribinis elementas. Pagal 4 vidutinių funkcijų savybę

$$u_{\rho_k}(x) \to u(x).$$

Taigi $u(x) = P(x)$ srityje Ω'. Kadangi sritį $\Omega' \subset \Omega$ pasirinkome laisvai, tai

$$u(x) = P(x)$$

srityje Ω. $\triangleright$

2.4. APIBENDRINTOSIOS IŠVESTINĖS IR ABSOLIUČIAI TOLYDŽIOS FUNKCIJOS

Apibendrintos ir klasikinės išvestinės sąvokos iš esmės skiriasi. Tai susiję su tuo, kad apibendrinta išvestinė turi integralinį pobūdį. Priminsime, kad apibendrinta išvestinė – tai lokaliai sumuojama funkcija. Tačiau sumuojama funkcija yra apibrėžiama nulinio mato taškų aibės tikslumu ir į ją reikia žiūrėti kaip į ekvivalenčių funkcijų klasę. Todėl toliau kalbėdami apie taškines funkcijų savybes, pavyzdžiui, tolydumą, turėsime omenyje, kad funkcijos ekvivalentiškumo klasėje galima išrinkti atstovą, turintį nurodytą savybę. Be to, visą ekvivalentiškumo klasę, kaip ir konkretų jos atstovą, žymėsime ta pačia raide.

Nagrinėjant funkciją u, turinčią tam tikros eilės apibendrintas išvestines, sumuojamas laipsniu p srityje Ω, svarbu žinoti, kokį glodumą ji gali įgyti, jos reikšmes kaip nors pakeitus nulinio mato taškų aibėje. Atsakymas čia priklauso nuo srities Ω matavimo, apibendrintų išvestinių eilės ir nuo rodiklio p. Tokie teiginiai (įdėjimo teoremos) bus nagrinėjami vėliau. O dabar ištirsime daug paprastesnį klausimą. Tiksliau, parodysime, kad pirmos eilės apibendrintų išvestinių egzistavimas susijęs su absoliutaus tolydumo sąvoka.

2.7 teorema. *Tegu* $n = 1$. *Tada:*

1. *Jeigu* u *yra absoliučiai tolydi segmente* $[a, b]$ *funkcija, tai intervale* (a, b) *egzistuoja jos apibendrinta išvestinė* $u_x \in \mathrm{L}(a, b)$ *ir ji b.v.* $x \in (a, b)$ *sutampa su klasikine išvestine.*

2. *Jeigu* $u \in \mathrm{L}(a, b)$ *ir intervale* (a, b) *egzistuoja apibendrinta išvestinė* $u_x \in \mathrm{L}(a, b)$, *tai funkcija* u *yra absoliučiai tolydi segmente* $[a, b]$ *ir yra teisinga formulė*
$$u(x) = u(a) + \int_a^x u_y(y)\, dy;$$
čia u_y *– apibendrinta išvestinė.*

$\triangleleft$ Tarkime, funkcija u yra absoliučiai tolydi segmente $[a, b]$. Tada b.v. $x \in (a, b)$ egzistuoja klasikinė išvestinė u_x ir ji yra sumuojama intervale (a, b). Kiekvienai funkcijai $\eta \in \mathrm{C}_0^\infty(a, b)$ funkcija $u\eta$ yra absoliučiai tolydi. Todėl b.v. $x \in (a, b)$ egzistuoja klasikinė išvestinė
$$(u\eta)_x = u_x\eta + u\eta_x$$
ir
$$\int_a^b (u_x\eta + u\eta_x)\, dx = 0.$$
Iš šios integralinės tapatybės išplaukia, kad u_x yra funkcijos u apibendrinta išvestinė.

Tarkime, funkcija $v \in \mathrm{L}(a, b)$ yra funkcijos u apibendrinta išvestinė. Tada funkcija
$$w(x) = \int_a^x v(y)\, dy$$

yra absoliučiai tolydi. Pagal pirmą teoremos teiginį ji intervale (a, b) turi apibendrintą išvestinę $w_x = v$. Tačiau $(u - w)_x = 0$ ir pagal 2.6 teoremą $u(x) - w(x) = \mathrm{const}$. Iš čia išplaukia, kad funkcija u yra absoliučiai tolydi ir $\mathrm{const} = u(a)$. Kadangi apibendrinta išvestinė $u_x = v$, tai

$$u(x) = u(a) + \int\limits_a^x u_y(y)\, dy. \triangleright$$

P a s t a b a. Jeigu tolydi funkcija u turi klasikinę išvestinę b.v. $x \in (a, b)$, bet nėra absoliučiai tolydi, tai intervale (a, b) apibendrintos išvestinės ji neturi. Taigi iš klasikinės išvestinės egzistavimo b.v. $x \in (a, b)$ dar neseka apibendrintos išvestinės egzistavimas intervale (a, b).

Išnagrinėsime kelių kintamųjų atvejį.

2.8 teorema. *Tarkime, $n > 1$ ir srityje Ω funkcija u turi apibendrintą išvestinę u_{x_i}. Tada u yra absoliučiai tolydi funkcija kintamojo x_i atžvilgiu, b.v. likusiems kintamiesiems $x'_i = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ ir yra teisinga Niutono–Leibnico formulė*

$$u(x + he_i) - u(x) = \int\limits_{x_i}^{x_i+h} \frac{d}{d\tau} u(x_1, \dots, x_{i-1}, \tau, x_{i+1}, \dots, x_n)\, d\tau;$$

čia $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, o integravimo rėžiai yra tokie, kad atkarpa $(x, x + he_i)$ guli srityje Ω.

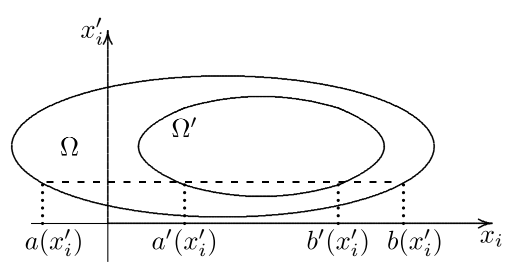
$\triangleleft$ Tegu $\Omega' \subset \Omega$ yra bet kokia griežtai vidinė sritis. Pagal 4 vidutinių funkcijų savybę

$$\|u_\rho - u\|_{\mathrm{L}(\Omega')} \to 0, \quad \|u_{\rho x_i} - u_{x_i}\|_{\mathrm{L}(\Omega')} \to 0,$$

kai $\rho \to 0$. Kartu b.v. x'_i integralai

$$\int\limits_{a'(x'_i)}^{b'(x'_i)} |u_\rho - u|\, dx_i \to 0, \qquad \int\limits_{a'(x'_i)}^{b'(x'_i)} |u_{\rho x_i} - u_{x_i}|\, dx_i \to 0;$$

čia intervalai $(a'(x'_i), b'(x'_i))$ yra tiesių, lygiagrečių su x_i ašimi, ir srities Ω' sankirta (žr. 2.1 pav.).



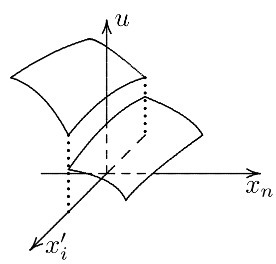
2.1 pav.

Pagal antrą apibendrintų išvestinių apibrėžimą tokiems x_i' funkcija u turi apibendrintą išvestinę u_{x_i} intervale $(a'(x_i'), b'(x_i'))$. Kartu šiame intervale funkcija u yra absoliučiai tolydi kintamojo x_i atžvilgiu ir yra teisinga Niutono–Leibnico formulė

$$u(x + he_i) - u(x) = \int\limits_{x_i}^{x_i+h} \frac{d}{d\tau} u(x_1, \dots, x_{i-1}, \tau, x_{i+1}, \dots, x_n)\, d\tau.$$

Kadangi sritį Ω' pasirinkome laisvai, tai galime tvirtinti, kad funkcija u b.v. x_i' yra absoliučiai tolydi intervale $(a(x_i'), b(x_i'))$ ir šiame intervale yra teisinga Niutono–Leibnico formulė. ▷

I š v a d a . Tegu funkcija u srityje Ω turi pirmos eilės apibendrintas išvestines $u_{x_i}, \forall i = 1, 2, \dots, n$. Tada ji negali turėti trūkio $(n-1)$-mačiame paviršiuje. Pavyzdžiui, jeigu funkcija u turi trūkį hiperplokštumoje $x_n = 0$, tai ji neturi apibendrintos išvestinės u_{x_n} (žr. 2.2 pav.).

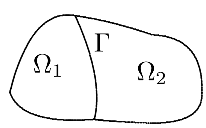


2.2 pav.

Tačiau kai $i \neq n$, apibendrintos išvestinės u_{x_i} gali egzistuoti.

P a v y z d ž i a i:

1. Tarkime, glodus paviršius Γ dalija sritį Ω į dvi dalis Ω_1, Ω_2. Be to, tegu funkcija $u \in C(\overline{\Omega})$ ir kiekvienoje iš sričių $\overline{\Omega}_1, \overline{\Omega}_2$ yra diferencijuojama (žr. 2.3 pav.).



2.3 pav.

Parodysime, kad srityje Ω egzistuoja funkcijos u apibendrintos išvestinės u_{x_i}, $\forall i = 1, 2, \dots, n$. Kadangi $u \in C^1(\overline{\Omega}_k)$, $k = 1, 2$, tai $\forall \eta \in C_0^\infty(\Omega)$ yra teisinga integralinė tapatybė

$$\int\limits_{\Omega_k} u\eta_{x_i}\, dx = -\int\limits_{\Omega_k} u_{x_i}\eta\, dx + \int\limits_{\partial\Omega_k} u\eta \cos(\mathbf{n}_k, x_i) dS_k; \tag{2.18}$$

čia $\mathbf{n}_k$ – paviršiaus $S_k = \partial\Omega_k$ vienetinis normalės vektorius, išorinis srities Ω_k atžvilgiu. Imkime (2.18) tapatybėje $k = 1$, po to $k = 2$ ir gautas tapatybes sudėkime. Turėdami omenyje, kad

$$\eta(x) = 0, \forall x \in S = \partial\Omega, \quad \text{ir} \quad \mathbf{n}_1(x) = -\mathbf{n}_2(x), \forall x \in \Gamma,$$

rezultatą perrašysime taip:

$$\int\limits_{\Omega} u\eta_{x_i}\,dx = -\int\limits_{\Omega} u_{x_i}\eta\,dx, \quad \forall \eta \in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega).$$

Pagal pirmą apibendrintos išvestinės apibrėžimą funkcija u turi srityje Ω apibendrintą išvestinę u_{x_i} ir kiekvienoje iš sričių $\Omega_k, k = 1, 2,$ ji sutampa su klasikine išvestine u_{x_i}.

2. Tegu $u(x) = |x|^\alpha$, $\alpha > 1 - n$, $B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$. Parodysime, kad funkcija u rutulyje B turi pirmos eilės apibendrintas išvestines ir jos randamos pagal įprastą formulę

$$u_{x_i} = \alpha x_i |x|^{\alpha-2}.$$

Kiekvienam $h > 0$ apibrėžkime seką funkcijų

$$u_{(h)}(x) = \begin{cases} |x|^\alpha, & |x| > h, \\ h^\alpha, & |x| \le h. \end{cases}$$

Funkcija $u_{(h)}$ rutulyje B turi pirmosios eilės apibendrintas išvestines (žr. 1 pavyzdį) ir

$$u_{(h)x_i}(x) = \begin{cases} \alpha x_i |x|^{\alpha-2}, & |x| > h, \\ 0, & |x| < h. \end{cases}$$

Be to,

$$\|u_{(h)} - u\|_{\mathrm{L}(B)} = \int\limits_{|x|<h} \big|\,|x|^\alpha - h^\alpha\big|\,dx \le Ch^{\alpha+n} \to 0,$$

$$\|u_{(h)x_i} - \alpha x_i|x|^{\alpha-2}\|_{\mathrm{L}(B)} = \int\limits_{|x|<h} \big|\alpha x_i|x|^{\alpha-2}\big|\,dx \le$$

$$\le |\alpha| \int\limits_{|x|<h} |x|^{\alpha-1}\,dx = |\alpha||\mathrm{S}_1| \int\limits_0^h r^{\alpha+n-2}dr = \frac{|\alpha||S_1|h^{\alpha+n-1}}{\alpha+n-1} \to 0,$$

kai $h \to 0$. Pagal 2.5 teoremą rutulyje B egzistuoja funkcijos $u = |x|^\alpha$ pirmos eilės apibendrintos išvestinės $u_{x_i} = \alpha x_i|x|^{\alpha-2}$.

P a s t a b a. Akivaizdu, kad neigiamiems α rutulyje B funkcija u nėra diferencijuojama. Net jeigu kokiu nors būdu pakeisime jos reikšmes nulinio mato taškų aibėje, vis tiek gausime funkciją, kuri bus ne tik netolydi, bet ir neaprėžta.

3. Tarkime, funkcijos φ ir ψ yra sumuojamos intervale $(0, 1)$, bet ne absoliučiai tolydžios. Tada iš 2.8 teoremos išplaukia, kad funkcija

$$u(x_1, x_2) = \varphi(x_1) + \psi(x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Omega = (0, 1) \times (0, 1)$$

neturi pirmos eilės apibendrintų išvestinių srityje Ω. Tačiau

$$\int\limits_\Omega u\eta_{x_1x_2}\,dx = \int\limits_\Omega (\varphi\eta_{x_1})_{x_2}\,dx + \int\limits_\Omega (\psi\eta_{x_2})_{x_1}\,dx =$$

$$= 0 = \int\limits_\Omega 0 \cdot \eta\,dx, \quad \forall \eta \in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega).$$

Todėl srityje Ω egzistuoja funkcijos u apibendrinta išvestinė $u_{x_1x_2}$ ir ji lygi nuliui.

Iš šio pavyzdžio matome, kad funkcija u gali turėti aukštesnių eilių apibendrintas išvestines, neturėdama žemesnių eilių apibendrintų išvestinių.

2.5. ERDVĖS $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ IR $\mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$

Aibę funkcijų $u \in \mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega)$, $p \in [1, \infty]$, kurios turi apibendrintas išvestines

$$D^\alpha u \in \mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega), \quad \forall \alpha : |\alpha| \leq k,$$

žymėsime $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$. Aibė $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ yra tiesinė. Joje galima apibrėžti normą

$$\|u\|_{\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \| D^\alpha u\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega)}. \tag{2.19}$$

Tiesiogiai galima įsitikinti, kad taip apibrėžta norma tenkina visas normos apibrėžimo sąlygas. Priminsime, kad

$$\|u\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega)} = \Big(\int_\Omega |u|^p \, dx \Big)^{1/p},$$

kai $p < \infty$, o

$$\|u\|_{\mathrm{L}_\infty(\Omega)} = \operatorname*{vrai\,sup}_{x \in \Omega} |u(x)|.$$

Aibė $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ su taip apibrėžta norma yra normuota erdvė. Erdvėje $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ galima įvesti ir kitą ekvivalenčią normą (ją žymėsime tuo pačiu normos ženklu)

$$\|u\|_{\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)} = \Big(\int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq k} | D^\alpha u|^p \, dx \Big)^{1/p}. \tag{2.20}$$

Kiekvienu konkrečiu atveju naudosime tą normą, kuri bus patogesnė. Kai $k = 0$, erdvė $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ yra $\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega)$.

Erdvė $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ yra Banacho erdvė. Įrodysime tai. Pagal Banacho erdvės apibrėžimą reikia įrodyti, kad erdvė $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ yra pilna. Tarkime, seka $\{u_m\}$ yra fundamentali erdvėje $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$. Tada $\forall \alpha : |\alpha| \leq k$ seka $\{D^\alpha u_m\}$ yra fundamentali erdvėje $\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega)$, t.y.

$$\|u_m - u_{m'}\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega)} \to 0, \quad \| D^\alpha u_m - D^\alpha u_{m'}\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega)} \to 0,$$

kai m ir $m' \to \infty$. Kadangi erdvė $\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega)$ yra pilna, tai egzistuoja tokios funkcijos $u, \omega_\alpha \in \mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega)$, kad

$$\|u_m - u\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega)} \to 0, \quad \| D^\alpha u_m - \omega_\alpha\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega)} \to 0,$$

kai $m \to \infty$. Pagal 2.5 teoremą srityje Ω egzistuoja funkcijos u apibendrintos išvestinės

$$D^\alpha u = \omega_\alpha \in \mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega),$$

t.y. $u \in \mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$, ir seka $\{u_m\}$ konverguoja į u erdvėje $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$. Taigi erdvėje $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ kiekviena fundamentali seka konverguoja.

Erdvė $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ yra separabili, kai $p \in [1, \infty)$, ir refleksyvi, kai $p \in (1, \infty)$. Šių teiginių įrodymas remiasi tuo, kad atitinkamiems p erdvė $\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega)$ yra separabili ir refleksyvi ir erdvę $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ galima sutapatinti su erdvių $\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega)$ baigtinės tiesioginės sandaugos poerdviu (žr. [44], [8]).

Kai $p = 2$, erdvė $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ yra Hilberto erdvė. Skaliarinę sandaugą joje galima apibrėžti taip:

$$(u,v)_{\mathrm{W}_2^{\mathrm{k}}(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} \sum_{|\alpha|\le k} D^\alpha\, u\overline{D^\alpha\, v}\, dx.$$

Jeigu $\mathrm{W}_2^{\mathrm{k}}(\Omega)$ yra realiųjų funkcijų erdvė, tai brukšnys nerašomas. Dažnai Hilberto erdvę $\mathrm{W}_2^{\mathrm{k}}(\Omega)$ ir ją atitinkantį poerdvį $\mathring{\mathrm{W}}_2^{\mathrm{k}}(\Omega)$ žymi $\mathrm{H}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ ir $\mathring{\mathrm{H}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$.

2.9 teorema. *Tegu $u \in \mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ ir f yra C^{k} klasės difeomorfizmas, transformuojantis sritį Ω į sritį $\widetilde{\Omega}$. Tada funkcija $v = u \circ f^{-1} \in \mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\widetilde{\Omega})$ ir*

$$C_1\|u\|_{\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)} \le \|v\|_{\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\widetilde{\Omega})} \le C_2\|u\|_{\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)};$$

čia C_1 ir C_2 – teigiamos konstantos, priklausančios tik nuo funkcijų f ir f^{-1} normų erdvėse $\mathrm{C}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ ir $\mathrm{C}^{\mathrm{k}}(\widetilde{\Omega})$.

Šitos teoremos įrodymas išplaukia iš apibendrintų išvestinių savybių.

Erdves $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ galima apibrėžti ir tuo atveju, jeigu vietoje ,,plokščios“ srities Ω imsime pakankamai glodžią n-matę daugdarą S. Pavyzdžiui, tegu n-matė daugdara S yra lygi sumai baigtinio skaičiaus n-mačių daugdarų $S_i, i = 1,\dots,N$, ir kiekvieną daugdarą S_i galima C^{k} klasės difeomorfizmu f_i transformuoti į sritį $\Omega_i \subset \mathbb{R}^n$. Sakysime, funkcija $u \in \mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(S)$, jeigu

$$u \circ f_i^{-1} \in \mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega_i), \quad \forall i = 1,\dots,N.$$

Normą erdvėje $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(S)$ galima apibrėžti taip:

$$\|u\|_{\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(S)} = \sum_{i=1}^{N} \|u \circ f_i^{-1}\|_{\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega_i)}.$$

Erdvėje $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ išskirsime poerdvį $\mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$. Sakysime, funkcija u iš erdvės $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ priklauso poerdviui $\mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$, jeigu egzistuoja seka $\{u_m\} \subset \mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$, konverguojanti į u erdvėje $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$. Taigi

$$\mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega) = \overline{\mathbf{C}_0^\infty(\Omega)}^{\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)}.$$

Erdvės $\mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ elementai turi keletą svarbių savybių. Tarkime, funkcija $u \in \mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$. Tada egzistuoja seka $\{u_m\} \subset \mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$, konverguojanti į u erdvėje $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$. Funkcijas u ir $u_m, m = 1,2,\dots$ pratęsime nuliu į $\mathbb{R}^n\backslash\Omega$. Kiekvienam α, $|\alpha| \le k$, apibrėžkime funkciją

$$\omega_\alpha(x) = \begin{cases} D^\alpha\, u(x), & x \in \Omega, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n\backslash\Omega. \end{cases}$$

Akivaizdu, kad bet kokioje srityje $Q \supset \Omega$ funkcijos u ir $\omega_\alpha \in \mathrm{L}_{\mathrm{p}}(Q)$. Be to, $\forall m = 1,2,\dots$ funkcijos $u_m \in \mathrm{C}_0^\infty(Q)$ ir

$$\|u_m - u\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(Q)} = \|u_m - u\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega)} \to 0,$$

$$\| D^\alpha u_m - \omega_\alpha\|_{\mathrm{L_p}(Q)} = \| D^\alpha u_m - D^\alpha u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} \to 0,$$

kai $m \to \infty$. Pagal 2.5 teoremą $u \in \mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(Q)$.

Tegu funkcija $u \in \mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$. Pratęskime ją nuliu į srities Ω išorę ir gautą funkciją pažymėkime ta pačia raide u. Įrodysime, kad vidutinės funkcijos $u_\rho \to u$ erdvėje $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$, kai $\rho \to 0$. Funkcija $u \in \mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(Q)$, $\forall Q : \overline{\Omega} \subset Q$. Kadangi $\Omega \subset Q$ yra griežtai vidinė sritis, tai pakankamai mažiems $\rho > 0$ srityje Ω galima sukeisti diferencijavimo ir vidurkinimo operacijų tvarką. Todėl

$$D^\alpha u_\rho = (D^\alpha u)_\rho \to D^\alpha u, \quad \forall\alpha : |\alpha| \le k,$$

erdvėje $\mathrm{L_p}(\Omega)$, kai $\rho \to 0$. Pagal apibrėžimą tai reiškia, kad $u_\rho \to u$ erdvėje $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$, kai $\rho \to 0$.

P a s t a b a. Jeigu funkcija $u \in \mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ pratęsime nuliu į $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$, tai gausime funkciją, kuri srityje $Q \supset \Omega$ gali ir neturėti apibendrintų išvestinių. Norint tuo įsitikinti pakanka pastebėti, kad funkcija $u \in \mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$, pratęsta nuliu į srities Ω išorę, gali turėti trūkį $n-1$ matavimo paviršiuje. Tai reiškia, kad ne kiekviena funkcija $u \in \mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ priklauso poerdviui $\mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$. Taigi $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega) \ne \mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$. Išimtį sudaro atvejis $\Omega = \mathbb{R}^n$.

2.10 teorema. *Tegu* $\Omega = \mathbb{R}^n$. *Tada erdvės* $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ *ir* $\mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ *sutampa.*

$\triangleleft$ Savaime aišku, kad $\mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega) \subset \mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$. Įrodysime, kad bet kokia funkcija $u \in \mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ priklauso ir poerdviui $\mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$. Laisvai pasirenkame funkciją $u \in \mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$. Apibrėžkime funkcijų seką

$$u^R(x) = u(x)\zeta\left(|x|/R\right);$$

čia: R yra teigiamas parametras, $\zeta(t)$ – be galo diferencijuojama intervale $[0,\infty)$ funkcija, lygi 1, kai $t \in [0,1]$, monotoniškai mažėja, kai $t \in [1,2]$, ir lygi nuliui, kai $t \ge 2$. Akivaizdu, kad funkcijos u ir u_R rutulyje $B_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$ sutampa. Be to, reiškinio $\zeta(|x|/R)$ išvestinės yra tolygiai aprėžtos parametro R atžvilgiu. Todėl $\forall\alpha,\ |\alpha| \le k$, yra teisingas įvertis

$$\| D^\alpha u^R - D^\alpha u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} = \| D^\alpha u^R - D^\alpha u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega\setminus B_R)} \le$$

$$\le C \sum_{|\beta|\le|\alpha|} \| D^\beta u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega\setminus B_R)}; \tag{2.21}$$

čia konstanta C nepriklauso nuo konkrečios funkcijos $u \in \mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ pasirinkimo. Kadangi $\|u\|_{\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)} < \infty$, tai reiškinys dešiniojoje (2.21) nelygybės pusėje artėja į nulį, kai $R \to \infty$. Kartu

$$\| D^\alpha u^R - D^\alpha u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} \le \varepsilon(R) \to 0,$$

kai $R \to \infty$. Seka $\{(u^R)_\rho\} \subset \mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$ ir konverguoja į u erdvėje $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$, kai $R \to \infty,\ \rho \to 0$. Tai reiškia, kad $u \in \mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$. $\triangleright$

Kiekvienai funkcijai $u \in \mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ ir $v \in \mathrm{W}_{\mathrm{p}'}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ yra teisinga integravimo dalimis formulė

$$\int\limits_{\Omega} u\, D^{\alpha}\, v\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_{\Omega} v\, D^{\alpha}\, u\, dx, \quad \forall \alpha : |\alpha| \le k. \tag{2.22}$$

Iš tikrųjų $\forall u \in \mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ egzistuoja seka $\{u_m\} \subset \mathrm{C}_0^{\infty}(\Omega)$, konverguojanti į u erdvėje $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$. Pagal pirmą apibendrintos išvestinės apibrėžimą $\forall u_m$ yra teisinga tapatybė

$$\int\limits_{\Omega} u_m\, D^{\alpha}\, v\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_{\Omega} v\, D^{\alpha}\, u_m\, dx.$$

Perėję prie ribos, kai $m \to \infty$, gausime (2.22) formulę. Poerdvio $\mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ pakeisti visa erdve $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ čia negalima. Tuo galima lengvai įsitikinti. Tegu $k = 1$, funkcijos $u, v \in \mathrm{C}^1(\overline{\Omega})$ ir $S = \partial\Omega$ – dalimis glodus paviršius. Tada yra teisinga *integravimo dalimis formulė*

$$\int\limits_{\Omega} u v_{x_i}\, dx = -\int\limits_{\Omega} u_{x_i} v\, dx + \int\limits_{S} uv \cos(\mathbf{n}, x_i)\, dS;$$

čia bendru atveju integralas paviršiumi S nelygus nuliui. Ši formulė išlieka teisinga, jeigu $u \in \mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{1}(\Omega)$, $v \in \mathrm{W}_{\mathrm{p}'}^{1}(\Omega)$ ir sritis Ω yra tokia, kad erdvė $\mathrm{C}^1(\overline{\Omega})$ yra tiršta erdvėse $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{1}(\Omega)$ ir $\mathrm{W}_{\mathrm{p}'}^{1}(\Omega)$. Jeigu funkcija $u \in \mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^{1}(\Omega)$, tai integralas paviršiumi S yra lygus nuliui ir galima sakyti, kad funkcija u paviršiuje S yra ,,lygi nuliui“. Analogiška situacija yra ir erdvės $\mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ atveju. Tarkime, $u \in \mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$. Tada galima sakyti, kad paviršiuje S ji yra ,,lygi nuliui“ kartu su visomis savo apibendrintomis išvestinėmis iki $(k-1)$-os eilės imtinai.

Įrodysime dar vieną svarbią poerdvio $\mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^{1}(\Omega)$ elementų savybę.

2.11 teorema. (Frydrichso nelygybė) *Tegu Ω yra aprėžta erdvėje $\mathbb{R}^n$ sritis. Tada $\forall u \in \mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^{1}(\Omega)$ yra teisinga nelygybė*

$$\|u\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega)} \le d \|u_x\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega)}; \tag{2.23}$$

čia d yra srities Ω diametras.

$\triangleleft$ Aibė $\mathrm{C}_0^{\infty}(\Omega)$ yra tiršta erdvėje $\mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^{1}(\Omega)$. Todėl (2.23) nelygybę pakanka įrodyti $\forall u \in \mathrm{C}_0^{\infty}(\Omega)$. Laisvai pasirenkame funkciją $u \in \mathrm{C}_0^{\infty}(\Omega)$. Pratęskime ją nuliu į srities Ω išorę, o gautą funkciją pažymėkime ta pačia raide u. Tada $u \in \mathrm{C}_0^{\infty}(Q)$, $\forall Q \supset \Omega$.

Tegu Q yra kubas, kurio briauna d. Pasukus koordinates ir perkėlus jų pradžią, visada galima pasiekti, kad

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < x_i < d,\ \forall i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Todėl iš karto tarkime, kad sritis

$$\Omega \subset Q = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < x_i < d,\ \forall i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Pagal Niutono–Leibnico formulę

$$u(x) = \int_0^{x_n} \frac{\partial u(x_n', t)}{\partial t}\, dt, \quad x_n' = (x_1, \ldots, x_{n-1}).$$

Pasinaudoję Helderio nelygybe įvertinsime funkcijos u modulį

$$|u(x)| \le \int_0^{x_n} \left| \frac{\partial u(x_n', t)}{\partial t} \right| dt \le \int_0^{d} \left| \frac{\partial u(x_n', t)}{\partial t} \right| dt \le$$

$$\le \left(\int_0^d dt \right)^{1/p'} \left(\int_0^d \left| \frac{\partial u(x_n', t)}{\partial t} \right|^p dt \right)^{1/p} = d^{1/p'} \left(\int_0^d \left| \frac{\partial u(x_n', t)}{\partial t} \right|^p dt \right)^{1/p}.$$

Iš šio įverčio išplaukia nelygybė

$$\int_Q |u(x)|^p\, dx \le d^{p/p'+1} \int_Q |u_{x_n}(x)|^p\, dx = d^{p/p'+1} \int_\Omega |u_{x_n}(x)|^p\, dx,$$

kuri yra ekvivalenti nelygybei

$$\|u\|_{\mathrm{L}_\mathrm{p}(\Omega)} \le d \|u_{x_n}\|_{\mathrm{L}_\mathrm{p}(\Omega)}.$$

Pakeitę funkcijos u išvestinę u_{x_n} gradientu u_x, gausime (2.23) nelygybę. $\triangleright$

Teoremą įrodėme tarę, kad $p > 1$. Kai $p = 1$, teorema išlieka teisinga. Šiuo atveju įrodymas yra beveik toks pats. Nereikia tik taikyti Helderio nelygybės.

P a s t a b a. Įrodant Frydrichso nelygybę, reikalavimas $u \in \mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^{1}(\Omega)$ yra esminis. Poerdvio $\mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^{1}(\Omega)$ pakeisti visa erdve $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{1}(\Omega)$ negalima. Tuo lengvai galima įsitikinti imant $u \equiv 1$.

Pasinaudojus Frydrichso nelygybe, funkcijos $u \in \mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ žemesnių eilių išvestinių normas galima įvertinti aukštesnių eilių išvestinių normomis erdvėje $\mathrm{L}_\mathrm{p}(\Omega)$. Pavyzdžiui, kai $k = 2$,

$$\|u_{x_i}\|_{\mathrm{L}_\mathrm{p}(\Omega)} \le d \|u_{x_i x_n}\|_{\mathrm{L}_\mathrm{p}(\Omega)}, \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n.$$

Todėl erdvėje $\mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ galima įvesti normą

$$\|u\|_{\mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| = k} \| D^\alpha u \|_{\mathrm{L}_\mathrm{p}(\Omega)}^p \right)^{1/p}, \tag{2.24}$$

ekvivalenčią normai erdvėje $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ (žr. 2.20 formulę).

2.6. FUNKCIJŲ IŠ ERDVĖS $\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$ PRATĘSIMAS

Nagrinėjant erdves $\mathring{\mathrm{W}}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$, srities Ω forma neturi jokios įtakos. Kiekvieną erdvės $\mathring{\mathrm{W}}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$ elementą galima pratęsti nuliu į $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ ir nagrinėti kaip erdvės $\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(Q)$ elementą bet kokioje standartinėje srityje $Q \supset \Omega$, pavyzdžiui, rutulyje arba kube. Sudėtingesnė situacija yra erdvės $\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$ atveju. Tiksliau, funkciją $u \in \mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$ ne visada galima pratęsti į $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ išlaikant ,,glodumą“. Tai priklauso nuo srities Ω. Pavyzdžiui, jeigu plokštumoje įvesime polines kordinates

$$x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho\sin\theta,$$

tai funkcija $u = \theta$ srityje

$$\Omega = \{(x,y) : 1 < \rho < 2, 0 < \theta < 2\pi\}$$

bus sumuojama ir turės joje sumuojamas apibendrintas išvestines. Tačiau ji nebus absoliučiai tolydi tiesių $x = \mathrm{const} > 0$ atkarpose, kertančiose sritį Ω, ir todėl (žr. 2.8 teoremą) neturės apibendrintų pirmosios eilės išvestinių srityje

$$\tilde{\Omega} = \{(x,y) : 1 < \rho < 2, 0 \le \theta < 2\pi\}.$$

Būtinų ir pakankamų sąlygų, kada erdvės $\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$ elementus būtų galima pratęsti į platesnę sritį išlaikant ,,glodumą“, nėra. Kai srities Ω paviršius S yra pakankamai glodus, tokį pratęsimą sukonstruoti galima. Čia pateiksime konstrukciją, kuri remiasi erdvės $\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$ elementų aproksimacija aibės $\mathrm{C}^\infty(\overline{\Omega})$ elementais. Kaip matome iš ką tik išnagrinėto pavyzdžio, tokia aproksimacija ne visada galima. Išskirsime gana plačią klasę sričių, kai tokia aproksimacija galima.

2.12 teorema. *Tegu Ω yra aprėžta, žvaigždinė*[3] *atžvilgiu kurio nors savo vidinio taško sritis. Tada aibė $\mathrm{C}^\infty(\overline{\Omega})$ yra tiršta erdvėje $\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$.*

$\triangleleft$ Tarkime, sritis Ω yra žvaigždinė kurio nors savo vidinio taško atžvilgiu. Tegu šis taškas yra koordinačių pradžioje. Priešingu atveju koordinačių pradžią reikia perkelti į tą tašką.

Laisvai pasirenkame funkciją $u \in \mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$. Tegu $u^{(\lambda)}(x) = u(\lambda x)$, $\lambda \in (0,1)$. Tada funkcija $u^\lambda \in \mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$, $\forall\lambda \in (0,1)$. Kadangi funkcija $u \in \mathrm{L}_\mathrm{p}(\Omega)$ yra tolydi L_p prasme, tai

$$\|u - u^{(\lambda)}\|_{\mathrm{L}_\mathrm{p}(\Omega)} = \|u(x) - u(\lambda x)\|_{\mathrm{L}_\mathrm{p}(\Omega)} \to 0,$$

kai $\lambda \to 1$. Dėl tos pačios priežasties $\forall\alpha : |\alpha| \le k$

$$\|\, D^\alpha u - D^\alpha u^{(\lambda)}\|_{\mathrm{L}_\mathrm{p}(\Omega)} = \|\, D^\alpha u - \lambda^{|\alpha|}(D^\alpha u)^{(\lambda)}\|_{\mathrm{L}_\mathrm{p}(\Omega)} \le$$

$$\le \|\, D^\alpha u - (D^\alpha u)^{(\lambda)}\|_{\mathrm{L}_\mathrm{p}(\Omega)} + (1 - \lambda^{|\alpha|})\|(D^\alpha u)^{(\lambda)}\|_{\mathrm{L}_\mathrm{p}(\Omega)} \to 0,$$

kai $\lambda \to 1$. Vadinasi, seka $\{u^{(\lambda)}\}$ konverguoja į funkciją u erdvėje $\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$, kai $\lambda \to 1$.

[3] Sritis Ω yra *žvaigždinė* atžvilgiu kurio nors savo vidinio taško, jeigu bet kuris spindulys, išeinantis iš to taško, kerta srities paviršių tik viename taške.

Akivaizdu, kad $\forall\lambda \in (0,1)$, sritis $\lambda\Omega \subset \Omega$. Todėl vidutinės funkcijos $(u^{(\lambda)})_\rho \in \mathrm{C}^\infty(\overline{\Omega})$ ir, kai $\rho \to 0$, konverguoja į funkciją $u^{(\lambda)}$ erdvėje $\mathrm{W}^{\mathrm{k}}_{\mathrm{p}}(\Omega)$. Tačiau tada iš sekos $\{(u^{(\lambda)})_\rho\}$ galima išrinkti posekį $\{(u^{(\lambda)})_{\rho_\lambda}\}$, konverguojantį į funkciją u erdvėje $\mathrm{W}^{\mathrm{k}}_{\mathrm{p}}(\Omega)$. Vadinasi, aibė $\mathrm{C}^\infty(\overline{\Omega})$ yra tiršta erdvėje $\mathrm{W}^{\mathrm{k}}_{\mathrm{p}}(\Omega)$. $\triangleright$

I š v a d a. Tegu sritis Ω yra pusrutulis $B^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1, x_n > 0\}$ ir funkcija u lygi nuliui, kai $|x| > 1 - \varepsilon$. Tada anksčiau pateiktoje konstrukcijoje posekį $\{(u^{(\lambda)})_{\rho_\lambda}\}$ galima parinkti taip, kad kiekviena iš funkcijų $(u^{(\lambda)})_{\rho_\lambda}$ būtų lygi nuliui, kai $|x| > 1 - \varepsilon/2$.

Ištirsime erdvės $\mathrm{W}^1_{\mathrm{p}}(\Omega)$ atvejį.

2.13 teorema. *Tegu Ω yra aprėžta sritis, $S = \partial\Omega$ – C^1 klasės paviršius ir $\mathrm{Q} \supset \overline{\Omega}$. Tada egzistuoja tiesinis aprėžtas pratęsimo operatorius*

$$\Pi : \mathrm{W}^1_{\mathrm{p}}(\Omega) \to \mathring{\mathrm{W}}^1_{\mathrm{p}}(Q).$$

Be to, jeigu $u \in \mathrm{W}^1_{\mathrm{p}}(\Omega)$ ir $v = \Pi u$, tai $v(x) = u(x)$, kai $x \in \Omega$.

$\triangleleft$ Įrodymą išskaidysime į tris etapus.

1. Tarkime, $\Omega = B^+, u \in \mathrm{W}^1_{\mathrm{p}}(B^+)$ ir funkcija u lygi nuliui pussferės

$$S^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1, x_n > 0\}$$

aplinkoje. Lyginiu būdu pratęsę funkciją u į pusrutulį B^-, gausime funkciją

$$v(x) = \begin{cases} u(x), & x \in B^+, \\ u(x'_n, -x_n), & x \in B^-. \end{cases}$$

Parodysime, kad funkcija $v \in \mathring{\mathrm{W}}^1_{\mathrm{p}}(B)$. Remiantis 2.12 teoremos išvada, egzistuoja tokia seka $\{u_m\} \subset \mathrm{C}^\infty(B^+)$, konverguojanti į u erdvėje $\mathring{\mathrm{W}}^1_{\mathrm{p}}(B^+)$, kad $\forall m = 1, 2, \ldots,$ funkcija u_m lygi nuliui pussferės S^+ aplinkoje. Kiekvieną funkciją u_m lyginiu būdu pratęskime į pusrutulį B^-. Pratęstos funkcijos

$$v_m(x) = \begin{cases} u_m(x), & x \in B^+, \\ u_m(x'_n, -x_n), & x \in B^-, \end{cases}$$

yra finičios ir tolydžios visame rutulyje B. Pusrutuliuose B^+ ir B^- jos yra be galo diferencijuojamos. Todėl $v_m \in \mathring{\mathrm{W}}^1_{\mathrm{p}}(B)$ (žr. 2.4 skyrelio 1 pavyzdį) ir

$$\|v_m\|_{\mathrm{W}^1_{\mathrm{p}}(B)} = 2^{1/p}\|u_m\|_{\mathrm{W}^1_{\mathrm{p}}(B^+)}. \tag{2.25}$$

Be to,

$$\|v_m - v\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(B)} \to 0, \quad \|v_{mx_i} - \omega_i\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(B)} \to 0,$$

kai $m \to \infty$. Čia

$$\omega_i(x) = \begin{cases} u_{x_i}(x), & x \in B^+, i = 1, 2, \ldots, n, \\ u_{x_i}(x'_n, -x_n), & x \in B^-, i = 1, 2, \ldots, n-1, \\ -u_{x_n}(x'_n, -x_n), & x \in B^-, i = n. \end{cases}$$

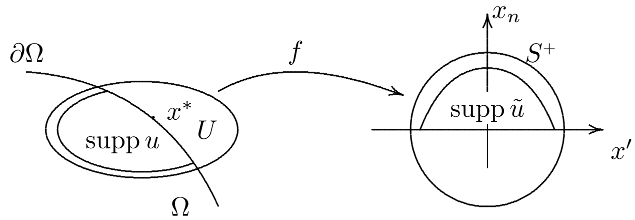
Remiantis 2.5 teorema, rutulyje B egzistuoja funkcijos v apibendrintos išvestinės $v_{x_i} = \omega_i$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$, ir $v \in \mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^1(B)$. Kadangi

$$\|v_m - v\|_{\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^1(B)} \to 0,$$

kai $m \to \infty$, tai (2.25) lygybėje galima pereiti prie ribos. Taigi

$$\|v\|_{\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^1(B)} = 2^{1/p}\|u\|_{\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^1(B^+)}.$$

2. Tarkime, taškas $x^* \in \partial\Omega$, U – taško x^* aplinka, $u \in \mathrm{W}_{\mathrm{p}}^1(\Omega)$, aibė $\overline{\Omega} \cup \overline{U} \subset Q$ ir $\operatorname{supp} u \subset U$. Be to, tegu egzistuoja toks difeomorfizmas $f : U \to B$, kuris sritį $\Omega \cap U$ atvaizduoja į pusrutulį B^+, o paviršių $\partial\Omega \cap U$ į skritulį $\{x : |x| = 1, x_n = 0\}$ (žr. 2.4 pav.).



2.4 pav

Tada funkcija $\tilde{u} = u \circ f^{-1} \in \mathrm{W}_{\mathrm{p}}^1(B^+)$ ir pussferės S^+ aplinkoje lygi nuliui. Kadangi funkcija $\tilde{u}$ tenkina 1 punkto sąlygas, tai ją galima pratęsti į pusrutulį B^-. Pratęsta funkcija $\tilde{v} \in \mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^1(B)$. Apibrėšime funkciją $v = \tilde{v} \circ f$. Akivaizdu, kad $v \in \mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^1(U)$. Funkciją v pratęsime nuliu į $\mathbb{R}^n \setminus U$ ir pratęstą funkciją pažymėsime ta pačia raide v. Tada funkcija $v \in \mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^1(Q)$. Be to, $v(x) = u(x)$, $\forall x \in \Omega$ ir

$$\|v\|_{\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^1(Q)} \leq C\|u\|_{\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^1(\Omega)};$$

čia konstanta C priklauso tik nuo funkcijų f ir f^{-1} normų erdvėje C^1.

3. Išnagrinėsime bendrąjį atvejį. Kadangi Ω yra aprėžta sritis ir S yra C^1 klasės paviršius, tai egzistuoja baigtinis skaičius tokių atvirų aibių $U_1, \dots, U_N$, kad:

1) $\Omega \subset \bigcup\limits_{i=1}^{N} U_i \subset Q$.

2) Aibė $\overline{U}_i \subset \Omega$ arba U_i tenkina 2 punkto sąlygas, $i = 1, 2, \dots, N$.

Tegu $\{\zeta_i(x)\}_{i=1}^N$ yra vieneto skaidinys (žr. 1.19 teoremą), atitinkantis aibių sistemą $U_1, U_2, .., U_N$. Kitais žodžiais tariant, $\zeta_i \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp} \zeta_i \subset U_i$, $\forall i = 1, 2, \dots, N$, ir

$$\sum_{i=1}^{N} \zeta_i(x) = 1, \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Tada

$$u(x) = \sum_{i=1}^{N} u_i(x);$$

čia $u_i(x) = u(x)\zeta_i(x)$. Laisvai pasirenkame kokią nors funkciją u_i. Jeigu aibė $\overline{U}_i \subset \Omega$, tai funkcija $u_i \in \mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^1(\Omega)$. Pratęsę ją nuliu į $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$, gausime funkciją $v_i \in \mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^1(Q)$. Tuo atveju, kai aibių U_i ir $\partial\Omega$ sankirta yra netuščia, aibė U_i tenkina 2 punkto sąlygas. Todėl egzistuoja tokia funkcija $v_i \in \mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^1(Q)$, kad $v_i(x) = u_i(x),\ \forall x \in \Omega$, ir yra teisingas įvertis

$$\|v_i\|_{\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^1(Q)} \leq C\|u_i\|_{\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^1(\Omega)}. \tag{2.26}$$

Dabar pratęsimo operatorių Π galima apibrėžti taip:

$$\Pi u := v = \sum_{i=1}^{N} v_i.$$

Šioje sumoje kiekviena funkcija $v_i \in \mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^1(Q)$. Todėl ir funkcija $v \in \mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^1(Q)$. Be to, $v(x) = u(x),\ \forall x \in \Omega$, ir yra teisingas įvertis

$$\|v\|_{\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^1(Q)} \leq C\|u\|_{\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^1(\Omega)}; \tag{2.27}$$

čia konstanta C priklauso tik nuo p, Ω ir Q. $\triangleright$

P a s t a b a. Iš šios teoremos įrodymo išplaukia, kad kartu su (2.27) yra teisingas įvertis

$$\|v\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(Q)} \leq C\|u\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega)};$$

čia konstanta C priklauso tik nuo p, Ω ir Q. Be to, jeigu $u \in \mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega)$, $u_{x_i} \in \mathrm{L}_{\mathrm{q}}(\Omega)$, $q > p$ ir sritis Ω yra klasės C^1, tai remiantis Frydrichso nelygybe galima įrodyti, kad $u \in \mathrm{L}_{\mathrm{q}}(\Omega)$. Kartu galime tvirtinti, kad $u \in \mathrm{W}_{\mathrm{q}}^1(\Omega)$.

Tarkime, kad Ω yra neaprėžta sritis ir egzistuoja tokia atvirų aibių sistema $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$, kad:

1. $\Omega \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \subset \mathrm{Q}$.

2. Aibė $\overline{U}_i \subset \Omega$ arba yra tokia pati kaip 2.13 teoremos įrodymo 2 dalyje, $i = 1, 2, \dots$

3. Difeomorfizmų $f_i : U_i \to B$ ir $f_i^{-1} : B \to U_i$ normos erdvėse $\mathrm{C}^1(U_i)$ ir $\mathrm{C}^1(B)$ neviršija kokios nors konstantos, bendros visoms U_i.

4. Aibių sistemos $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ kartotinumas yra baigtinis, t.y. kiekvienas taškas $x \in \Omega$ priklauso ne daugiau kaip N aibėms U_i, ir skaičius N nepriklauso nuo taško x.

Tada 2.13 teoremoje pateikta pratęsimo konstrukcija tinka ir neaprėžtos srities atveju. Tiksliau, yra teisinga teorema.

2.14 teorema. *Tegu Ω yra neaprėžta erdvėje $\mathbb{R}^n$ sritis, tenkinanti anksčiau išvardytas sąlygas. Tada egzistuoja tiesinis aprėžtas pratęsimo operatorius*

$$\Pi : \mathrm{W}_{\mathrm{p}}^1(\Omega) \to \mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^1(Q).$$

Be to, jeigu $u \in \mathrm{W}_{\mathrm{p}}^1(\Omega)$ ir $v = \Pi u$, tai $v(x) = u(x)$, kai $x \in \Omega$.

Analogiškos teoremos yra teisingos ir erdvėms $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$, kai $k > 1$. Išnagrinėsime aprėžtos srities atvejį.

2.15 teorema. *Tegu Ω yra aprėžta sritis, $S = \partial\Omega$ – C^{k} klasės paviršius ir $\overline{\Omega} \subset \mathrm{Q}$. Tada egzistuoja tiesinis aprėžtas pratęsimo operatorius*

$$\Pi : \mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega) \to \mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(Q).$$

Be to, jeigu $u \in \mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ ir $v = \Pi u$, tai $v(x) = u(x)$, kai $x \in \Omega$, ir

$$\|v\|_{\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(Q)} \le C\|u\|_{\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)}; \tag{2.28}$$

čia konstanta C priklauso tik nuo p, k, Ω ir Q.

$\triangleleft$ Tarkime, $\Omega = B^+$, o u – pakankamai glodi pusrutulyje B^+ funkcija, lygi nuliui kokioje nors pakankamai mažoje pussferės S^+ aplinkoje. Apibrėžkime funkciją

$$v(x) = \begin{cases} u(x), & x \in B^+, \\ \sum\limits_{j=0}^{k} \alpha_j u(x_n', -2^{-j}x_n), & x \in B^-; \end{cases}$$

čia $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ yra lygčių sistemos

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j(-2^{-j})^m = 1, \quad m = 0, 1, \dots, k,$$

sprendinys (pastaroji sistema turi vienintelį sprendinį, nes jos determinantas nelygus nuliui). Taip apibrėžta funkcija $v \in \mathrm{C}^{\mathrm{k}}(B)$, $\operatorname{supp} v \subset B$ ir

$$\|v\|_{\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(B)} \le C\|u\|_{\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(B^+)}.$$

Konstanta C priklauso tik nuo p ir k. Kaip ir 2.13 teoremoje, galima parodyti, kad tokį pratęsimą galima atlikti $\forall u \in \mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(B^+)$. Tolesnis įrodymas yra analogiškas 2.13 teoremos įrodymui ir remiasi vieneto skaidiniu bei 2.9 teorema. $\triangleright$

I š v a d a. Jeigu sritis Ω yra tokia, kad erdvės $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ elementus galima pratęsti į platesnę sritį išlaikant ,,glodumą“ ir (2.28) įvertį, tai aibė $\mathrm{C}^{\infty}(\overline{\Omega})$ yra tiršta erdvėje $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$.

P a s t a b a. Reikalavimas, kad S būtų C^{k} klasės paviršius, susijęs tik su teoremoje panaudota pratęsimo konstrukcija. Yra kitos funkcijų $u \in \mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ pratęsimo konstrukcijos, išlaikančios glodumą. Pavyzdžiui, [47] knygoje pateiktoje funkcijų $u \in \mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ pratęsimo konstrukcijoje reikalaujama, kad Ω tenkintų vadinamąją *minimalaus glodumo* sąlygą.

Tegu $\varphi : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^1$ yra funkcija, tenkinanti Lipšico sąlygą

$$|\varphi(x') - \varphi(\bar{x}')| \le M|x' - \bar{x}'|, \quad \forall x', \bar{x}' \in \mathbb{R}^{n-1}$$

su Lipšico konstanta M ir

$$\Omega = \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > \varphi(x')\}, \quad x' = (x_1, \dots, x_{n-1}).$$

Sritį, kurią gausime pasukę arba pastūmę Ω, vadinsime *specialiąja lipšicine* sritimi.

A p i b r ė ž i m a s. Tegu Ω yra atvira erdvėje $\mathbb{R}^n$ aibė, $S = \partial\Omega$. Sakysime, paviršius S yra *minimaliai glodus*, jeigu egzistuoja seka atvirų aibių

$$U_1, U_2, \dots, U_n, \dots, \quad \Omega \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$$

ir tokie skaičiai $\varepsilon > 0$, $M > 0$, $N \in \mathbb{N}$, kad:

1. Jeigu $x \in S$, tai $B_\varepsilon(x) \subset U_i$ su tam tikru indeksu i.
2. Sistemos $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ kartotinumas neviršija N.
3. Kiekvienam i egzistuoja *specialioji lipšicinė* sritis Ω_i, su tokia Lipšico konstanta $M_i \le M$, kad
$$U_i \cap \Omega = U_i \cap \Omega_i.$$

Taigi 2.15 teorema išlieka teisinga daug platesnei sričių klasei. Šiai klasei gali būti priskirtos sritys, kurių kraštinių taškų aibė yra *minimaliai glodi.* Apytiksliai tokias sritis galima apibūdinti kaip sritis, kurių kraštinių taškų aibė yra paviršius, tenkinantis Lipšico sąlygą. Akivaizdu, kad paviršius S turi *minimalų glodumą*, jeigu S yra C^1 klasės paviršius. Be to, jeigu Ω yra aprėžta arba iškila sritis, tai pakanka baigtinio skaičiaus atvirų aibių U_i.

2.7. UŽDAVINIAI

1. Tegu $u, v \in \mathrm{L}_2(\Omega)$ ir bent viena iš šių funkcijų yra finiti. Įrodykite, kad pakankamai mažiems $\rho > 0$ yra teisinga formulė

$$\int\limits_\Omega u_\rho(x)v(x)\,dx = \int\limits_\Omega u(x)v_\rho(x)\,dx. \tag{2.29}$$

2. Tegu $u^+ = \max\{u, 0\}$, $u^- = \min\{u, 0\}$, $u \in \mathrm{W}_1^1(\Omega)$ ($\Rightarrow u = u^+ + u^-$, $|u| = u^+ - u^-$). Įrodykite, kad $u^+, u^-, |u| \in \mathrm{W}_1^1(\Omega)$.

   N u r o d y m a s. Pasinaudokite pirmuoju apibendrintos išvestinės apibrėžimu.

3. Tegu $f \in \mathrm{L}_\infty(\mathbb{R})$ yra dalimis glodi funkcija, $u \in \mathrm{W}_1^1(\Omega)$. Įrodykite, kad $f \circ u \in \mathrm{W}_1^1(\Omega)$ ir

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f \circ u) = \begin{cases} f'(u)u_{x_i}, & u \notin E, \\ 0, & u \in E; \end{cases}$$

   čia E – aibė taškų, kuriuose funkcija f nėra glodi.

   N u r o d y m a s. Pasinaudokite 2 uždaviniu.

4. Tegu $\partial\Omega$ yra C^1 klasės paviršius, funkcija $u \in \mathrm{L}_\mathrm{p}(\Omega)$, o jos apibendrintos išvestinės $u_{x_i} \in \mathrm{L}_\mathrm{q}(\Omega), \forall i = 1, 2, \dots, n$, $q > p$. Įrodykite, kad $u \in \mathrm{W}_\mathrm{q}^1(\Omega)$.

   N u r o d y m a s. Pasinaudokite Frydrichso nelygybe.

3 SKYRIUS

Erdvių $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ įdėjimo teoremos

Sakysime, normuota erdvė B_1 *įsideda* į normuotą erdvę B_2, jeigu kiekvienas elementas $u \in B_1$ priklauso erdvei B_2 ir

$$\|u\|_{B_2} \leq C\|u\|_{B_1};$$

čia konstanta C nepriklauso nuo konkretaus elemento u. Erdvės B_1 į erdvę B_2 įdėjimo operatoriumi vadinsime tokį operatorių, kuris kiekvienam elementui $u \in B_1$ priskiria jį patį, bet kaip erdvės B_2 elementą. Taigi erdvės B_1 įdėjimas į erdvę B_2 yra ekvivalentus įdėjimo operatoriaus aprėžtumui. Be to, jeigu kiekviena aprėžta aibė erdvėje B_1 yra sąlyginis kompaktas erdvėje B_2, tai sakysime, kad erdvė B_1 kompaktiškai įsideda į erdvę B_2, o įdėjimo operatorius yra visiškai tolydus.

Kai kurios erdvių $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ įdėjimo teoremos gaunamos tiesiogiai iš jų apibrėžimo. Pavyzdžiui, erdvė $\mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^{1}(\Omega)$ įsideda į erdvę $\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega)$. Tačiau nėra akivaizdu, kad aprėžtos srities atveju erdvė $\mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^{1}(\Omega)$ kompaktiškai įsideda į erdvę $\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega)$ arba į erdvę $\mathrm{C}(\overline{\Omega})$, jeigu $p > n$. Analogiški teiginiai yra teisingi erdvėms $\mathrm{W}_{\mathrm{q}}^{\mathrm{r}}(\Omega)$ ir $\mathrm{C}^{\mathrm{m}}(\overline{\Omega})$. Pavyzdžiui, jeigu $r < k$, tai erdvė $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ įsideda į erdvę $\mathrm{W}_{\mathrm{q}}^{\mathrm{r}}(\Omega)$ tam tikriems $q > p$ ir, kuo didesnis yra skirtumas $k - r$, tuo platesnis rodiklio q pasirinkimas. Be to, jeigu $(k - m)p > n$, tai erdvė $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ kompaktiškai įsideda į erdvę $\mathrm{C}^{\mathrm{m}}(\overline{\Omega})$. Tokius ir panašius teiginius nagrinėsime šiame skyriuje. Šiame skyriuje taip pat nagrinėsime ir funkcijų $u \in \mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ „pėdsakus“ $(n-1)$-mačiuose paviršiuose. Parodysime, kad tai yra nauji objektai, kuriuos galima traktuoti kaip aibę funkcijų, turinčių trupmeninės eilės išvestines.

3.1. INTEGRALINIAI OPERATORIAI SU SILPNA YPATUMA

Tegu Ω yra aprėžta erdvėje $\mathbb{R}^n$ sritis, $k(x, y)$ – tolydi, kai $x \neq y$, ir aprėžta funkcija, $x, y \in \Omega,\ \alpha \in (0, n),\ v \in \mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega)$,

$$K\,v(x) = \int\limits_{\Omega} \frac{k(x,y)}{|x-y|^{\alpha}} v(y)\,dy, \quad x \in \Omega. \tag{3.1}$$

Taip apibrėžtas operatorius K yra vadinamas *integraliniu operatoriumi su silpna ypatuma.*

3.1 teorema. *Tegu* $\alpha < n/p',\ 1/p + 1/p' = 1$. *Tada* K *yra visiškai tolydus operatorius, veikiantis iš erdvės* $\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega)$ *į erdvę* $\mathrm{C}(\overline{\Omega})$.

$\triangleleft$ Tegu $p < \infty$, $v \in \mathrm{L_p}(\Omega)$, $u = K\, v$ ir $r = |x-y|$. Pagal teoremos sąlygą funkcija k yra aprėžta. Todėl egzistuoja tokia konstanta C, kad

$$|u(x)| \le C \int\limits_\Omega r^{-\alpha} |v(y)|\, dy \le C \|r^{-\alpha}\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{p}'}(\Omega)} \|v\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}$$

(įvertindami integralą sritimi Ω pasinaudojome Helderio nelygybe). Integralas

$$\int\limits_\Omega r^{-\alpha}\, dy \le |S_1| \frac{(\operatorname{diam}\Omega)^{n-\alpha}}{n-\alpha}$$

(žr. 1.2 skyrelį). Todėl

$$|u(x)| \le C_1 (\operatorname{diam}\Omega)^{n/p'-\alpha} \|v\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}, \quad \forall x \in \overline{\Omega},$$

ir

$$\sup_{x\in\Omega} |u(x)| \le C_1 (\operatorname{diam}\Omega)^{n/p'-\alpha} \|v\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}. \tag{3.2}$$

Įrodysime, kad $u \in \mathrm{C}(\overline{\Omega})$. Laisvai pasirinkime skaičių $\delta > 0$. Tada

$$u(x) = \int\limits_{\Omega\cap B_\delta(x)} r^{-\alpha} k(x,y) v(y)\, dy + \int\limits_{\Omega\setminus B_\delta(x)} r^{-\alpha} k(x,y) v(y)\, dy. \tag{3.3}$$

Kadangi

$$\int\limits_{\Omega\cap B_\delta(x)} r^{-\alpha}\, dy \le |S_1| \frac{\delta^{n-\alpha}}{n-\alpha},$$

tai pirmąjį integralą (3.3) formulėje galima įvertinti taip:

$$\left| \int\limits_{\Omega\cap B_\delta(x)} r^{-\alpha} k(x,y) v(y)\, dy \right| \le C_1 \delta^{n/p'-\alpha} \|v\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} \to 0, \tag{3.4}$$

kai $\delta \to 0$. Antrasis integralas (3.3) formulėje yra tolydi kintamųjų x funkcija. Todėl funkcija u yra tolydi kaip tolygiai konverguojančių tolydžių funkcijų riba.

Reiškinys

$$|u(x+z) - u(x)| \le \int\limits_\Omega \Big| \frac{k(x+z,y)}{|x+z-y|^\alpha} - \frac{k(x,y)}{|x-y|^\alpha} \Big| |v(y)|\, dy \le I_1 + I_2 + I_3;$$

čia

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int\limits_{\Omega\cap B_\delta(x)} \Big| \frac{k(x+z,y)}{|x+z-y|^\alpha} \Big| |v(y)|\, dy,\\
I_2 &= \int\limits_{\Omega\cap B_\delta(x)} \Big| \frac{k(x,y)}{|x-y|^\alpha} \Big| |v(y)|\, dy,\\
I_3 &= \int\limits_{\Omega\setminus B_\delta(x)} \Big| \frac{k(x+z,y)}{|x+z-y|^\alpha} - \frac{k(x,y)}{|x-y|^\alpha} \Big| |v(y)|\, dy.
\end{aligned}$$

Integralas
$$I_1 \le C_1 \delta^{n/p'-\alpha} \|v\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}$$
(žr. (3.4) nelygybę). Jeigu taškas $x+z$ yra pakankamai arti taško x, tai $B_\delta(x) \subset B_{2\delta}(x+z)$ ir
$$I_2 \le C_1 (2\delta)^{n/p'-\alpha} \|v\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}.$$
Srityje $\Omega \setminus B_\delta(x)$ funkcija $\dfrac{k(x,y)}{|x-y|^\alpha}$ yra tolydi. Todėl
$$I_3 \le \varepsilon(|z|,\delta) \|v\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)};$$
čia $\varepsilon(t,\delta) \to 0$, kai $t \to 0$. Iš šių įverčių išplaukia, kad
$$|u(x+z) - u(x)| \le \big(C_1 \delta^{n/p'-\alpha} + C_1 (2\delta)^{n/p'-\alpha} + \varepsilon(|z|,\delta)\big) \|v\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}.$$

Laisvai pasirenkame skaičių $\varepsilon > 0$. Fiksuokime tokį $\delta > 0$, kad
$$C_1 \delta^{n/p'-\alpha} + C_1 (2\delta)^{n/p'-\alpha} \le \varepsilon/2$$
(tai padaryti galima, nes $n - \alpha p' > 0$). Kadangi $\varepsilon(t,\delta) \to 0$, kai $t \to 0$, tai egzistuoja toks skaičius $h > 0$, kad $\varepsilon(|z|,\delta) \le \varepsilon/2,\ \forall z : |z| < h$. Tačiau tada
$$\sup_{|z|<h} \sup_{x \in \Omega} |u(x+z) - u(x)| \le \varepsilon \|v\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}. \tag{3.5}$$

Tegu aibė $V \subset \mathrm{L_p}(\Omega)$ yra aprėžta ir
$$U = \{u = K\,v : v \in V\}.$$
Iš (3.2) ir (3.5) įverčių išplaukia, kad aibė U erdvėje $\mathrm{C}(\overline{\Omega})$ yra aprėžta ir vienodai tolydi. Pagal ArcelΔa teoremą aibė U yra sąlyginis kompaktas erdvėje $\mathrm{C}(\overline{\Omega})$. Taigi operatorius
$$K : \mathrm{L_p}(\Omega) \to \mathrm{C}(\overline{\Omega})$$
yra visiškai tolydus.

Kai $p = \infty$, teoremos įrodymas yra analogiškas. Netgi paprastesnis, nes nereikia taikyti Helderio nelygybės. $\triangleright$

Tegu $s \le n$ yra sveikasis teigiamas skaičius, Ω_s – srities Ω sankirta su plokštuma $\mathbb{R}^s$. Kai $s = n$, sritis $\Omega_n = \Omega$. Priminsime, kad sritis – tai netuščia, atvira, susijusi aibė. Todėl aibė Ω_s yra atvira. Tarkime, kad ji yra netuščia.

3.2 teorema. *Tegu $n/p' \le \alpha < n/p' + s/p$. Tada K yra visiškai tolydus operatorius, veikiantis iš erdvės $\mathrm{L_p}(\Omega)$ į erdvę $\mathrm{L_q}(\Omega_s)$. Čia q bet koks teigiamas skaičius, tenkinantis nelygybę $\alpha < n/p' + s/q$.*

$\triangleleft$ Atskirai išnagrinėsime du atvejus: $p \le q$ ir $p > q$. Tegu $p \le q$. Tokios p ir q reikšmės yra galimos, nes $\alpha < n/p' + s/p$. Kartu egzistuoja toks skaičius $\beta > 0$, kad
$$\alpha + 2\beta = n/p' + s/q.$$

Todėl reiškinį $r^{-\alpha}|v|$ galime perrašyti taip:

$$r^{-\alpha}|v| = r^{-s/q+\beta}|v|^{p/q} r^{-n/p'+\beta}|v|^{1-p/q}. \tag{3.6}$$

Tegu $v \in \mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega)$. Įrodysime, kad $r^{-\alpha}|v|$ yra sumuojama aibėje $\Omega_s \times \Omega$ funkcija. Pagal Jungo nelygybę (imame $p_1 = q$, $p_2 = p'$, $p_3 = qp/(q-p)$)

$$r^{-\alpha}|v| \leq \frac{1}{q} r^{-s+\beta q}|v|^p + \frac{1}{p'} r^{-n+\beta p'} + \frac{q-p}{qp}|v|^p.$$

Pakanka įrodyti, kad kiekvienas iš reiškinių šios nelygybės dešinėje yra sumuojamas aibėje $\Omega_s \times \Omega$. Akivaizdu, kad trečiasis reiškinys yra sumuojama srityje Ω funkcija. Integralas

$$\int\limits_{\Omega} r^{-n+\beta p'}\, dy \leq C(\operatorname{diam}\Omega)^{\beta p'} < \infty. \tag{3.7}$$

Todėl antrasis reiškinys taip pat yra sumuojama aibėje $\Omega_s \times \Omega$ funkcija. Integralas

$$\int\limits_{\Omega_s} r^{-s+\beta q}\, dx \leq C(\operatorname{diam}\Omega_s)^{\beta q} < \infty. \tag{3.8}$$

Todėl

$$\int\limits_{\Omega_s \times \Omega} r^{-s+\beta q}|v(y)|^p\, dydx = \int\limits_{\Omega} |v(y)|^p \Big(\int\limits_{\Omega_s} r^{-s+\beta q}\, dx\Big)\, dy \leq$$
$$\leq C(\operatorname{diam}\Omega_s)^{\beta q}\|v\|^p_{\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega)} < \infty \tag{3.9}$$

(čia pasinaudojome Tonelio teorema). Taigi funkcija $r^{-s+\beta q}|v|^p$ yra sumuojama aibėje $\Omega \times \Omega_s$. Kartu funkcijos $r^{-\alpha}|v|$ ir $kr^{-\alpha}|v|$ yra sumuojamos aibėje $\Omega \times \Omega_s$. Pagal Fubinio teoremą funkcija

$$u(x) = \int\limits_{\Omega} \frac{k(x,y)}{r^{\alpha}} v(y)\, dy$$

yra sumuojama aibėje Ω_s. Įrodysime, kad $u \in \mathrm{L}_{\mathrm{q}}(\Omega_s)$. Priminsime, kad funkcija k yra aprėžta. Todėl

$$|u(x)| \leq C \int\limits_{\Omega} r^{-\alpha}|v(y)|\, dy.$$

Perrašysime šią nelygybę taip:

$$|u(x)| \leq C \int\limits_{\Omega} r^{-s/q+\beta}|v(y)|^{p/q}\, r^{-n/p'+\beta}|v(y)|^{1-p/q}\, dy.$$

(žr. (3.6) formulę). Pagal Helderio nelygybę

$$|u(x)| \leq C\Big(\int\limits_{\Omega} r^{-s+\beta q}|v(y)|^p\, dy\Big)^{1/q} \Big(\int\limits_{\Omega} r^{-n+\beta p'}\, dy\Big)^{1/p'} \Big(\int\limits_{\Omega} |v(y)|^p\, dy\Big)^{\frac{q-p}{qp}}.$$

(imame $p_1 = q$, $p_2 = p'$, $p_3 = qp/(q-p)$). Kairiąją ir dešiniąją šios nelygybės puses keliame q laipsniu ir integruojame sritimi Ω_s. Pasinaudoję (3.7), (3.8) ir (3.9) nelygybėmis, gausime

$$\int\limits_{\Omega_s} |u(x)|^q \, dx \leq C^q (\operatorname{diam} \Omega_s)^{\beta q} (\operatorname{diam} \Omega)^{\beta q} \|v\|^q_{\mathrm{L_p}(\Omega)}.$$

Kartu yra teisinga nelygybė

$$\|u\|_{\mathrm{L_q}(\Omega_s)} \leq C(\operatorname{diam} \Omega_s)^{\beta} (\operatorname{diam} \Omega)^{\beta} \|v\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}. \tag{3.10}$$

Tarkime, V yra aprėžta erdvėje $\mathrm{L_p}(\Omega)$ aibė, t.y. egzistuoja toks teigiamas skaičius M, kad

$$\|v\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} \leq M, \quad \forall v \in V.$$

Iš (3.10) įverčio išplaukia, kad aibė

$$U = \{u = K\, v : v \in V\}$$

yra aprėžta. Parodysime, kad ji yra vienodai tolydi.

Laisvai pasirinkime skaičių $\varepsilon > 0$. Pagal Minkovskio nelygybę

$$\|u(x+z) - u(x)\|_{\mathrm{L_q}(\Omega_s)} \leq \|u_1\|_{\mathrm{L_q}(\Omega_s)} + \|u_2\|_{\mathrm{L_q}(\Omega_s)} + \|u_3\|_{\mathrm{L_q}(\Omega_s)};$$

čia:

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \int\limits_{\Omega \cap B_\delta(x)} \Big| \frac{k(x+z,y)}{|x+z-y|^\alpha} \Big| |v(y)| \, dy, \\ u_2(x) &= \int\limits_{\Omega \cap B_\delta(x)} \Big| \frac{k(x,y)}{|x-y|^\alpha} \Big| |v(y)| \, dy, \\ u_3(x) &= \int\limits_{\Omega \setminus B_\delta(x)} \Big| \frac{k(x+z,y)}{|x+z-y|^\alpha} - \frac{k(x,y)}{|x-y|^\alpha} \Big| |v(y)| \, dy, \end{aligned}$$

δ – bet koks teigiamas skaičius. Integralus u_1 ir u_2 galima įvertinti visiškai taip pat kaip ir integralą u :

$$\begin{aligned} \|u_1\|_{\mathrm{L_q}(\Omega_s)} &\leq C(\operatorname{diam} \Omega_s)^{\beta} (2\delta)^{\beta} \|v\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}, \\ \|u_2\|_{\mathrm{L_q}(\Omega_s)} &\leq C(\operatorname{diam} \Omega_s)^{\beta} \delta^{\beta} \|v\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Fiksuokime tokį skaičių $\delta > 0$, kad

$$\|u_1\|_{\mathrm{L_q}(\Omega_s)} + \|u_2\|_{\mathrm{L_q}(\Omega_s)} \leq C(\operatorname{diam} \Omega_s)^{\beta} \big((2\delta)^{\beta} + \delta^{\beta}\big) M \leq \varepsilon/2.$$

Srityje $\Omega \setminus B_\delta(x)$ funkcija $\dfrac{k(x,y)}{|x-y|^\alpha}$ yra tolydi. Todėl

$$\|u_3\|_{\mathrm{L_q}(\Omega_s)} \leq \varepsilon(|z|, \delta) \|v\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} \leq \varepsilon(|z|, \delta) M, \quad \forall z \in B_\delta(x);$$

čia $\varepsilon(t,\delta) \to 0$, kai $t \to 0$.

Fiksuokime tokį skaičių $h > 0$, kad

$$\varepsilon(|z|,\delta)M \leq \varepsilon/2, \quad \forall z : |z| < h.$$

Tada

$$\|u(x+z) - u(x)\|_{\mathrm{L_q}(\Omega_s)} \leq \varepsilon, \quad \forall z, v : |z| < h,\ v \in V.$$

Taigi aibė U yra vienodai tolydi. Pagal 2.3 teoremą aibė U yra sąlyginis kompaktas erdvėje $\mathrm{L_q}(\Omega_s)$, o operatorius

$$K : \mathrm{L_p}(\Omega) \to \mathrm{L_q}(\Omega_s)$$

yra visiškai tolydus.

Tegu dabar $q < p$. Imkime tokį skaičių $r \geq p$, kad $\alpha < n/p' + s/r$. Pagal Helderio nelygybę

$$\|u\|_{\mathrm{L_q}(\Omega_s)} \leq |\Omega_s|^{\frac{r-q}{rq}} \Big(\int\limits_{\Omega_s} |u(x)|^r \, dx \Big)^{1/r}.$$

Kadangi $r \geq p$, tai (žr. (3.10) įvertį)

$$\|u\|_{\mathrm{L_r}(\Omega_s)} \leq C(\operatorname{diam}\Omega_s)^{\beta}(\operatorname{diam}\Omega)^{\beta}\|v\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}.$$

Todėl

$$\|u\|_{\mathrm{L_q}(\Omega_s)} \leq C|\Omega_s|^{\frac{r-q}{rq}}(\operatorname{diam}\Omega_s)^{\beta}(\operatorname{diam}\Omega)^{\beta}\|v\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}.$$

Tolesnis įrodymas yra analogiškas atvejui $q \geq p$. $\triangleright$

P a s t a b a. Iš teoremos įrodymo išplaukia, kad bet kokiam fiksuotam $z \in \mathbb{R}^n$ ir visiems pakankamai mažiems $t > 0$ yra teisinga nelygybė:

$$\|u(x+tz) - u(x)\|_{\mathrm{L_q}(\Omega_s)} \leq \varepsilon(t)\|v\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)};$$

čia $\varepsilon(t) \to 0$, kai $t \to 0$.

Funkcija

$$k_i(x,y) = \frac{1}{|S_1|}\frac{x_i - y_i}{|x-y|}, \quad i = 1,2,\dots,n,$$

yra tolydi, kai $x \neq y$, ir aprėžta $\forall x, y \in \Omega$. Todėl operatorius K_i, apibrėžtas formule

$$K_i\, v(x) = \int\limits_{\Omega} \frac{k_i(x,y)}{|x-y|^{n-1}} v(y)\, dy = \frac{1}{|S_1|}\int\limits_{\Omega} \frac{x_i - y_i}{|x-y|^n} v(y)\, dy, \quad i = 1,2,\dots,n,$$

yra operatorius su silpna ypatuma ($\alpha = n-1$). Visi suformuluoti 3.1 ir 3.2 teoremose teiginiai išlieka teisingi ir operatoriui K_i. Tiksliau, yra teisinga tokia teorema.

3.3 teorema. *Tegu Ω yra aprėžta erdvėje $\mathbb{R}^n$ sritis. Tada:*

1. *Operatorius*

$$K_i : \mathrm{L_p}(\Omega) \to \mathrm{C}(\overline{\Omega})$$

yra visiškai tolydus, kai $p > n$.

2. *Kai* $1 \leq p \leq n$ *ir* $n - p < s \leq n$, $q \geq 1$, *operatorius*
$$K_i : \mathrm{L_p}(\Omega) \to \mathrm{L_q}(\Omega_s)$$
yra visiškai tolydus, jeigu
$$1 - \frac{n}{p} + \frac{s}{q} > 0.$$

Rodiklis q^* :
$$1 - \frac{n}{p} + \frac{s}{q^*} = 0 \tag{3.11}$$
vadinamas *ribiniu*. Jeigu 3.3 teoremoje $q = q^*$, tai operatorius
$$K_i : \mathrm{L_p}(\Omega) \to \mathrm{L_{q^*}}(\Omega_s)$$
nėra visiškai tolydus. Tačiau galima įrodyti, kad jis yra aprėžtas. Tiksliau, yra teisinga tokia teorema.

3.4 teorema. *Tegu* $1 < p < n$, $n - p < s \leq n$. *Tada operatorius*
$$K_i : \mathrm{L_p}(\Omega) \to \mathrm{L_{q^*}}(\Omega_s)$$
yra aprėžtas.

Šios teoremos neįrodinėsime. Paminėsime tik, kad jos įrodymas remiasi įverčiu
$$\|u\|_{\mathrm{L_q}(\Omega_s)} \leq C\|v\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}; \tag{3.12}$$
čia
$$u(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{v(y)}{|x-y|^\alpha}\, dy, \quad \alpha < n,$$
$q > p$, $s/q = \alpha - n/p' > 0$. Šio įverčio įrodymą galima rasti [7] knygoje, kai $s = n = 1$, [45] knygoje, kai $s = n \geq 1$, ir [4] knygoje, kai $s \leq n$, $n \geq 1$.

3.2. FUNKCIJŲ $u \in \overset{\circ}{\mathrm{W}}{}^1_p(\Omega)$ INTEGRALINĖ IŠRAIŠKA

Tegu Ω yra aprėžta sritis, $S = \partial\Omega$ – dalimis glodus paviršius. Tada $\forall u \in \mathrm{C}^2(\overline{\Omega})$ ir $\forall x \in \Omega$ yra teisinga integralinė išraiška

$$\begin{aligned} u(x) = & -\int\limits_\Omega E(x-y)\Delta u(y)\,dy + \\ & + \int\limits_S \Big(E(x-y)\frac{\partial u(y)}{\partial \mathbf{n}_y} - u(y)\frac{\partial E(x-y)}{\partial \mathbf{n}_y}\Big)\,dS_y; \end{aligned} \tag{3.13}$$

čia

$$E(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|S_1|(n-2)|x|^{n-2}}, & \text{kai } n > 2, \\ \dfrac{1}{|S_1|}\ln\dfrac{1}{|x|}, & \text{kai } n = 2, \end{cases}$$

yra *singuliarusis* Laplaso lygties sprendinys (žr. [1]). Jeigu funkcija u yra finiti, tai (3.13) formulėje integralas paviršiumi S yra lygus nuliui. Šiuo atveju

$$u(x) = -\int\limits_\Omega E(x-y)\Delta u(y)\,dy. \tag{3.14}$$

Funkcija E turi pirmos eilės apibendrintas išvestines

$$\frac{\partial E(x)}{\partial x_i} = -\frac{1}{|S_1|}x_i|x|^{-n}, \quad \forall i = 1,2,\dots,n.$$

Kai $n > 2$, šį teiginį įrodėme 2.4 skyrelyje (kai $n = 2$, įrodymas yra analogiškas). Pagal apibendrintos išvestinės apibrėžimą $\forall u \in \mathrm{C}^\infty_0(\Omega)$ yra teisinga integralinė tapatybė

$$-\int\limits_\Omega E(x-y)\Delta u(y)\,dy = \sum_{i=1}^n \frac{1}{|S_1|}\int\limits_\Omega \frac{x_i - y_i}{|x-y|^n}u_{y_i}(y)\,dy.$$

Todėl (3.14) formulę galime perrašyti taip:

$$u(x) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{|S_1|}\int\limits_\Omega \frac{x_i - y_i}{|x-y|^n}u_{y_i}(y)\,dy. \tag{3.15}$$

3.1 lema. *Kiekvienai funkcijai* $u \in \overset{\circ}{\mathrm{W}}{}^1_p(\Omega)$ *yra teisinga* (3.15) *formulė (lygybė čia suprantama kaip lygybė erdvėje* $\mathrm{L}_p(\Omega)$, *t.y. kairioji pusė lygi dešiniajai b.v.* $x \in \Omega$*).*

◁ Laisvai pasirenkame funkciją $u \in \overset{\circ}{\mathrm{W}}{}^1_p(\Omega)$. Pagal poerdvio $\overset{\circ}{\mathrm{W}}{}^1_p(\Omega)$ apibrėžimą egzistuoja seka $\{u_m\} \subset \mathrm{C}^\infty_0(\Omega)$, konverguojanti į u erdvėje $\mathrm{W}^1_p(\Omega)$. Kiekvienai funkcijai u_m yra teisinga (3.15) formulė, t.y.

$$u_m(x) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{|S_1|}\int\limits_\Omega \frac{x_i - y_i}{|x-y|^n}u_{my_i}(y)\,dy.$$

Perrašykime šią formulę taip:

$$u_m = \sum_{i=1}^{n} K_i \, D_i \, u_m; \tag{3.16}$$

čia: D_i – diferencijavimo operatorius pagal kintamąjį y_i, o

$$K_i \, v = \frac{1}{|S_1|} \int\limits_{\Omega} \frac{x_i - y_i}{|x-y|^n} v(y) \, dy, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

yra integralinis operatorius su silpna ypatuma (žr. 3.1 skyrelį). Pagal 3.3 teoremą K_i yra visiškai tolydus operatorius, veikiantis iš erdvės $\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega)$ į erdvę $\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega)$ (imame $s = n, q = p$). Be to, D_i yra tolydus operatorius, veikiantis iš erdvės $\mathring{\mathrm{W}}^1_{\mathrm{p}}(\Omega)$ į erdvę $\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega)$. Todėl (3.16) formulėje galima pereiti prie ribos, kai $m \to \infty$. Taigi

$$u = \sum_{i=i}^{n} K_i \, D_i \, u, \quad \forall u \in \mathring{\mathrm{W}}^1_{\mathrm{p}}(\Omega) \,. \tag{3.17}$$

Kartu $\forall u \in \mathring{\mathrm{W}}^1_{\mathrm{p}}(\Omega)$ yra teisinga (3.15) formulė. $\triangleright$

3.3. ERDVIŲ $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{1}(\Omega)$ ĮDĖJIMO TEOREMOS

Šiame skyrelyje suformuluosime ir įrodysime pagrindines erdvių $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{1}(\Omega)$ įdėjimo teoremas. Iš pradžių išnagrinėsime erdvės $\mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^{1}(\Omega)$ atvejį.

3.5 teorema. *Tegu Ω yra aprėžta erdvėje $\mathbb{R}^n$ sritis ir $p > n$. Tada erdvė $\mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^{1}(\Omega)$ įsideda į erdvę $\mathrm{C}(\overline{\Omega})$ ir įdėjimo operatorius yra visiškai tolydus.*

$\lhd$ Kiekvienai funkcijai $u \in \mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^{1}(\Omega)$ yra teisinga (3.17) formulė

$$u = \sum_{i=1}^{n} K_i\, D_i\, u.$$

Akivaizdu, kad operatorius $D_i : \mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^{1}(\Omega) \to \mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega)$, $i = 1, 2, \dots, n$, yra tolydus. Be to, pagal 3.3 teoremą integralinis operatorius

$$K_i : \mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega) \to \mathrm{C}(\overline{\Omega}), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

yra visiškai tolydus. Todėl (žr. 1.12 teoremą) operatorius

$$K_i\, D_i : \mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^{1}(\Omega) \to \mathrm{C}(\overline{\Omega}) \quad \forall i = 1, 2, \dots, n,$$

kartu ir operatorius

$$K = \sum_{i=1}^{n} K_i\, D_i$$

yra visiškai tolydus. $\rhd$

P a s t a b a. Ši teorema teigia, kad kiekvienos funkcijos $u \in \mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^{1}(\Omega)$ ekvivalentiškumo klasėje yra funkcija $u \in \mathrm{C}(\overline{\Omega})$ ir teisingas įvertis

$$\|u\|_{\mathrm{C}(\overline{\Omega})} \le C \|u\|_{\mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^{1}(\Omega)}; \tag{3.18}$$

čia konstanta C nepriklauso nuo konkretaus elemento u. Be to, kiekviena aprėžta aibė erdvėje $\mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^{1}(\Omega)$ yra sąlyginis kompaktas erdvėje $\mathrm{C}(\overline{\Omega})$.

Šią teoremą galima patikslinti. Funkcija $u \in \mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^{1}(\Omega)$ yra ne tik tolydi, bet ir priklauso Helderio klasei su tam tikru rodikliu α.

3.6 teorema. *Tegu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ yra aprėžta sritis, $p > n$, $\alpha \le 1 - n/p$. Tada erdvė $\mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^{1}(\Omega)$ įsideda į erdvę $\mathrm{C}^{\alpha}(\overline{\Omega})$ ir*

$$|u(x) - u(y)| \le C \|u_x\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega)} |x - y|^{\alpha}, \quad \forall x, y \in \overline{\Omega}. \tag{3.19}$$

Be to, kai $\alpha < 1 - n/p$, įdėjimo operatorius yra visiškai tolydus.

$\lhd$ Tegu funkcija $u \in \mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^{1}(\Omega)$. Pratęskime ją nuliu į srities Ω išorę ir gautą funkciją pažymėkime ta pačia raide u. Tada $u \in \mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^{1}(Q)$; čia $Q \supset \overline{\Omega}$ – bet kokia standartinė sritis. Imkime Q rutulį, kurio spindulys yra pakankamai didelis.

Laisvai pasirinkime taškus $x, y \in \overline{\Omega}$. Skirtumas

$$|u(x) - u(y)| \le |u(x) - \tilde{u}_\rho(x)| + |u(y) - \tilde{u}_\rho(x)| \le I_1 + I_2;$$

čia

$$I_1 = \frac{1}{|B_\rho|} \int\limits_{B_\rho(x)} |u(x) - u(z)|\, dz, \quad I_2 = \frac{1}{|B_\rho|} \int\limits_{B_\rho(x)} |u(y) - u(z)|\, dz,$$

o funkcija

$$\tilde{u}_\rho(x) = \frac{1}{|B_\rho|} \int\limits_{B_\rho(x)} u(z)\, dz$$

yra funkcijos u vidutinė reikšmė rutulyje $B_\rho(x)$, $\rho = |x - y|$.

Tegu $z \in B_\rho(x)$, $\omega = \dfrac{z - x}{|z - x|} \in S_1(x)$, $t = |z - x|$. Tada b.v. $\omega \in S_1(x)$ funkcija u yra absoliučiai tolydi spindulyje $\{z \in \mathbb{R}^n : z = x + t\omega, t \ge 0\}$. Pagal Niutono–Leibnico formulę

$$|u(x) - u(z)| = |u(x) - u(x + t\omega)| = \Big| \int\limits_0^t \frac{d}{d\tau} u(x + \tau\omega)\, d\tau \Big| =$$

$$= \Big| \int\limits_0^t \sum_{i=1}^n u_i(x + \tau\omega)\omega_i\, d\tau \Big| \le \int\limits_0^t |\nabla u(x + \tau\omega)|\, d\tau;$$

čia $u_i(x) = \partial u(x)/\partial x_i$, $\nabla u = (u_1, \ldots, u_n)$, $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$. Todėl

$$I_1 \le \frac{1}{|B_\rho|} \int\limits_{B_\rho(x)} \int\limits_0^t |\nabla u(x + \tau\omega)|\, d\tau dz =$$

$$= \frac{1}{|B_\rho|} \int\limits_0^\rho \int\limits_{S_1(x)} \Big(\int\limits_0^t |\nabla u(x + \tau\omega)|\, d\tau \Big) t^{n-1}\, d\omega dt \le$$

$$\le \frac{1}{|B_\rho|} \int\limits_0^\rho \int\limits_{S_1(x)} \Big(\int\limits_0^\rho |\nabla u(x + \tau\omega)|\, d\tau \Big) t^{n-1}\, d\omega dt =$$

$$= \frac{\rho^n}{n|B_\rho|} \int\limits_0^\rho \int\limits_{S_1(x)} |\nabla u(x + \tau\omega)|\, d\omega d\tau \le$$

$$\le \frac{\rho^n}{n|B_\rho|} \Big(\int\limits_0^\rho \int\limits_{S_1(x)} |\nabla u(x + \tau\omega)|^p \tau^{n-1}\, d\omega d\tau \Big)^{1/p} \Big(\int\limits_0^\rho \int\limits_{S_1(x)} \tau^{-\frac{n-1}{p-1}}\, d\tau d\omega \Big)^{1/p'} =$$

$$= \frac{\rho^n}{n|B_\rho|}\Big(\int\limits_{B_\rho(x)} |u_z(z)|^p\,dz\Big)^{1/p}|S_1|^{1/p'}\left(\frac{\rho^{-\frac{n-1}{p-1}+1}}{-\frac{n-1}{p-1}+1}\right)^{1/p'} =$$

$$= C\rho^{(p-n)/p}\Big(\int\limits_{B_\rho(x)\cap\Omega} |u_z(z)|^p\,dz\Big)^{1/p} \leq C\rho^{(p-n)/p}\Big(\int\limits_{\Omega} |u_z(z)|^p\,dz\Big)^{1/p}.$$

Rutulys $B_\rho(x) \subset B_{2\rho}(y)$. Todėl

$$I_2 \leq \frac{1}{|B_\rho|}\int\limits_{B_{2\rho}(y)} |u(y)-u(z)|\,dz.$$

Toliau įvertinimas yra visiškai toks pats kaip integralo I_1 atveju, t.y.

$$I_2 \leq C(2\rho)^{(p-n)/p}\Big(\int\limits_{\Omega} |u_z(z)|^p\,dz\Big)^{1/p}.$$

Pasinaudoję šiais integralų I_1, I_2 įverčiais, gausime

$$|u(x)-u(y)| \leq I_1 + I_2 \leq C\|u_z\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}|x-y|^{1-n/p}.$$

Iš šio įverčio išplaukia, kad erdvė $\mathring{\mathrm{W}}_\mathrm{p}^1(\Omega)$ įsideda į erdvę $\mathrm{C}^{1-\mathrm{n}/\mathrm{p}}(\overline{\Omega})$.

Jeigu $\beta > \alpha$, tai erdvė $\mathrm{C}^\beta(\overline{\Omega})$ kompaktiškai įsideda į erdvę $\mathrm{C}^\alpha(\overline{\Omega})$. Todėl, kai $\alpha < 1 - n/p$, erdvė $\mathring{\mathrm{W}}_\mathrm{p}^1(\Omega)$ kompaktiškai įsideda į erdvę $\mathrm{C}^\alpha(\overline{\Omega})$. ▷

3.7 teorema. *Tegu Ω_s yra srities Ω ir erdvės $\mathbb{R}^s$ sankirta, $s > n-p$, $1 \leq p \leq n$ ir $s/q \geq n/p - 1$. Tada erdvė $\mathring{\mathrm{W}}_\mathrm{p}^1(\Omega)$ įsideda į erdvę $\mathrm{L_q}(\Omega_s)$. Be to, kai $s/q > n/p - 1$, įdėjimo operatorius yra visiškai tolydus.*

◁ Išnagrinėsime atvejį, kai $s/q > n/p - 1$. Pagal 3.3 teoremą operatorius

$$K_i : \mathrm{L_p}(\Omega) \to \mathrm{L_q}(\Omega_s), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

yra visiškai tolydus. Todėl operatorius

$$K_i\,D_i : \mathring{\mathrm{W}}_\mathrm{p}^1(\Omega) \to \mathrm{L_q}(\Omega_s), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

kartu ir operatorius

$$K = \sum_{i=1}^n K_i\,D_i : \mathring{\mathrm{W}}_\mathrm{p}^1(\Omega) \to \mathrm{L_q}(\Omega_s)$$

yra visiškai tolydus.

Atvejis $s/q = n/p - 1$ nagrinėjamas analogiškai. Reikia tik pasinaudoti 3.4 teorema. ▷

P a s t a b a . Iš šios teoremos išplaukia, kad kiekvienos funkcijos $u \in \mathring{\mathrm{W}}_\mathrm{p}^1(\Omega)$ ekvivalentiškumo klasėje yra funkcija $u \in \mathrm{L_q}(\Omega_s)$ ir

$$\|u\|_{\mathrm{L_q}(\Omega_s)} \leq C\|u\|_{\mathring{\mathrm{W}}_\mathrm{p}^1(\Omega)}; \tag{3.20}$$

čia konstanta C nepriklauso nuo konkretaus elemento $u \in \mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^{1}(\Omega)$. Be to, jeigu $s/q > n/p - 1$, tai kiekviena aprėžta aibė erdvėje $\mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^{1}(\Omega)$ yra sąlyginis kompaktas erdvėje $\mathrm{L}_{\mathrm{q}}(\Omega_s)$.

I š v a d o s:

1. Remiantis įverčiais, gautais įrodant 3.1 ir 3.2 teoremas, galima tvirtinti, kad (3.18) ir (3.20) nelygybėse konstanta C priklauso tik nuo Ω ir Ω_s diametrų, tačiau nepriklauso nuo jų geometrinių savybių.
2. Jeigu (3.7) teoremoje paimsime $s = n$ ir $p = q$, tai gausime, kad erdvė $\mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^{1}(\Omega)$ įsideda į erdvę $\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega)$ ir įdėjimo operatorius yra visiškai tolydus.

3.8 teorema. *Tegu Ω yra aprėžta erdvėje $\mathbb{R}^n$ sritis, $S = \partial\Omega$ – C^1 klasės paviršius. Tada:*

1. *Jeigu $p > n$, tai erdvė $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{1}(\Omega)$ įsideda į erdvę $\mathrm{C}(\overline{\Omega})$ ir įdėjimo operatorius yra visiškai tolydus.*
2. *Jeigu $s > n - p$, $1 \le p \le n$ ir $s/q \ge n/p - 1$, tai erdvė $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{1}(\Omega)$ įsideda į erdvę $\mathrm{L}_{\mathrm{q}}(\Omega_s)$. Be to, jeigu $s/q > n/p - 1$, tai įdėjimo operatorius yra visiškai tolydus.*

$\triangleleft$ Tegu Q yra tokia aprėžta sritis (galima imti, pavyzdžiui, pakankamai didelio spindulio rutulį), kad $\overline{\Omega} \subset Q$. Kiekvieną funkciją $u \in \mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{1}(\Omega)$, išlaikydami glodumą, pratęskime į sritį Q (žr. 2.13 teoremą). Tiksliau, konstruojame pratęsimo operatorių Π, kuris kiekvienai funkcijai $u \in \mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{1}(\Omega)$ priskiria tokią funkciją $v = \Pi u \in \mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^{1}(Q)$, kad

$$\|v\|_{\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{1}(Q)} \le C\|u\|_{\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{1}(\Omega)}, \quad v\big|_{\Omega} = u.$$

Tarkime, patenkintos pirmo teoremos punkto sąlygos ir $U \subset \mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{1}(\Omega)$ yra aprėžta aibė. Tada aibė ΠU yra aprėžta erdvėje $\mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^{1}(Q)$. Pagal 3.5 teoremą aibė ΠU yra sąlyginis kompaktas erdvėje $\mathrm{C}(\overline{Q})$. Kartu aibė $V = \Pi U\big|_{\Omega}$ yra sąlyginis kompaktas erdvėje $\mathrm{C}(\overline{\Omega})$. Taigi erdvė $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{1}(\Omega)$ įsideda į erdvę $\mathrm{C}(\overline{\Omega})$ ir įdėjimo operatorius yra visiškai tolydus. Antrasis teoremos teiginys įrodomas analogiškai. $\triangleright$

P a s t a b a. Šioje teoremoje įrodyta, kad esant atitinkamoms sąlygoms yra teisingos nelygybės:

$$\|u\|_{\mathrm{C}(\overline{\Omega})} \le C\|u\|_{\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{1}(\Omega)}, \quad \forall u \in \mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{1}(\Omega), \tag{3.21}$$

$$\|u\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{q}}(\Omega_s)} \le C\|u\|_{\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{1}(\Omega)}, \quad \forall u \in \mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{1}(\Omega)\,. \tag{3.22}$$

Atkreipsime dėmesį į tai, kad šiose nelygybėse normos $\|\cdot\|_{\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{1}(\Omega)}$ negalima pakeisti norma $\|\cdot\|_{\mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^{1}(\Omega)}$. Be to, skirtingai nuo (3.18) ir (3.20) nelygybių, konstanta C čia priklauso ne tik nuo srities diametro, bet ir nuo jo paviršiaus geometrinių savybių (tiksliau, nuo operatoriaus Π normos).

Pirmąjį 3.8 teoremos teiginį galima patikslinti.

3.9 teorema. *Tegu $p > n$, $\alpha \le 1 - n/p$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ yra aprėžta sritis, $S = \partial\Omega$ – C^1 klasės paviršius. Tada erdvė $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{1}(\Omega)$ įsideda į erdvę $\mathrm{C}^{\alpha}(\overline{\Omega})$ ir, kai $\alpha < 1 - n/p$, įdėjimo operatorius yra visiškai tolydus.*

Šios teoremos įrodymas yra visiškai toks pats kaip pirmojo 3.8 teoremos teiginio. Tik erdvę C reikia pakeisti erdve C^α ir remtis ne 3.5, o 3.6 teorema.

Įdėjimo teoremos yra teisingos ir neaprėžtos srities atveju.

3.10 teorema. *Tegu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ yra neaprėžta sritis, tenkinanti 2.14 teoremos sąlygas. Tada:*

1. *Jeigu $p > n$, tai erdvė $\mathrm{W}_\mathrm{p}^1(\Omega)$ įsideda į erdvę $\mathrm{C}(\overline{\Omega})$.*
2. *Jeigu $p > n$, $\alpha \le 1 - n/p$, tai erdvė $\mathrm{W}_\mathrm{p}^1(\Omega)$ įsideda į erdvę $\mathrm{C}^\alpha(\overline{\Omega})$.*
3. *Jeigu $s > n - p$, $p \ge 1$, $p \le q < \infty$ ir $s/q \ge n/p - 1$, tai erdvė $\mathrm{W}_\mathrm{p}^1(\Omega)$ įsideda į erdvę $\mathrm{L}_\mathrm{q}(\Omega_s)$.*

◁ Tegu $u \in \mathrm{W}_\mathrm{p}^1(\Omega)$. Išlaikydami glodumą pratęskime funkciją u į srities Ω išorę ir gautą funkciją pažymėkime ta pačia raide. Tada pagal 2.14 teoremą

$$\|u\|_{\mathrm{W}_\mathrm{p}^1(\mathbb{R}^n)} \le \tilde{C}\|u\|_{\mathrm{W}_\mathrm{p}^1(\Omega)};$$

čia konstanta $\tilde{C}$ nepriklauso nuo konkrečios funkcijos u.

Tegu $U_1, U_2, \dots, U_n, \dots$ yra kartotinumo N atvirų aibių (pavyzdžiui, rutulių) sistema, dengianti visą erdvę $\mathbb{R}^n$, $\Omega_s = \Omega \cap \mathbb{R}^s$, $U_k^s = U_k \cap \mathbb{R}^s$. Akivaizdu, kad $\Omega_s \subset \bigcup\limits_k U_k^s$.

Įrodysime trečiąjį teoremos teiginį. Tegu $s > n - p$ ir $s/q \ge n/p - 1$. Tada pagal 3.8 teoremą

$$\|u\|_{\mathrm{L}_\mathrm{q}(U_k^s)} \le C\|u\|_{\mathrm{W}_\mathrm{p}^1(U_k)};$$

čia konstanta C nepriklauso nei nuo u, nei nuo k. Raide $\mathbb{K}$ pažymėkime visumą indeksų k, kuriems aibė U_k^s yra netuščia. Tada

$$\|u\|^q_{\mathrm{L}_\mathrm{q}(\Omega_s)} \le \sum_{k\in\mathbb{K}} \|u\|^q_{\mathrm{L}_\mathrm{q}(U_k^s)} \le C^q \sum_{k\in\mathbb{K}} \|u\|^q_{\mathrm{W}_\mathrm{p}^1(U_k)}.$$

Kadangi $q \ge p$, tai

$$\sum_k \|u\|^q_{\mathrm{W}_\mathrm{p}^1(U_k)} = \sum_k \Big[\int\limits_{U_k} \Big(|u_x|^p + |u|^p\Big)\,dx\Big]^{q/p} \le$$

$$\le \Big[\sum_k \int\limits_{U_k} \Big(|u_x|^p + |u|^p\Big)\,dx\Big]^{q/p} = \Big[\sum_k \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big(|u_x|^p + |u|^p\Big)\chi_k(x)\,dx\Big]^{q/p};$$

čia: χ_k – aibės U_k *charakteristinė funkcija,* $|u_x|^p = \sum\limits_{i=1}^n |u_{x_i}|^p$. Aibių sistemos $\{U_k\}$ kartotinumas neviršija N, t.y. kiekvienas taškas $x \in \mathbb{R}^n$ gali priklausyti ne daugiau kaip N aibėms U_k. Todėl

$$\sum_k \chi_k(x) \le N, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Kartu
$$\|u\|_{\mathrm{L_q}(\Omega_s)} \le CN^{1/p}\|u\|_{\mathrm{W}^1_\mathrm{p}(\mathbb{R}^n)} \le \tilde{C}CN^{1/p}\|u\|_{\mathrm{W}^1_\mathrm{p}(\Omega)}.$$

Taigi erdvė $\mathrm{W}^1_\mathrm{p}(\Omega)$ įsideda į erdvę $\mathrm{L_q}(\Omega_s)$ ir trečiasis teoremos teiginys įrodytas. Pirmasis ir antrasis teoremos teiginiai įrodomi analogiškai. $\triangleright$

Atkreipsime dėmesį į tai, kad funkcija u, priklausanti erdvei $\mathrm{W}^1_\mathrm{p}(\Omega)$ arba jos poerdviui $\mathring{\mathrm{W}}^1_\mathrm{p}(\Omega)$, yra apibrėžta b.v. $x \in \Omega$. Todėl iš pirmo žvilgsnio atrodo, kad nėra prasmės kalbėti apie jos reikšmes aibėje $\Omega_s = \Omega \cap \mathbb{R}^s$, kai $s < n$, nes aibės Ω_s Lebego matas erdvėje $\mathbb{R}^n$ lygus nuliui. Iš tikrųjų erdvės $\mathring{\mathrm{W}}^1_\mathrm{p}(\Omega)$ atveju įdėjimo teorema teigia, kad kiekvienos funkcijos $u \in \mathring{\mathrm{W}}^1_\mathrm{p}(\Omega)$ ekvivalentiškumo klasėje yra konkretus atstovas (jį galima apibrėžti (3.15) formule), apibrėžtas bet kokiame srities Ω pjūvyje plokštuma $\mathbb{R}^s$ ir turintis teoremoje nurodytas savybes.

Įrodysime dar vieną svarbią tokių atstovų savybę. Tegu Ω_s ir Ω_s^* yra du artimi ir lygiagretūs srities Ω pjūviai plokštuma $\mathbb{R}^s$. Tada funkcijos $u\big|_{\Omega_s}$ ir $u\big|_{\Omega_s^*}$ yra artimos $\mathrm{L_q}$ normos prasme. Tiksliau, yra teisinga tokia teorema.

3.11 teorema. *Tegu* Ω *yra aprėžta erdvėje* $\mathbb{R}^n$ *sritis,* $1 \le p \le n$, $s > n - p$, $q < \infty$, $1 - n/p + s/q \ge 0$. *Tada kiekvienos funkcijos* $u \in \mathring{\mathrm{W}}^1_\mathrm{p}(\Omega)$ *ekvivalentiškumo klasėje yra atstovas, apibrėžtas aibėje* $\Omega_s = \Omega \cap \mathbb{R}^s$ *ir bet kokiam* $z \in \mathbb{R}^n,\ |z| = 1$, *norma*
$$\|u(x+tz) - u(x)\|_{\mathrm{L_q}(\Omega_s)} \to 0,$$
kai $t \to 0$.

$\triangleleft$ Laisvai pasirinkime funkciją $u \in \mathring{\mathrm{W}}^1_\mathrm{p}(\Omega)$. Pratęskime ją nuliu į srities Ω išorę ir gautą funkciją pažymėkime ta pačia raide u. Tada $u \in \mathring{\mathrm{W}}^1_\mathrm{p}(Q)$, $\forall Q : Q \supset \overline{\Omega}$. Be to, pakankamai mažiems $t > 0$ skirtumas
$$u(x+tz) - u(x) \in \mathring{\mathrm{W}}^1_\mathrm{p}(Q)$$
ir
$$\|u(x+tz) - u(x)\|_{\mathrm{L_q}(\Omega_s)} \le C\sum_{i=1}^n \|u_{x_i}(x+tz) - u_{x_i}(x)\|_{\mathrm{L_p}(Q)}.$$
Kadangi $u_{x_i} \in \mathrm{L_p}(Q)$, tai ji yra tolydi $\mathrm{L_p}$ prasme. Todėl
$$\sum_{i=1}^n \|u_{x_i}(x+tz) - u_{x_i}(x)\|_{\mathrm{L_p}(Q)} \to 0,$$
kai $t \to 0$. Taigi
$$\|u(x+tz) - u(x)\|_{\mathrm{L_q}(\Omega_s)} \to 0,$$
kai $t \to 0$. $\triangleright$

P a s t a b o s:

1. Toks pat teiginys yra teisingas ir erdvės $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{1}(\Omega)$ atveju. Tik 3.11 teoremoje aibę Ω_s reikia pakeisti bet kokia aibe $\Omega'_s : \overline{\Omega'_s} \subset \Omega_s$.

2. Įrodytos įdėjimo teoremos išlieka teisingos, jeigu jose sritį $\Omega_s = \Omega \cap \mathbb{R}^s$ pakeisime paviršiumi $S = \Omega \cap \Gamma$; čia Γ – glodus[1] s-matis paviršius. Be to, galimas ir toks atvejis, kai $S = \partial\Omega$ arba paviršiaus $\partial\Omega$ dalis.

3.12 teorema. *Tegu Ω yra aprėžta erdvėje $\mathbb{R}^n$ sritis, $S = \partial\Omega$ – C^1 klasės paviršius, $s > n - p$, $1 \le p \le n$ ir $s/q \ge n/p - 1$. Tada erdvė $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{1}(\Omega)$ įsideda į erdvę $\mathrm{L}_{\mathrm{q}}(S)$. Be to, jeigu $s/q > n/p - 1$, tai įdėjimo operatorius yra visiškai tolydus.*

Šios teoremos įrodymą galima rasti [8] knygoje.

I š v a d a. Tegu Ω yra aprėžta erdvėje $\mathbb{R}^n$ sritis, $S = \partial\Omega$ – C^1 klasės paviršius, $u \in \mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{1}(\Omega)$, $v \in \mathrm{W}_{\mathrm{p}'}^{1}(\Omega)$, $p \ge 1$. Tada yra teisinga integravimo dalimis formulė

$$\int\limits_{\Omega} uv_{x_i}\,dx = -\int\limits_{\Omega} u_{x_i}v\,dx + \int\limits_{S} uv\cos(\mathbf{n}, x_i)dS. \tag{3.23}$$

$\triangleleft$ Kadangi funkcijas u, v galima pratęsti į platesnę sritį išlaikant glodumą, tai erdvė $\mathrm{C}^1(\overline{\Omega})$ yra tiršta erdvėse $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{1}(\Omega)$ ir $\mathrm{W}_{\mathrm{p}'}^{1}(\Omega)$. Todėl egzistuoja seka $\{u_k\}$, konverguojanti į u erdvėje $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{1}(\Omega)$, ir seka $\{v_k\}$, konverguojanti į v erdvėje $\mathrm{W}_{\mathrm{p}'}^{1}(\Omega)$. Kiekvienam $k = 1, 2, \dots$ yra teisinga integravimo dalimis formulė

$$\int\limits_{\Omega} u_k v_{kx_i}\,dx = -\int\limits_{\Omega} u_{kx_i}v_k\,dx + \int\limits_{S} u_k v_k\cos(\mathbf{n}, x_i)dS. \tag{3.24}$$

Pagal 3.12 teoremą

$$\|u - u_k\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(S)} \le C\|u - u_k\|_{\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{1}(\Omega)},$$
$$\|v - v_k\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{p}'}(S)} \le C\|v - v_k\|_{\mathrm{W}_{\mathrm{p}'}^{1}(\Omega)}.$$

Be to,

$$\|u - u_k\|_{\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{1}(\Omega)} \to 0, \quad \|v - v_k\|_{\mathrm{W}_{\mathrm{p}'}^{1}(\Omega)} \to 0,$$

kai $k \to \infty$. Todėl (3.24) formulėje galima pereiti prie ribos, t.y. pakeisti funkcijas u_k ir v_k atitinkamai funkcijomis u ir v. $\triangleright$

K o m e n t a r a i:

1. Įdėjimo teoremų apribojimai rodikliams yra tikslūs. Erdvė $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{1}(\Omega)$ neįsideda į erdvę $\mathrm{L}_{\mathrm{q}}(\Omega_s)$, jeigu $s/q < n/p - 1$. Pavyzdžiui, funkcija

$$u(x) = |x|^\alpha, \quad 1 - n/p < \alpha < -s/q,$$

rutulyje $B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ yra sumuojama laipsniu p :

$$\int\limits_{B} |u(x)|^p\,dx = \int\limits_{B} |x|^{\alpha p}\,dx \le C/(n + \alpha p) < \infty.$$

[1]Priminsime, kad paviršius vadinamas glodžiu, jeigu jis yra C^1 klasės paviršius.

Be to, egzistuoja jos pirmosios eilės apibendrintos išvestinės (žr. 2.4 skyrelio 4 pavyzdį)

$$u_{x_i}(x) = \alpha x_i |x|^{\alpha-2}, \quad x \in B,\ i = 1,2,\dots,n,$$

ir rutulyje B jos yra sumuojamos laipsniu p :

$$\int\limits_B |u_{x_i}(x)|^p\,dx \le \alpha^p \int\limits_B |x|^{(\alpha-1)p}\,dx \le C'/(n+(\alpha-1)p) < \infty.$$

Taigi funkcija $u \in \mathrm{W}^1_{\mathrm{p}}(B)$. Tačiau rutulyje $B^s = B \cap \mathbb{R}^s$ ji nėra sumuojama laipsniu q, nes integralas

$$\int\limits_{B^s} |u(x)|^q\,dx = \int\limits_{B^s} |x|^{\alpha q}\,dx$$

diverguoja, kai $s + \alpha q < 0$. Todėl funkcija $u \notin \mathrm{L}_{\mathrm{q}}(B^s)$ ir erdvė $\mathrm{W}^1_{\mathrm{p}}(B)$ neįsideda į erdvę $\mathrm{L}_{\mathrm{q}}(B^s)$.

Neaprėžtos srities atveju erdvė $\mathrm{W}^1_{\mathrm{p}}(\Omega)$ neįsideda į erdvę $\mathrm{L}_{\mathrm{q}}(\Omega)$, jeigu $q < p$. Pavyzdžiui, funkcija

$$u(x) = |x|^\alpha, \quad -\frac{n}{q} < \alpha < -\frac{n}{p},$$

priklauso erdvei $\mathrm{W}^1_{\mathrm{p}}(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B})$, tačiau nepriklauso erdvei $\mathrm{L}_{\mathrm{q}}(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B})$ (patikrinkite). Todėl $\mathrm{W}^1_{\mathrm{p}}(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B})$ neįsideda į erdvę $\mathrm{L}_{\mathrm{q}}(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B})$.

2. Rodiklis q^*, apibrėžtas (3.11) lygtimi, vadinamas ribiniu. Atkreipsime dėmesį, kad rodiklis q^* yra apibrėžtas tik kai $p < n$. Be to, $q^* > p$. Erdvė $\mathrm{W}^1_{\mathrm{p}}(\Omega)$ įsideda į erdvę $\mathrm{L}_{\mathrm{q}}(\Omega_s)$, jeigu $q \le q^*$, ir neįsideda į ją, jeigu $q > q^*$.

3. Jeigu $p \ge n$, tai aprėžtos srities atveju erdvė $\mathrm{W}^1_{\mathrm{p}}(\Omega)$ įsideda į erdvę $\mathrm{L}_{\mathrm{q}}(\Omega_s)$, $\forall q \ge 1$. Neaprėžtos srities atveju erdvė $\mathrm{W}^1_{\mathrm{p}}(\Omega)$ įsideda į erdvę $\mathrm{L}_{\mathrm{q}}(\Omega)$, $\forall q : p \le q < \infty$. Jeigu $p > n$, tai erdvė $\mathrm{W}^1_{\mathrm{p}}(\Omega)$ įsideda į erdvę $\mathrm{C}(\overline{\Omega})$, nepriklausomai nuo to, ar sritis Ω yra aprėžta, ar ne. Tačiau jeigu sritis Ω yra neaprėžta, tai ji dar turi tenkinti 2.14 teoremos arba analogiškas sąlygas, garantuojančias aprėžto pratęsimo operatoriaus egzistavimą.

4. Kai $p = n = 1$, erdvė $\mathrm{W}^1_{\mathrm{p}}(a,b)$ įsideda į erdvę $\mathrm{C}[a,b]$ (žr. 2.7 teoremą). Jeigu $p = n > 1$, tai erdvė $\mathrm{W}^1_{\mathrm{p}}(\Omega)$ neįsideda į erdvę $\mathrm{C}(\overline{\Omega})$. Pavyzdžiui, funkcija

$$u(x) = \ln\bigl|\ln|x|\bigr|, \quad x \in B_{e^{-1}} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < e^{-1}\},$$

rutulyje $B_{e^{-1}}$ yra sumuojama laipsniu n. Be to, rutulyje $B_{e^{-1}}$ egzistuoja jos pirmosios eilės apibendrintos išvestinės

$$u_{x_i} = x_i |x|^{-2} \ln^{-1}|x|,$$

sumuojamos laipsniu n (patikrinkite). Todėl funkcija $u \in \mathrm{W}^1_{\mathrm{p}}(B_{e^{-1}})$. Tačiau ji nepriklauso erdvei $\mathrm{C}(\overline{B}_{e^{-1}})$, nes turi trūkį koordinačių pradžioje. Taigi erdvė $\mathrm{W}^1_{\mathrm{p}}(B_{e^{-1}})$ neįsideda į erdvę $\mathrm{C}(\overline{B}_{e^{-1}})$.

5. Erdvės $\mathrm{W}_\mathrm{p}^1(\Omega)$ įdėjimo operatorius į erdvę $\mathrm{C}(\overline{\Omega})$ yra visiškai tolydus tik tada, kai $p > n$. Jeigu $p \le n$, tai erdvės $\mathrm{W}_\mathrm{p}^1(\Omega)$ įdėjimo operatorius į erdvę $\mathrm{L}_\mathrm{q}(\Omega_s)$ yra visiškai tolydus tik tada, kai $1 - n/p + s/q > 0$. Be to, abiem atvejais Ω yra aprėžta sritis. Neaprėžtos srities atveju erdvės $\mathrm{W}_\mathrm{p}^1(\Omega)$ įdėjimo operatorius į erdvę $\mathrm{C}(\overline{\Omega})$ arba į erdvę $\mathrm{L}_\mathrm{q}(\Omega_s)$ nėra visiškai tolydus. Pateiksime kelis pavyzdžius.

   Tegu $u \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ir
$$u_k(x) = u(x - x^{(k)}), \quad k = 1, 2, \dots, \quad |x^{(k)}| \to \infty,$$
   kai $k \to \infty$. Taip apibrėžta funkcijų seka yra aprėžta erdvėje $\mathrm{W}_\mathrm{p}^1(\mathbb{R}^n)$ su bet kokiu rodikliu $p > n$. Be to, ji konverguoja į nulį erdvėje $\mathrm{C}(Q)$ bet kokiame kompakte $Q \subset \mathbb{R}^n$, tačiau nekonverguoja erdvėje $\mathrm{C}(\mathbb{R}^n)$. Todėl iš šios sekos negalima išskirti konverguojančio erdvėje $\mathrm{C}(\mathbb{R}^n)$ posekio. Kartu ji nėra sąlyginis kompaktas erdvėje $\mathrm{C}(\mathbb{R}^n)$. Taigi erdvės $\mathrm{W}_\mathrm{p}^1(\mathbb{R}^n)$ įdėjimo operatorius į erdvę $\mathrm{C}(\mathbb{R}^n)$ nėra visiškai tolydus.

   Tegu $u \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ir
$$u_k(x) = k^{-\frac{n}{p}} u(x/k), \quad k = 1, 2, \dots$$
   Taip apibrėžta funkcijų seka yra aprėžta erdvėje $\mathrm{W}_\mathrm{p}^1(\mathbb{R}^n)$ su bet kokiu rodikliu $p \ge 1$. Tačiau nors ir labai didelį teigiamą skaičių R pasirinktume,
$$\sup_k \|u_k(x)\|_{\mathrm{L}_\mathrm{p}(\mathbb{R}^n \setminus B_R)} = \sup_k \|u(x)\|_{\mathrm{L}_\mathrm{p}(\mathbb{R}^n \setminus B_{R/k})} \not\to 0,$$
   kai $k \to \infty$. Todėl (žr. 2.4 teoremą) ji nėra sąlyginis kompaktas erdvėje $\mathrm{L}_\mathrm{p}(\mathbb{R}^n)$. Taigi erdvės $\mathrm{W}_\mathrm{p}^1(\mathbb{R}^n)$ įdėjimo operatorius į erdvę $\mathrm{L}_\mathrm{p}(\mathbb{R}^n)$ nėra visiškai tolydus.

   Tegu $p < n$, $u \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ir
$$u_k(x) = k^{\frac{n}{p} - 1} u(kx), \quad k = 1, 2, \dots$$
   Taip apibrėžta funkcijų seka yra aprėžta erdvėje $\mathrm{W}_\mathrm{p}^1(B)$. Tačiau nors ir labai mažą teigiamą skaičių h pasirinktume,
$$\sup_{|z|<h} \|u_k(x+z) - u_k(x)\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{q}^*}(B)} = \sup_{|z|<h} \|u(x+zk) - u(x)\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{q}^*}(B_k)} \not\to 0,$$
   kai $k \to \infty$. Todėl (žr. 2.3 teoremą) ji nėra sąlyginis kompaktas erdvėje $\mathrm{L}_{\mathrm{q}^*}(B)$. Taigi $\mathrm{W}_\mathrm{p}^1(B)$ įdėjimo operatorius į erdvę $\mathrm{L}_{\mathrm{q}^*}(B)$ nėra visiškai tolydus.

3.4. ERDVIŲ $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ ĮDĖJIMO TEOREMOS

3.13 teorema. *Tegu Ω yra aprėžta erdvėje $\mathbb{R}^n$ sritis, $S = \partial\Omega$ – C^1 klasės paviršius. Tada:*

1. *Jeigu $m < k - n/p$ (t.y. kai $1/p - (k-m)/n < 0$), tai erdvė $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ įsideda į erdvę $\mathrm{C}^{\mathrm{m}}(\overline{\Omega})$ ir įdėjimo operatorius yra visiškai tolydus.*

2. *Jeigu $0 \leq m \leq k,\ p, q \geq 1,\ q < \infty$ ir $1/q \geq 1/p - (k-m)/n$, tai erdvė $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ įsideda į erdvę $\mathrm{W}_{\mathrm{q}}^{\mathrm{m}}(\Omega)$ ir tuo atveju, kai $1/q > 1/p - (k-m)/n$, įdėjimo operatorius yra visiškai tolydus.*

$\triangleleft$ Pagal 3.8 teoremą erdvė $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{1}(\Omega)$ įsideda į erdvę $\mathrm{C}(\overline{\Omega})$, jeigu $p > n$, ir į erdvę $\mathrm{L}_{\mathrm{q}}(\Omega)$, jeigu $1/q \geq 1/p - 1/n$. Be to, jeigu $1/q = 1/p - 1/n$, tai įdėjimo operatorius, nors ir nėra visiškai tolydus, yra aprėžtas. Todėl $\forall u \in \mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ ir $\forall \alpha : |\alpha| = k - 1$

$$D^\alpha u \in \mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{1}(\Omega) \hookrightarrow \begin{cases} \mathrm{C}(\overline{\Omega}), & \text{kai} \quad 1/p - 1/n < 0, \\ \mathrm{L}_{\mathrm{p}_1}(\Omega), & \text{kai} \quad 1/p_1 = 1/p - 1/n. \end{cases}$$

Tegu $v \in \mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega),\ v_{x_i} \in \mathrm{L}_{\mathrm{p}_1}(\Omega),\ \forall i = 1, \ldots, n$. Kadangi Ω yra C^1 klasės sritis, tai $v \in \mathrm{W}_{\mathrm{p}_1}^{1}(\Omega)$. Pasinaudoję šia savybe, gausime, kad $\forall \alpha : |\alpha| = k - 2$

$$D^\alpha u \in \mathrm{W}_{\mathrm{p}_1}^{1}(\Omega) \hookrightarrow \begin{cases} \mathrm{C}(\overline{\Omega}), & \text{kai} \quad 1/p - 2/n < 0, \\ \mathrm{L}_{\mathrm{p}_2}(\Omega), & \text{kai} \quad 1/p_2 = 1/p - 2/n. \end{cases}$$

Taip samprotaudami, $\forall \alpha : |\alpha| = k - r$ gausime

$$D^\alpha u \in \mathrm{W}_{\mathrm{p}_{\mathrm{r}-1}}^{1}(\Omega) \hookrightarrow \begin{cases} \mathrm{C}(\overline{\Omega}), & \text{kai} \quad 1/p - r/n < 0, \\ \mathrm{L}_{\mathrm{p}_{\mathrm{r}}}(\Omega), & \text{kai} \quad 1/p_r = 1/p - r/n. \end{cases}$$

Įrodysime antrąjį teoremos teiginį. Tegu $1/p_1 = 1/p - 1/n,\ u \in \mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$. Tada $D^\alpha u \in \mathrm{L}_{\mathrm{p}_1}(\Omega),\ \forall \alpha : |\alpha| = k - 1$. Be to, $D^\alpha u \in \mathrm{L}_{\mathrm{p}_1}(\Omega),\ \forall \alpha : |\alpha| \leq k - 1$. Todėl $u \in \mathrm{W}_{\mathrm{p}_1}^{\mathrm{k}-1}(\Omega)$. Taigi erdvė $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ įsideda į erdvę $\mathrm{W}_{\mathrm{p}_1}^{\mathrm{k}-1}(\Omega)$. Taip samprotaudami, gausime

$$\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega) \hookrightarrow \mathrm{W}_{\mathrm{p}_1}^{\mathrm{k}-1}(\Omega) \hookrightarrow \mathrm{W}_{\mathrm{p}_2}^{\mathrm{k}-2}(\Omega) \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow \mathrm{W}_{\mathrm{p}_{\mathrm{r}}}^{\mathrm{k}-\mathrm{r}}(\Omega).$$

Imkime čia $r = k - m$ ir pažymėkime $p_r = q$. Tada

$$\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega) \hookrightarrow \mathrm{W}_{\mathrm{q}}^{\mathrm{m}}(\Omega).$$

Erdvės $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ įdėjimo į erdvę $\mathrm{W}_{\mathrm{q}}^{\mathrm{m}}(\Omega)$ operatorius

$$\Pi = \Pi_{r-1} \cdot \ldots \cdot \Pi_0;$$

čia Π_i yra erdvės $\mathrm{W}_{\mathrm{p}_{\mathrm{i}}}^{\mathrm{k}-\mathrm{i}}(\Omega)$ įdėjimo operatorius į erdvę $\mathrm{W}_{\mathrm{p}_{\mathrm{i}+1}}^{\mathrm{k}-\mathrm{i}-1}(\Omega),\ p_0 = p$. Be to, jeigu vietoje bent vienos iš lygybių $1/p_i = 1/p - i/n,\ i = 1, \ldots, m$ paimsime nelygybę $1/p_i > 1/p - i/n$, tai atitinkamas įdėjimo operatorius bus visiškai tolydus. Kartu visiškai tolydus bus ir operatorius Π.

Įrodysime pirmąjį teoremos teiginį. Tegu $r = k - m$ ir $1/p - (k-m)/n < < 0$. Jeigu $m = k - 1$, tai funkcija u ir visos jos išvestinės iki $(k-1)$-osios eilės imtinai yra tolydžios. Todėl (žr. 3.8 teoremą) erdvė $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ įsideda į erdvę $\mathrm{C}^{\mathrm{k}-1}(\overline{\Omega})$ ir įdėjimo operatorius yra visiškai tolydus. Jeigu $m < k-1$, tai egzistuoja toks skaičius $q > \max\{p, n\}$, kad $1/q > 1/p - (k-m-1)/n$. Tačiau tada

$$\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega) \hookrightarrow \mathrm{W}_{\mathrm{q}}^{\mathrm{m}+1}(\Omega) \hookrightarrow \mathrm{C}^{\mathrm{m}}(\overline{\Omega}).$$

Be to, kiekvienas iš šių erdvių įdėjimo operatorių yra visiškai tolydus. Todėl erdvės $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ įdėjimo į erdvę $\mathrm{C}^{\mathrm{m}}(\overline{\Omega})$ operatorius taip pat yra visiškai tolydus. $\triangleright$

Pirmąjį teoremos teiginį galima patikslinti. Remiantis 3.9 teorema, galima įrodyti, kad funkcijos u m-osios eilės išvestinės yra ne tik tolydžios, bet ir tenkina Helderio sąlygą su tam tikru rodikliu α. Tiksliau, yra teisinga tokia teorema.

3.14 teorema. *Tegu Ω yra aprėžta erdvėje $\mathbb{R}^n$ sritis, $S = \partial\Omega$ – C^1 klasės paviršius, $\alpha \leq k - n/p - m$. Tada erdvė $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ įsideda į erdvę $\mathrm{C}^{\mathrm{m}+\alpha}(\overline{\Omega})$ ir, kai $\alpha < k - n/p - m$, įdėjimo operatorius yra visiškai tolydus.*

3.15 teorema. *Tegu Ω yra aprėžta erdvėje $\mathbb{R}^n$ sritis, $S = \partial\Omega$ – C^1 klasės paviršius, $1 < p < n$, $q < \infty$ ir*

$$\frac{1}{q}\frac{n-1}{n} \geq \frac{1}{p} - \frac{k-m}{n}.$$

Tada erdvė $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ įsideda į erdvę $\mathrm{W}_{\mathrm{q}}^{\mathrm{m}}(S)$ ir tuo atveju, kai

$$\frac{1}{q}\frac{n-1}{n} > \frac{1}{p} - \frac{k-m}{n}, \tag{3.25}$$

įdėjimo operatorius yra visiškai tolydus.

$\triangleleft$ Tegu

$$\frac{1}{q_1} = \frac{1}{p} - \frac{k-m-1}{n}.$$

Tada (žr. 3.13 teoremą) erdvė $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ įsideda į erdvę $\mathrm{W}_{\mathrm{q}_1}^{\mathrm{m}+1}(\Omega)$. Kiekvienam $\alpha : |\alpha| \leq m$ išvestinė $D^\alpha u \in \mathrm{W}_{\mathrm{q}_1}^{1}(\Omega)$. Pagal teoremos sąlygą

$$\frac{1}{q}\frac{n-1}{n} \geq \frac{1}{q_1} - \frac{1}{n}.$$

Todėl (žr. 3.8 teoremą ir pastabą prie 3.11 teoremos) erdvė $\mathrm{W}_{\mathrm{q}_1}^{1}(\Omega)$ įsideda į erdvę $\mathrm{L}_{\mathrm{q}}(S)$. Kartu erdvė $\mathrm{W}_{\mathrm{q}_1}^{\mathrm{m}+1}(\Omega)$ įsideda į erdvę $\mathrm{W}_{\mathrm{q}}^{\mathrm{m}}(S)$. Taigi erdvė $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ įsideda į erdvę $\mathrm{W}_{\mathrm{q}}^{\mathrm{m}}(S)$. Be to, jeigu

$$\frac{1}{q}\frac{n-1}{n} > \frac{1}{q_1} - \frac{1}{n},$$

tai įdėjimo operatorius yra visiškai tolydus. $\triangleright$

Šitą teoremą galima apibendrinti. Tegu $\Omega_\Gamma = \Omega \cap \Gamma$, Γ – klasės C^{k} s-matis paviršius erdvėje $\mathbb{R}^n$. Tada yra teisinga teorema.

3.16 teorema. *Tegu* Ω *yra aprėžta erdvėje* $\mathbb{R}^n$ *sritis,* $S = \partial\Omega$ *–* C^1 *klasės paviršius,* $1 \leq p < n,\ 0 \leq m < k,\ 0 < s < n,\ s > n - p(k-m)$ *ir*

$$\frac{s}{nq} \geq \frac{1}{p} - \frac{k-m}{n}.$$

Tada erdvė $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ *įsideda į erdvę* $\mathrm{W}_{\mathrm{q}}^{\mathrm{m}}(\Omega_\Gamma)$ *ir tuo atveju, kai*

$$\frac{s}{nq} > \frac{1}{p} - \frac{k-m}{n},$$

įdėjimo operatorius yra visiškai tolydus.

Bendru atveju, remiantis vien 3.3 skyrelyje įrodytais teiginiais, šios teoremos tiesiogiai įrodyti negalima. Reikia tikslesnių funkcijų $u \in \mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ integralinių įverčių. Tokie įverčiai bus gauti 3.6 skyrelyje.

Pabaigoje dar suformuluosime erdvių $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ įdėjimo teoremą neaprėžtos srities atveju. Jos įrodymas yra visiškai toks pat kaip 3.10 teoremos.

3.17 teorema. *Tegu* Ω *yra neaprėžta erdvėje* $\mathbb{R}^n$ *sritis, tenkinanti* 2.14 *teoremos sąlygas,* $\Omega_s = \Omega \cap \mathbb{R}^s$. *Tada:*

1. *Jeigu* $0 \leq m < k - n/p$, *tai erdvė* $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ *įsideda į erdvę* $\mathrm{C}^{\mathrm{m}}(\overline{\Omega})$.

2. *Jeigu* $\alpha \leq k - n/p - m$, *tai erdvė* $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ *įsideda į erdvę* $\mathrm{C}^{\mathrm{m}+\alpha}(\overline{\Omega})$.

3. *Jeigu*
$$1 \leq p \leq q, \quad q < \infty, \quad s > n - (k-m)p$$
ir
$$s/nq \geq 1/p - (k-m)/n,$$
tai erdvė $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ *įsideda į erdvę* $\mathrm{W}_{\mathrm{q}}^{\mathrm{m}}(\Omega_s)$.

3.5. EKVIVALENČIOSIOS NORMOS ERDVĖSE $\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$

3.18 teorema. *Tegu Ω yra aprėžta erdvėje $\mathbb{R}^n$ sritis, $S = \partial\Omega$ – C^1 klasės paviršius, $\psi_1, \dots, \psi_m$ – pusnormės erdvėje $\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$, C – tokia teigiama konstanta, kad*

$$\psi_i(u) \le C\|u\|_{\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)}, \ \forall u \in \mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega), \ i = 1, 2, \dots, m. \tag{3.26}$$

Be to, tegu pusnormės $\psi_1, \dots, \psi_m$ apibrėžia pilną funkcijų sistemą $(k-1)$-ojo laipsnio polinomų aibėje (t.y. jeigu $\psi_1(P) = \dots = \psi_m(P) = 0$ ir P yra $(k-1)$-ojo laipsnio polinomas, tai $P = 0$). Tada normos

$$|\!|\!|u|\!|\!|_{\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|=k} \| D^\alpha u\|_{\mathrm{L}_\mathrm{p}(\Omega)} + \sum_{j=1}^{m} \psi_j(u) \tag{3.27}$$

ir

$$\|u\|_{\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\le k} \| D^\alpha u\|_{\mathrm{L}_\mathrm{p}(\Omega)} \tag{3.28}$$

yra ekvivalenčios.

◃ Normos, apibrėžtos (3.27) ir (3.28) formulėmis, yra ekvivalenčios, jeigu egzistuoja tokios teigiamos konstantos $C_1, \ C_2$, kad

$$C_1|\!|\!|u|\!|\!|_{\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)} \le \|u\|_{\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)} \le C_2|\!|\!|u|\!|\!|_{\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)}. \tag{3.29}$$

Pirmoji iš (3.29) nelygybių išplaukia iš (3.26) sąlygos. Įrodysime antrąją nelygybę. Tarkime priešingai, kad šita nelygybė yra negalima. Tada kiekvienam natūraliajam n atsiras tokia funkcija $u_n \in \mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$, kad

$$\|u_n\|_{\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)} \ge n|\!|\!|u_n|\!|\!|_{\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)}.$$

Tegu

$$v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|_{\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)}}, \ n = 1, 2, \dots$$

Akivaizdu, kad

$$\|v_n\|_{\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)} = 1, \ \forall n = 1, 2, \dots$$

Iš čia išplaukia, kad seka $\{v_n\}$ erdvėje $\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$ yra aprėžta. Erdvė $\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$ įsideda į erdvę $\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k-1}(\Omega)$ ir įdėjimo operatorius yra visiškai tolydus. Todėl iš aprėžtos erdvėje $\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$ sekos $\{v_n\}$ galima išskirti konverguojantį erdvėje $\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k-1}(\Omega)$ posekį $\{v_{n_i}\}$. Be to, norma

$$|\!|\!|v_n|\!|\!|_{\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)} \le 1/n \to 0, \tag{3.30}$$

kai $n \to \infty$. Iš čia išplaukia, kad

$$\| D^\alpha v_n\|_{\mathrm{L}_\mathrm{p}(\Omega)} \to 0, \ \forall \alpha : |\alpha| = k,$$

kai $n \to \infty$. Tačiau tada posekis $\{v_{n_i}\}$ konverguoja erdvėje $\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$. Kadangi erdvė $\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$ yra pilna, tai egzistuoja toks elementas $v \in \mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$, kad

$$v = \lim_{n_i \to \infty} v_{n_i}.$$

Funkcijos v visos k-osios eilės išvestinės yra lygios nuliui. Todėl (žr. 2.3 skyrelio 2.6 teoremą) v yra $(k-1)$-ojo laipsnio polinomas. Pažymėkime $v = P$. Tada

$$\|P\|_{\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)} = \lim_{n_i \to \infty} \|v_{n_i}\|_{\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)} = 1. \tag{3.31}$$

Iš (3.30) įverčio išplaukia, kad

$$\sum_{j=1}^m \psi_j(v_{n_i}) \to 0,$$

kai $n_i \to \infty$. Kadangi pusnormės $\psi_j,\ j = 1, 2, \dots,$ yra tolydžios, tai

$$0 = \lim_{n_i \to \infty} \sum_{j=1}^m \psi_j(v_{n_i}) = \sum_{j=1}^m \psi_j\big(\lim_{n_i \to \infty} v_{n_i}\big) = \sum_{j=1}^m \psi_j(P).$$

Tačiau ši lygybė yra galima tik tuo atveju, kai $P = 0$. Gauta prieštara įrodo, kad padaryta prielaida yra neteisinga. Taigi egzistuoja tokia konstanta C_2, kad

$$\|u\|_{\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)} \le C_2 \|\!|u|\!\|_{\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)}.$$

Teorema įrodyta. ▷

Specialiai parinkus pusnormes ψ_i, galima gauti keletą svarbių nelygybių.

P u a n k a r e n e l y g y b ė. Tegu $k = 1$ ir

$$\psi_1(u) = \Big|\int_\omega u\,dx\Big|;$$

čia ω – mati srityje Ω aibė, $|\omega| > 0$. Kiekvienai pastoviai funkcijai $u \in \mathrm{W}_\mathrm{p}^1(\Omega)$ iš lygybės $\psi_1(u) = |\omega||u| = 0$ išplaukia, kad $u = 0$. Todėl pusnormė ψ_1 tenkina 3.18 teoremos sąlygas. Taigi egzistuoja tokia teigiama konstanta C, kad

$$\|u\|_{\mathrm{L}_\mathrm{p}(\Omega)} \le C\Big(\Big|\int_\omega u\,dx\Big| + \sum_{i=1}^n \|u_{x_i}\|_{\mathrm{L}_\mathrm{p}(\Omega)}\Big).$$

F r y d r i c h s o n e l y g y b ė. Tegu $k = 1$ ir $S = \partial\Omega$ – pakankamai glodus paviršius. Tada erdvė $\mathrm{W}_\mathrm{p}^1(\Omega)$ įsideda į erdvę $\mathrm{L}_\mathrm{p}(S)$ ir pusnormę galima apibrėžti taip:

$$\psi_1(u) = \Big|\int_S u\,dS\Big|.$$

Šiuo atveju 3.18 teoremos sąlygos taip pat patenkintos. Todėl egzistuoja tokia teigiama konstanta C, kad

$$\|u\|_{\mathrm{L}_\mathrm{p}(\Omega)} \le C\Big(\Big|\int\limits_S u\,dS\Big| + \sum_{i=1}^n \|u_{x_i}\|_{\mathrm{L}_\mathrm{p}(\Omega)}\Big).$$

Be to, kiekvienai funkcijai $u \in \mathring{\mathrm{W}}_\mathrm{p}^1(\Omega)$ yra teisinga Frydrichso nelygybė.

$$\|u\|_{\mathrm{L}_\mathrm{p}(\Omega)} \le C\sum_{i=1}^n \|u_{x_i}\|_{\mathrm{L}_\mathrm{p}(\Omega)}.$$

P a s t a b a. Frydrichso nelygybė 2.5 skyrelyje įrodyta nereikalaujant iš $\partial\Omega$ jokio glodumo.

3.6. INTERPOLIACINĖS NELYGYBĖS

Erdvių $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ įdėjimo teoremose gautus įverčius galima patikslinti. Tiksliau, funkcijos u normą erdvėje $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ galima pakeisti funkcijos u bei jos k-osios eilės išvestinių normomis erdvėje $\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega)$ su tam tikrais teigiamais daugikliais. Be to, vieną iš šių daugiklių galima pasirinkti laisvai. Tokios patikslintos nelygybės yra vadinamos *interpoliacinėmis nelygybėmis.*

3.19 teorema. *Tegu Ω yra bet kokia erdvėje $\mathbb{R}^n$ sritis, $\Omega_s = \Omega \cap \mathbb{R}^s$, ε – bet koks teigiamas skaičius. Tada:*

1. *Jeigu $\theta = k - r - n/p > 0,\ p \geq 1,\ 0 \leq r < k,$ tai kiekvienai funkcijai $u \in \mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ yra teisinga nelygybė*
$$\sum_{|\alpha|=r} \sup_{x\in\Omega} \big|D^\alpha u\big| \leq C_1 \varepsilon^\theta \sum_{|\alpha|=k} \| D^\alpha u\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega)} + C_2 \varepsilon^{\theta-k} \|u\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega)}. \tag{3.32}$$

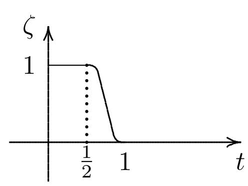
2. *Jeigu $\theta = k - r - n/p + s/q > 0,\ q \geq p \geq 1,\ 0 \leq r < k,$ tai kiekvienai funkcijai $u \in \mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ yra teisinga nelygybė*[2]
$$\sum_{|\alpha|=r} \| D^\alpha u\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{q}}(\Omega_s)} \leq C_1 \varepsilon^\theta \sum_{|\alpha|=k} \| D^\alpha u\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega)} + C_2 \varepsilon^{\theta-k} \|u\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega)}; \tag{3.33}$$

čia konstantos C_1, C_2 nepriklauso nuo u, ε, Ω ir Ω_s.

$\triangleleft$ Pagal poerdvio $\mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ apibrėžimą kiekvieną jo elementą galima aproksimuoti funkcijomis iš $\mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$ erdvės $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ normoje. Todėl abu teoremos teiginius pakanka įrodyti funkcijoms iš $\mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$. Tegu funkcija $u \in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$. Pratęskime ją nuliu į srities Ω išorę ir gautą funkciją pažymėkime ta pačia raide u. Tada pratęsta funkcija $u \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ir
$$u(x) = -\int\limits_{\mathbb{R}^n} E(x-y)\Delta u(y)\,dy \tag{3.34}$$
(žr. 3.2 skyrelį).

Interpoliacines nelygybes įrodysime matematinės indukcijos metodu. Iš pradžių įsitikinsime, kad jos yra teisingos, kai $k = 1$ ir $k = 2$.

Tegu ζ yra kokia nors neneigiama be galo diferencijuojama funkcija, apibrėžta intervale $[0, \infty)$, $\zeta(t) = 1$, kai $t \leq 1/2$, $\zeta(t) = 0$, kai $t \geq 1$, ir $\zeta(t) \geq 0$, kai $1/2 \leq t \leq 1$ (žr. 3.1 pav.).



3.1 pav.

[2] Sąlyga $q \geq p$ reikalinga tik tuo atveju, kai sritis Ω yra neaprėžta.

Apibrėžkime funkciją

$$\zeta_\varepsilon(x) = \zeta(\varepsilon^{-1}|x|), \quad x\in\mathbb{R}^n, \quad \varepsilon > 0.$$

Pasinaudoję integravimo dalimis formule, perrašykime (3.34) lygybę taip:

$$u(x) = -\int\limits_{\mathbb{R}^n} E(x-y)\zeta_\varepsilon(x-y)\Delta u(y)\,dy -$$

$$-\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Delta_x\Big[E(x-y)\big(1-\zeta_\varepsilon(x-y)\big)\Big]u(y)\,dy.$$

Gautus integralus pažymėkime atitinkamai $u_\varepsilon(x)$ ir $u^\varepsilon(x)$. Į integralą $u_\varepsilon(x)$ galima žiūrėti kaip į integralinį operatorių su silpna ypatuma. Be to, jo branduolys lygus nuliui, kai $|x-y| > \varepsilon$. Todėl

$$\sup_{x\in\Omega}|u_\varepsilon(x)| \le C_1\varepsilon^{n/p'-n+2}\|\Delta u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} = C_1\varepsilon^{2-n/p}\|\Delta u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)},$$

kai $p > n$ (žr. (3.2) formulę, $\alpha = n-2$), ir

$$\|u_\varepsilon\|_{\mathrm{L_q}(\Omega_s)} \le C_1\varepsilon^{n/p'+s/q-n+2}\|\Delta u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} = C_1\varepsilon^{2-n/p+s/q}\|\Delta u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)},$$

kai $p \le n,\ s > n-p$ ir $q \ge p \ge 1$ (žr. (3.10) formulę, $\alpha = n-2$).

Integralo $u^\varepsilon(x)$ branduolys lygus nuliui, kai $|x-y| < \varepsilon/2$ arba $|x-y| > \varepsilon$. Pasinaudoję šia savybe, gausime

$$\sup_{x\in\Omega}|u^\varepsilon(x)| \le C_2\varepsilon^{-n/p}\|u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)},$$

$$\|u^\varepsilon\|_{\mathrm{L_q}(\Omega_s)} \le C_2\varepsilon^{-n/p+s/q}\|u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}$$

(žr. (3.2) ir (3.10) formulių išvedimą). Taigi

$$\sup_{x\in\Omega}|u(x)| \le \sup_{x\in\Omega}|u_\varepsilon(x)| + \sup_{x\in\Omega}|u^\varepsilon(x)| \le$$

$$\le C_1\varepsilon^{2-n/p}\|\Delta u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} + C_2\varepsilon^{-n/p}\|u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} \le$$

$$\le C_1\varepsilon^{2-n/p}\sum_{|\alpha|=2}\|\,D^\alpha\,u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} + C_2\varepsilon^{-n/p}\|u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}, \tag{3.35}$$

kai $p > n$, ir

$$\|u\|_{\mathrm{L_q}(\Omega_s)} \le \|u_\varepsilon\|_{\mathrm{L_q}(\Omega_s)} + \|u^\varepsilon\|_{\mathrm{L_q}(\Omega_s)} \le$$

$$\le C_1\varepsilon^{2-n/p+s/q}\|\Delta u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} + C_2\varepsilon^{-n/p+s/q}\|u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} \le$$

$$\le C_1\varepsilon^{2-n/p+s/q}\sum_{|\alpha|=2}\|\,D^\alpha\,u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} + C_2\varepsilon^{-n/p+s/q}\|u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}, \tag{3.36}$$

kai $p \le n,\ s > n-p$ ir $q \ge p \ge 1$.

Dabar (3.34) formulę perrašykime taip:

$$u(x)=\frac{1}{|S_1|}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{x_i-y_i}{|x-y|^n}u_{y_i}(y)\,dy=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{k_{i\varepsilon}(x-y)}{|x-y|^{n-1}}u_{y_i}(y)\,dy+\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{k_i^\varepsilon(x-y)}{|x-y|^{n-1}}\Big)u(y)\,dy;$$

čia

$$k_{i\varepsilon}(x)=\frac{1}{|S_1|}\frac{x_i}{|x|}\zeta_\varepsilon(x),\quad k_i^\varepsilon(x)=\frac{1}{|S_1|}\frac{x_i}{|x|}\big(1-\zeta_\varepsilon(x)\big).$$

Į integralą

$$v_{i\varepsilon}(x)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{k_{i\varepsilon}(x-y)}{|x-y|^{n-1}}u_{y_i}(y)\,dy$$

galima žiūrėti kaip į integralinį operatorių su silpna ypatuma. Be to, funkcija $k_{i\varepsilon}(x-y)=0$, kai $|x-y|>\varepsilon$. Todėl

$$\sup_{x\in\Omega}|v_{i\varepsilon}(x)|\le C_1\varepsilon^{n/p'-n+1}\|u_{y_i}\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}=C_1\varepsilon^{1-n/p}\|u_{y_i}\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)},$$

kai $p>n$ (žr. (3.2) formulę, $\alpha=n-1$), ir

$$\|v_{i\varepsilon}\|_{\mathrm{L_q}(\Omega_s)}\le C_1\varepsilon^{n/p'+s/q-n+1}\|u_{y_i}\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}=C_1\varepsilon^{1-n/p+s/q}\|u_{y_i}\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)},$$

kai $p\le n,\ s>n-p$ ir $q\ge p\ge 1$ (žr. (3.10) formulę, $\alpha=n-1$).

Tegu

$$v_i^\varepsilon(x)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{k_i^\varepsilon(x-y)}{|x-y|^{n-1}}\Big)u(y)\,dy.$$

Šio integralo branduolys lygus nuliui, kai $|x-y|<\varepsilon/2$ arba $|x-y|>\varepsilon$. Pasinaudoję šia savybe, gausime

$$\sup_{x\in\Omega}|v_i^\varepsilon(x)|\le C_2\varepsilon^{-n/p}\|u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)},$$

$$\|v_i^\varepsilon\|_{\mathrm{L_q}(\Omega_s)}\le C_2\varepsilon^{-n/p+s/q}\|u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}$$

(žr. (3.2) ir (3.10) formulių išvedimą).

Iš integralų $v_{i\varepsilon}(x)$ ir $v_i^\varepsilon(x)$ įverčių išvedama nelygybė

$$\sup_{x\in\Omega}|u(x)|\le\sum_{i=1}^{n}\sup_{x\in\Omega}|v_{i\varepsilon}(x)|+\sum_{i=1}^{n}\sup_{x\in\Omega}|v_i^\varepsilon(x)|\le$$

$$\le C_1\varepsilon^{1-n/p}\sum_{i=1}^{n}\|u_{x_i}\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}+nC_2\varepsilon^{-n/p}\|u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)},\tag{3.37}$$

kai $p > n$, ir nelygybė

$$\|u\|_{\mathrm{L_q}(\Omega_s)} \le \sum_{i=1}^{n} \|v_{i\varepsilon}\|_{\mathrm{L_q}(\Omega_s)} + \sum_{i=1}^{n} \|v_i^{\varepsilon}\|_{\mathrm{L_q}(\Omega_s)} \le$$

$$\le C_1\varepsilon^{1-n/p+s/q} \sum_{i=1}^{n} \|u_{x_i}\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} + nC_2\varepsilon^{-n/p+s/q}\|u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}, \tag{3.38}$$

kai $p \le n,\ s > n-p$ ir $q \ge p \ge 1$.

Diferencijuodami (3.34) lygybę kintamuojo x_i atžvilgiu, gausime

$$u_{x_i}(x) = -\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial x_i} E(x-y)\Delta u(y)\,dy = -\frac{1}{|S_1|}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{x_i - y_i}{|x-y|^n}\Delta u(y)\,dy =$$

$$= -\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{k_{i\varepsilon}(x-y)}{|x-y|^{n-1}}\Delta u(y)\,dy + \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Delta_x\Big(\frac{k_i^{\varepsilon}(x-y)}{|x-y|^{n-1}}\Big)u(y)\,dy, \quad i = 1,\dots,n.$$

Pastaruosius du integralus pažymėkime atitinkamai $w_{i\varepsilon}(x)$ ir $w_i^{\varepsilon}(x)$. Juos galima įvertinti visiškai taip pat kaip integralus $v_{i\varepsilon}(x)$ ir $v_i^{\varepsilon}(x)$. Tiksliau,

$$\sup_{x\in\Omega} |w_{i\varepsilon}(x)| \le C_1\varepsilon^{1-n/p}\|\Delta u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}, \quad \sup_{x\in\Omega} |w_i^{\varepsilon}(x)| \le C_2\varepsilon^{-1-n/p}\|u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)},$$

kai $p > n$, ir

$$\|w_{i\varepsilon}\|_{\mathrm{L_q}(\Omega_s)} \le C_1\varepsilon^{1-n/p+s/q}\|\Delta u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)},$$

$$\|w_i^{\varepsilon}\|_{\mathrm{L_q}(\Omega_s)} \le C_2\varepsilon^{-1-n/p+s/q}\|u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)},$$

kai $p \le n,\ s > n-p$ ir $q \ge p \ge 1$. Pasinaudoję šiais įverčiais, gausime

$$\sup_{x\in\Omega} |u_{x_i}(x)| \le \sup_{x\in\Omega} |w_{i\varepsilon}(x)| + \sup_{x\in\Omega} |w_i^{\varepsilon}(x)| \le$$

$$\le C_1\varepsilon^{1-n/p}\|\Delta u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} + C_2\varepsilon^{-1-n/p}\|u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)},$$

kai $p > n$, ir

$$\|u_{x_i}\|_{\mathrm{L_q}(\Omega_s)} \le \|w_{i\varepsilon}\|_{\mathrm{L_q}(\Omega_s)} + \|w_i^{\varepsilon}\|_{\mathrm{L_q}(\Omega_s)} \le$$

$$\le C_1\varepsilon^{1-n/p+s/q}\|\Delta u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} + C_2\varepsilon^{-1-n/p+s/q}\|u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)},$$

kai $p \le n,\ s > n-p$ ir $q \ge p \ge 1$. Kartu esant atitinkamoms sąlygoms teisingi tokie įverčiai:

$$\sum_{|\alpha|=1} \sup_{x\in\Omega} |\, D^{\alpha}\, u(x)| \le$$

$$\le C_1\varepsilon^{1-n/p} \sum_{|\alpha|=2} \|\, D^{\alpha}\, u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} + C_2\varepsilon^{-1-n/p}\|u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}, \tag{3.39}$$

$$\sum_{|\alpha|=1} \|\, D^{\alpha}\, u\|_{\mathrm{L_q}(\Omega_s)} \le$$

$$\leq C_1 \varepsilon^{1-n/p+s/q} \sum_{|\alpha|=2} \| D^\alpha u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} + C_2 \varepsilon^{-1-n/p+s/q} \|u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}. \tag{3.40}$$

Iš (3.35), (3.36), (3.37), (3.38), (3.39) ir (3.40) matome, kad interpoliacinės nelygybės yra teisingos, kai $k = 1$ ir $k = 2$. Tarkime, jos teisingos, kai $k = m$. Įrodysime, kad jos teisingos, kai $k = m + 1$.

Visų pirma pastebėsime, kad yra teisingi tokie įverčiai:

$$\sum_{|\alpha|=r} \sup_{x\in\Omega} | D^\alpha u(x)| \leq C_1 \varepsilon^{1-n/p} \sum_{|\alpha|=r+1} \| D^\alpha u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} +$$

$$+ C_2 \varepsilon^{-n/p} \sum_{|\alpha|=r} \| D^\alpha u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)},$$

$$\sum_{|\alpha|=r} \sup_{x\in\Omega} | D^\alpha u(x)| \leq C_1 \varepsilon^{1-n/p} \sum_{|\alpha|=r+1} \| D^\alpha u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} +$$

$$+ C_2 \varepsilon^{-1-n/p} \sum_{|\alpha|=r-1} \| D^\alpha u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)},$$

kai $p > n$, ir

$$\sum_{|\alpha|=r} \| D^\alpha u\|_{\mathrm{L_q}(\Omega_s)} \leq C_1 \varepsilon^{1-n/p+s/q} \sum_{|\alpha|=r+1} \| D^\alpha u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} +$$

$$+ C_2 \varepsilon^{-n/p+s/q} \sum_{|\alpha|=r} \| D^\alpha u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)},$$

$$\sum_{|\alpha|=r} \| D^\alpha u\|_{\mathrm{L_q}(\Omega_s)} \leq C_1 \varepsilon^{1-n/p+s/q} \sum_{|\alpha|=r+1} \| D^\alpha u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} +$$

$$+ C_2 \varepsilon^{-1-n/p+s/q} \sum_{|\alpha|=r-1} \| D^\alpha u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}, \tag{3.41}$$

kai $p \leq n, \ s > n - p, \ q \geq p \geq 1$.

Tarkime, (3.32) ir (3.33) nelygybės teisingos, kai $k = m$. Teorema bus įrodyta, jeigu įsitikinsime, kad (3.32) ir (3.33) nelygybės teisingos, kai $k = m+1$. Šis teoremos įrodymo etapas iš esmės yra toks pats abiem nelygybėms. Todėl įrodysime tik antrąją (jos įrodymas techniškai truputį sudėtingesnis).

Pagal indukcinę prielaidą

$$\sum_{|\alpha|=r} \| D^\alpha u\|_{\mathrm{L_q}(\Omega_s)} \leq C_1 \varepsilon^{\theta_m} \sum_{|\alpha|=m} \| D^\alpha u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} + C_2 \varepsilon^{\theta_m - m} \|u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}; \tag{3.42}$$

čia $\theta_m = m - r - n/p + s/q, \ r < m, \ q \geq p \geq 1$. Paėmę

$$\varepsilon = \|u\|^{1/m} \Big/ \Big(\sum_{|\alpha|=m} \| D^\alpha u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} \Big)^{1/m},$$

gausime nelygybę

$$\sum_{|\alpha|=r} \| D^{\alpha} u\|_{\mathrm{L_q}(\Omega_s)} \leq C\Big(\sum_{|\alpha|=m} \| D^{\alpha} u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}\Big)^{1-\theta_m/m} \|u\|^{\theta_m/m}_{\mathrm{L_p}(\Omega)}.$$

Pasinaudoję (3.41) nelygybe (kai s = n, p = q), gausime

$$\sum_{|\alpha|=r} \| D^{\alpha} u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} \leq C_1\varepsilon \sum_{|\alpha|=r+1} \| D^{\alpha} u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}+$$

$$+C_2\varepsilon^{-1} \sum_{|\alpha|=r-1} \| D^{\alpha} u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} \leq C_3\Big(\sum_{|\alpha|=r+1} \| D^{\alpha} u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}\Big)^{1/2}\cdot$$

$$\cdot\Big(\sum_{|\alpha|=r-1} \| D^{\alpha} u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}\Big)^{1/2} \leq C_4\Big(\sum_{|\alpha|=r+1} \| D^{\alpha} u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}\Big)^{1/2}\cdot$$

$$\cdot\Big(\sum_{|\alpha|=r} \| D^{\alpha} u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}\Big)^{(1-\theta_m)/2m} \|u\|^{\theta_m/2m}_{\mathrm{L_p}(\Omega)};$$

čia $\theta_m = m-(r-1)$. Iš šių nelygybių išreiškę $\sum\limits_{|\alpha|=r} \| D^{\alpha} u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}$ ir pasinaudoję Jungo nelygybe (su $p=(2m-r+1)/m$, $p'=(2m-r+1)/(m-r+1)$), gausime

$$\sum_{|\alpha|=r} \| D^{\alpha} u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} \leq C_5\Big(\sum_{|\alpha|=r+1} \| D^{\alpha} u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}\Big)^{\frac{m}{2m-r+1}} \|u\|^{\frac{m-r+1}{2m-r+1}} \leq$$

$$\leq \varepsilon C_6 \sum_{|\alpha|=r+1} \| D^{\alpha} u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} + C_7\varepsilon^{-\frac{m}{m-r+1}}\|u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}.$$

Pasinaudoję šiuo įverčiu, (3.42) nelygybę perrašysime taip:

$$\sum_{|\alpha|=r} \| D^{\alpha} u\|_{\mathrm{L_q}(\Omega_s)} \leq C_1\varepsilon^{\theta_{m+1}} \sum_{|\alpha|=m+1} \| D^{\alpha} u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}+$$

$$+C_2\varepsilon^{\theta_{m+1}-m-1}\|u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)};$$

čia $\theta_{m+1} = m+1-r-n/p+s/q$, $r<m$. Kai $r=m$,

$$\sum_{|\alpha|=m} \| D^{\alpha} u\|_{\mathrm{L_q}(\Omega_s)} \leq C_1\varepsilon^{1-n/p+s/q} \sum_{|\alpha|=m+1} \| D^{\alpha} u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}+$$

$$+C_2\varepsilon^{-n/p+s/q} \sum_{|\alpha|=m} \| D^{\alpha} u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} \leq C_1\varepsilon^{1-n/p+s/q} \sum_{|\alpha|=m+1} \| D^{\alpha} u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}+$$

$$+C_2\varepsilon^{-n/p+s/q}\Big(C_1'\varepsilon^{1} \sum_{|\alpha|=m+1} \| D^{\alpha} u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} + C_2'\varepsilon^{-m}\|u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}\Big) \leq$$

$$\leq C_1''\varepsilon^{1-n/p+s/q} \sum_{|\alpha|=m+1} \| D^{\alpha} u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} + C_2''\varepsilon^{-m-n/p+s/q}\|u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}.$$

Sujungę pastarąsias dvi nelygybes, gausime (3.33) nelygybę, kai $k = m + 1$. Teorema įrodyta. $\triangleright$

P a s t a b a. Jeigu (3.32) ir (3.33) nelygybėse paimsime

$$\varepsilon = \|u\|^{1/k}_{\mathrm{L_p}(\Omega)} \Big/ \Big(\sum_{|\alpha|=k} \| D^\alpha u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} \Big)^{1/k},$$

tai gausime *multiplikatyviąsias nelygybes*:

$$\sum_{|\alpha|=r} \| D^\alpha u\|_{\mathrm{L_q}(\Omega_s)} \le C \Big(\sum_{|\alpha|=k} \| D^\alpha u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} \Big)^{1-\theta/k} \|u\|^{\theta/k}_{\mathrm{L_p}(\Omega)}, \tag{3.43}$$

$$\sum_{|\alpha|=r} \sup_{x\in\Omega} | D^\alpha u(x)| \le C \Big(\sum_{|\alpha|=k} \| D^\alpha u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} \Big)^{1-\theta/k} \|u\|^{\theta/k}_{\mathrm{L_p}(\Omega)}; \tag{3.44}$$

čia $\theta = k - r - n/p + s/q$ pirmos ir $\theta = k - r - n/p$ antros multiplikatyvios nelygybės atveju. Įrodysime interpoliacines nelygybes funkcijoms iš erdvės $\mathrm{W^k_p}(\Omega)$ aprėžtos srities Ω atveju.

3.20 teorema. *Tegu Ω yra aprėžta erdvėje $\mathbb{R}^n$ sritis, $S = \partial\Omega$ – $\mathrm{C^k}$ klasės paviršius ir patenkintos 3.19 teoremos sąlygos. Tada $\forall u \in \mathrm{W^k_p}(\Omega)$ ir pakankamai mažam $\varepsilon > 0$ yra teisingos* (3.32) *ir* (3.33) *interpoliacinės nelygybės.*

$\triangleleft$ Laisvai pasirinkime funkciją $u \in \mathrm{W^k_p}(\Omega)$. Pratęskime ją į kokią nors platesnę standartinę sritį Q išlaikydami glodumą. Pratęstą funkciją pažymėkime ta pačia raide u. Pagal 2.15 teoremą funkcija $u \in \mathring{\mathrm{W}}^{\mathrm{k}}_{\mathrm{p}}(Q)$ ir

$$\|u\|_{\mathrm{W^k_p}(Q)} \le C\|u\|_{\mathrm{W^k_p}(\Omega)}, \quad \|u\|_{\mathrm{L_p}(Q)} \le C\|u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}.$$

Įrodysime (3.33) nelygybę (pirmoji nelygybė įrodoma visiškai taip pat). Kiekvienai funkcijai $u \in \mathring{\mathrm{W}}^{\mathrm{k}}_{\mathrm{p}}(Q)$ ir $r < k$ yra teisinga nelygybė

$$\sum_{|\alpha|=r} \| D^\alpha u\|_{\mathrm{L_p}(Q)} \le C_1 \varepsilon^{k-r} \sum_{|\alpha|=k} \| D^\alpha u\|_{\mathrm{L_p}(Q)} + C_2 \varepsilon^{-r} \|u\|_{\mathrm{L_p}(Q)}.$$

Todėl

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha|=r} \| D^\alpha u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} &\le \sum_{|\alpha|=r} \| D^\alpha u\|_{\mathrm{L_p}(Q)} \le \\ &\le C_1 \varepsilon^{k-r} \sum_{|\alpha|=k} \| D^\alpha u\|_{\mathrm{L_p}(Q)} + C_2 \varepsilon^{-r} \|u\|_{\mathrm{L_p}(Q)} \le \\ &\le C_1' \varepsilon^{k-r} \sum_{j=0}^{k} \sum_{|\alpha|=j} \| D^\alpha u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} + C_2' \varepsilon^{-r} \|u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Padauginę kairiąją ir dešiniąją šių nelygybių puses iš ε^r, gausime nelygybę, kuri teisinga kiekvienam $r = 1, 2 \ldots, k-1$. Kartu yra teisinga nelygybė

$$\sum_{r=1}^{k-1} \varepsilon^r \Big(\sum_{|\alpha|=r} \| D^\alpha u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} \Big) \le C_1'(k-1) \varepsilon^k \sum_{|\alpha|=k} \| D^\alpha u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} +$$

$$+C_1^{'}(k-1)\varepsilon^k \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{|\alpha|=j} \| D^\alpha u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} + C_2^{'}(k-1)\|u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}.$$

Tegu $\varepsilon_0 = \min\{1/2C_1'(k-1), 1\}$. Tada $\forall\varepsilon \le \varepsilon_0$ teisinga nelygybė

$$\sum_{r=1}^{k-1} \varepsilon^r \Big(\sum_{|\alpha|=r} \| D^\alpha u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} \Big) \le$$

$$\le 2C_1^{'}(k-1)\varepsilon^k \sum_{|\alpha|=k} \| D^\alpha u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} + 2C_2^{'}(k-1)\|u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}.$$

Šios nelygybės kairėje visi nariai po sumos ženklu yra neneigiami. Todėl $\forall r < k$ yra teisinga nelygybė

$$\sum_{|\alpha|=r} \| D^\alpha u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} \le$$

$$\le 2C_1^{'}(k-1)\varepsilon^{k-r} \sum_{|\alpha|=k} \| D^\alpha u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} + 2C_2^{'}(k-1)\varepsilon^{-r}\|u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}.$$

Remdamiesi šia nelygybe, gauname

$$\sum_{|\alpha|=r} \| D^\alpha u\|_{\mathrm{L_q}(\Omega_s)} \le \sum_{|\alpha|=r} \| D^\alpha u\|_{\mathrm{L_q}(Q_s)} \le$$

$$\le C_1\varepsilon^\theta \sum_{|\alpha|=k} \| D^\alpha u\|_{\mathrm{L_p}(Q)} + C_2\varepsilon^{\theta-k}\|u\|_{\mathrm{L_p}(Q)} \le$$

$$\le C_1^{'}\varepsilon^\theta \sum_{j=0}^{k} \sum_{|\alpha|=j} \| D^\alpha u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} + C_2^{'}\varepsilon^{\theta-k}\|u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} \le$$

$$\le C_1^{''}\varepsilon^\theta \sum_{|\alpha|=k} \| D^\alpha u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} + C_2^{''}\varepsilon^{\theta-k}\|u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)};$$

čia $Q_s = Q \cap \mathbb{R}^s,\ \theta = k - r - n/p + s/q$. Pakeitę šioje nelygybėje $C_1^{''}$ į C_1, $C_2^{''}$ į C_2, gausime (3.33) nelygybę. $\triangleright$

I š v a d o s:

1. Erdvės $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ elementams teisingos *multiplikatyviosios nelygybės*:

$$\sum_{|\alpha|=r} \| D^\alpha u\|_{\mathrm{L_q}(\Omega_s)} \le$$

$$\le C_1^{'}\Big(\sum_{|\alpha|=k} \| D^\alpha u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}\Big)^{1-\theta/k} \|u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}^{\theta/k} + C_2^{'}\varepsilon_0^{\theta-k}\|u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}, \tag{3.45}$$

$$\sum_{|\alpha|=r} \sup_{x\in\Omega} | D^\alpha u(x)| \le$$

$$\leq C_1' \Big(\sum_{|\alpha|=k} \| D^\alpha u \|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} \Big)^{1-\theta/k} \|u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}^{\theta/k} + C_2' \varepsilon_0^{\theta-k} \|u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}; \qquad (3.46)$$

čia $\theta = k - r - n/p + s/q$ pirmos ir $\theta = k - r - n/p$ antros multiplikatyvios nelygybės atveju. Jos išvedamos iš (3.32), (3.33) nelygybių, kai

$$\varepsilon = \min \Big\{ \|u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}^{1/k} \Big/ \Big(\sum_{|\alpha|=k} \| D^\alpha u \|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} \Big)^{1/k}, \varepsilon_0 \Big\}.$$

Savo ruožtu iš (3.45), (3.46) išvedamos (3.32), (3.33) interpoliacinės nelygybės.

Reikia tik pasinaudoti Jungo nelygybe.

2. Tegu $0 \leq r \leq k$, $s > n - p(k-r)$, $\theta = k - r - n/p + s/q > 0$. Tada iš (3.32) nelygybės išplaukia, kad erdvė $\mathrm{W_p^k}(\Omega)$ įsideda į erdvę $\mathrm{W_q^r}(\Omega_s)$. Įrodysime, kad erdvė $\mathrm{W_p^k}(\Omega)$ kompaktiškai įsideda į erdvę $\mathrm{W_q^r}(\Omega_s)$. Kadangi erdvė $\mathrm{W_p^k}(\Omega)$ kompaktiškai įsideda į erdvę $\mathrm{L_p}(\Omega)$, tai iš bet kokios aprėžtos erdvėje $\mathrm{W_p^k}(\Omega)$ sekos galima išskirti konverguojantį erdvėje $\mathrm{L_p}(\Omega)$ posekį. Iš (3.45) nelygybės išplaukia, kad šis posekis konverguoja ir erdvėje $\mathrm{W_q^r}(\Omega_s)$.

P a s t a b o s:

1. Atkreipsime dėmesį į tai, kad 3.20 teoremoje konstantos C_1, C_2 priklauso nuo srities Ω.

2. Plokščią sritį $\Omega_s = \Omega \cap \mathbb{R}^s$ kairiojoje (3.32) nelygybės pusėje galima pakeisti paviršiumi $S = \Omega \cap \Gamma$, Γ – glodus s-matis erdvėje $\mathbb{R}^n$ paviršius. Nagrinėjant kraštinius uždavinius elipsinėms antrosios eilės lygtims, dažnai naudojama nelygybė

$$\|u\|_{\mathrm{L_2}(S)} \leq C_1 \varepsilon^{1/2} \sum_{i=1}^n \|u_{x_i}\|_{\mathrm{L_2}(\Omega)} + C_2 \varepsilon^{-1/2} \|u\|_{\mathrm{L_2}(\Omega)}. \qquad (3.47)$$

Ji sutaps su (3.32) nelygybe, jeigu Ω_s pakeisime $S = \partial\Omega$ ir paimsime $p = q = 2$.

3.7. ERDVĖS $\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\mathbb{R}^n)$ TEIGIAMOMS RODIKLIO k REIKŠMĖMS

Kiekvienai funkcijai $u\in \mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ galima apibrėžti jos Furjė transformaciją

$$\widehat{u}(\xi) = (2\pi)^{-n/2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}u(x)\,dx.$$

Pagal Parsevalio formulę

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}|u(x)|^2\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n}|\widehat{u}(\xi)|^2\,d\xi.$$

Kiekvienam multiindeksui $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ funkcijos $D^\alpha\, u$ Furjė transformacija

$$\widehat{D^\alpha u}(\xi) = (i\xi)^\alpha\widehat{u}(\xi),\quad \xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot\xi_n^{\alpha_n}.$$

Todėl[3]

$$\|u\|^2_{\mathrm{H}^\mathrm{k}(\mathbb{R}^n)} = \sum_{|\alpha|\le k}\|\,D^\alpha\,u\|^2_{\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^n)} = \int\limits_{\mathbb{R}^n}|\widehat{u}(\xi)|^2\sum_{|\alpha|\le k}|\xi^\alpha|^2\,d\xi.$$

Reiškiniai $\sum\limits_{|\alpha|\le k}|\xi^\alpha|^2$ ir $1+|\xi|^{2k}$ yra ekvivalentūs. Tiksliau, egzistuoja tokios dvi teigiamos konstantos C_1 ir C_2, kad

$$C_1\sum_{|\alpha|\le k}|\xi^\alpha|^2\le 1+|\xi|^{2k}\le C_2\sum_{|\alpha|\le k}|\xi^\alpha|^2.$$

Todėl

$$C_1\|u\|^2_{\mathrm{H}^\mathrm{k}(\mathbb{R}^n)}\le\int\limits_{\mathbb{R}^n}|\widehat{u}(\xi)|^2(1+|\xi|^{2k})\,d\xi\le C_2\|u\|^2_{\mathrm{H}^\mathrm{k}(\mathbb{R}^n)}.$$

Pastarasis integralas yra apibrėžtas sveikoms teigiamoms k reikšmėms. Tačiau jis turi prasmę ir kitoms realioms k reikšmėms. Be to, kai $k\in(0,1)$, jis yra ekvivalentus reiškiniui

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}|u(x)|^2\,dx + \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{n+2k}}\,dxdy.$$

Iš tikrųjų

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{n+2k}}\,dxdy = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{|u(x+z)-u(x)|^2}{|z|^{n+2k}}\,dxdz.$$

Pritaikę vidiniam integralui Parsevalio formulę, gausime

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{|u(x+z)-u(x)|^2}{|z|^{n+2k}}\,dxdz = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}|\widehat{u}(\xi)|^2\frac{|e^{i\xi z}-1|^2}{|z|^{n+2k}}\,d\xi dz.$$

[3]Priminsime, kad $\mathrm{H}^\mathrm{k}(\mathbb{R}^n) = \mathrm{W}_2^\mathrm{k}(\mathbb{R}^n)$.

Integralas

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|e^{i\xi z}-1|^2}{|z|^{n+2k}}\,dz = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|e^{i|\xi|z_1}-1|^2}{|z|^{n+2k}}\,dz = |\xi|^{2k}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|e^{iw_1}-1|^2}{|w|^{n+2k}}\,dw.$$

Norint šias lygybes pagrįsti, pakanka koordinačių ašis $z_1,\dots,z_n$ pasukti taip, kad vektorius ξ gulėtų ašyje z_1, o po to padaryti keitinį $w=|\xi|z$. Integralas

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|e^{iw_1}-1|^2}{|w|^{n+2k}}\,dw > 0$$

ir konverguoja, kai $k\in(0,1)$. Todėl egzistuoja tokios dvi teigiamos konstantos C_1 ir C_2, kad

$$C_1\int\limits_{\mathbb{R}^n}|\widehat{u}(\xi)|^2|\xi|^{2k}\,d\xi \le \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{n+2k}}\,dxdy \le C_2\int\limits_{\mathbb{R}^n}|\widehat{u}(\xi)|^2|\xi|^{2k}\,d\xi.$$

A p i b r ė ž i m a s. Tegu $k\in(0,1)$. Sakysime, funkcija u iš $\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^n)$ priklauso aibei $\mathrm{H}^{\mathrm{k}}(\mathbb{R}^n)$, jeigu reiškinys

$$\langle u\rangle_{\mathrm{H}^{\mathrm{k}}(\mathbb{R}^n)} = \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{n+2k}}\,dxdy\Big)^{1/2} < \infty.$$

Aibė $\mathrm{H}^{\mathrm{k}}(\mathbb{R}^n)$ su norma

$$\|u\|_{\mathrm{H}^{\mathrm{k}}(\mathbb{R}^n)} = \Big(\|u\|^2_{\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^n)} + \langle u\rangle^2_{\mathrm{H}^{\mathrm{k}}(\mathbb{R}^n)}\Big)^{1/2} \tag{3.48}$$

yra normuota erdvė. Jeigu $k>1$ ir nėra sveikasis skaičius, tai normą erdvėje $\mathrm{H}^{\mathrm{k}}(\mathbb{R}^n)$ galima apibrėžti taip:

$$\|u\|_{\mathrm{H}^{\mathrm{k}}(\mathbb{R}^n)} = \Big(\sum_{|\alpha|<k}\|D^\alpha u\|^2_{\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^n)} + \sum_{|\alpha|=[k]}\langle D^\alpha u\rangle^2_{\mathrm{H}^{\mathrm{k}-[\mathrm{k}]}(\mathbb{R}^n)}\Big)^{1/2}; \tag{3.49}$$

čia $[k]$ – sveikoji skaičiaus k dalis.

P a s t a b o s:

1. Normų $\mathrm{H}^{\mathrm{k}}(\mathbb{R}^n)$ apibrėžimai, kai k yra sveikasis skaičius ir kai k nėra sveikasis skaičius, skiriasi. Tačiau abiem atvejais normos ekvivalenčios reiškiniui

$$\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n}|\widehat{u}(\xi)|^2(1+|\xi|^{2k})\,d\xi\Big)^{1/2}.$$

Todėl erdvės $\mathrm{H}^{\mathrm{k}}(\mathbb{R}^n)$ sudaro natūralią parametro $k>0$ atžvilgiu erdvių skalę.

Analogiškai galima apibrėžti erdvę $\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\mathbb{R}^n)$ su rodikliu $k > 0$, kai k nėra sveikasis skaičius. Sakysime, funkcija u iš $\mathrm{L}_\mathrm{p}(\mathbb{R}^n)$ priklauso aibei $\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\mathbb{R}^n)$, $k\in(0,1)$, jeigu reiškinys

$$\langle u\rangle_{\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\mathbb{R}^n)} = \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+pk}}\,dxdy\Big)^{1/p} < \infty.$$

Aibė $\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\mathbb{R}^n)$ su norma

$$\|u\|_{\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\mathbb{R}^n)} = \Big(\|u\|^p_{\mathrm{L}_\mathrm{p}(\mathbb{R}^n)} + \langle u\rangle^p_{\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\mathbb{R}^n)}\Big)^{1/p}$$

yra normuota erdvė. Normą erdvėje $\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\mathbb{R}^n)$, kai $k > 1$ ir nėra sveikasis skaičius, galima apibrėžti taip:

$$\|u\|_{\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\mathbb{R}^n)} = \Big(\sum_{|\alpha|<k}\|D^\alpha u\|^p_{\mathrm{L}_\mathrm{p}(\mathbb{R}^n)} + \sum_{|\alpha|=[k]}\langle D^\alpha u\rangle^p_{\mathrm{W}_\mathrm{p}^{\mathrm{k}-[\mathrm{k}]}(\mathbb{R}^n)}\Big)^{1/p}.$$

2. Aibė $\mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ yra tiršta erdvėje $\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\mathbb{R}^n)$ ir tuo atveju, kai k nėra sveikasis skaičius. Įrodymo schema yra tokia. Iš pradžių reikia įrodyti, kad $u(x)\xi_R(x) \to u(x)$, kai $R\to\infty$, o po to pastebėti, kad $\forall\rho>0$ vidutinė funkcija

$$(u\xi_R)_\rho\in \mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

ir

$$(u\xi_R)_\rho(x) \to u(x)\xi_R(x),$$

kai $\rho\to 0$. Čia $\xi_R(x) = \xi(R^{-1}x)$, ξ – be galo diferencijuojama neneigiama funkcija, lygi vienetui, kai $|x|<1$, ir lygi nuliui, kai $|x|>2$.

Tegu Ω yra sritis erdvėje $\mathbb{R}^n$. Sakysime, funkcija $u\in \mathrm{L}_\mathrm{p}(\Omega)$ priklauso aibei $\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$, $k\in(0,1)$, jeigu reiškinys

$$\langle u\rangle_{\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)} = \Big(\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+pk}}\,dxdy\Big)^{1/p} < \infty.$$

Aibė $\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$ su norma

$$\|u\|_{\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)} = \Big(\|u\|^p_{\mathrm{L}_\mathrm{p}(\Omega)} + \langle u\rangle^p_{\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)}\Big)^{1/p}$$

yra normuota erdvė.

A p i b r ė ž i m a s. Tegu $k > 1$ ir nėra sveikasis skaičius. Sakysime, funkcija $u\in \mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$, jeigu

$$D^\alpha u\in \mathrm{L}_\mathrm{p}(\Omega), \quad \forall\alpha : |\alpha| < k,$$

ir

$$\langle D^\alpha u\rangle_{\mathrm{W}_\mathrm{p}^{\mathrm{k}-[\mathrm{k}]}(\Omega)} = \Big(\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega} \frac{|D^\alpha u(x)-D^\alpha u(y)|^p}{|x-y|^{n+p(k-[k])}}\,dxdy\Big)^{1/p} < \infty.$$

Aibėje $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ normą galima apibrėžti taip:

$$\|u\|_{\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)} = \Big(\sum_{|\alpha|<k} \| D^\alpha u\|^p_{\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=[k]} \langle D^\alpha u\rangle^p_{\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}-[\mathrm{k}]}(\Omega)}\Big)^{1/p}.$$

Tegu $\Omega = \mathbb{R}^n_+$. Tada kiekvieną funkciją $u \in \mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\mathbb{R}^n_+)$ išlaikant glodumą galima pratęsti į visą erdvę $\mathbb{R}^n$. Tiksliau, yra teisinga tokia teorema.

3.21 teorema. *Egzistuoja tiesinis aprėžtas pratęsimo operatorius*

$$\Pi : \mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\mathbb{R}^n_+) \to \mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\mathbb{R}^n).$$

Be to, jeigu $u \in \mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\mathbb{R}^n_+)$ *ir* $v = \Pi u$, *tai* $v(x) = u(x)$, *kai* $x \in \mathbb{R}^n_+$.

Pastarosios teoremos čia neįrodinėsime. Atkreipsime dėmesį tik į tai, kad ją pakanka įrodyti glodžioms funkcijoms. Tai, kad glodžios funkcijos yra tiršta aibė, įrodoma įprastu būdu. Reikia tik vidutinės funkcijos apibrėžime (žr. 2 skyrelį) branduolį $\omega_\rho(x-y)$ pakeisti branduoliu $\omega_\rho(x-y-\rho e_n)$.

Naudojant vieneto skaidinį ir taikant 3.21 teoremą, galima įrodyti tokį teiginį.

3.22 teorema. *Tegu* Ω *yra aprėžta erdvėje* $\mathbb{R}^n$ *sritis,* $S = \partial\Omega$ – $\mathrm{C}^{\mathrm{k}+\varepsilon}$ *klasės paviršius. Tada egzistuoja tiesinis aprėžtas pratęsimo operatorius*

$$\Pi : \mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega) \to \mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\mathbb{R}^n).$$

Be to, jeigu $u \in \mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ *ir* $v = \Pi u$, *tai* $v(x) = u(x)$, *kai* $x \in \Omega$.

3.8. FUNKCIJŲ $u\in \mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}$ PĖDSAKAI

Bendruoju atveju elementų iš Sobolevo erdvių $\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}$ pėdsakai nepriklauso tai pačiai Sobolevo erdvių skalei. Norint juos tiksliai aprašyti, reikėtų apibrėžti kitas funkcijų erdves (smulkiau apie tai galima sužinoti, pavyzdžiui, [47], [4] knygose). Išimtį sudaro du atvejai:

1) k – sveikasis skaičius;

2) p = 2.

Šiuos du atvejus čia ir nagrinėsime.

Tegu k yra sveikasis skaičius ir $\Gamma \subset \Omega$ – glodus $(n-1)$-matis paviršius. Pagal 3.16 teoremą kiekvienos funkcijos $u\in \mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$ ekvivalentiškumo klasėje yra atstovas $u|_\Gamma\in \mathrm{L}_\mathrm{q}(\Gamma)$ (jis vadinamas funkcijos u *pėdsaku* paviršiuje Γ) ir teisingas įvertis

$$\|u\|_{\mathrm{L}_\mathrm{q}(\Gamma)}\leq C\|u\|_{\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)};$$

čia $q\leq(n-1)p/(n-pk),$ jeigu $n>pk,$ ir $q\geq 1,$ jeigu $n\leq pk$. Tegu $\mathfrak{M}$ yra funkcijų u iš erdvės $\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$ pėdsakų paviršiuje Γ aibė. Akivaizdu, kad $\mathfrak{M}$ yra tiesinė aibė. Apibrėžkime normą

$$|||\varphi||| = \inf_{u\in \mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega),u|_\Gamma=\varphi}\|u\|_{\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)}. \tag{3.50}$$

Aibė $\mathfrak{M}$ su taip apibrėžta norma yra normuota erdvė. Tiesiogiai galima įrodyti, kad ji yra pilna. Įrodysime, kad taip apibrėžta erdvė yra Sobolevo erdvė $\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{r}(\Gamma)$ su tam tikru trupmeniniu rodikliu r.

Iš pradžių išnagrinėsime atvejį, kai $\Omega=\mathbb{R}^n_+=\{x\in\mathbb{R}^n: x_n>0\}$, $x=(x',x_n)$ ir $k=1$.

3.23 teorema. *Tegu* $p>1$. *Tada:*

1. *Funkcija* $u\in \mathrm{W}_\mathrm{p}^1(\mathbb{R}^n_+)$ *turi pėdsaką* $u|_{x_n=0}:=\varphi\in \mathrm{W}_\mathrm{p}^{1-1/\mathrm{p}}(\mathbb{R}^{n-1})$. *Be to,*

$$\|\varphi\|_{\mathrm{W}_\mathrm{p}^{1-1/\mathrm{p}}(\mathbb{R}^{n-1})}\leq C\|u\|_{\mathrm{W}_\mathrm{p}^1(\mathbb{R}^n_+)}; \tag{3.51}$$

čia konstanta C *nepriklauso nuo konkretaus elemento* u.

2. *Kiekvienai* $\varphi\in \mathrm{W}_\mathrm{p}^{1-1/\mathrm{p}}(\mathbb{R}^{n-1})$ *egzistuoja tokia funkcija*

$$u\in \mathrm{W}_\mathrm{p}^1(\mathbb{R}^n_+),$$

kad

$$u(x',0)=\varphi(x')$$

ir teisinga nelygybė

$$\|u\|_{\mathrm{W}_\mathrm{p}^1(\mathbb{R}^n_+)}\leq C\|\varphi\|_{\mathrm{W}_\mathrm{p}^{1-1/\mathrm{p}}(\mathbb{R}^{n-1})}; \tag{3.52}$$

čia konstanta C *nepriklauso nuo konkretaus elemento* φ.

$\lhd$ Įrodysime pirmąjį teoremos teiginį. Tegu $u\in \mathrm{W}^{\mathrm{k}}_{\mathrm{p}}(\mathbb{R}^n_+)$ ir $u(x',0) =$ $= \varphi(x')$. Remiantis 3.10 teorema, $\varphi\in \mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\mathbb{R}^{n-1})$ ir

$$\|\varphi\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\mathbb{R}^{n-1})} \le C\|u\|_{\mathrm{W}^1_{\mathrm{p}}(\mathbb{R}^n_+)}.$$

Kiekvieną elementą $u\in \mathrm{W}^1_{\mathrm{p}}(\mathbb{R}^n_+)$ erdvės $\mathrm{W}^1_{\mathrm{p}}(\mathbb{R}^n_+)$ normoje galima aproksimuoti be galo diferencijuojamomis ir lygiomis nuliui pakankamai didelio rutulio išorėje funkcijomis. Todėl įrodydami šį teiginį, galime tarti, kad funkcija $u = u(x)$ yra be galo diferencijuojama ir lygi nuliui pakankamai dideliems $|x|$.

Integralas

$$\langle\varphi\rangle^p_{\mathrm{W}^{1-1/\mathrm{p}}_{\mathrm{p}}(\mathbb{R}^{n-1})} = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{|\varphi(x'+z') - \varphi(x')|^p}{|z'|^{n-2+p}}\, dx'dz' =$$

$$= \int\limits_{|z'|=1} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \int\limits_0^\infty \frac{|\varphi(x'+\rho\omega') - \varphi(x')|^p}{\rho^p}\, d\rho dx' d\omega'.$$

Vietoje kintamųjų x' apibrėžkime naujus kintamuosius y' taip, kad koordinačių ašis y_1 būtų nukreipta vektoriaus ω' kryptimi. Tada

$$\Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\varphi(y'+\rho\omega') - \varphi(y')|^p\, dy_1\Big)^{1/p} \le$$

$$\le \frac{1}{\rho}\int\limits_0^\rho \Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |u(y'+\rho\omega',0) - u(y'+\rho\omega',t)|^p\, dy_1\Big)^{1/p} dt +$$

$$+\frac{1}{\rho}\int\limits_0^\rho \Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |u(y'+\rho\omega',t) - u(y',t)|^p\, dy_1\Big)^{1/p} dt +$$

$$+\frac{1}{\rho}\int\limits_0^\rho \Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |u(y',t) - u(y',0)|^p\, dy_1\Big)^{1/p} dt \le$$

$$\le \int\limits_0^\rho (2\|u_t(y',t)\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\mathbb{R}^1)} + \|u_{y_1}(y',t)\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\mathbb{R}^1)})\, dt.$$

Įvertindami šiuos integralus, iš pradžių pasinaudojome Niutono–Leibnico formule, o po to Minkovskio nelygybe.

Į paskutinį integralą galima žiūrėti kaip į kintamojo ρ funkciją, kuri taške $\rho = 0$ lygi nuliui. Pritaikę taip apibrėžtai funkcijai Hardžio nelygybę, gausime

$$\int\limits_0^\infty \rho^{-p}\Big(\int\limits_0^\rho (2\|u_t(y',t)\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\mathbb{R}^1)} + \|u_{y_1}(y',t)\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\mathbb{R}^1)})\, dt\Big)^p d\rho \le$$

$$\leq\Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p\int\limits_0^\infty(2\|u_t(y',t)\|^p_{\mathrm{L_p}(\mathbb{R}^1)}+\|u_{y_1}(y',t)\|^p_{\mathrm{L_p}(\mathbb{R}^1)})\,dt.$$

Todėl

$$\langle\varphi\rangle^p_{\mathrm{W}^{1-1/\mathrm{p}}_{\mathrm{p}}(\mathbb{R}^{n-1})}\leq\sigma_1\Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p\Big(2\|u_t(y',t)\|^p_{\mathrm{L_p}(\mathbb{R}^n_+)}+\|u_{y_1}(y',t)\|^p_{\mathrm{L_p}(\mathbb{R}^n_+)}\Big);$$

čia σ_1 – $(n-1)$-matės vienetinės sferos plotas. Grįžę prie senų kintamųjų x', gausime įvertį

$$\langle\varphi\rangle^p_{\mathrm{W}^{1-1/\mathrm{p}}_{\mathrm{p}}(\mathbb{R}^{n-1})}\leq C\sum_{i=1}^n\|u_{x_i}\|^p_{\mathrm{L_p}(\mathbb{R}^n_+)}.$$

Taigi funkcija $\varphi\in\mathrm{W}^{1-1/\mathrm{p}}_{\mathrm{p}}(\mathbb{R}^{n-1})$ ir yra teisinga (3.51) nelygybė.

Antrąjį teoremos teiginį pakanka įrodyti, kai funkcija $\varphi\in\mathrm{C}^\infty_0(\mathbb{R}^{n-1})$. Tegu w – tokia be galo diferencijuojama erdvėje $\mathbb{R}^{n-1}$ funkcija, kad

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}w(x')\,dx'=1$$

ir $w(x')=0$, kai $|x'|>1$. Apibrėžkime funkciją

$$v(x)=\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\varphi(x'+x_ny')w(y')\,dy',\quad x_n\geq0.$$

Akivaizdu, kad $v(x',0)=\varphi(x')$. Pagal Minkovskio nelygybę

$$\begin{aligned}\|v\|_{\mathrm{L_p}(\mathbb{R}^{n-1})}&\leq\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}|\varphi(x'+x_ny')w(y')|^p\,dx'\Big)^{1/p}dy'\leq\\&\leq\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}|w(y')|\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}|\varphi(x'+x_ny'))|^p\,dx'\Big)^{1/p}dy'\leq\\&\leq\|\varphi\|_{\mathrm{L_p}(\mathbb{R}^{n-1})}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}|w(y')|\,dy',\quad\forall x_n\geq0.\end{aligned}\tag{3.53}$$

Rasime funkcijos v išvestines. Kai $i<n$,

$$\begin{aligned}v_{x_i}(x)&=x_n^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\varphi_{y_i}(x'+x_ny')w(y')\,dy'=\\&=-x_n^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}(\varphi(x'+x_ny')-\varphi(x'))w_{y_i}(y')\,dy'.\end{aligned}$$

Kai $i=n$,

$$v_{x_n}(x)=x_n^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\sum_{i=1}^{n-1}\varphi_{y_i}(x'+x_ny')y_iw(y')\,dy'=$$

$$= -x_n^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}(\varphi(x'+x_ny')-\varphi(x'))\sum_{i=1}^{n-1}\big(y_iw(y')\big)_{y_i}\,dy'.$$

Įvertinkime funkcijų v_{x_i} normas erdvėje $\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\mathbb{R}^n_+)$. Tegu $i=1,\dots,n-1$. Pagal Minkovskio nelygybę norma

$$\|v_{x_i}\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\mathbb{R}^n_+)}\le\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}|\varphi(x'+x_ny')-\varphi(x')|^p x_n^{-p}\,dx\Big)^{1/p}|w_{y_i}(y')|\,dy'=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\Big(\int\limits_0^\infty x_n^{-p}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}|\varphi(x'+x_ny')-\varphi(x')|^p x_n^{-p}\,dx'dx_n\Big)^{1/p}|w_{y_i}(y')|\,dy'.$$

Paskutiniame integrale pereikime prie sferinių koordinačių (kintamųjų y' atžvilgiu). Tada pasinaudoję Helderio nelygybe, gausime, kad $\|v_{x_i}\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\mathbb{R}^n_+)}$ neviršija

$$C\int\limits_0^1 r^{n-2}\int\limits_{|\omega'|=1}\Big(\int\limits_0^\infty\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}|\varphi(x'+x_nr\omega')-\varphi(x')|^p\,dx'\,x_n^{-p}\,dx_n\Big)^{1/p}d\omega'dr\le$$

$$\le C_1\int\limits_0^1 r^{n-2}\Big(\int\limits_{|\omega'|=1}\int\limits_0^\infty\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}|\varphi(x'+x_nr\omega')-\varphi(x')|^p\,dx'\,x_n^{-p}\,dx_nd\omega'\Big)^{1/p}dr=$$

$$=C_1\int\limits_0^1 r^{n-2}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\frac{|\varphi(x'+rz')-\varphi(x')|^p}{|z'|^{n-2+p}}\,dx'dz'\Big)^{1/p}dr\le$$

$$\le C_2\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\frac{|\varphi(x'+z')-\varphi(x')|^p}{|z'|^{n-2+p}}\,dx'dz'\Big)^{1/p}.$$

Taigi $\forall i=1,\dots,n-1$ teisinga nelygybė

$$\|v_{x_i}\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\mathbb{R}^n_+)}\le C_2\langle\varphi\rangle_{\mathrm{W}^{1-1/\mathrm{p}}_{\mathrm{p}}(\mathbb{R}^{n-1})}. \tag{3.54}$$

Ši nelygybė yra teisinga ir kai $i=n$ (tik su sava konstanta C_2). Įrodymas yra visiškai toks pats.

Tegu $\xi(t)$ yra be galo diferencijuojama monotoniškai mažėjanti intervale $[0,\infty)$ funkcija, lygi vienetui, kai $t\in[0,1/2)$, ir lygi nuliui, kai $t\ge1$. Apibrėžkime funkciją

$$u(x)=v(x)\xi(x_n).$$

Akivaizdu, kad $u(x',0)=v(x',0)=\varphi(x')$. Be to, iš (3.53) ir (3.54) išplaukia nelygybės:

$$\|u\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\mathbb{R}^n_+)}\le\|v\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\mathbb{R}^n_+)}\le\|\varphi\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\mathbb{R}^{n-1})}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}|w(y')|\,dy',$$

$$\|u_{x_i}\|_{L_p(\mathbb{R}^n_+)} \le \|v_{x_i}\|_{L_p(\mathbb{R}^n_+)} + \sup_{t\ge 0}|\xi'(t)|\|v\|_{L_p(\mathbb{R}^n_+)} \le$$

$$\le C_2\langle\varphi\rangle_{W_p^{1-1/p}(\mathbb{R}^{n-1})} + C_3\|\varphi\|_{L_p(\mathbb{R}^{n-1})}.$$

Kartu yra teisinga (3.52) nelygybė. ▷

I š v a d a. Iš (3.51) ir (3.52) nelygybių išplaukia, kad egzistuoja tokios teigiamos konstantos C_1 ir C_2, kad

$$C_1|||\varphi||| \le \|\varphi\|_{W_p^{1-1/p}(\mathbb{R}^{n-1})} \le C_2|||\varphi|||;$$

čia $|||\cdot|||$ apibrėžta (3.50) formule. Todėl erdvė $W_p^{1-1/p}(\mathbb{R}^{n-1})$ sutampa su funkcijų iš erdvės $W_p^1(\mathbb{R}^n_+)$ pėdsakų hiperplokštumoje $x_n = 0$ erdve.

Įrodytą teoremą lengvai galima apibendrinti bet kokiam sveikajam $k\ge 1$. Tiksliau, teisinga tokia teorema.

3.24 teorema. *Tegu* $p > 1$. *Tada:*

1. *Funkcija* $u\in W_p^k(\mathbb{R}^n_+)$ *turi pėdsaką hiperplokštumoje* $x_n = 0$ *ir*

$$D^\alpha u|_{x_n=0} := \varphi_\alpha \in W_p^{k-|\alpha|-1/p}(\mathbb{R}^{n-1}), \quad |\alpha| < k.$$

Be to,

$$\|\varphi_\alpha\|_{W_p^{k-|\alpha|-1/p}(\mathbb{R}^{n-1})} \le C\|u\|_{W_p^k(\mathbb{R}^n_+)}; \tag{3.55}$$

čia konstanta C *nepriklauso nuo konkretaus elemento* u.

2. *Kiekvienam funkcijų* $\varphi_i\in W_p^{k-i-1/p}(\mathbb{R}^{n-1})$, $i = 1, \dots, k-1$, *rinkiniui egzistuoja tokia funkcija* $u\in W_p^k(\mathbb{R}^n_+)$, *kad*

$$\frac{\partial^i u(x',0)}{\partial x_n^i} = \varphi_i(x'), \quad i = 1, \dots, k-1,$$

ir yra teisinga nelygybė

$$\|u\|_{W_p^k(\mathbb{R}^n_+)} \le C\sum_{i=0}^{k-1}\|\varphi_i\|_{W_p^{k-i-1/p}(\mathbb{R}^{n-1})}; \tag{3.56}$$

čia konstanta C *nepriklauso nuo konkrečių elementų* φ_i.

Šios teoremos įrodymą galima rasti [8] knygoje.

I š v a d a. Iš (3.55) ir (3.56) nelygybių išplaukia, kad egzistuoja tokios teigiamos konstantos C_1 ir C_2, kad

$$C_1|||\varphi||| \le \|\varphi\|_{W_p^{k-1/p}(\mathbb{R}^{n-1})} \le C_2|||\varphi|||.$$

Kartu galime tvirtinti, kad erdvė $W_p^{1-1/p}(\mathbb{R}^{n-1})$ sutampa su funkcijų erdvės $W_p^k(\mathbb{R}^n_+)$ pėdsakų hiperplokštumoje $x_n = 0$ erdve.

Tarkime, Ω yra aprėžta erdvėje $\mathbb{R}^n$ sritis ir $S = \partial\Omega$ – C^k klasės paviršius. Tada yra teisinga teorema.

3.25 teorema. *Tegu $p > 1$. Tada:*

1. *Funkcija $u\in \mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$ turi pėdsaką paviršiuje S ir*

$$D^\alpha u\big|_S = \varphi_\alpha \in \mathrm{W}_\mathrm{p}^{\mathrm{k}-|\alpha|-1/\mathrm{p}}(S), \quad |\alpha| < k.$$

Be to,

$$\|\varphi_\alpha\|_{\mathrm{W}_\mathrm{p}^{\mathrm{k}-|\alpha|-1/\mathrm{p}}(S)} \le C\|u\|_{\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)};$$

čia konstanta C nepriklauso nuo konkretaus elemento u.

2. *Bet kokiai funkcijai $\varphi\in \mathrm{W}_\mathrm{p}^{\mathrm{k}-1/\mathrm{p}}(S)$ egzistuoja tokia funkcija $u\in \mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$, kad $u|_S = \varphi$ ir yra teisinga nelygybė*

$$\|u\|_{\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)} \le C\|\varphi\|_{\mathrm{W}_\mathrm{p}^{\mathrm{k}-1/\mathrm{p}}(S)};$$

čia konstanta C nepriklauso nuo konkretaus elemento φ.

Šią teoremą galima įrodyti įprastu būdu. Tik iš pradžių, naudojant vieneto skaidinį, reikia apibrėžti erdvę $\mathrm{W}_\mathrm{p}^{\mathrm{k}-1/\mathrm{p}}(S)$. Teoremos įrodymą galima rasti [8] knygoje.

P a s t a b a. Kiekvienai funkcijai $u\in \mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$ paviršiuje S galima apibrėžti jos normalines išvestines iki $(k-1)$-osios eilės imtinai. Todėl 3.25 teoremos antrąją dalį galima apibendrinti (žr. 3.24 teoremos antrą teiginį).

Išnagrinėsime antrąjį atvejį. Tarkime, $p = 2$. Priminsime, kad erdvė W_2^k yra Hilberto erdvė. Ją žymėsime H^k.

3.26 teorema. *Tegu $k > 1/2$ ir $u\in \mathrm{H}^\mathrm{k}(\mathbb{R}^n)$. Tada funkcija u turi pėdsaką*

$$u\big|_{x_n=0} \in \mathrm{H}^{\mathrm{k}-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$$

ir yra teisinga nelygybė

$$\|u\|_{\mathrm{H}^{\mathrm{k}-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} \le C\|u\|_{\mathrm{H}^\mathrm{k}(\mathbb{R}^n)}; \tag{3.57}$$

čia konstanta C nepriklauso nuo konkretaus elemento $u\in \mathrm{H}^\mathrm{k}(\mathbb{R}^n)$.

◃ Kadangi aibė $\mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ yra tiršta erdvėje $\mathrm{H}^\mathrm{k}(\mathbb{R}^n)$, tai teoremą pakanka įrodyti funkcijoms iš $\mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Tegu $u\in \mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ir

$$\widehat{u}(\xi', x_n) = (2\pi)^{-(n-1)/2} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-ix'\xi'} u(x', x_n)\, dx'$$

yra funkcijos u Furjė transformacija kintamųjų $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$ atžvilgiu. Kita vertus,

$$\widehat{u}(\xi', x_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{u}(\xi) e^{i\xi_n x_n}\, d\xi_n;$$

čia $\widehat{u}(\xi)$ – funkcijos u Furjė transformacija visų kintamųjų x atžvilgiu. Kadangi $|e^{i\xi_n x_n}| = 1$, tai

$$|\widehat{u}(\xi',0)|\leq\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\widehat{u}(\xi)|\,d\xi_n. \tag{3.58}$$

Pagal Helderio nelygybę

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\widehat{u}(\xi)|\,d\xi_n\leq\Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty}(1+|\xi|^2)^k|\widehat{u}(\xi)|^2\,d\xi_n\Big)^{1/2}\Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\xi_n}{(1+|\xi'|^2+|\xi_n|^2)^k}\Big)^{1/2}.$$

Paskutiniame integrale vietoje kintamojo ξ_n įveskime naują kintamąjį t pagal formulę

$$\xi_n = t\sqrt{1+|\xi'|^2}.$$

Tada

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\xi_n}{(1+|\xi'|^2+|\xi_n|^2)^k}=\frac{1}{(1+|\xi'|^2)^{k-1/2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{(1+t^2)^k}.$$

Pagal teoremos sąlygą $k > 1/2$. Todėl

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{(1+t^2)^k}=M<\infty$$

ir

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\widehat{u}(\xi)|\,d\xi_n\leq\Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty}(1+|\xi|^2)^k|\widehat{u}(\xi)|^2\,d\xi_n\Big)^{1/2}\frac{M}{(1+|\xi'|^2)^{k-1/2}}.$$

Sugretinę pastarąją nelygybę su (3.58), gausime

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}(1+|\xi'|^2)^{k-1/2}|\widehat{u}(\xi',0)|^2\,d\xi'\leq\frac{M}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(1+|\xi|^2)^k|\widehat{u}(\xi)|^2\,d\xi_n d\xi'.$$

Reiškinys nelygybės kairėje yra ekvivalentus $\|u\|^2_{H^{k-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})}$, o reiškinys dešinėje – $\|u\|^2_{H^k(\mathbb{R}^n)}$. Todėl $\forall u\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ yra teisinga (3.57) nelygybė. Kartu ši nelygybė yra teisinga ir $\forall u\in H^k(\mathbb{R}^n)$. $\triangleright$

I š v a d o s:

1. Tegu $k > |\alpha|+1/2$ ir funkcija $u\in H^k(\mathbb{R}^n)$. Tada jos išvestinė $D^\alpha u$ turi pėdsaką

$$D^\alpha u\big|_{x_n=0}\in H^{k-|\alpha|-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$$

ir yra teisinga nelygybė

$$\|D^\alpha u\|_{H^{k-|\alpha|-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})}\leq C\|u\|_{H^k(\mathbb{R}^n)};$$

čia konstanta C nepriklauso nuo konkretaus elemento $u\in H^k(\mathbb{R}^n)$.

2. Tegu $m < n,\ k > |\alpha| - (n-m)/2$ ir funkcija $u\in \mathrm{H}^{\mathrm{k}}(\mathbb{R}^n)$. Tada jos išvestinė $D^\alpha\, u$ turi pėdsaką
$$D^\alpha\, u\big|_{\mathbb{R}^m}\in \mathrm{H}^{\mathrm{k}-|\alpha|-(\mathrm{n}-\mathrm{m})/2}(\mathbb{R}^m)$$
ir teisinga nelygybė
$$\|\, D^\alpha\, u\|_{\mathrm{H}^{\mathrm{k}-|\alpha|-(\mathrm{n}-\mathrm{m})/2}(\mathbb{R}^m)}\le C\|u\|_{\mathrm{H}^{\mathrm{k}}(\mathbb{R}^n)};$$
čia konstanta C nepriklauso nuo konkretaus elemento u.

P a s t a b a. Tegu Ω yra aprėžta erdvėje $\mathbb{R}^n$ sritis, $S = \partial\Omega$ – $\mathrm{C}^{\mathrm{k}+\varepsilon}$ klasės paviršius. Tada 1 išvadoje erdvę $\mathbb{R}^{n-1}$ galima pakeisti paviršiumi S, o 2 – erdvę $\mathbb{R}^s$ glodžiu s-mačiu paviršiumi $\Gamma\subset\Omega$.

Įrodysime atvirkštinį teiginį.

3.27 teorema. *Tegu* $\varphi\in \mathrm{H}^{\mathrm{k}-1/2}(\mathbb{R}^{n-1}),\ k > 1/2$. *Tada egzistuoja tokia funkcija*
$$u\in \mathrm{H}^{\mathrm{k}}(\mathbb{R}^n),$$
kad
$$u(x',0) = \varphi(x')$$
ir
$$\|u\|_{\mathrm{H}^{\mathrm{k}}(\mathbb{R}^n)}\le C\|\varphi\|_{\mathrm{H}^{\mathrm{k}-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})}; \tag{3.59}$$
čia konstanta C *nepriklauso nuo konkretaus elemento* φ.

◁ Pakanka įrodyti, kad teorema teisinga $\forall\varphi\in \mathrm{C}^\infty_0(\mathbb{R}^{n-1})$. Apibrėžkime funkciją
$$\widehat{u}(\xi',x_n) = \widehat{\varphi}(\xi')w(x_n\sqrt{1+|\xi'|^2});$$
čia $w\in \mathrm{C}^\infty_0(\mathbb{R}^1)$ ir $w(t) = 1$ taško $t = 0$ aplinkoje. Apskaičiavę taip apibrėžtos funkcijos Furjė transformaciją kintamojo x_n atžvilgiu, gausime
$$\widehat{u}(\xi) = \widehat{\varphi}(\xi')(1+|\xi'|^2)^{-1/2}\widehat{w}\big(\xi_n(1+|\xi'|^2)^{-1/2}\big).$$
Funkcijos u normos kvadratas erdvėje $\mathrm{H}^{\mathrm{k}}(\mathbb{R}^n)$ ekvivalentus integralui
$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^k|\widehat{u}(\xi)|^2\,d\xi$$
(žr. 3.7 skyrelį). Pastarąjį integralą integruodami atskirai pagal kintamuosius ξ' ir ξ_n, gausime
$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}|\widehat{\varphi}(\xi')|^2(1+|\xi'|^2)^{-1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(1+|\xi'|^2+\xi_n^2)^k|\widehat{w}\big(\xi_n(1+|\xi'|^2)^{-1/2}\big)|^2\,d\xi_n d\xi' =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}|\widehat{\varphi}(\xi')|^2(1+|\xi'|^2)^{k-1/2}\,d\xi'\int\limits_{-\infty}^{\infty}(1+t^2)^k|\widehat{w}(t)|^2\,dt\le C\|\varphi\|^2_{\mathrm{H}^{\mathrm{k}-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})}.$$

Todėl sukonstruotai funkcijai u teisinga (3.59) nelygybė. Beliko įrodyti, kad $u(x',0)=\varphi(x')$. Tačiau tai išplaukia iš formulės $\widehat{u}(\xi',0)=\widehat{\varphi}(\xi')$. ▷

I š v a d o s:

1. Tegu $k>1,\ \varphi_i\in\mathrm{H}^{\mathrm{k-i-1/2}}(\mathbb{R}^{n-1}),\ i=0,\dots,s$ ir $k-s>1/2$. Tada egzistuoja tokia funkcija $u\in\mathrm{H}^{\mathrm{k}}(\mathbb{R}^n)$, kad

$$\frac{\partial^i u(x',0)}{\partial x_n^i}=\varphi_i(x'),\quad \forall i=0,\dots,s,$$

ir teisinga nelygybė

$$\|u\|_{\mathrm{H}^{\mathrm{k}}(\mathbb{R}^n)}\le C\sum_{i=0}^{s}\|\varphi_i\|_{\mathrm{H}^{\mathrm{k-i-1/2}}(\mathbb{R}^{n-1})};$$

čia konstanta C nepriklauso nuo elementų $\varphi_1,\dots,\varphi_s$.

2. Tegu $\varphi_\alpha\in\mathrm{H}^{\mathrm{k-|\alpha|-(n-m)/2}}(\mathbb{R}^m),\ k>(n-m)/2,\ \alpha$ – multiindeksas, $k-|\alpha|-(n-m)/2>0$. Tada egzistuoja tokia funkcija $u\in\mathrm{H}^{\mathrm{k}}(\mathbb{R}^n)$, kad

$$D^\alpha u\big|_{\mathbb{R}^m}=\varphi_\alpha$$

ir teisinga nelygybė

$$\|u\|_{\mathrm{H}^{\mathrm{k}}(\mathbb{R}^n)}\le C\sum_{\alpha}\|\varphi_\alpha\|_{\mathrm{H}^{\mathrm{k-|\alpha|-(n-m)/2}}(\mathbb{R}^m)};$$

čia konstanta C nepriklauso nuo φ_α.

3.9. UŽDAVINIAI

1. Įrodykite nelygybes

   (a) $|\Omega|^{-1/p}\|u\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega)}\leq|\Omega|^{-1/q}\|u\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{q}}(\Omega)}, \quad \forall u\in \mathrm{L}_{\mathrm{q}}(\Omega),\ p\leq q;$

   (b) $\|u\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{q}}(\Omega)}\leq\|u\|^{\alpha}_{\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega)}\|u\|^{-\alpha}_{\mathrm{L}_{\mathrm{r}}(\Omega)}, \quad u\in \mathrm{L}_{\mathrm{r}}(\Omega),$

   $p\leq q\leq r,\ 1/q=\alpha/p+(1-\alpha)/r;$

   (c) $\|u\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{q}}(\Omega)}\leq\varepsilon\|u\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{r}}(\Omega)}+\varepsilon^{-\alpha}\|u\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega)}, \quad p\leq q\leq r,$

   $\alpha=(1/p-1/q)(1/q-1/r).$

   N u r o d y m a s. Pasinaudokite Jungo ir Helderio nelygybėmis.

2. Įrodykite, kad (2.19) ir (2.20) normos yra ekvivalenčios.

3. Tegu Ω yra aprėžta iškila sritis, $u\in \mathrm{W}^1_1(\Omega)$. Įrodykite, kad b.v. $x\in\Omega$ teisinga nelygybė

$$|u(x)-u_\omega|\leq\frac{d^n}{n|\omega|}\int\limits_\Omega |x-y|^{1-n}|u_y|\,dy, \quad u_\omega=\frac{1}{|\omega|}\int\limits_\omega u(x)\,dx;$$

   čia $d=\operatorname{diam}\Omega,\ \omega\subset\Omega$ – kokia nors mati aibė, $|\omega|\neq 0$.

   N u r o d y m a s. Įsitikinkite, kad pastarąją nelygybę pakanka įrodyti funkcijoms $u\in \mathrm{C}^1(\Omega)$ ir pasinaudokite Niutono–Leibnico formule.

4. Tegu $f_i\in \mathrm{C}^\infty_0(\mathbb{R}^{n-1}),\ i=1,\dots,n$. Įrodykite nelygybę

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\prod_{i=1}^n f_i(x')\,dx\leq\prod_{i=1}^n\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}|f_i(x')|^{n-1}\,dx'\Big)^{1/(n-1)};$$

   čia $f_i(x')=f_i(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n)$.

   N u r o d y m a s. Pasinaudokite matematinės indukcijos metodu.

5. Tegu Ω yra aprėžta iškila sritis, $u\in \mathrm{W}^1_1(\Omega)$. Įrodykite nelygybę

$$\|u-u_\omega\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega)}\leq\big(|S_1|/|\omega|\big)^{1-1/p}d^n\|u_x\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega)}.$$

   N u r o d y m a s. Pasinaudokite 3 uždaviniu.

6. Tegu $p\in[1,\infty)$. Įrodykite, kad kiekvienai funkcijai $u\in \mathring{\mathrm{W}}^1_{\mathrm{p}}(\Omega)$ yra teisinga nelygybė

$$\|u\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega)}\leq\big(|\Omega|/|S_1|\big)^{1/n}\|u_x\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega)}.$$

   N u r o d y m a s. Pasinaudokite Frydrichso–Puankare nelygybe.

7. Tegu $u\in \mathring{\mathrm{W}}^1_{\mathrm{p}}(\Omega)$, $p > n$. Įrodykite, kad funkcija $u\in \mathrm{C}^{1-\mathrm{n}/\mathrm{p}}(\overline{\Omega})$ ir teisinga nelygybė
$$\operatorname*{osc}_{\Omega\cap B_R} u\leq CR^{1-n/p}\|u_x\|_{\mathrm{L}_\mathrm{p}(\Omega)};$$
čia konstanta C priklauso tik nuo n ir p.

N u r o d y m a s. Pasinaudokite 3.6 teoremos įrodymu.

8. Tegu Ω yra aprėžta erdvėje $\mathbb{R}^n$ sritis, $S = \partial\Omega$ – C^1 klasės paviršius. Įrodykite, kad funkcija $u\in \mathrm{W}^1_\infty(\Omega)$ tada ir tik tada, kai ji srityje Ω tenkina Lipšico sąlygą.

N u r o d y m a s. Pasinaudokite Niutono–Leibnico formule.

9. Įrodykite, kad kiekvienai funkcijai $u\in \mathrm{C}^\infty_0(\Omega)$ ir $\forall k > 0$ teisinga formulė
$$u(x) = \sum_{i_1,..,i_k=1}^{n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^k u(u)}{\partial y_{i_1}\cdots\partial y_{i_k}} \frac{(x_{i_1}-y_{i_1})\cdots(x_{i_k}-y_{i_k})}{(k-1)!|S_1||x-y|^n}\,dy.$$

N u r o d y m a s. Pasinaudokite tapatybe
$$\sum_{i_k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{(x_{i_1}-y_{i_1})\cdots(x_{i_{k-1}}-y_{i_{k-1}})(x_{i_k}-y_{i_k})}{|x-y|^n} =$$
$$= (k-1)\frac{(x_{i_1}-y_{i_1})\cdots(x_{i_{k-1}}-y_{i_{k-1}})}{|x-y|^n};$$
čia $k\geq 2$, $i_1,\dots,i_{k-1}$ – fiksuoti, išvestinės apibendrintos.

10. Tegu Ω yra aprėžta erdvėje $\mathbb{R}^n$ sritis, $S = \partial\Omega$ – C^k klasės paviršius, $0\leq r < k$, $s > n-p(k-r)$, $k-r-n/p+s/q^* = 0$. Įrodykite, kad erdvė $\mathrm{W}^\mathrm{k}_\mathrm{p}(\Omega)$ įsideda į erdvę $\mathrm{W}^\mathrm{r}_{\mathrm{q}^*}(\Omega_s)$.

N u r o d y m a s. Iš pradžių įrodykite, kad erdvė $\mathring{\mathrm{W}}^\mathrm{k}_\mathrm{p}(\Omega) \hookrightarrow \mathrm{W}^\mathrm{r}_{\mathrm{q}^*}(\Omega_s)$ (žr. 9 uždavinį ir 3.12 nelygybę). Po to pasinaudokite 2.15 teorema.

11. Tegu $k\in[0,1/2)$. Įrodykite nelygybę[4]
$$\|x^{-k}u\|_{\mathrm{L}_2(0,\infty)}\leq C\|u\|_{\mathrm{H}^k(0,\infty)}, \quad \forall u\in \mathrm{C}^\infty_0(0,\infty).$$

N u r o d y m a s. Iš pradžių patikrinkite tapatybę $u = v - w$; čia
$$v(x) = \frac{1}{x}\int\limits_0^x (u(x)-u(s))\,ds, \quad w(x) = \int\limits_x^\infty \frac{1}{s}v(s)\,ds.$$

Po to įrodykite nelygybes:
$$\|x^{-k}v\|_{\mathrm{L}_2(0,\infty)}\leq C_1\|u\|_{\mathrm{H}^k(0,\infty)}, \quad \|x^{-k}w\|_{\mathrm{L}_2(0,\infty)}\leq C_2\|u\|_{\mathrm{H}^k(0,\infty)}.$$

[4] Smulkiau apie pastarąją nelygybę ir apie galimus jos apibendrinimus žr. [31].

4 SKYRIUS

Kraštiniai elipsinių lygčių uždaviniai

Šiame skyriuje nagrinėsime tiesines antrosios eilės lygtis

$$A\,u := -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}u_{x_j}\Big) + \sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i} + au = f(x) + \operatorname{div}\bar{f}(x);$$

čia A – tolygiai elipsinis operatorius su aprėžtais mačiais srityje Ω koeficientais a_{ij}, a_i ir a, $\bar{f} = (f_1, \ldots, f_n)$, $f, f_i \in \mathrm{L}_2(\Omega)$. Atkreipsime dėmesį, kad operatoriaus A koeficientai a_{ij} bei funkcijos f_i gali neturėti išvestinių (netgi apibendrintų). Tuo atveju, kai koeficientai a_{ij} bei funkcijos f_i turi apibendrintas išvestines, nagrinėjamą lygtį galima užrašyti įprastu būdu:

$$\sum_{i,j=1}^{n} \tilde{a}_{ij}u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n} \tilde{a}_i u_{x_i} + \tilde{a}u = \tilde{f}.$$

Daugiausiai dėmesio skirsime pirmajam kraštiniam uždaviniui. Iš pradžių įrodysime apibendrinto sprendinio egzistavimą erdvėje $\mathrm{W}_2^1(\Omega)$. Po to įrodysime, kad apibendrinto sprendinio glodumas padidėja lygiai tiek kiek paviršiaus S, operatoriaus A koeficientų bei lygties ir kraštinių sąlygų dešiniųjų pusių glodumas.

4.1. APIBENDRINTOJO SPRENDINIO APIBRĖŽIMAS. DIRICHLĖ UŽDAVINYS

Tegu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ yra aprėžta sritis, $S = \partial\Omega$, $a_{ij} = a_{ji}$, a_i ir a – aprėžtos mačios srityje Ω funkcijos, A – elipsinis operatorius. Srityje Ω nagrinėsime lygtį

$$A\,u = f + \operatorname{div}\bar{f}; \tag{4.1}$$

čia $\bar{f} = (f_1, \ldots, f_n)$, $f, f_i \in \mathrm{L}_2(\Omega)$, $\forall i = 1, \ldots, n$. Bendru atveju ši lygtis neturi klasikinio (glodaus) sprendinio. Ji netgi neturi prasmės. Norint suteikti jai tam tikrą prasmę, reikia apibrėžti apibendrinto sprendinio sąvoką.

Iš pradžių tarkime, kad visos į (4.1) lygtį įeinančios funkcijos yra pakankamai glodžios. Tada $\forall \eta \in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$ yra teisinga integralinė tapatybė

$$\int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_{x_j}\eta_{x_i} + \sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i}\eta + au\eta\Big)\,dx = \int_\Omega \Big(f\eta - \sum_{i=1}^{n} f_i\eta_{x_i}\Big)\,dx. \tag{4.2}$$

Ją gausime, jeigu abi (4.1) lygties puses padauginsime iš funkcijos η, gautą lygybę suintegruosime sritimi Ω ir pritaikysime integravimo dalimis formulę.

Kadangi aibė $\mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$ yra tiršta erdvėje $\mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)$, tai (4.2) integralinėje tapatybėje vietoje funkcijos $\eta\in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$ galime imti bet kokią funkciją iš erdvės $\mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)$. Be to, jeigu funkcija $u\in \mathrm{C}^2(\Omega)$ yra klasikinis (4.1) lygties sprendinys, tai $\forall\eta\in \mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)$ teisinga (4.2) integralinė tapatybė. Integralas dešiniojoje šios tapatybės pusėje konverguoja, kai funkcijos f ir $f_i\in \mathrm{L}_2(\Omega)$, $i = 1,\dots,n$. Integralas tapatybės kairėje konverguoja, jeigu $u\in \mathrm{W}_2^1(\Omega)$ ir operatoriaus A koeficientai a_{ij}, a_i ir a yra aprėžti.

A p i b r ė ž i m a s. Sakysime, $u\in \mathrm{W}_2^1(\Omega)$ yra (4.1) lygties *apibendrintasis sprendinys* srityje Ω, jeigu $\forall\eta\in \mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)$ yra teisinga (4.2) integralinė tapatybė.

Tegu $u\in \mathrm{W}_2^1(\Omega)$ yra (4.1) lygties apibendrintas sprendinys srityje Ω. Tada jis yra (4.1) lygties apibendrintas sprendinys bet kokioje srityje $\Omega' \subset \Omega$. Norint tuo įsitikinti, pakanka (4.2) tapatybėje paimti $\eta\in \mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega')$. Taigi apibendrinto sprendinio apibrėžimas yra korektiškas.

Tarkime, funkcija $u\in \mathrm{W}_2^1(\Omega)$ yra (4.1) lygties apibendrintas sprendinys srityje Ω, $u\in \mathrm{C}^2(\Omega)$ ir operatoriaus A koeficientai bei funkcijos f ir $\bar f$ yra pakankamai glodžios. Įrodysime, kad u yra klasikinis (4.1) lygties sprendinys srityje Ω. Pasinaudoję integravimo dalimis formule, (4.2) tapatybę perrašykime taip:

$$\int\limits_\Omega \Big(A\,u - f - \operatorname{div}\bar f\Big)\eta\,dx = 0, \quad \forall\eta\in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega). \tag{4.3}$$

Funkcija $A\,u-f-\operatorname{div}\bar f$ yra ortogonali erdvėje $\mathrm{L}_2(\Omega)$ bet kokiai funkcijai $\eta\in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$. Kadangi aibė $\mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$ yra tiršta erdvėje $\mathrm{L}_2(\Omega)$, tai yra įmanoma tik tuo atveju, kai $A\,u - f - \operatorname{div}\bar f = 0$, t.y. kai funkcija u yra klasikinis (4.1) lygties sprendinys.

A p i b r ė ž i m a s. Sakysime, $u\in \mathrm{W}_2^1(\Omega)$ yra Dirichlė uždavinio

$$A\,u = f + \operatorname{div}\bar f, \quad u\big|_S = 0 \tag{4.4}$$

apibendrintasis sprendinys, jeigu ji yra (4.1) lygties apibendrintas sprendinys ir

$$u\in \mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega).$$

P a s t a b a. Jeigu paviršius S yra pakankamai glodus, pavyzdžiui, klasės C^1, tai erdvė $\mathrm{W}_2^1(\Omega)$ įsideda į erdvę $\mathrm{L}_2(S)$. Vadinasi, kiekviena funkcija $u\in \mathrm{W}_2^1(\Omega)$ turi pėdsaką paviršiuje S ir $u\big|_S\in \mathrm{L}_2(S)$. Todėl Dirichlė uždavinio su nehomogenine kraštine sąlygą $u\big|_S = \varphi$ apibendrintą sprendinį galima apibrėžti kaip funkciją $u\in \mathrm{W}_2^1(\Omega)$, kuri yra apibendrintas (4.1) lygties sprendinys ir tenkina šią sąlygą erdvės $\mathrm{L}_2(S)$ prasme. Tačiau tai nėra tiksli funkcijų iš erdvės $\mathrm{W}_2^1(\Omega)$ pėdsakų paviršiuje S charakteristika. Funkcijų iš erdvės $\mathrm{W}_2^1(\Omega)$ pėdsakai paviršiuje S yra funkcijos iš erdvės $\mathrm{W}_2^{1/2}(S)$ (žr. 3.8 skyrelį). Taigi jeigu norime, kad funkcijos $u\in \mathrm{W}_2^1(\Omega)$ glodumas atitiktų jos pėdsako paviršiuje S glodumą, funkciją φ turime imti iš erdvės $\mathrm{W}_2^{1/2}(S)$.

Vietoje įprasto Dirichlė uždavinio kraštinės sąlygos apibrėžimo, kai nusakomas funkcijos glodumas paviršiuje S, vartosime tokį apibrėžimą:

A p i b r ė ž i m a s. Tegu $\varphi\in \mathrm{W}_2^1(\Omega)$. Sakysime, $u\in \mathrm{W}_2^1(\Omega)$ yra Dirichlė uždavinio

$$A\,u = f + \operatorname{div}\bar f, \quad u\big|_S = \varphi\big|_S \tag{4.5}$$

apibendrintasis sprendinys, jeigu ji yra apibendrintas (4.1) lygties sprendinys ir $u - \varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$.

Taip apibrėžiant apibendrintą sprendinį, atskiriama funkcijos φ pratęsimo į sritį Ω ir Dirichlė uždavinio išsprendžiamumo problema.

Tegu u yra (4.5) Dirichlė uždavinio apibendrintas sprendinys. Vietoje funkcijos u apibrėžkime naują ieškomą funkciją $v = u - \varphi$. Tada $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ ir $\forall \eta \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ yra teisinga integralinė tapatybė

$$\int\limits_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} v_{x_j} \eta_{x_i} + \sum_{i=1}^n a_i v_{x_i} \eta + a v \eta \Big)\, dx =$$

$$= \int\limits_\Omega \Big[\Big(f - \sum_{i=1}^n a_i \varphi_{x_i} - a\varphi \Big) \eta - \sum_{i=1}^n \Big(f_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} \varphi_{x_j} \Big) \eta_{x_i} \Big]\, dx.$$

Taigi funkcija v yra apibendrintas Dirichlė uždavinio

$$A\, v = g + \operatorname{div} \bar{g}, \quad v\big|_S = 0$$

sprendinys. Čia:

$$g = f - \sum_{i=1}^n a_i \varphi_{x_i} - a\varphi, \quad \bar{g} = (g_1, \dots, g_n), \quad g_i = f_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} \varphi_{x_j},$$

$i = 1, \dots, n$. Kartu galime tvirtinti, kad Dirichlė uždavinį su nehomogenine kraštine sąlyga visada galima suvesti į analogišką Dirichlė uždavinį su homogenine kraštine sąlyga. Todėl toliau nagrinėsime Dirichlė uždavinį su homogenine kraštine sąlyga.

4.2. DIRICHLĖ UŽDAVINYS PUASONO LYGTIES ATVEJU

Vienas iš paprasčiausių ir kartu svarbiausių elipsinių uždavinių yra Dirichlė uždavinys Puasono lygčiai. Nehomogeninės kraštinės sąlygos atveju jį visada galima suvesti į tokį patį uždavinį su homogenine kraštine sąlyga. Todėl iš karto nagrinėsime Dirichlė uždavinį

$$-\Delta u(x) = f(x), \quad x\in\Omega; \quad u\big|_S = 0. \tag{4.6}$$

Pagal apibrėžimą funkcija $u\in \mathring{W}_2^1(\Omega)$ yra (4.6) uždavinio apibendrintas sprendinys, jeigu $\forall\eta\in \mathring{W}_2^1(\Omega)$ teisinga integralinė tapatybė

$$\int\limits_\Omega \Big(\sum_{i=1}^n u_{x_i}\eta_{x_i} - f\eta\Big)\,dx = 0. \tag{4.7}$$

Erdvėje $\mathring{W}_2^1(\Omega)$ apibrėžkime kitą skaliarinę sandaugą

$$[u,v] = \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n u_{x_i}v_{x_i}\,dx$$

ir ją atitinkančią normą

$$\| u \| = \sqrt{[u,u]}.$$

Taip apibrėžta norma ir standartinė norma erdvėje $W_2^1(\Omega)$ yra ekvivalenčios (žr. 2.5 skyrelį).

Kiekvienai funkcijai $f\in L_2(\Omega)$ integralas

$$b(\eta) = \int\limits_\Omega f\eta\,dx$$

yra tiesinis funkcionalas erdvėje $\mathring{W}_2^1(\Omega)$. Pasinaudoję Helderio ir Frydrichso nelygybėmis, gausime

$$|b(\eta)|\le\|f\|_{L_2(\Omega)}\|\eta\|_{L_2(\Omega)}\le d\|f\|_{L_2(\Omega)}\| \eta \|; \tag{4.8}$$

čia $d = \operatorname{diam}\Omega$. Taigi funkcionalas $b(\eta)$ yra aprėžtas erdvėje $\mathring{W}_2^1(\Omega)$. Pagal Ryso teoremą egzistuoja tokia vienintelė funkcija $F\in \mathring{W}_2^1(\Omega)$, kad

$$b(\eta) = [F,\eta], \quad \forall\eta\in \mathring{W}_2^1(\Omega).$$

Todėl (4.7) integralinę tapatybę galima perrašyti taip:

$$[u-F,\eta] = 0, \quad \forall\eta\in \mathring{W}_2^1(\Omega).$$

Kartu galime tvirtinti, kad elementas $u-F$ yra ortogonalus $\forall\eta\in \mathring{W}_2^1(\Omega)$. Tačiau tai įmanoma tik tuo atveju, kai $u-F=0$, t.y. $u=F$.

Išnagrinėtas pavyzdys puikiai iliustruoja funkcinės analizės metodų taikymo tiesinių diferencialinių lygčių teorijoje esmę. Kraštinio uždavinio suvedimas į integralinę tapatybę leidžia apibrėžti apibendrinto sprendinio sąvoką. Po to apibendrintas sprendinys ieškomas Hilberto erdvėje $\mathring{W}_2^1(\Omega)$. Tai leidžia pasinaudoti Ryso teorema, kuri garantuoja ne tik apibendrinto sprendinio egzistavimą, bet ir jo vienatį. Atkreipsime dėmesį dar į tai, kad pateiktas apibendrinto sprendinio egzistavimo ir vienaties įrodymas visiškai nepriklauso nuo $\partial\Omega$ glodumo.

Šio metodo trūkumas yra tas, kad jis nesuteikia jokios informacijos apie apibendrinto sprendinio glodumą. Kai srities Ω kraštas yra pakankamai glodus, šį klausimą išnagrinėsime atskirai.

4.3. APIBENDRINTOJO SPRENDINIO VIENATIS

Iš pradžių išnagrinėsime vieną elementarų pavyzdį. Kraštinis uždavinys

$$-u_{xx} + \lambda u = 0, \quad x\in(0,1),$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0,$$

bet kokiai parametro $\lambda\in\mathbb{R}$ reikšmei turi trivialų sprendinį $u \equiv 0$. Iš paprastųjų diferencialinių lygčių kurso yra žinoma, kad teigiamoms λ reikšmėms šis kraštinis uždavinys netrivialių sprendinių neturi. Tačiau kai kurioms neigiamoms parametro λ reikšmėms netrivialūs sprendiniai egzistuoja. Pavyzdžiui, kai

$$\lambda = -(\pi k)^2, \quad k = 1, 2, \dots,$$

netrivialus sprendinys $u_k = \sin \pi kx$. Taigi tokioms λ reikšmėms kraštinis uždavinis turi du skirtingus sprendinius.

Analogiška situacija yra teisinga ir Dirichlė uždaviniui

$$A\,u = f + \operatorname{div} \bar{f},\ x\in\Omega, \quad u\big|_S = \varphi,\ x\in S. \tag{4.9}$$

Bendru atveju negalime tvirtinti, kad (4.9) uždavinys turi vienintelį apibendrintą sprendinį. Tačiau galima išskirti gana plačią tokių uždavinių klasę. Šiame skyrelyje įrodysime, kad (4.9) uždavinys negali turėti dviejų skirtingų apibendrintų sprendinių, jeigu patenkinta kuri nors iš šių dviejų sąlygų:

1. Operatoriaus A koeficientas a yra ,,pakankamai“ didelis.
2. Srities Ω diametras yra ,,pakankamai“ mažas.

Tegu A yra *tolygiai elipsinis*[1] operatorius, t.y. egzistuoja tokios teigiamos konstantos ν ir μ, kad

$$\nu \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \mu \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \quad \forall\xi\in\mathbb{R}^n, x\in\Omega. \tag{4.10}$$

Be to, tegu operatoriaus A koeficientai a_i ir a yra aprėžti, t.y. egzistuoja teigiamos konstantos μ_0 ir μ_1 tokios, kad

$$|a(x)| \leq \mu_0, \quad \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^2(x)\Big)^{1/2} \leq \mu_1, \quad x\in\Omega.$$

4.1 teorema. *Tegu* $a(x) \geq a_0$, *b.v.* $x\in\Omega$, $a_0 \geq \mu_1^2/2\nu$. *Tada* (4.9) *kraštinis uždavinys negali turėti dviejų skirtingų apibendrintų sprendinių.*

[1] Jeigu patenkinta tik pirmoji iš (4.10) nelygybių, tai sakysime, kad operatorius A yra *griežtai elipsinis.* Aprėžtų koeficientų a_{ij} atveju šios sąvokos sutampa.

$\lhd$ Tegu u_1, u_2 yra du (4.9) Dirichlė uždavinio apibendrinti sprendiniai. Tada jų skirtumas $u = u_1 - u_2$ yra Dirichlė uždavinio

$$A\,u = 0, \quad x\in\Omega; \quad u\big|_S = 0, \quad x\in S,$$

apibendrintas sprendinys, t.y. $u\in \overset{\circ}{\mathrm{W}}{}^1_2(\Omega)$ ir $\forall\eta\in \overset{\circ}{\mathrm{W}}{}^1_2(\Omega)$ yra teisinga integralinė tapatybė

$$\int\limits_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i}\eta_{x_j} + \sum_{i=1}^n a_i u_{x_i}\eta + au\eta\Big)\,dx = 0.$$

Imkime šioje tapatybėje $\eta = u$. Tada gausime lygybę

$$\int\limits_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i}u_{x_j} + \sum_{i=1}^n a_i u_{x_i}u + au^2\Big)\,dx = 0. \tag{4.11}$$

Šį integralą išskaidykime į tris ir pirmus du įvertinkime atskirai. Kadangi operatorius A yra tolygiai elipsinis, tai pirmasis integralas

$$\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i}u_{x_j}\,dx \geq \nu \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2\,dx.$$

Antrojo integralo modulį galima įvertinti taip:

$$\Big|\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n a_i u_{x_i} u\,dx\Big| \leq \Big\|\sum_{i=1}^n a_i u_{x_i}\Big\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)}\|u\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)} \leq$$

$$\leq \mu_1\|u_x\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)}\|u\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)} \leq \frac{\nu}{2}\|u_x\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} + \frac{\mu_1^2}{2\nu}\|u\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)}.$$

Įvertindami šį integralą, pasinaudojome nelygybe

$$|ab| \leq \frac{\varepsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\varepsilon}b^2,$$

kai $\varepsilon = \nu/\mu_1$. Iš (4.11) lygybės ir gautų įverčių išplaukia nelygybė

$$\frac{\nu}{2}\int\limits_\Omega u_x^2\,dx + \int\limits_\Omega \big(a - \mu_1^2/2\nu\big)u^2\,dx \leq 0.$$

Pagal teoremos sąlygą $a(x) - \mu_1^2/2\nu \geq 0,$ b.v. $x\in\Omega$. Todėl pastaroji nelygybė teisinga tik tuo atveju, kai $u(x) = 0$ b.v. $x\in\Omega$. Taigi $u_1 = u_2$. $\rhd$

4.2 teorema. *Tarkime, a yra bet kokia aprėžta mati srityje Ω funkcija,*

$$d = \operatorname{diam}\Omega < \nu\big(\mu_1^2 + 2\nu\mu_0\big)^{-1/2}$$

(pakankamai mažas teigiamas skaičius). Tada (4.9) Dirichlė uždavinys negali turėti dviejų skirtingų apibendrintų sprendinių.

◁ Tegu u_1, u_2 yra du apibendrinti (4.9) uždavinio sprendiniai ir $u = u_1 - u_2$. Tada (žr. 4.1 teoremos įrodymą) teisinga nelygybė

$$\frac{\nu}{2}\int\limits_\Omega u_x^2\,dx \le \big(\mu_1^2/2\nu + \mu_0\big)\int\limits_\Omega u^2\,dx.$$

Pagal Frydrichso nelygybę

$$\int\limits_\Omega u^2\,dx \le d^2\int\limits_\Omega u_x^2\,dx.$$

Todėl

$$\frac{\nu}{2}\int\limits_\Omega u_x^2\,dx \le \big(\mu_1^2/2\nu + \mu_0\big)d^2\int\limits_\Omega u_x^2\,dx.$$

Kadangi $\big(\mu_1^2/2\nu + \mu_0\big)d^2 < \nu/2$, tai pastaroji nelygybė teisinga tik tuo atveju, kai $u(x) = 0$ b.v. $x \in \Omega$, t.y. $u_1 = u_2$. ▷

I š v a d a . Iš 4.1 teoremos įrodymo išplaukia, kad $\forall u \in \overset{\circ}{\mathrm{W}}{}_2^1(\Omega)$ yra teisinga nelygybė

$$\nu\|u_x\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} \le \varepsilon\|\,A\,u\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} + \big(2\mu_0 + \mu_1^2/\nu + \varepsilon^{-1}\big)\|u\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)}. \tag{4.12}$$

Ji kartais vadinama *pirmąja pagrindine nelygybe*.

4.4. APIBENDRINTOJO SPRENDINIO EGZISTAVIMAS

Tegu A yra tolygiai elipsinis operatorius (žr. 4.3 skyrelį). Aibėje $\overset{\circ}{\mathrm{W}}{}_2^1(\Omega)$ apibrėžkime skaliarinę sandaugą

$$[u,v]=\int\limits_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}u_{x_i}v_{x_j}\,dx \tag{4.13}$$

ir ją atitinkančią normą

$$|\!|\!|u|\!|\!|=\sqrt{[u,u]}.$$

Aibė $\overset{\circ}{\mathrm{W}}{}_2^1(\Omega)$ su taip apibrėžta norma yra Hilberto erdvė. Ją žymėsime H_A. Norma $|\!|\!|\cdot|\!|\!|$ dažnai vadinama *energine norma,* o erdvė H_A – *energine erdve.*

Iš energinės normos apibrėžimo išplaukia, kad norma erdvėje H_A yra ekvivalenti normai erdvėje $\overset{\circ}{\mathrm{W}}{}_2^1(\Omega)$. Tiksliau, teisingos tokios nelygybės:

$$\sqrt{\nu}\|u\|_{\overset{\circ}{\mathrm{W}}{}_2^1(\Omega)}\le|\!|\!|u|\!|\!|\le\sqrt{\mu}\|u\|_{\overset{\circ}{\mathrm{W}}{}_2^1(\Omega)}. \tag{4.14}$$

Taigi erdvė H_A sutampa su erdve $\overset{\circ}{\mathrm{W}}{}_2^1(\Omega)$.

Srityje Ω nagrinėsime Dirichlė uždavinį

$$A\,u=f+\operatorname{div}\bar f,\quad u\big|_S=0. \tag{4.15}$$

Priminsime, kad funkcija $u\in\overset{\circ}{\mathrm{W}}{}_2^1(\Omega)$ yra (4.15) Dirichlė uždavinio apibendrintas sprendinys, jeigu $\forall\eta\in\mathrm{H}_A$ teisinga (4.2) integralinė tapatybė. Pasinaudoję (4.13) formule, perrašykime šią tapatybę taip:

$$[u,\eta]+\int\limits_{\Omega}\Big(\sum_{i=1}^{n}a_iu_{x_i}+au\Big)\eta\,dx=\int\limits_{\Omega}\Big(f\eta-\sum_{i=1}^{n}f_i\eta_{x_i}\Big)\,dx,\quad\forall\eta\in\mathrm{H}_A. \tag{4.16}$$

Erdvėje H_A integralas

$$b(\eta)=\int\limits_{\Omega}\Big(f\eta-\sum_{i=1}^{n}f_i\eta_{x_i}\Big)\,dx$$

apibrėžia tiesinį funkcionalą. Įrodysime, kad jis yra aprėžtas. Remiantis Helderio ir Frydrichso nelygybėmis,

$$|b(\eta)|\le\|f\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)}\|\eta\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)}+\|\bar f\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)}\|\eta_x\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)}\le$$

$$\le\big(d\|f\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)}+\|\bar f\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)}\big)\,\|\eta_x\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)}\le\big(d\|f\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)}+\|\bar f\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)}\big)\,\nu^{-1/2}|\!|\!|\eta|\!|\!|;$$

čia $d=\operatorname{diam}\Omega$. Todėl (žr. 1.10 teoremą) egzistuoja toks vienintelis elementas $F\in\mathrm{H}_A$, kad

$$b(\eta)=[F,\eta],\quad\forall\eta\in\mathrm{H}_A.$$

Kiekvienai funkcijai $u\in\mathrm{H}_A$ integralas

$$b_u(\eta)=\int\limits_{\Omega}\Big(\sum_{i=1}^{n}a_iu_{x_i}+au\Big)\eta\,dx$$

yra tiesinis funkcionalas erdvėje H_A. Įrodysime, kad erdvėje H_A jis yra aprėžtas. Pasinaudoję Helderio ir Frydrichso nelygybėmis, gausime

$$|b_u(\eta)| \leq \left(\mu_1\|u_x\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)} + \mu_0\|u\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)}\right)\|\eta\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)} \leq$$
$$\leq d\left(\mu_1\|u_x\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)} + \mu_0\|u\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)}\right)\|\eta_x\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)} \leq$$
$$\leq d\nu^{-1/2}\left(\mu_1\|u_x\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)} + \mu_0\|u\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)}\right)\|\eta\|.$$

Taigi funkcionalas $b_u(\eta)$ yra aprėžtas erdvėje H_A ir pagal 1.10 teoremą egzistuoja toks vienintelis elementas $\mathrm{B}\,u$, kad

$$b_u(\eta) = [\mathrm{B}\,u, \eta] = \int\limits_\Omega \Big(\sum_{i=1}^n a_i u_{x_i} + au\Big)\eta\,dx, \quad \forall\eta \in \mathrm{H}_A. \tag{4.17}$$

Be to, pastaroji formulė apibrėžia operatorių $\mathrm{B} : \mathrm{H}_A \to \mathrm{H}_A$. Pasinaudoję funkcionalų b ir b_u išraiškomis, (4.16) tapatybę perrašykime taip:

$$[u + \mathrm{B}\,u - F, \eta] = 0, \quad \forall\eta \in \mathrm{H}_A.$$

Gauta tapatybė yra ekvivalenti operatorinei lygčiai

$$u + \mathrm{B}\,u - F = 0. \tag{4.18}$$

Taigi funkcija u yra (4.15) Dirichlė uždavinio apibendrintas sprendinys tada ir tik tada, kai ji yra (4.18) operatorinės lygties sprendinys erdvėje H_A.

4.1 lema. *Operatorius* B *yra visiškai tolydus erdvėje* H_A.

◁ Iš pradžių įrodysime, kad operatorius B yra aprėžtas. Laisvai pasirenkame elementą $u \in \mathrm{H}_A$. Pagal operatoriaus B apibrėžimą

$$\|\mathrm{B}\,u\|^2 = [\mathrm{B}\,u, \mathrm{B}\,u] = \int\limits_\Omega \Big(\sum_{i=1}^n a_i u_{x_i} + au\Big)\,\mathrm{B}\,u\,dx. \tag{4.19}$$

Pasinaudoję Helderio, Frydrichso ir (4.14) nelygybėmis, įvertinsime integralą

$$\int\limits_\Omega \Big(\sum_{i=1}^n a_i u_{x_i} + au\Big)\,\mathrm{B}\,u\,dx \leq \|\sum_{i=1}^n a_i u_{x_i} + au\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)}\|\,\mathrm{B}\,u\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)} \leq$$
$$\leq c\|u\|\|\,\mathrm{B}\,u\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)} \leq cc_1\|u\|\|\,\mathrm{B}\,u\|; \tag{4.20}$$

čia $c = \nu^{-1/2}(\mu_1 + d\mu_0)$, $c_1 = d\nu^{-1/2}$. Todėl $\forall u \in \mathrm{H}_A$ yra teisinga nelygybė

$$\|\,\mathrm{B}\,u\| \leq cc_1\|u\|.$$

Kartu galime tvirtinti, kad operatorius B yra aprėžtas erdvėje H_A. Be to, $\forall u \in \mathrm{H}_A$ yra teisinga nelygybė

$$\|\,\mathrm{B}\,u\|^2 \leq c\|u\|\|\,\mathrm{B}\,u\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)}. \tag{4.21}$$

Tegu U yra aprėžta erdvėje H_A aibė. Įrodysime, kad aibė

$$\mathrm{B}\,U = \{v \in \mathrm{H}_A : v = \mathrm{B}\,u, u \in U\} \subset \mathrm{H}_A$$

yra sąlyginis kompaktas. Laisvai pasirenkame seką $\{u_n\} \subset U$. Pasinaudoję (4.21) nelygybe, gausime

$$\|\mathrm{B}\,u_m - \mathrm{B}\,u_n\|^2 \leq c\|u_m - u_n\| \|\mathrm{B}\,u_n - \mathrm{B}\,u_m\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)} \leq$$
$$\leq 2c \max_{u \in U} \|u\| \|\mathrm{B}\,u_n - \mathrm{B}\,u_m\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)}. \tag{4.22}$$

Seka $\{\mathrm{B}\,u_n\}$ yra aprėžta erdvėje $\mathrm{H}_A = \mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)$. Pagal 3.7 teoremą ji yra sąlyginis kompaktas erdvėje $\mathrm{L}_2(\Omega)$. Todėl iš jos galima išskirti konverguojantį erdvėje $\mathrm{L}_2(\Omega)$ posekį $\{\mathrm{B}\,u_{n_i}\}$. Tačiau tada

$$\|\mathrm{B}\,u_{n_i} - \mathrm{B}\,u_{n_j}\| \to 0,$$

kai $n_i, n_j \to \infty$. Kartu galime tvirtinti (žr. (4.22) nelygybę), kad

$$\|\mathrm{B}\,u_{n_i} - \mathrm{B}\,u_{n_j}\| \to 0,$$

kai $n_i, n_j \to \infty$. Taigi seka $\{\mathrm{B}\,u_{n_i}\}$ yra fundamentalioji erdvėje H_A. Kadangi erdvė H_A yra pilna, tai ši seka konverguoja erdvėje H_A. Vadinasi, aibė $\mathrm{B}\,U$ yra sąlyginis kompaktas, o operatorius B – visiškai tolydus. ▹

Grįžkime prie (4.18) lygties. Pagal 4.1 lemą operatorius $\mathrm{B} : \mathrm{H}_A \to \mathrm{H}_A$ yra visiškai tolydus. Todėl (4.18) yra Fredholmo tipo lygtis ir jai yra teisingos Fredholmo teoremos (žr. 1.4–1.7 teoremas). Iš šių teoremų išplaukia tokie teiginiai:

1. Jeigu homogeninė lygtis
$$u + \mathrm{B}\,u = 0 \tag{4.23}$$
erdvėje H_A turi tik trivialų sprendinį, tai $\forall F \in \mathrm{H}_A$ ją atitinkanti (4.18) nehomogeninė lygtis turi vienintelį sprendinį.

2. Jeigu (4.23) lygtis turi netrivialų sprendinį, tai (4.18) lygtis turi sprendinį tik su tokiomis funkcijomis $F \in \mathrm{H}_A$, kurios yra ortogonalios jungtinės homogeninės lygties
$$v + \mathrm{B}^*\,v = 0 \tag{4.24}$$
sprendiniams, t.y. tenkina sąlygą
$$[F, v] = 0, \quad \forall v : v + \mathrm{B}^*\,v = 0. \tag{4.25}$$

Jeigu operatoriaus A koeficientai a_i, $i = 1, \ldots, n$, yra diferencijuojamos srityje Ω funkcijos, tai operatorių B^* galima apibrėžti taip:

$$[\mathrm{B}^*\,v, u] = [u, \mathrm{B}^*\,v] = [\mathrm{B}\,u, v] =$$
$$= \int_\Omega \Big(\sum_{i=1}^n a_i u_{x_i} + au\Big) v\,dx = \int_\Omega \Big(\sum_{i=1}^n (-a_i v)_{x_i} + av\Big) u\,dx.$$

Šiuo atveju (4.24) lygtį atitinka integralinė tapatybė

$$\int\limits_{\Omega}\Big(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} v_{x_j}\eta_{x_i} - \sum_{i=1}^{n}(a_i v)_{x_i}\eta + av\eta\Big)\,dx = 0, \quad \forall \eta \in \mathrm{H}_A.$$

Savo ruožtu ją atitinka Dirichlė uždavinys

$$A^*\,v = 0, \quad v\big|_S = 0;$$

čia

$$A^*\,v = -\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}v_{x_j})_{x_i} - \sum_{i=1}^{n}(a_i v)_{x_i} + av.$$

Operatoriai A^* ir A yra formaliai jungtiniai. Be to, (4.25) sąlygą galima perrašyti taip:

$$\int\limits_{\Omega}\Big(fv - \sum_{i=1}^{n} f_i v_{x_i}\Big)\,dx = 0, \quad \forall v : A^*\,v = 0, \quad v\big|_S = 0. \tag{4.26}$$

Todėl galime tvirtinti, kad teisinga teorema.

4.3 teorema. (Fredholmo alternatyva) *Jeigu Dirichlė uždavinys*

$$A\,u = 0, \quad u\big|_S = 0 \tag{4.27}$$

srityje Ω *turi tik trivialų sprendinį, tai* $\forall f, f_i \in \mathrm{L}_2(\Omega),\ i = 1,\dots,n,$ *egzistuoja vienintelis* (4.15) *nehomogeninio Dirichlė uždavinio apibendrintas sprendinys. Jeigu* (4.27) *Dirichlė uždavinys srityje* Ω *turi netrivialų apibendrintą sprendinį, tai* (4.15) *Dirichlė uždavinio apibendrintas sprendinys egzistuoja tik su tokiomis funkcijomis* $f, f_i \in \mathrm{L}_2(\Omega),\ i = 1,\dots,n,$ *kurios tenkina* (4.26) *sąlygą.*

Pakankamos (4.15) Dirichlė uždavinio apibendrinto sprendinio vienaties sąlygos nurodytos 4.1 ir 4.2 teoremose. Tačiau jos neaprėpia visų galimų atvejų. Todėl šį klausimą ištirsime atskirai.

Tarkime, operatoriaus A koeficientas a yra bet kokia aprėžta mati srityje Ω funkcija. Parinkime skaičių λ_0 taip, kad $a(x) + \lambda_0 \geq a_0,\ \forall x \in \Omega$ (čia a_0 iš 4.1 teoremos) ir (4.15) lygtį perrašykime taip:

$$A\,u + \lambda_0 u = \lambda_0 u + f + \operatorname{div}\bar{f}.$$

Aibėje $\overset{\circ}{\mathrm{W}}{}_2^1(\Omega)$ apibrėžkime kitą skaliarinę sandaugą[2]

$$[u,v] = \int\limits_{\Omega}\Big(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} + (a + \lambda_0)uv\Big)\,dx \tag{4.28}$$

ir ją atitinkančią normą

$$\| u \| = \sqrt{[u,u]}$$

[2] Šiame skyrelyje simboliu $[\cdot,\cdot]$ žymėsime įvairiai apibrėžtas skaliarines sandaugas. Be to, tais pačiais simboliais žymėsime ir jas atitinkančias normas bei erdves.

(patikrinkite, kad taip apibrėžta skaliarinė sandauga tenkina visas skaliarinės sandaugos apibrėžimo sąlygas). Aibę $\mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)$ su taip apibrėžta skaliarine sandauga žymėsime H_A.

Remiantis Frydrichso ir (4.10) nelygybėmis, lengvai galima įrodyti, kad norma erdvėje H_A yra ekvivalenti normai erdvėje $\mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)$. Tiksliau, egzistuoja tokios teigiamos konstantos c_1 ir c_2, kad

$$c_1\|u\|_{\mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)} \le [\![u]\!] \le c_2\|u\|_{\mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)}. \tag{4.29}$$

Pagal apibrėžimą funkcija u yra apibendrintas (4.15) Dirichlė uždavinio sprendinys, jeigu teisinga integralinė tapatybė

$$\int\limits_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_j}\eta_{x_i} + \sum_{i=1}^n a_i u_{x_i}\eta + (a+\lambda_0)u\eta\Big)\,dx =$$

$$= \lambda_0\int\limits_\Omega u\eta\,dx + \int\limits_\Omega\Big(f\eta - \sum_{i=1}^n f_i\eta_{x_i}\Big)\,dx, \quad \forall\eta\in\mathrm{H}_A.$$

Šią tapatybę galima perrašyti taip:

$$[u,\eta] + \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n a_i u_{x_i}\eta\,dx = \lambda_0\int\limits_\Omega u\eta\,dx +$$

$$+ \int\limits_\Omega\Big(f\eta - \sum_{i=1}^n f_i\eta_{x_i}\Big)\,dx, \quad \forall\eta\in\mathrm{H}_A. \tag{4.30}$$

Integralai

$$b(\eta) = \int\limits_\Omega\Big(f\eta - \sum_{i=1}^n f_i\eta_{x_i}\Big)\,dx,\ b_u(\eta) = \int\limits_\Omega\sum_{i=1}^n a_i u_{x_i}\eta\,dx,\ t_u(\eta) = \int\limits_\Omega u\eta\,dx$$

erdvėje H_A apibrėžia tiesinius funkcionalus. Be to, erdvėje H_A jie yra aprėžti:

$$|b(\eta)| \le C(\|f\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)} + \|\bar f\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)})[\![\eta]\!],$$

$$|b_u(\eta)| \le C[\![u]\!][\![\eta]\!], \quad |t_u(\eta)| \le C\|u\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)}[\![\eta]\!].$$

Todėl (žr. 1.10 teoremą) egzistuoja tokie vieninteliai elementai $F, \mathrm{B}\,u$ ir $T\,u\in\mathrm{H}_A$, kad

$$b(\eta) = [F,\eta], \quad b_u(\eta) = [\mathrm{B}\,u,\eta], \quad t_u(\eta) = [T\,u,\eta], \quad \forall\eta\in\mathrm{H}_A.$$

Pasinaudoję šiomis funkcionalų išraiškomis, (4.30) tapatybę perrašykime taip:

$$[u + \mathrm{B}\,u - \lambda_0 T\,u - F, \eta] = 0, \quad \forall\eta\in\mathrm{H}_A.$$

Pastaroji tapatybė yra ekvivalenti operatorinei lygčiai

$$u + \mathrm{B}\,u - \lambda_0 T\,u = F; \tag{4.31}$$

čia operatoriai B ir $T: \mathrm{H}_A \to \mathrm{H}_A$ yra apibrėžiami formulėmis:

$$[\mathrm{B}\, u, \eta] = \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n a_i u_{x_i} \eta \, dx, \quad [T\, u, \eta] = \int\limits_\Omega u\eta \, dx.$$

Taigi funkcija u yra (4.15) Dirichlė uždavinio apibendrintas sprendinys tada ir tik tada, kai ji yra (4.31) operatorinės lygties sprendinys erdvėje H_A.

Operatoriai B ir T yra visiškai tolydūs erdvėje H_A. Norint tuo įsitikinti, reikia pakartoti 4.1 lemos įrodymą. Be to, erdvėje H_A operatorius T yra teigiamas ir savijungis. Iš tikrųjų

$$[T\, u, u] = \int\limits_\Omega u^2 \, dx > 0,$$

kai $u \neq 0$, ir

$$[T\, u, \eta] = \int\limits_\Omega u\eta \, dx = \int\limits_\Omega \eta u \, dx = [T\, \eta, u] = [u, T\eta].$$

Remiantis operatoriaus B apibrėžimu, homogeninė lygtis

$$u + \mathrm{B}\, u = 0 \tag{4.32}$$

yra ekvivalenti Dirichlė uždaviniui

$$A\, u + \lambda_0 u = 0, \quad u\big|_S = 0.$$

Kadangi $a(x) + \lambda_0 \geq a_0$, tai šis Dirichlė uždavinys turi tik trivialų sprendinį. Kartu (4.32) lygtis erdvėje H_A taip pat turi tik trivialų sprendinį. Tačiau tada nehomogeninė lygtis

$$u + \mathrm{B}\, u = F, \tag{4.33}$$

turi vienintelį sprendinį $\forall F \in \mathrm{H}_A$. Vadinasi, egzistuoja operatorius

$$(I + \mathrm{B})^{-1} : \mathrm{H}_A \to \mathrm{H}_A,$$

apibrėžtas visoje erdvėje H_A. Čia I – tapatus operatorius.

Įrodysime, kad operatorius $(I + \mathrm{B})^{-1}$ yra aprėžtas. Funkcija $u \in \mathrm{H}_A$ yra (4.33) lygties sprendinys tada ir tik tada, kai teisinga integralinė tapatybė

$$\int\limits_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_j} \eta_{x_i} + \sum_{i=1}^n a_i u_{x_i} \eta + (a + \lambda_0) u\eta \Big) \, dx =$$

$$= \int\limits_\Omega \Big(f\eta - \sum_{i=1}^n f_i \eta_{x_i} \Big) \, dx, \quad \forall \eta \in \mathrm{H}_A.$$

Paėmę čia $\eta = u$ ir pakartoję 4.1 teoremos įrodymą, gausime nelygybę

$$\frac{\nu}{2}\int\limits_{\Omega} u_x^2\,dx \leq \int\limits_{\Omega}\Big(fu - \sum_{i=1}^{n} f_i u_{x_i}\Big)\,dx = [F, u] \leq \| F \| \| u \|.$$

Norma

$$\| u \| \leq c_2 \|u_x\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)}.$$

Todėl

$$\| u \|^2 \leq c_2^2 \|u_x\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} \leq 2c_2^2 \nu^{-1} \| F \| \| u \|.$$

Suprastinę kairiąją ir dešiniąją šios nelygybės puses iš $\| u \|$, gausime nelygybę

$$\| (I + \mathrm{B})^{-1} F \| = \| u \| \leq 2c_2^2 \nu^{-1} \| F \|.$$

Taigi

$$\|(I + \mathrm{B})^{-1}\| = \sup_{\| F \| \leq 1} \| (I + \mathrm{B})^{-1} F \| \leq 2c_2^2 \nu^{-1}.$$

Paveikę abi (4.31) lygties puses operatoriumi $(I + \mathrm{B})^{-1}$, gausime ekvivalenčią lygtį

$$u - \lambda_0 (I + \mathrm{B})^{-1}\, T\, u = \widetilde{F}; \tag{4.34}$$

čia $\widetilde{F} = (I + \mathrm{B})^{-1} F \in \mathrm{H}_A$. Šioje lygtyje operatorius $(I + \mathrm{B})^{-1}\, T$ yra visiškai tolydus (žr. 1.12 teoremą). Todėl (4.34) lygtis yra Fredholmo tipo ir jai yra teisingos 1.4–1.7 Fredholmo teoremos. Kartu teisinga Fredholmo alternatyva. Taigi norint atsakyti, kada (4.34) lygtis turi sprendinį, reikia žinoti tas parametro λ_0 reikšmes, kurioms homogeninė lygtis

$$u - \lambda_0 (I + \mathrm{B})^{-1}\, T\, u = 0 \tag{4.35}$$

turi netrivialų sprendinį erdvėje H_A.

Nagrinėjant (4.35) lygtį, parametrą λ_0 patogu pakeisti $\lambda + \lambda_0$ ir ieškoti tų parametro λ reikšmių, kurioms lygtis

$$u - (\lambda + \lambda_0)(I + \mathrm{B})^{-1}\, T\, u = 0 \tag{4.36}$$

turi netrivialų sprendinį. Šis uždavinys yra ekvivalentus uždaviniui: rasti tas parametro λ reikšmes, kurioms egzistuoja netrivialus Dirichlė uždavinio

$$A\, u = \lambda u, \quad u\big|_S = 0$$

apibendrintas sprendinys srityje Ω.

Bendru atveju operatorius $(I + \mathrm{B})^{-1}\, T$ nėra savijungis. Todėl nagrinėdami (4.36) lygtį ir ją atitinkantį Dirichlė uždavinį, realų parametrą λ pakeisime kompleksiniu. Tiksliau, nagrinėsime Dirichlė uždavinių šeimą

$$A\, u = \lambda u + f + \operatorname{div} \bar{f}, \quad u\big|_S = 0 \tag{4.37}$$

su kompleksiniu parametru $\lambda = s + it$. Šio uždavinio sprendinys, jeigu jis egzistuoja, yra kompleksinė funkcija $u = u_1 + iu_2$. Todėl nagrinėjant šį uždavinį, reikia apibrėžti kompleksinių funkcijų erdves $\mathrm{L}_2(\Omega)$, $\mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)$ ir $\mathrm{W}_2^1(\Omega)$. Skaliarinę sandaugą šiose erdvėse apibrėšime taip:

$$(u,v) = \int\limits_\Omega u\bar{v}\,dx,$$

$$(u,v)_{\mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)} = \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n u_{x_i}\bar{v}_{x_i}\,dx,$$

$$(u,v)_{\mathrm{W}_2^1(\Omega)} = \int\limits_\Omega \Big(\sum_{i=1}^n u_{x_i}\bar{v}_{x_i} + u\bar{v}\Big)\,dx.$$

Atkreipsime dėmesį į tai, kad operatoriaus A koeficientai a_{ij}, a_i ir a yra realios funkcijos. Be to, tegu[3] $a(x) \geq a_0, \forall x \in \Omega$ (žr. 4.1 teoremą).

A p i b r ė ž i m a s. Sakysime, funkcija $u \in \mathrm{W}_2^1(\Omega)$ yra apibendrintas (4.37) Dirichlė uždavinio sprendinys, jeigu ji priklauso erdvei $\mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)$ ir $\forall\eta \in \mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)$ yra teisinga integralinė tapatybė

$$\int\limits_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_j}\bar{\eta}_{x_i} + \sum_{i=1}^n a_i u_{x_i}\bar{\eta} + au\bar{\eta}\Big)\,dx =$$

$$= \int\limits_\Omega \Big(f\bar{\eta} - \sum_{i=1}^n f_i\bar{\eta}_{x_i}\Big)\,dx + \int\limits_\Omega \lambda u\bar{\eta}\,dx. \tag{4.38}$$

Erdvėje $\mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)$ apibrėžkime kitą skaliarinę sandaugą

$$[u,v] = \int\limits_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i}\bar{v}_{x_j} + au\bar{v}\Big)\,dx \tag{4.39}$$

ir ją atitinkančią normą

$$\|\!|u|\!\| = \sqrt{[u,u]}.$$

Erdvę $\mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)$, su taip apibrėžta skaliarine sandauga žymėsime H_A.

Kompleksinėje erdvėje H_A normos $\|\!|\cdot|\!\|$, $\|\cdot\|_{\mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)}$ ir $\|\cdot\|_{\mathrm{W}_2^1(\Omega)}$ yra ekvivalenčios, o

$$b(\eta) = \int\limits_\Omega \Big(f\bar{\eta} - \sum_{i=1}^n f_i\bar{\eta}_{x_i}\Big)\,dx,\ \ b_u(\eta) = \int\limits_\Omega \Big(\sum_{i=1}^n a_i u_{x_i}\Big)\bar{\eta}\,dx,\ \ t_u(\eta) = \int\limits_\Omega u\bar{\eta}\,dx$$

[3] Ši sąlyga nėra esminė, nes visada galima parinkti tokį realų skaičių λ_0, kad $a(x) + \lambda_0 \geq a_0$, b.v. $x \in \Omega$, ir (4.37) lygtį perrašyti taip:

$$A\,u + \lambda_0 u = (\lambda + \lambda_0)u + f + \operatorname{div}\bar{f}.$$

yra tiesiniai aprėžti funkcionalai (tai galima įrodyti visiškai taip pat kaip realios erdvės H_A atveju). Todėl (žr. 1.10 teoremą) juos galima išreikšti skaliarine sandauga. Tiksliau, egzistuoja tokie vieninteliai elementai $F, \mathrm{B}\, u$ ir $T\, u \in \mathrm{H}_A$, kad

$$b(\eta) = [F, \eta], \quad b_u(\eta) = [\mathrm{B}\, u, \eta], \quad t_u(\eta) = [T\, u, \eta], \quad \forall \eta \in \mathrm{H}_A.$$

Pasinaudoję šiomis funkcionalų išraiškomis, (4.38) tapatybę perrašykime taip:

$$[u + \mathrm{B}\, u - \lambda T\, u - F, \eta] = 0, \quad \forall \eta \in \mathrm{H}_A.$$

Pastaroji tapatybė yra ekvivalenti operatorinei lygčiai

$$u + \mathrm{B}\, u - \lambda T\, u = F. \tag{4.40}$$

Taigi funkcija u yra (4.37) Dirichlė uždavinio apibendrintas sprendinys tada ir tik tada, kai ji yra (4.40) operatorinės lygties sprendinys erdvėje H_A.

Operatoriai B ir T yra apibrėžti formulėmis

$$[\mathrm{B}\, u, \eta] = \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i} \bar{\eta}\, dx, \quad [T\, u, \eta] = \int\limits_{\Omega} u \bar{\eta}\, dx.$$

Erdvėje H_A šie operatoriai yra visiškai tolydūs (įrodymas toks pats kaip realios erdvės H_A atveju). Be to, erdvėje H_A operatorius T yra teigiamas ir savijungis. Iš tikrųjų

$$[T\, u, u] = \int\limits_{\Omega} u \bar{u}\, dx = \int\limits_{\Omega} |u|^2\, dx > 0,$$

kai $u \neq 0$, ir

$$[T\, u, \eta] = \int\limits_{\Omega} u \bar{\eta}\, dx = \int\limits_{\Omega} \overline{\eta \bar{u}}\, dx = \overline{[T\, \eta, u]} = [u, T \eta].$$

Priminsime, kad $a(x) \geq a_0$, b.v. $x \in \Omega$. Todėl erdvėje H_A homogeninė lygtis

$$u + \mathrm{B}\, u = 0$$

turi tik trivialų sprendinį, o nehomogeninė lygtis

$$u + \mathrm{B}\, u = F, \quad \forall F \in \mathrm{H}_A,$$

vienintelį sprendinį. Vadinasi, operatorius $I + \mathrm{B}$ yra abipusiškai vienareikšmis ir jo vaizdų aibė sutampa su visa erdve H_A. Kartu egzistuoja atvirkštinis operatorius

$$(I + \mathrm{B})^{-1} : \mathrm{H}_A \to \mathrm{H}_A,$$

apibrėžtas visoje erdvėje H_A. Be to, jis yra aprėžtas (įrodymas yra visiškai toks pats kaip realios erdvės H_A atveju). Paveikę (4.40) lygtį operatoriumi $(I + \mathrm{B})^{-1}$, gausime ekvivalenčią lygtį

$$u - \lambda (I + \mathrm{B})^{-1}\, T\, u = \widetilde{F}; \tag{4.41}$$

čia $\widetilde{F} = (I + \mathrm{B})^{-1}F \in \mathrm{H}_A$. Operatorius $(I+\mathrm{B})^{-1}T : \mathrm{H}_A \to \mathrm{H}_A$ yra visiškai tolydus, kaip aprėžto ir visiškai tolydaus operatorių sandauga (žr. 1.12 teoremą). Todėl (4.41) lygtis yra Fredholmo tipo ir jai teisingos 1.4–1.7 Fredholmo teoremos. Kartu yra teisinga Fredholmo alternatyva.

1. Jeigu homogeninė lygtis

$$u - \lambda(I+\mathrm{B})^{-1}T\,u = 0 \tag{4.42}$$

erdvėje H_A turi tik trivialų sprendinį, tai $\forall\widetilde{F} \in \mathrm{H}_A$ ją atitinkanti (4.41) nehomogeninė lygtis erdvėje H_A turi vienintelį sprendinį.

2. Jeigu (4.42) lygtis erdvėje H_A turi netrivialų sprendinį, tai (4.41) lygtis turi sprendinį tik su tokiomis funkcijomis $\widetilde{F} \in \mathrm{H}_A$, kurios yra ortogonalios jungtinės homogeninės lygties

$$v - \bar{\lambda}((I+\mathrm{B})^{-1}T)^*v = 0 \tag{4.43}$$

sprendiniams, t.y. tik su funkcijomis $\widetilde{F} \in \mathrm{H}_A$, tenkinančiomis sąlygą

$$[\widetilde{F}, v] = 0, \quad \forall v : v - \bar{\lambda}((I+\mathrm{B})^{-1}T)^*v = 0. \tag{4.44}$$

Funkcija $u \in \mathrm{H}_A$ yra (4.42) lygties sprendinys tada ir tik tada, kai teisinga integralinė tapatybė

$$\int\limits_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i}\bar{\eta}_{x_j} + \sum_{i=1}^n a_i u_{x_i}\bar{\eta} + au\bar{\eta}\Big)\,dx = \int\limits_\Omega \lambda u\bar{\eta}\,dx, \quad \forall\eta \in \mathrm{H}_A,$$

t.y. kai ji yra Dirichlė uždavinio

$$A\,u = \lambda u, \quad u\big|_S = 0 \tag{4.45}$$

apibendrintas sprendinys srityje Ω.

Operatorius

$$((I+\mathrm{B})^{-1}T)^* = T^*((I+\mathrm{B})^{-1})^* = T(I+\mathrm{B}^*)^{-1}.$$

Todėl (4.43) lygtį galime perrašyti taip:

$$v - \bar{\lambda}\,T(I+\mathrm{B}^*)^{-1}v = 0.$$

Tegu $w = (I+\mathrm{B}^*)^{-1}v$. Tada funkcijos w atžvilgiu gausime lygtį

$$w + \mathrm{B}^*\,w - \bar{\lambda}\,T\,w = 0.$$

Funkcija $w \in \mathrm{H}_A$ yra šios lygties sprendinys tada ir tik tada, kai teisinga integralinė tapatybė

$$\int\limits_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}w_{x_i}\bar{\eta}_{x_j} + \sum_{i=1}^n a_i w\bar{\eta}_{x_i} + aw\bar{\eta}\Big)\,dx = \bar{\lambda}\int\limits_\Omega w\bar{\eta}\,dx, \quad \forall\eta \in \mathrm{H}_A,$$

t.y. kai ji yra Dirichlė uždavinio

$$A^* w = \bar{\lambda} w, \quad w\big|_S = 0 \tag{4.46}$$

apibendrintas sprendinys. Be to,

$$[\widetilde{F}, v] = [(I + \mathrm{B})^{-1} F, v] = [F, ((I + \mathrm{B})^*)^{-1} v] = [F, w] =$$
$$= \int\limits_{\Omega} \Big(f \bar{w} - \sum_{i=1}^{n} f_i \bar{w}_{x_i} \Big)\, dx.$$

Todėl (4.44) sąlygą galime perrašyti taip:

$$\int\limits_{\Omega} \Big(f \bar{w} - \sum_{i=1}^{n} f_i \bar{w}_{x_i} \Big)\, dx = 0, \quad \forall w : A^* w = \bar{\lambda} w, \quad w\big|_S = 0. \tag{4.47}$$

Kartu galime tvirtinti, kad teisinga teorema.

4.4 teorema. (Fredholmo alternatyva) *Jeigu* (4.45) *homogeninis Dirichlė uždavinys turi tik trivialų sprendinį, tai* (4.37) *nehomogeninis Dirichlė uždavinys turi vienintelį apibendrintą sprendinį* $\forall f, f_i \in \mathrm{L}_2(\Omega)$, $i = 1, \ldots, n$. *Jeigu* (4.45) *uždavinys turi netrivialų apibendrintą sprendinį, tai* (4.37) *uždavinys turi apibendrintą sprendinį tik su tokiomis funkcijomis* $f, f_i \in \mathrm{L}_2(\Omega)$, $i = 1, \ldots, n$, *kurios tenkina* (4.47) *sąlygą.*

Tegu $\sigma(A)$ yra aibė tokių parametro λ reikšmių, kad (4.45) Dirichlė uždavinys turi netrivialų apibendrintą sprendinį. Aibė $\sigma(A)$ yra vadinama (4.37) Dirichlė uždavinio *spektru,* o parametras $\lambda \in \sigma(A)$ *spektro tašku.* Taškas $\lambda \in \sigma(A)$ tada ir tik tada, kai jis yra operatoriaus $(I + \mathrm{B})^{-1} T$ charakteristinė reikšmė. Pagal 1.7 teoremą aibė $\sigma(A)$ yra baigtinė arba skaiti ir, jeigu ji yra skaiti, tai sudaro artėjančių į ∞ skaičių seką. Todėl ją galima sunumeruoti. Tegu $\sigma(A) = \{\lambda_k\},\ k = 1, 2, \ldots,$ ir

$$|\lambda_1| \le |\lambda_2| \le \ldots \le |\lambda_k| \le \ldots$$

Jeigu $\lambda_k \in \sigma(A)$, tai $\bar{\lambda}_k \in \sigma(A^*)$. Pagal 1.5 teoremą (4.45) ir (4.46) uždaviniai turi vienodą skaičių tiesiškai nepriklausomų sprendinių. Todėl spektro taškų λ_k ir $\bar{\lambda}_k$ kartotinumai[4] sutampa.

Tarkime, $\lambda_k \in \sigma(A)$ ir u_k yra šį spektro tašką atitinkantis (4.45) Dirichlė uždavinio apibendrintas sprendinys. Tada teisinga integralinė tapatybė

$$\int\limits_{\Omega} \Big(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{kx_i} \bar{\eta}_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i u_{kx_i} \bar{\eta} + a u_k \bar{\eta} \Big)\, dx = \lambda_k \int\limits_{\Omega} u_k \bar{\eta}\, dx, \quad \forall \eta \in \mathrm{H}_A.$$

Kadangi operatoriaus A koeficientai yra realūs, tai

$$\int\limits_{\Omega} \Big(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \bar{u}_{kx_i} \eta_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i \bar{u}_{kx_i} \eta + a \bar{u}_k \eta \Big)\, dx = \bar{\lambda}_k \int\limits_{\Omega} \bar{u}_k \eta\, dx, \quad \forall \eta \in \mathrm{H}_A.$$

[4]Taško $\lambda \in \sigma(A)$ kartotinumu vadinamas (4.45) Dirichlė uždavinio tiesiškai nepriklausomų apibendrintų sprendinių skaičius.

Šioje tapatybėje η pakeitę $\bar{\eta}$, gausime, kad $\bar{\lambda}_k \in \sigma(A)$ ir $\bar{u}_k$ yra šį spektro tašką atitinkantis (4.45) Dirichlė uždavinio apibendrintas sprendinys. Todėl $\sigma(A) = \sigma(A^*)$.

Tegu $\lambda \in \sigma(A)$ ir $u_1, \dots, u_m$ yra šį spektro tašką atitinkantys (4.45) Dirichlė uždavinio tiesiškai nepriklausomi apibendrinti sprendiniai. Be to, tegu funkcijos f ir $\bar{f}$ tenkina (4.47) sąlygą. Remiantis 1.6 teorema, galima tvirtinti, kad (4.37) Dirichlė uždavinio bendrasis sprendinys

$$u = u_0 + \sum_{j=1}^{m} C_j u_j; \tag{4.48}$$

čia u_0 yra šio uždavinio atskirasis sprendinys, o $C_1, \dots, C_m$ – laisvosios konstantos.

Suformuluosime gautus rezultatus.

4.5 teorema. *Tegu $\sigma(A)$ yra (4.37) Dirichlė uždavinio spektras. Tada:*

1. *Aibė $\sigma(A)$ yra baigtinė arba skaiti ir, jeigu ji yra skaiti, tai sudaro artėjančių į ∞ skaičių seką.*
2. *Aibės $\sigma(A)$ ir $\sigma(A^*)$ sutampa. Be to, jeigu $\lambda \in \sigma(A)$, $\bar{\lambda} \in \sigma(A^*)$, tai šie spektro taškai turi tą patį kartotinumą.*
3. *Jeigu $\lambda \in \sigma(A)$ ir funkcijos f, $\bar{f}$ tenkina (4.47) sąlygą, tai (4.48) formule apibrėžta funkcija u yra (4.37) Dirichlė uždavinio bendrasis sprendinys.*

Tarkime, $\lambda \notin \sigma(A)$. Pagal (1.6) teoremą operatorius $I - \lambda(I + \mathrm{B})^{-1} T$ turi atvirkštinį, apibrėžtą visoje erdvėje H_A. Be to, atvirkštinis operatorius

$$(I - \lambda(I + \mathrm{B})^{-1} T)^{-1}$$

yra aprėžtas. Jeigu u yra (4.37) Dirichlė uždavinio apibendrintas sprendinys, tai

$$\| u \| = \| (I - \lambda(I + \mathrm{B})^{-1} T)^{-1} \widetilde{F} \| \leq c_\lambda \| \widetilde{F} \|;$$

čia c_λ – operatoriaus $(I - \lambda(I + \mathrm{B})^{-1} T)^{-1}$ norma erdvėje H_A. Kadangi operatorius $(I + \mathrm{B})^{-1}$ yra aprėžtas, tai egzistuoja tokia konstanta c, kad

$$\| \widetilde{F} \| = \| (I + \mathrm{B})^{-1} F \| \leq c \| F \|.$$

Norma

$$\| F \| \leq \nu^{-1/2} (d \| f \|_{\mathrm{L}_2(\Omega)} + \| \bar{f} \|_{\mathrm{L}_2(\Omega)}).$$

(ši nelygybė lengvai išvedama iš funkcijos F apibrėžimo). Todėl

$$\| u \| \leq c_\lambda c \nu^{-1/2} (d \| f \|_{\mathrm{L}_2(\Omega)} + \| \bar{f} \|_{\mathrm{L}_2(\Omega)}). \tag{4.49}$$

Apie konstantą c_λ galima pasakyti tik tiek, kad jos skaitinė reikšmė priklauso nuo taško λ atstumo iki spektro $\sigma(A)$. Kokia priklausomybė bendruoju atveju, - nežinoma. Rasti spektro taškus taip pat yra gana sudėtinga. Todėl aktualūs įvairūs teiginiai apie jų išsidėstymą kompleksinėje plokštumoje $\lambda = s + i\sigma$. Vienas iš tokių teiginių įrodomas gana lengvai. Pagal apibrėžimą $\lambda \in \sigma(A)$, jeigu egzistuoja toks netrivialus elementas $u \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$, kad

$$\int\limits_{\Omega} \Big(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i} \bar{\eta}_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i} \bar{\eta} + a u \bar{\eta} \Big)\, dx = \int\limits_{\Omega} \lambda u \bar{\eta}\, dx, \quad \forall \eta \in \mathrm{H}_A .$$

Imkime šioje tapatybėje $\eta = u$, gautoje lygybėje atskirkime realiąją ir menamąją dalis ir po to įvertinkime $\|u\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)}$ per $\|u_x\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)}$. Tada gausime nelygybę, iš kurios lengvai išplaukia, kad spektro taškai λ_k guli parabolės $-s = c + \sigma^2$ viduje. Konstanta c čia priklauso tik nuo ν, μ_0 ir μ_1.

K o m e n t a r a i:

1. Visi šio skyriaus rezultatai išlieka teisingi tuo atveju, kai operatoriaus A koeficientai yra neaprėžti. Tiksliau, kai $a_i \in \mathrm{L_p}(\Omega)$, $a \in \mathrm{L_q}(\Omega)$ su tam tikrais p ir q (žr. [28]).

2. Įrodyti, kad spektras $\sigma(A)$ yra diskretus, galima ir tiesiogiai. Be to, galima įrodyti, kad jis yra begalinis ir visus spektro taškus atitinkančių tiesiškai nepriklausomų funkcijų tiesinis apvalkalas sutampa su erdve H_A (žr. 8.11 skyrelį).

3. Kai kurie šio skyriaus rezultatai išlieka teisingi neaprėžtos srities Ω atveju. Pavyzdžiui, (4.37) Dirichlė uždavinys turi vienintelį sprendinį $\mathrm{W}_2^1(\Omega)$ erdvėje (bet kokioje srityje Ω), jeigu tik λ guli parabolės $-s = c + \sigma^2$ išorėje (žr. [27, 28]).

4. Jeigu A yra Laplaso operatorius, tai tikrinių reikšmių λ_k asimptotika k atžvilgiu yra tokia:

   (a) kai $n = 2$, tai $\lambda_k \sim 4\pi k/|\Omega|$;

   (b) kai $n \geq 3$, tai $\lambda_k \sim \big(6\pi^2 k/|\Omega|\big)^{2/3}$.

   Šių teiginių įrodymą, kai $n = 2, 3$, galima rasti [43] knygoje ir, kai $n \geq 3$, [25] knygoje. Bendras atvejis išnagrinėtas [20] knygoje.

4.5. FORMALIAI SAVIJUNGIO OPERATORIAUS SPEKTRAS

Tarkime, operatoriaus A koeficientai $a_i = 0, \forall i = 1, \dots, n$. Tada A yra formaliai savijungis operatorius, t.y. $A = A^*$. Iš pradžių nagrinėsime atvejį, kai operatoriaus A koeficientas a yra neneigiamas.

Pagal apibrėžimą taškas $\lambda \in \sigma(A)$, jeigu egzistuoja netrivialus Dirichlė uždavinio

$$A\,u = \lambda u, \quad u\big|_S = 0 \tag{4.50}$$

apibendrintas sprendinys.

Kompleksinėje erdvėje $\mathrm{H}_A = \mathring{\mathrm{W}}{}_2^1(\Omega)$ apibrėžkime skaliarinę sandaugą

$$[u, v] = \int\limits_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_j} \bar{v}_{x_i} + a u \bar{v} \Big)\, dx$$

ir ją atitinkančią normą

$$\|u\| = \sqrt{[u, u]}.$$

Funkcija $u \in \mathrm{W}_2^1(\Omega)$ yra apibendrintas (4.50) Dirichlė uždavinio sprendinys, jeigu funkcija $u \in \mathring{\mathrm{W}}{}_2^1(\Omega)$ ir teisinga integralinė tapatybė

$$\int\limits_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_j} \bar{\eta}_{x_i} + a u \bar{\eta} \Big)\, dx = \lambda \int\limits_\Omega u \bar{\eta}\, dx, \quad \forall \eta \in \mathring{\mathrm{W}}{}_2^1(\Omega). \tag{4.51}$$

Integralas

$$t_u(\eta) = \int\limits_\Omega u \bar{\eta}\, dx$$

apibrėžia erdvėje H_A tiesinį aprėžtą funkcionalą (žr. 4.4 skyrelį). Pagal 1.10 teoremą egzistuoja toks vienintelis elementas $T\,u \in \mathrm{H}_A$, kad

$$t_u(\eta) = [T\,u, \eta], \quad \forall \eta \in \mathrm{H}_A.$$

Be to, formulė

$$[T\,u, \eta] = \int\limits_\Omega u \bar{\eta}\, dx$$

apibrėžia tiesinį operatorių $T : \mathrm{H}_A \to \mathrm{H}_A$. Todėl (4.51) integralinę tapatybę galima perrašyti taip:

$$[u - \lambda T\,u, \eta] = 0, \quad \forall \eta \in \mathrm{H}_A.$$

Funkcija $u \in \mathrm{H}_A$ tenkina šią integralinę tapatybę tada ir tik tada, kai ji yra operatorinės lygties

$$u - \lambda T\,u = 0$$

sprendinys erdvėje H_A. Tegu $\mu = \lambda^{-1}$. Tada pastarąją lygtį galima perrašyti taip:

$$T\,u = \mu u. \tag{4.52}$$

Operatorius $T : \mathrm{H}_A \to \mathrm{H}_A$ yra tiesinis ir visiškai tolydus (žr. 4.4 skyrelį). Be to, jis yra teigiamas

$$[T\,u, u] = \|u\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} \geq 0$$

ir savijungis

$$[T\,u, v] = (u, v) = \overline{(v, u)} = \overline{[T\,v, u]} = [u, T\,v].$$

4.2 lema. *Operatoriaus T tikrinės reikšmės yra realios ir teigiamos.*

◁ Tegu μ yra operatoriaus T tikrinė reikšmė, o u – ją atitinkanti tikrinė funkcija. Tada

$$[T\,u, u] = \mu[u, u] = \mu\|u\|^2, \quad \|u\|^2 = [u, u] > 0.$$

Kita vertus,

$$[T\,u, u] = \|u\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} > 0.$$

Sulyginę šis išraiškas gausime, kad operatoriaus T tikrinės reikšmės yra teigiamos ir realios. ▷

Pagal 1.7 teoremą operatoriaus T tikrinių reikšmių aibė yra baigtinė arba skaiti; jeigu ji yra skaiti, tai sudaro artėjančių į nulį skaičių seką; vienintelis jos sankaupos taškas, jeigu jis egzistuoja, yra nulis; jeigu $\mu \neq 0$ yra operatoriaus T tikrinė reikšmė, tai ją atitinka baigtinis skaičius tiesiškai nepriklausomų tikrinių funkcijų. Nagrinėjamu atveju visos tikrinės reikšmės yra realios ir teigiamos. Taigi skaičius $\mu = 0$ nėra operatoriaus T tikrinė reikšmė. Remiantis 1.8 ir 1.9 teoremomis, galima tvirtinti, kad operatoriaus T tikrinių reikšmių aibė yra skaiti (tiksliau, operatorius T turi be galo daug tikrinių reikšmių). Todėl ją galima sunumeruoti:

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_k \geq \cdots;$$

čia kiekviena tikrinė reikšmė pasikartoja tiek kartų, koks yra jos kartotinumas. Pagal 1.9 teoremą operatoriaus T tikrinių funkcijų sistema yra bazė kompleksinėje erdvėje H_A. Kadangi operatoriaus A koeficientai yra realūs, tai galime pereiti nuo kompleksinės prie realios funkcijų bazės. Tegu tikrinės funkcijos $\{u_k\}$ yra reali bazė erdvėje H_A.

Įrodysime, kad skirtingas tikrines reikšmes atitinkančios tikrinės funkcijos yra ortogonalios. Iš tikrųjų tegu u_k ir u_l yra operatoriaus T tikrinės funkcijos, atitinkančios tikrines reikšmes λ_k ir λ_l. Tada

$$\mu_k[u_k, u_l] = [T\,u_k, u_l] = [u_k, T\,u_l] = \mu_l[u_k, u_l]$$

ir yra teisinga formulė

$$(\mu_k - \mu_l)[u_k, u_l] = 0.$$

Iš šios formulės išplaukia, kad skirtingas tikrines reikšmes atitinkančios tikrinės funkcijos erdvėje H_A yra ortogonalios. Tą pačią tikrinę reikšmę atitinkančias tikrines funkcijas (jų yra baigtinis skaičius) galima ortogonalizuoti standartiniu būdu. Tarkime, tokia ortogonalizacija jau atlikta. Tada $\{u_k\}$ yra pilna ortogonali funkcijų sistema erdvėje $\mathrm{H}_A = \overset{\circ}{\mathrm{W}}{}_2^1(\Omega)$. Kiekvieną funkciją $u \in \overset{\circ}{\mathrm{W}}{}_2^1(\Omega)$ galima skleisti Furjė eilute

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k, \quad c_k = [u, u_k]/[u_k, u_k],$$

konverguojančia erdvėje $\overset{\circ}{\mathrm{W}}{}_2^1(\Omega)$. Eilutė konverguoja erdvėje $\overset{\circ}{\mathrm{W}}{}_2^1(\Omega)$, jeigu pati eilutė ir eilutė, sudaryta iš išvestinių, konverguoja erdvėje $\mathrm{L}_2(\Omega)$. Atkreipsime dėmesį į tai, kad išvestinių eilutėje funkcijos u_{kx_i}, $k = 1, 2, \ldots$, nėra ortogonalios erdvėje $\mathrm{L}_2(\Omega)$.

Tegu u_k, u_l yra operatoriaus T tikrinės funkcijos. Tada

$$\mu_k[u_k, u_l] = [T\, u_k, u_l] = (u_k, u_l).$$

Iš čia išplaukia, kad tikrinės funkcijos $\{u_k\}$ yra ortogonalios ir erdvėje $\mathrm{L}_2(\Omega)$. Kadangi erdvė $\overset{\circ}{\mathrm{W}}{}_2^1(\Omega)$ yra tiršta erdvėje $\mathrm{L}_2(\Omega)$, tai kiekvieną funkciją $u \in \mathrm{L}_2(\Omega)$ galima skleisti Furjė eilute

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k, \quad c_k = (u, u_k)/(u_k, u_k)$$

ir ši eilutė konverguoja erdvėje $\mathrm{L}_2(\Omega)$. Tikrines funkcijas $\{u_k\}$ galima parinkti taip, kad jos būtų ortonormuotos erdvėje $\overset{\circ}{\mathrm{W}}{}_2^1(\Omega)$ arba erdvėje $\mathrm{L}_2(\Omega)$.

Išnagrinėsime bendrąjį atvejį. Tarkime, $a(x)$ yra bet kokia aprėžta mati srityje Ω funkcija. Parinkime skaičių λ_0 taip, kad $a(x) + \lambda_0 \geq 0$, b.v. $x \in \Omega$, ir erdvėje $\overset{\circ}{\mathrm{W}}{}_2^1(\Omega)$ apibrėžkime kitą skaliarinę sandaugą

$$[u, v] = \int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_j} \bar{v}_{x_i} + (a + \lambda_0) u \bar{v} \Big)\, dx.$$

Tada (4.50) Dirichlė uždavinys susiveda į (4.52) operatorinę lygtį su $\mu = (\lambda + \lambda_0)^{-1}$ ir išlieka teisingi visi įrodyti teiginiai. Tiksliau, yra teisinga teorema.

4.6 teorema. *Tegu A yra tolygiai elipsinis savijungis operatorius. Tada:*

1. *Dirichlė uždavinio*

$$A\, u = \lambda u + f + \operatorname{div} \bar{f}, \quad u\big|_S = 0,$$

   spektras $\sigma(A)$ yra artėjančių į $+\infty$ realių skaičių seka.

2. *Neigiamų spektro taškų gali būti tik baigtinis skaičius (nes $\lambda + \lambda_0 > 0$).*

3. *Tikrinių funkcijų aibė $\{u_k\}$ yra pilna ortogonali erdvėse $\mathrm{L}_2(\Omega)$ ir $\overset{\circ}{\mathrm{W}}{}_2^1(\Omega)$ funkcijų sistema. Be to, ją galima parinkti taip, kad vienoje iš šių erdvių ji būtų ortonormuota.*

4.6. AUKŠTESNIŲJŲ EILIŲ LYGTYS

Tegu Ω yra aprėžta erdvėje $\mathbb{R}^n$ sritis, $S = \partial\Omega$, u ir a_α – skaliarinės funkcijos, apibrėžtos srityje Ω, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – multiindeksas ir

$$A\,u = \sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha(x)\, D^\alpha\, u.$$

Iš koeficientų prie aukščiausios eilės išvestinių sudarome formą

$$\Lambda(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x)\xi^\alpha; \quad \xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot\xi_n^{\alpha_n}, \quad \xi\in\mathbb{R}^n.$$

Atkreipsime dėmesį, kad $\Lambda(x, h\xi) = h^k\Lambda(x,\xi)$, $\forall h > 0$, t.y. ši forma yra teigiamai homogeninė ξ atžvilgiu.

A p i b r ė ž i m a s. Sakysime, operatorius A taške $x\in\Omega$ yra *elipsinis*, jeigu šiame taške forma $\Lambda(x,\xi)$ yra teigiamai apibrėžta, t.y.

$$\inf_{|\xi|=1} |\Lambda(x,\xi)| > 0.$$

Jeigu operatorius A yra elipsinis kiekviename srities Ω taške, tai sakysime, kad jis yra elipsinis srityje Ω.

Pastebėsime, kad

$$\Lambda(x,\xi) = (-1)^k\Lambda(x,-\xi).$$

Todėl operatorius A yra elipsinis tik tada, kai $k = 2m$.

Tegu $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$ yra aprėžtos mačios srityje Ω funkcijos, α, β – multiindeksai ir

$$A\,u = (-1)^m \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} D^\alpha(a_{\alpha\beta}(x)\, D^\beta\, u).$$

A p i b r ė ž i m a s. Sakysime, srityje Ω operatorius A yra *griežtai elipsinis*, jeigu

$$\Lambda(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x)\xi^\alpha\xi^\beta \geq \nu|\xi|^{2m}, \quad \forall\xi\in\mathbb{R}^m, \quad \nu = const > 0.$$

Srityje Ω nagrinėsime Dirichlė uždavinį

$$A\,u = f, \quad u\big|_S = 0, \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\Big|_S = 0, \dots, \frac{\partial^{m-1} u}{\partial \mathbf{n}^{m-1}}\Big|_S = 0; \tag{4.53}$$

čia: $f\in \mathrm{L}_2(\Omega)$ – žinoma funkcija, $\mathbf{n}$ – vienetinis paviršiaus S išorinės normalės vektorius. Bendru atveju (4.53) uždavinys neturi klasikinio (glodaus) sprendinio. Todėl reikia apibrėžti apibendrinto sprendinio sąvoką ir suteikti (4.53) Dirichlė uždaviniui tam tikrą prasmę.

Iš pradžių tarkime, kad f ir visi operatoriaus A koeficientai yra pakankamai glodžios funkcijos, o u yra klasikinis (4.53) Dirichlė uždavinio sprendinys. Tada su visais $\eta\in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$ yra teisinga integralinė tapatybė

$$\int_\Omega \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}\, D^\beta\, u\, D^\alpha\, \eta\, dx = \int_\Omega f\eta\, dx. \tag{4.54}$$

Norint tuo įsitikinti, reikia abi lygties $A\,u = f$ puses padauginti iš funkcijos η, gautą lygybę suitegruoti sritimi Ω ir m kartų pritaikyti integravimo dalimis formulę.

Aibė $\mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$ yra tiršta erdvėje $\overset{\circ}{\mathrm{W}}{}_2^{\mathrm{m}}(\Omega)$. Todėl (4.54) integralinėje tapatybėje vietoje funkcijos $\eta\in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$ galime imti bet kokią funkciją $\eta\in \overset{\circ}{\mathrm{W}}{}_2^{\mathrm{m}}(\Omega)$. Be to, integralas (4.54) tapatybės dešinėje konverguos $\forall f\in \mathrm{L}_2(\Omega)$, o integralas kairėje konverguos $\forall u\in \mathrm{W}_2^{\mathrm{m}}(\Omega)$, jeigu tik koeficientai $a_{\alpha\beta}$ bus aprėžti srityje Ω. Jeigu $u\in \overset{\circ}{\mathrm{W}}{}_2^{\mathrm{m}}(\Omega)$, tai paviršiuje S ji ir visos jos išvestinės iki $(m-1)$-osios eilės imtinai bus lygios nuliui (žr. 2.5 skyrelį). Todėl natūralus toks (4.53) Dirichlė uždavinio apibendrinto sprendinio apibrėžimas.

A p i b r ė ž i m a s. Sakysime, funkcija $u\in \overset{\circ}{\mathrm{W}}{}_2^{\mathrm{m}}(\Omega)$ yra (4.53) Dirichlė uždavinio *apibendrintasis sprendinys* srityje Ω, jeigu $\forall\eta\in \overset{\circ}{\mathrm{W}}{}_2^{\mathrm{m}}(\Omega)$ teisinga (4.54) integralinė tapatybė.

Tarkime, funkcija $u\in \overset{\circ}{\mathrm{W}}{}_2^{\mathrm{m}}(\Omega)$ yra (4.53) Dirichlė uždavinio apibendrintas sprendinys srityje Ω. Be to, tegu u, f ir operatoriaus A koeficientai yra pakankamai glodžios funkcijos. Tada

$$\int_\Omega \big(A\,u - f\big)\eta\,dx = 0, \quad \forall\eta\in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega). \tag{4.55}$$

Pastaroji tapatybė yra teisinga tik tuo atveju, kai funkcija $A\,u - f$ lygi nuliui, t.y. $A\,u = f$. Taigi funkcija u yra klasikinis Dirichlė (4.53) uždavinio sprendinys.

Tegu $m > 1$, A – griežtai elipsinis operatorius ir

$$[u,\eta] = \int_\Omega \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}\, D^\beta\, u\, D^\alpha\, \eta\, dx, \quad \forall u,\eta\in \overset{\circ}{\mathrm{W}}{}_2^{\mathrm{m}}(\Omega). \tag{4.56}$$

Bendruoju atveju ši bitiesinė forma nėra skaliarinė sandauga $\overset{\circ}{\mathrm{W}}{}_2^{\mathrm{m}}(\Omega)$ erdvėje. Pateiksime pavyzdį operatoriaus, kuris yra griežtai elipsinis, tačiau sąlyga

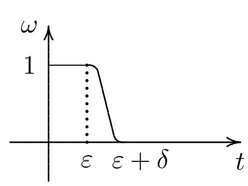
$$[u,u] = \int_\Omega \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}\, D^\beta\, u\, D^\alpha\, u\, dx \geq 0, \quad \forall u\in \overset{\circ}{\mathrm{W}}{}_2^{\mathrm{m}}(\Omega)$$

nėra patenkinta.

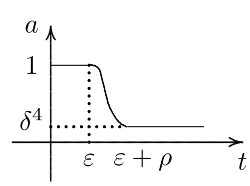
P a v y z d y s. Tegu ω ir a yra tokios be galo diferencijuojamos funkcijos (žr. 4.1 ir 4.2 pav.), kad:

1. $\omega(t) = 1$, kai $t\in[0,\varepsilon)$ ir $\omega(t) = 0$, kai $t > \varepsilon + \delta$;
2. $a(t) = 1$, kai $t\in[0,\varepsilon)$ ir $a(t) = \delta^4$, kai $t > \varepsilon + \rho$;

čia $\rho, \delta, \varepsilon$ – teigiami skaičiai, $\rho < \delta$.



4.1 pav.



4.2 pav.

Tarkime, $B_{\varepsilon+\rho} \subset \Omega$, Ω – sritis plokštumoje $\mathbb{R}^2$ ir

$$A\,u = (au_{x_1x_1})_{x_1x_1} + (au_{x_2x_2})_{x_2x_2} - 2(au_{x_1x_2})_{x_1x_2} + 4(au_{x_1x_1})_{x_2x_2};$$

čia $a = a(|x|)$. Operatorių A atitinka forma

$$\Lambda(x,\xi) = a(\xi_1^2 + \xi_2^2)^2 \geq \delta^4(\xi_1^2 + \xi_2^2)^2.$$

Kai $|\xi| = 1$, forma $\Lambda(x,\xi) \geq \delta^4 > 0$. Taigi srityje Ω operatorius A yra griežtai elipsinis.

Apibrėžkime funkciją u formule

$$u(x) = x_1x_2\omega(|x|).$$

Srityje Ω ji yra be galo diferencijuojama. Be to, skritulio $B_{\varepsilon+\delta}$ išorėje ji yra lygi nuliui. Tiesiogiai galima įsitikinti, kad

$$[u,u] = \int\limits_\Omega a(u_{x_1x_1}^2 + u_{x_2x_2}^2 - 2u_{x_1x_2}^2 + 4u_{x_1x_1}u_{x_2x_2}) =$$

$$= -2|B_\varepsilon| + \int\limits_{\Omega\setminus B_\varepsilon} a(u_{x_1x_1}^2 + u_{x_2x_2}^2 - 2u_{x_1x_2}^2 + 4u_{x_1x_1}u_{x_2x_2}) \leq$$

$$\leq -2|B_\varepsilon| + \varepsilon C_1\delta^{-4}\rho + \varepsilon C_2\delta < -|B_\varepsilon| < 0,$$

jeigu tik skaičiai ρ ir δ yra pakankamai maži. Taigi $[\cdot,\cdot]$ nėra skaliarinė sandauga.

Iš pateikto pavyzdžio matome, kad bendruoju atveju (4.56) formulė neapibrėžia skaliarinės sandaugos. Tačiau yra teisingi tokie teiginiai.

4.3 lema. *Tarkime, operatoriaus A koeficientai $a_{\alpha\beta}$, $\forall\alpha,\beta : |\alpha| = |\beta| = m$ yra pastovūs. Tada egzistuoja tokia konstanta C_0, kad*

$$[u,u] \geq C_0\|u\|^2_{\overset{\circ}{\mathrm{W}}{}_2^m(\Omega)}. \tag{4.57}$$

◁ Kadangi aibė $\mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$ yra tiršta erdvėje $\overset{\circ}{\mathrm{W}}{}_2^m(\Omega)$, tai (4.57) nelygybę pakanka įrodyti kiekvienai funkcijai $u \in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$.

Tegu funkcija $u \in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$. Pratęskime ją nuliu į srities Ω išorę ir pratęstą funkciją pažymėkime ta pačia raide. Funkcijos u Furjė transformacija

$$\widehat{u}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}u(x)\,dx.$$

Pagal Planšerelio–Parsevalio formulę

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^2\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\widehat{u}(\xi)|^2\,d\xi.$$

Kiekvienam multiindeksui $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ funkcijos $D^\alpha\,u$ Furjė transformacija

$$\widehat{D^\alpha u}(\xi) = (i\xi)^\alpha\widehat{u}(\xi), \quad \xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot\xi_n^{\alpha_n}.$$

Todėl

$$\|u\|^2_{\mathring{W}_2^m(\Omega)} = \|u\|^2_{\mathring{W}_2^m(\mathbb{R}^n)} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha|=m} |\, D^\alpha\, u(x)|^2\, dx =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha|=m} \xi^{2\alpha} |\widehat{u}(\xi)|^2\, d\xi \leq C_1 \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2m} |\widehat{u}(\xi)|^2\, d\xi.$$

Pagal Planšerelio–Parsevalio formulę

$$[u,u] = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}\, D^\beta\, u\, D^\alpha\, u\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta} \xi^\alpha \xi^\beta |\widehat{u}(\xi)|^2\, d\xi.$$

Kadangi A yra griežtai elipsinis operatorius, tai

$$[u,u] \geq \nu \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2m} |\widehat{u}(\xi)|^2\, d\xi \geq \nu C_1^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha|=m} \xi^{2\alpha} |\widehat{u}(\xi)|^2\, d\xi = C_0 \|u\|^2_{\mathring{W}_2^m(\Omega)};$$

čia $C_0 = \nu C_1^{-1}$. $\triangleright$

4.4 lema. *Tegu operatoriaus A koeficientai $a_{\alpha\beta} \in \mathrm{C}(\overline{\Omega}), \forall \alpha, \beta : |\alpha| = |\beta| = m$. Tada* (4.57) *nelygybė teisinga, jeigu srities Ω diametras yra pakankamai mažas.*

$\triangleleft$ Pasirinkime kokį nors tašką $x_0 \in \Omega$. Tada

$$[u,u] = \int\limits_{\Omega} \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x_0)\, D^\beta\, u\, D^\alpha\, u\, dx +$$

$$+ \int\limits_{\Omega} \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} (a_{\alpha\beta}(x) - a_{\alpha\beta}(x_0))\, D^\beta\, u\, D^\alpha\, u\, dx.$$

Pagal 4.3 lemą egzistuoja tokia teigiama konstanta C_0', kad

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x_0)\, D^\beta\, u\, D^\alpha\, u\, dx \geq C_0' \|u\|^2_{\mathring{W}_2^m(\Omega)}.$$

Koeficientai $a_{\alpha\beta} \in \mathrm{C}(\overline{\Omega})$. Todėl

$$\max_{x\in\Omega} |a_{\alpha\beta}(x) - a_{\alpha\beta}(x_0)| = \varepsilon(\alpha,\beta) \leq \rho, \quad \forall \alpha, \beta : |\alpha| = |\beta| = m.$$

Be to, kai srities Ω diametras artėja į nulį, $\rho \to 0$. Todėl

$$\Big| \int\limits_{\Omega} \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} (a_{\alpha\beta}(x) - a_{\alpha\beta}(x_0))\, D^\beta\, u\, D^\alpha\, u\, dx \Big| \leq \rho C \|u\|^2_{\mathring{W}_2^m(\Omega)}.$$

Tarkime, $\rho C \leq C_0'/2$. Tada

$$[u,u] \geq C_0' \|u\|^2_{\mathring{W}_2^m(\Omega)} - \rho C \|u\|^2_{\mathring{W}_2^m(\Omega)} \geq C_0 \|u\|^2_{\mathring{W}_2^m(\Omega)};$$

čia $C_0 = C_0'/2$. $\triangleright$

4.5 lema. *Kiekvienai funkcijai* $u \in \mathring{\mathrm{W}}_2^{\mathrm{m}}(\Omega)$ *ir bet kokiam skaičiui* $\varepsilon > 0$ *yra teisinga nelygybė*[5]

$$\|u\|^2_{\mathring{\mathrm{W}}_2^{\mathrm{k}}(\Omega)} \leq \varepsilon \|u\|^2_{\mathring{\mathrm{W}}_2^{\mathrm{m}}(\Omega)} + C_\varepsilon \|u\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)}; \tag{4.58}$$

čia $k < m$, *o konstanta* C_ε *nepriklauso nuo konkretaus elemento* $u \in \mathring{\mathrm{W}}_2^{\mathrm{m}}(\Omega)$ *ir artėja į* $+\infty$, *kai* $\varepsilon \to 0$.

◁ Pakanka įrodyti, kad (4.58) nelygybė yra teisinga $\forall u \in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$. Laisvai pasirinkime funkciją $u \in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$, pratęskime ją nuliu į srities Ω išorę ir gautą funkciją pažymėkime ta pačia raide. Pagal Planšerelio–Parsevalio formulę

$$\|u\|^2_{\mathring{\mathrm{W}}_2^{\mathrm{k}}(\Omega)} = \|u\|^2_{\mathring{\mathrm{W}}_2^{\mathrm{k}}(\mathbb{R}^n)} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha|=k} \xi^{2\alpha} |\widehat{u}(\xi)|^2 \, d\xi.$$

Kiekvienam $\varepsilon > 0$ egzistuoja tokia teigiama konstanta C_ε, kad

$$\sum_{|\alpha|=k} \xi^{2\alpha} \leq \varepsilon \sum_{|\alpha|=m} \xi^{2\alpha} + C_\varepsilon, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Todėl yra teisinga nelygybė

$$\|u\|^2_{\mathring{\mathrm{W}}_2^{\mathrm{k}}(\Omega)} \leq \varepsilon \int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha|=m} \xi^{2\alpha} |\widehat{u}(\xi)|^2 \, d\xi + C_\varepsilon \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\widehat{u}(\xi)|^2 \, d\xi. \tag{4.59}$$

Pagal Planšerelio–Parsevalio formulę

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha|=m} \xi^{2\alpha} |\widehat{u}(\xi)|^2 \, d\xi = \|u\|^2_{\mathring{\mathrm{W}}_2^{\mathrm{m}}(\mathbb{R}^n)} = \|u\|^2_{\mathring{\mathrm{W}}_2^{\mathrm{m}}(\Omega)},$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\widehat{u}(\xi)|^2 \, d\xi = \|u\|^2_{\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^n)} = \|u\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)}.$$

Įstatę šias integralų išraiškas į (4.59), gausime (4.58) nelygybę. ▷

4.7 teorema. (Gordingo nelygybė) *Tegu koeficientai* $a_{\alpha\beta} \in \mathrm{C}(\overline{\Omega})$ *su visais* $\alpha, \beta : |\alpha| = |\beta| = m$. *Tada egzistuoja tokios teigiamos konstantos* λ_0 *ir* C_0, *kad*

$$\langle u, u \rangle = [u, u] + \lambda_0 \|u\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} \geq C_0 \|u\|^2_{\mathring{\mathrm{W}}_2^{\mathrm{m}}(\Omega)}. \tag{4.60}$$

◁ Tegu $\Omega_1, \ldots, \Omega_N$ yra srities Ω atviras denginys. Parinkime jį taip, kad $\overline{\Omega}_i \subset \tilde{\Omega}_i$, $\forall i = 1, \ldots, N$, ir kiekviena sritis $\tilde{\Omega}_i$ tenkintų 4.4 lemos sąlygą. Srities Ω denginiui $\tilde{\Omega}_1, \ldots, \tilde{\Omega}_N$ konstruojame vieneto skaidinį

$$\sum_{i=1}^N \zeta_i(x) = 1, \quad \forall x \in \Omega;$$

[5] Ši lema yra bendresnio teiginio atskiras atvejis (žr 3.6 skyrelio 3.19 teoremą).

čia $\operatorname{supp}\zeta_i \subset \tilde{\Omega}_i,\ \zeta_i\in \mathrm{C}_0^\infty(\tilde{\Omega}_i),\ \zeta_i(x) = 1, \forall x\in\Omega_i$. Tada

$$[u,u] = \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{\tilde{\Omega}_i} \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}\, D^\beta\, u\, D^\alpha\, u\, \zeta_i^2\, dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{\tilde{\Omega}_i} \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \Big\{ a_{\alpha\beta}\, D^\beta (u\zeta_i)\, D^\alpha (u\zeta_i) -$$

$$-a_{\alpha\beta}\, D^\beta (u\zeta_i) Q_i^\alpha - a_{\alpha\beta}\, D^\alpha (u\zeta_i) Q_i^\beta + a_{\alpha\beta} Q_i^\beta Q_i^\alpha \Big\}\, dx;$$

čia

$$Q_i^\alpha = \sum_{\gamma:\, |\alpha-\gamma|<m} b_\gamma\, D^{\alpha-\gamma}\, u\, D^\gamma\, \zeta_i.$$

Pagal 4.4 lemą egzistuoja tokia konstanta C_0', kad

$$\int\limits_{\tilde{\Omega}_i} \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}\, D^\beta (u\zeta_i)\, D^\alpha (u\zeta_i)\, dx \geq$$

$$\geq C_0' \|u\zeta_i\|^2_{\mathring{\mathrm{W}}_2^{\mathrm{m}}(\tilde{\Omega}_i)} \geq C_0' \|u\|^2_{\mathring{\mathrm{W}}_2^{\mathrm{m}}(\Omega_i)},\ \forall i = 1, \ldots, N.$$

Iš čia ir 4.5 lemos išplaukia

$$[u,u] \geq C_0' \sum_{i=1}^{N} \|u\zeta_i\|^2_{\mathring{\mathrm{W}}_2^{\mathrm{m}}(\tilde{\Omega}_i)} - \varepsilon \|u\|^2_{\mathring{\mathrm{W}}_2^{\mathrm{m}}(\Omega)} - C_\varepsilon \|u\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)}.$$

Paėmę šioje nelygybėje $\varepsilon = C_0'/2$ ir pažymėję $C_\varepsilon = \lambda_0$, gausime

$$[u,u] \geq C_0 \|u\|^2_{\mathring{\mathrm{W}}_2^{\mathrm{m}}(\Omega)} - \lambda_0 \|u\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)};$$

čia $C_0 = C_0'/2$. ▷

P a s t a b a . Gordingo nelygybė gali būti teisinga ir tuo atveju, kai operatoriaus A koeficientai $a_{\alpha\beta}$ yra tik aprėžti.

Tarkime, Gordingo nelygybė teisinga. Tada

$$\langle u, v\rangle = [u,v] + \lambda_0 (u,v)$$

yra skaliarinė sandauga ir norma

$$|\!|\!| u |\!|\!| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$$

ekvivalenti normai erdvėje $\|u\|_{\mathring{\mathrm{W}}_2^{\mathrm{m}}(\Omega)}$. Erdvę $\mathring{\mathrm{W}}_2^{\mathrm{m}}(\Omega)$ su taip apibrėžta norma pažymėkime raide H_A. Tada (4.54) integralinę tapatybę galima perrašyti taip:

$$\langle u, \eta\rangle - \lambda_0 (u,\eta) = (f,\eta), \quad \forall \eta\in \mathrm{H}_A. \tag{4.61}$$

Erdvėje H_A funkcionalai

$$b(\eta) = (f, \eta), \quad t_u(\eta) = (u, \eta)$$

yra tiesiniai ir aprėžti. Pagal 1.10 teoremą egzistuoja tokie vieninteliai elementai F, $T\,u \in \mathrm{H}_A$, kad

$$b(\eta) = \langle F, \eta\rangle, \quad t_u(\eta) = \langle T\,u, \eta\rangle, \quad \forall \eta \in \mathrm{H}_A.$$

Be to, formulė

$$\langle T\,u, \eta\rangle = \int\limits_{\Omega} u\eta\,dx, \quad \forall \eta \in \mathrm{H}_A$$

apibrėžia tiesinį operatorių $T : \mathrm{H}_A \to \mathrm{H}_A$. Todėl (4.61) tapatybę galime perrašyti taip:

$$\langle u - \lambda_0\,T\,u - F, \eta\rangle = 0, \quad \forall \eta \in \mathrm{H}_A.$$

Iš šios tapatybės išplaukia, kad (4.53) Dirichlė uždavinys yra ekvivalentus operatorinei lygčiai

$$u - \lambda_0\,T\,u = F, \tag{4.62}$$

t.y. funkcija u yra apibendrintas (4.53) Dirichlė uždavinio sprendinys tada ir tik tada, kai ji yra (4.62) operatorinės lygties sprendinys erdvėje H_A. Be to, homogeninę lygtį

$$u - \lambda_0\,T\,u = 0 \tag{4.63}$$

atitinka homogeninis Dirichlė uždavinys

$$A\,u = 0, \quad u\big|_S = 0, \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\Big|_S = 0, \dots, \frac{\partial^{m-1} u}{\partial \mathbf{n}^{m-1}}\Big|_S = 0. \tag{4.64}$$

Operatorius $T : \mathrm{H}_A \to \mathrm{H}_A$ yra teigiamas, savijungis ir visiškai tolydus[6]. Todėl (4.62) yra Fredholmo tipo lygtis ir jai yra teisinga Fredholmo alternatyva:

1. Jeigu (4.63) lygtis erdvėje H_A turi tik trivialų sprendinį, tai (4.62) lygtis su visais $F \in \mathrm{H}_A$ turi vienintelį sprendinį erdvėje H_A.

2. Jeigu (4.63) lygtis turi netrivialų sprendinį, tai (4.62) lygtis turi sprendinį tik su tokiais $F \in \mathrm{H}_A$, kurie yra ortogonalūs (4.63) lygties sprendiniams.

Kartu yra teisinga teorema.

4.8 teorema. (Fredholmo alternatyva) *Tegu yra teisinga Gordingo nelygybė. Tada:*

1. *Jeigu homogeninis* (4.64) *Dirichlė uždavinys turi tik trivialų apibendrintą sprendinį, tai nehomogeninis* (4.53) *Dirichlė uždavinys turi vienintelį apibendrintą sprendinį* $\forall f \in \mathrm{L}_2(\Omega)$.

2. *Jeigu homogeninis* (4.64) *Dirichlė uždavinys turi netrivialų apibendrintą sprendinį, tai nehomogeninis* (4.53) *Dirichlė uždavinys turi apibendrintą sprendinį tik su tokiomis funkcijomis* $f \in \mathrm{L}_2(\Omega)$, *kurios yra ortogonalios* (4.64) *lygties sprendiniams.*

[6] Įrodymas yra visiškai toks pats kaip antrosios eilės lygties atveju.

Komentarai:

1. Norint atlikti išsamų (4.53) Dirichlė uždavinio tyrimą, reikia įvesti kompleksinį parametrą λ ir lygtį $A\,u = f$ pakeisti lygtimi
$$A\,u = \lambda u + f.$$
2. Įrodyta teorema išlieka teisinga, jeigu (4.53) lygtyje diferencialinį reiškinį $A\,u$ pakeisime reiškiniu
$$A\,u = (-1)^m \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} D^\alpha(a_{\alpha\beta}(x)\,D^\beta\,u) + \sum_{|\alpha|<2m} a_\alpha(x)\,D^\alpha\,u,$$
o funkciją f – reiškiniu $f + \operatorname{div}\bar{f}$.
3. Apibendrinto sprendinio egzistavimą ir vienatį galima įrodyti ir kitų kraštinių sąlygų atveju.
4. Analogiška teorija teisinga ne tik k-osios eilės lygtims, bet ir k-osios eilės sistemoms (žr., pavyzdžiui, [27]).

4.7. KITŲ KRAŠTINIŲ SĄLYGŲ ATVEJIS

Tegu Ω yra aprėžta erdvėje $\mathbb{R}^n$ sritis, $S = \partial\Omega$ – C^1 klasės paviršius, A – tolygiai elipsinis srityje Ω operatorius su aprėžtais koeficientais a_{ij}, a_i ir a, $\mathbf{n}$ – išorinis srities Ω atžvilgiu paviršiaus S vienetinis normalės vektorius, $f\in \mathrm{L}_2(\Omega)$, $\varphi\in \mathrm{L}_2(S)$, $\sigma\in \mathrm{L}_\infty(S)$ – žinomos funkcijos.

Nagrinėsime kraštinį uždavinį[7]

$$A\,u = f(x), \quad x\in\Omega; \quad (\partial u/\partial N + \sigma u)\big|_S = \varphi(x), \quad x\in S; \tag{4.65}$$

čia

$$\partial u/\partial N = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_j} \cos(\mathbf{n}, x_i)$$

konormalinė išvestinė. Kai $A\,u = -\Delta u$ konormalinė išvestinė $\partial u/\partial N = \partial u/\partial \mathbf{n}$.

Taip suformuluotas uždavinys klasikiniu požiūriu neturi prasmės. Norint suteikti jam tam tikrą prasmę, kaip ir Dirichlė uždavinio atveju reikia išvesti jį atitinkančią integralinę tapatybę ir apibrėžti apibendrinto sprendinio sąvoką.

Jeigu operatoriaus A koeficientai bei funkcijos f, φ ir σ pakankamai glodžios ir u yra klasikinis (4.65) uždavinio sprendinys, tai $\forall\eta\in \mathrm{C}^\infty(\overline{\Omega})$ teisinga integralinė tapatybė

$$\int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_j}\eta_{x_i} + \sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i}\eta + au\eta\Big)\,dx = \int_S (\varphi - \sigma u)\eta\,dS + \int_\Omega f\eta\,dx. \tag{4.66}$$

Ją išvedant, lygtį $A\,u = f$ reikia padauginti iš funkcijos η, suintegruoti sritimi Ω, pritaikyti integravimo dalimis formulę ir pasinaudoti kraštine sąlyga.

Iš 3.8 teoremos išplaukia, kad erdvė $\mathrm{W}_2^1(\Omega)$ įsideda į erdvę $\mathrm{L}_2(S)$ ir įdėjimo operatorius yra visiškai tolydus. Be to, aibė $\mathrm{C}^\infty(\overline{\Omega})$ yra tiršta erdvėje $\mathrm{W}_2^1(\Omega)$ (žr. 2.6 skyrelį). Remdamiesi šiais teiginiais, galime tvirtinti, kad (4.66) tapatybė teisinga $\forall\,\eta\in \mathrm{W}_2^1(\Omega)$, o į ją įeinantys integralai konverguoja, kai $u\in \mathrm{W}_2^1(\Omega)$, $f\in \mathrm{L}_2(\Omega)$, $\varphi\in \mathrm{L}_2(S)$, $\sigma\in \mathrm{L}_\infty(S)$ ir operatoriaus A koeficientai yra aprėžti. Todėl natūralu (4.65) uždavinio apibendrintą sprendinį apibrėžti taip:

A p i b r ė ž i m a s. Sakysime, funkcija $u\in \mathrm{W}_2^1(\Omega)$ yra (4.65) uždavinio *apibendrintas sprendinys,* jeigu $\forall\eta\in \mathrm{W}_2^1(\Omega)$ ji tenkina (4.66) integralinę tapatybę.

Jeigu apibendrintas (4.65) uždavinio sprendinys yra pakankamai glodus ir operatoriaus A koeficientai bei funkcijos f, φ, σ yra pakankamai glodžios, tai u yra klasikinis (4.65) uždavinio sprendinys. Norint tuo įsitikinti, reikia pasinaudoti integravimo dalimis formule ir nuo (4.66) integralinės tapatybės grįžti prie (4.65) uždavinio.

4.6 lema. *Tegu S yra C^1 klasės paviršius, $u\in \mathrm{W}_2^1(\Omega)$. Tada $\forall\varepsilon > 0$ teisinga nelygybė*

$$\int_S u^2\,dS \le \varepsilon \int_\Omega u_x^2\,dx + C_\varepsilon \int_\Omega u^2\,dx; \tag{4.67}$$

čia konstanta $C_\varepsilon \to \infty$, kai $\varepsilon \to 0$.

[7] Atvejis, kai lygties laisvasis narys lygus $f + \operatorname{div} \bar{f}$, nagrinėjamas analogiškai.

◃ Tegu $u\in \mathrm{W}_2^1(\Omega)$, $u^2 = |v|^q$, $q\in(1,2)$. Tada $v\in \mathrm{W}_\mathrm{q}^1(\Omega)$. Tokioms q reikšmėms erdvė $\mathrm{W}_\mathrm{q}^1(\Omega)$ įsideda į erdvę $\mathrm{L}_\mathrm{q}(S)$ (žr. 3.8 teoremą). Todėl egzistuoja tokia teigiama konstanta C, kad

$$\int\limits_S |v|^q\,dS \le C\int\limits_\Omega (|v|^q + |v_x|^q)\,dx, \quad \forall v\in \mathrm{W}_\mathrm{q}^1(\Omega).$$

Kartu $\forall u\in \mathrm{W}_2^1(\Omega)$ yra teisinga nelygybė

$$\int\limits_S u^2\,dS\le C\int\limits_\Omega (u^2 + \big(2/q\big)^q|u|^{2-q}|u_x|^q)\,dx.$$

Pasinaudoję Jungo nelygybe

$$ab\le\frac{h}{p}a^p + \frac{h^{-p'/p}}{p'}b^{p'}, \quad a,b\ge 0,$$

kai $p = 2/q,\ p' = 2/(2-q)$, įvertinsime integralą

$$\int\limits_\Omega |u|^{2-q}|u_x|^q\,dx\le hq/2\int\limits_\Omega u_x^2\,dx + h^{-q/(2-q)}(2-q)/2\int\limits_\Omega u^2\,dx, \quad h>0.$$

Iš gautų įverčių išplaukia nelygybė

$$\int\limits_S u^2\,dS\le C\big(2/q\big)^{q-1}h\int\limits_\Omega u_x^2\,dx + C\Big[1 + \big(2/q\big)^q h^{-q/(2-q)}(2-q)/2\Big]\int\limits_\Omega u^2\,dx.$$

Pažymėję

$$C\big(2/q\big)^{q-1}h = \varepsilon, \quad C\Big[1 + \big(2/q\big)^q h^{-q/(2-q)}(2-q)/2\Big] = C_\varepsilon,$$

gausime (4.67) nelygybę. ▹

4.9 teorema. *Tarkime, operatoriaus A koeficientas $a(x)\ge a_0,\ a_0$ – pakankamai didelis teigiamas skaičius. Tada (4.65) uždavinys srityje Ω negali turėti dviejų skirtingų apibendrintų sprendinių.*

◃ Tegu u_1, u_2 yra du apibendrinti (4.65) uždavinio sprendiniai srityje Ω ir $u = u_1 - u_2$. Tada funkcija u tenkina integralinę tapatybę

$$\int\limits_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_j}\eta_{x_i} + \sum_{i=1}^n a_i u_{x_i}\eta + au\eta\Big)\,dx + \int\limits_S \sigma u\eta\,dS = 0, \quad \forall \eta\in \mathrm{W}_2^1(\Omega).$$

Kadangi $u\in \mathrm{W}_2^1(\Omega)$, tai pastaroji tapatybė teisinga, kai $\eta = u$, t.y.

$$\int\limits_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_j}u_{x_i} + \sum_{i=1}^n a_i u_{x_i}u + au^2\Big)\,dx + \int\limits_S \sigma u^2\,dS = 0. \tag{4.68}$$

Pagal teoremos sąlygą $au^2 \geq a_0 u^2$. Be to,

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_j} u_{x_i} \geq \nu u_x^2$$

ir egzistuoja tokia teigiama konstanta μ, kad

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i} u\Big| \leq \mu |u_x||u| \leq \mu(\varepsilon u_x^2 + C'_\varepsilon u^2), \quad C'_\varepsilon = 1/4\varepsilon.$$

Iš šių įverčių ir (4.68) tapatybės išplaukia nelygybė

$$\int\limits_\Omega \big(\nu u_x^2 + a_0 u^2\big)\, dx + \int\limits_S \sigma u^2\, dS \leq \mu\varepsilon \int\limits_\Omega u_x^2\, dx + \mu C'_\varepsilon \int\limits_\Omega u^2\, dx.$$

Pasinaudoję (4.67) nelygybe ir įvertinę paviršinį integralą, gausime

$$\int\limits_\Omega \big(\nu u_x^2 + a_0 u^2\big)\, dx \leq (\mu + \sigma_0)\varepsilon \int\limits_\Omega u_x^2\, dx + (\mu C'_\varepsilon + \sigma_0 C_\varepsilon) \int\limits_\Omega u^2\, dx;$$

čia $\sigma_0 = \max\limits_{x\in S} |\sigma(x)|$.

Tegu $\varepsilon = (\mu + \sigma_0)^{-1}\nu/2$ ir $q_0 = (\mu C'_\varepsilon + \sigma_0 C_\varepsilon)$. Tada pastarąją nelygybę galima perrašyti taip:

$$\frac{\nu}{2} \int\limits_\Omega u_x^2\, dx + (a_0 - q_0) \int\limits_\Omega u^2\, dx \leq 0.$$

Jeigu $a_0 > q_0$, tai gauta nelygybė teisinga tik tuo atveju, kai $u = 0$, t.y. $u_1 = u_2$. Taigi bet kokie du apibendrinti (4.65) uždavinio sprendiniai sutampa, kai $a_0 > q_0$. $\triangleright$

P a s t a b a. Teorema išlieka teisinga ir tuo atveju, kai a yra bet kokia aprėžta funkcija, tačiau srities Ω diametras yra pakankamai mažas.

Tarkime, $a(x) \geq a_0$ (žr. 4.9 teoremą). Erdvėje $\mathrm{W}_2^1(\Omega)$ apibrėžkime kitą skaliarinę sandaugą

$$[u, v] = \int\limits_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} + auv\Big)\, dx$$

ir ją atitinkančią normą

$$\|u\| = \sqrt{[u, u]}.$$

Erdvę $\mathrm{W}_2^1(\Omega)$ su taip apibrėžta norma pažymėkime H_A. Tiesiogiai galima įsitikinti, kad norma erdvėje $\mathrm{W}_2^1(\Omega)$ yra ekvivalenti normai erdvėje H_A. Todėl šios erdvės sutampa.

Pasinaudoję skaliarinės sandaugos apibrėžimu, (4.66) integralinę tapatybę perrašykime taip:

$$[u, \eta] + \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i} \eta\, dx + \int\limits_S (\sigma u - \varphi)\eta\, dS = \int\limits_\Omega f\eta\, dx, \quad \forall \eta \in \mathrm{H}_A. \tag{4.69}$$

Integralai

$$b(\eta) = \int\limits_{\Omega} f\eta\,dx + \int\limits_{S} \varphi\eta\,dS,$$

$$b_u(\eta) = \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i}\eta\,dx + \int\limits_{S} \sigma u\eta\,dS$$

yra tiesiniai funkcionalai erdvėje H_A. Pagal 3.12 teoremą egzistuoja tokia teigiama konstanta C, kad

$$\|u\|_{\mathrm{L}_2(S)} \leq C\|u\|_{\mathrm{W}_2^1(\Omega)}, \quad \forall u \in \mathrm{W}_2^1(\Omega).$$

Remiantis šiuo įverčiu, galima įrodyti, kad funkcionalai $b(\eta)$ ir $b_u(\eta)$ yra aprėžti erdvėje H_A. Pagal Ryso teoremą egzistuoja tokie vieninteliai elementai F, $\mathrm{B}\,u \in \mathrm{H}_A$, kad

$$b(\eta) = [F, \eta], \quad b_u(\eta) = [\mathrm{B}\,u, \eta], \quad \forall \eta \in \mathrm{H}_A.$$

Todėl (4.69) integralinę tapatybę galima perrašyti taip:

$$[u + \mathrm{B}\,u - F, \eta] = 0, \quad \forall \eta \in \mathrm{H}_A.$$

Kartu galime tvirtinti, kad $u \in \mathrm{W}_2^1(\Omega)$ yra apibendrintas (4.65) uždavinio sprendinys srityje Ω tada ir tik tada, kai ji yra operatorinės lygties

$$u + \mathrm{B}\,u = F \tag{4.70}$$

sprendinys erdvėje H_A. Pagal 3.12 teoremą erdvė $\mathrm{W}_2^1(\Omega)$ kompaktiškai įsideda į erdvę $\mathrm{L}_2(S)$. Remiantis šiuo teiginiu, galima įrodyti (žr. 4.4 skyrelį), kad operatorius B, apibrėžtas formule

$$[\mathrm{B}\,u, \eta] = \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i}\eta\,dx + \int\limits_{S} \sigma u\eta\,dS,$$

yra visiškai tolydus operatorius erdvėje H_A. Todėl (4.70) lygtis yra Fredholmo tipo lygtis. Nagrinėjamu atveju homogeninė lygtis

$$u + \mathrm{B}\,u = 0$$

turi tik trivialų sprendinį. Pagal 1.4 teoremą (4.70) lygtis turi vienintelį sprendinį $\forall F \in \mathrm{H}_A$. Kartu galime tvirtinti, kad teisinga tokia teorema.

4.10 teorema. *Tarkime,* $a(x) \geq a_0$, *b.v.* $x \in \Omega$ *(žr.* 4.9 *teoremą),* $f \in \mathrm{L}_2(\Omega)$, $\varphi \in \mathrm{L}_2(S)$. *Tada* (4.65) *uždavinys turi vienintelį apibendrintą sprendinį.*

K o m e n t a r a i:

1. Norint ištirti bendrąjį atvejį, reikia įvesti kompleksinį parametrą λ, lygtį $A\,u = f$ pakeisti lygtimi $A\,u = \lambda u + f$ ir ją atitinkantį kraštinį uždavinį suvesti į operatorinę lygtį (žr. 4.4 skyrelį).

2. Analogiška teorija teisinga ir bendresnių kraštinių sąlygų atveju. Pavyzdžiui, galima nagrinėti kraštinį uždavinį su mišriąja kraštine sąlyga

$$\partial u/\partial N + \sigma u = \varphi(x), \quad x\in S; \quad u = \psi(x), \quad x\in\Gamma;$$

čia: S – C^1 klasės paviršius, Γ – teigiamo ploto paviršius, $S \cup \Gamma = \partial\Omega$, $\varphi\in \mathrm{L}_2(S)$, $\psi\in \mathrm{W}_2^1(\Omega)$. Tokios kraštinės sąlygos atveju funkcija $u\in \mathrm{W}_2^1(\Omega)$ yra apibendrintas sprendinys, jeigu $u - \psi\in \mathrm{W}_{2,0}^1(\Omega)$ ir $\forall\eta\in \mathrm{W}_{2,0}^1(\Omega)$ teisinga integralinė tapatybė

$$\int\limits_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_j}\eta_{x_i} + \sum_{i=1}^n a_i u_{x_i}\eta + au\eta\Big)\, dx = \int\limits_S (\varphi - \sigma u)\eta\, dS + \int\limits_\Omega f\eta\, dx.$$

Čia $\mathrm{W}_{2,0}^1(\Omega)$ yra diferencijuojamų uždaroje srityje $\overline{\Omega}$ ir lygių nuliui paviršiaus Γ aplinkoje funkcijų uždarinys erdvėje $\mathrm{W}_2^1(\Omega)$. Kiekvienai funkcijai $u\in \mathrm{W}_{2,0}^1(\Omega)$ teisinga nelygybė

$$\int\limits_\Omega u^2\, dx \le C \int\limits_\Omega u_x^2\, dx.$$

Konstanta C čia priklauso tik nuo srities Ω diametro ir paviršiaus Γ ploto. Šią nelygybę galima įrodyti visiškai taip pat kaip Frydrichso nelygybę (žr. 2.5 skyrelį).

3. Reikalavimas, kad S būtų C^1 klasės paviršius, nėra esminis. Pakanka reikalauti, kad:

   (a) erdvė $\mathrm{W}_2^1(\Omega)$ įsidėtų į erdvę $\mathrm{L}_2(S)$ ir įdėjimo operatorius būtų visiškai tolydus;

   (b) bet kokioms funkcijoms $u, v\in \mathrm{W}_2^1(\Omega)$ būtų teisinga integravimo dalimis formulė.

   Smulkiau apie tai žr. [27].

4.8. LOKALUSIS APIBENDRINTŲJŲ SPRENDINIŲ GLODUMAS

Tegu A yra tolygiai elipsinis srityje Ω operatorius. Ištirsime lygties

$$A\,u = f \tag{4.71}$$

apibendrintų sprendinių lokalų glodumą.Tiksliau, įrodysime, kad didinant operatoriaus A koeficientų bei funkcijos f glodumą, atitinkamai didėja (4.71) lygties apibendrintų sprendinių glodumas.

Iš pradžių nagrinėsime paprasčiausią atvejį, kai $A\,u = -\Delta u$. Tegu u yra apibendrintas Puasono lygties

$$-\Delta u = f$$

sprendinys srityje Ω. Tada

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} u_{x_i} \eta_{x_i}\, dx = \int\limits_{\Omega} f \eta\, dx, \quad \forall \eta \in \mathrm{C}_0^{\infty}(\Omega).$$

Pakankamai mažiems $\rho > 0$ funkcija $(D^{\alpha}\,\eta)_{\rho} \in \mathrm{C}_0^{\infty}(\Omega)$. Todėl

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} u_{x_i} (D^{\alpha}\,\eta)_{\rho x_i}\, dx = \int\limits_{\Omega} (D^{\alpha}\,\eta)_{\rho} f\, dx.$$

Pakeitę diferencijavimo ir vidurkinimo operacijų tvarką (žr. 2.3 skyrelio 5 apibendrintų išvestinių savybę), gausime

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} u_{x_i} (D^{\alpha}\,\eta)_{x_i \rho}\, dx = \int\limits_{\Omega} (D^{\alpha}\,\eta)_{\rho} f\, dx.$$

Pasinaudoję (2.29) formule, taip pat integravimo dalimis formule, šią tapatybę perrašysime taip:

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} (D^{\alpha}\,u_{\rho})_{x_i} \eta_{x_i}\, dx = -\int\limits_{\Omega} D\,\eta\, D^{\alpha-1} f_{\rho}\, dx.$$

Tegu $\eta = D^{\alpha}\,u_{\rho}\xi^2$, $\xi \in \mathrm{C}_0^{\infty}(\Omega)$, $\xi(x) \geq 0$, $\forall x \in \Omega$, $\xi(x) = 1$, kai $x \in \overline{\Omega'}$, $\Omega' : \overline{\Omega'} \subset \Omega$ – griežtai vidinė sritis, ρ – pakankamai mažas teigiamas skaičius. Tada teisinga integralinė tapatybė

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} (D^{\alpha}\,u_{\rho})^2_{x_i} \xi^2\, dx + \int\limits_{\Omega} 2 \sum_{i=1}^{n} (D^{\alpha}\,u_{\rho})_{x_i}\, D^{\alpha}\,u_{\rho} \xi \xi_{x_i}\, dx =$$

$$= -\int\limits_{\Omega} \Big(D^{\alpha+1}\,u_{\rho}\xi^2 + 2\,D^{\alpha}\,u_{\rho}\xi\, D\,\xi \Big)\, D^{\alpha-1} f_{\rho}\, dx.$$

Iš pastarosios tapatybės išplaukia nelygybė

$$\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}(D^{\alpha}\,u_{\rho})^2_{x_i}\xi^2\,dx\leq C\int\limits_{\Omega}\Big((D^{\alpha}\,u_{\rho})^2\xi_x^2+(D^{\alpha-1}\,f_{\rho})^2\xi^2\Big)\,dx.$$

Susumavę šias nelygybes pagal $\alpha : |\alpha| = m+1,\ m\geq 0$, gausime

$$\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|=m+2}(D^{\alpha}\,u_{\rho})^2\xi^2\,dx\leq \tag{4.72}$$

$$\leq C\int\limits_{\Omega}\Big(\sum_{|\alpha|=m+1}(D^{\alpha}\,u_{\rho})^2\xi_x^2+\sum_{|\alpha|=m}(D^{\alpha}\,f_{\rho})^2\xi^2\Big)\,dx.$$

Tarkime, $m=0$. Tada (4.72) nelygybę galima perrašyti taip:

$$\int\limits_{\Omega}u^2_{\rho xx}\xi^2\,dx\leq C\int\limits_{\Omega}\left(u^2_{\rho x}\xi_x^2+f_{\rho}^2\xi^2\right)dx;$$

čia

$$u^2_{\rho x}=\sum_{i=1}^{n}u^2_{\rho x_i},\quad u^2_{\rho xx}=\sum_{i,j=1}^{n}u^2_{\rho x_i x_j}.$$

Pagal 3 vidutinių funkcijų savybę

$$\|u_{\rho x}\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)}\leq\|u_x\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)},\quad \|f_{\rho}\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)}\leq\|f\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)}.$$

Todėl

$$\int\limits_{\Omega}u^2_{\rho xx}\xi^2\,dx\leq C\int\limits_{\Omega}(u_x^2+f^2)\,dx<\infty;$$

čia konstanta C priklauso tik nuo $\operatorname{dist}\{\partial\Omega,\operatorname{supp}\xi\}$. Kartu galime tvirtinti, kad

$$\int\limits_{\Omega'}u^2_{\rho xx}\,dx\leq C\int\limits_{\Omega}(u_x^2+f^2)\,dx<\infty. \tag{4.73}$$

Įrodysime, kad Puasono lygties apibendrintas sprendinys $u\in \mathrm{W}_2^2(\Omega')$. Tiksliau, įrodysime tokį teiginį.

4.7 lema. *Tegu* $f\in \mathrm{L}_2(\Omega)$ *ir* u *yra apibendrintas Puasono lygties sprendinys srityje* Ω. *Tada* $\forall\Omega' : \overline{\Omega'}\subset\Omega$ *funkcija* $u\in \mathrm{W}_2^2(\Omega')$ *ir*

$$\|u_{xx}\|_{\mathrm{L}_2(\Omega')}\leq C\big(\|u_x\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)}+\|f\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)}\big); \tag{4.74}$$

čia konstanta C *priklauso tik nuo* $\operatorname{dist}\{\partial\Omega,\Omega'\}$.

◁ Pagal 4 vidutinių funkcijų savybę (žr. 2 skyrelį) vidutinės funkcijos $u_\rho \to u$ erdvėje $\mathrm{L}_2(\Omega')$, kai $\rho \to 0$. Iš (4.73) nelygybės išplaukia, kad sekos $\{u_{\rho x_i x_j}\}_{\rho>0}$, $i,j=1,\dots,n$, yra aprėžtos erdvėje $\mathrm{L}_2(\Omega')$. Todėl iš jų galima išskirti silpnai konverguojančius posekius, t.y. egzistuoja tokie elementai $u_{ij}\in \mathrm{L}_2(\Omega')$, kad

$$u_{\rho x_i x_j} \rightharpoonup u_{ij}, \quad i,j=1,\dots,n.$$

Remiantis 2.5 teorema, srityje Ω' egzistuoja funkcijos u antrosios eilės apibendrintos išvestinės $u_{x_i x_j}$ ir jos sutampa su u_{ij}. Taigi $u\in \mathrm{W}_2^2(\Omega')$. Pasinaudoję 3 vidutinių funkcijų savybe ir 5 apibendrintų išvestinių savybe, galime tvirtinti, kad (4.73) nelygybė išliks teisinga, jeigu joje u_ρ pakeisime u, t.y.

$$\int\limits_{\Omega'} u_{xx}^2\,dx \le C\int\limits_{\Omega}(u_x^2+f^2)\,dx<\infty.$$

Kartu teisinga (4.74) nelygybė. ▷

I š v a d a. Jeigu funkcija $f\in \mathrm{L}_2(\Omega)$, tai b.v. $x\in\Omega$ funkcija u tenkina Puasono lygtį. Iš tikrųjų tegu u yra apibendrintas Puasono lygties sprendinys. Tada

$$\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^n u_{x_i}\eta_{x_i}\,dx=\int\limits_{\Omega} f\eta\,dx, \quad \forall\eta\in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega).$$

Tegu Ω' yra bet kokia griežtai vidinė sritis. Srityje Ω' funkcija u turi apibendrintas antros eilės išvestines. Todėl yra teisinga tapatybė

$$\int\limits_{\Omega}(\Delta u+f)\eta\,dx=0, \quad \forall\eta\in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega').$$

Iš jos išplaukia, kad b.v. $x\in\Omega'$ funkcija u tenkina Puasono lygtį. Kadangi sritį Ω' pasirinkome laisvai, tai galime tvirtinti, kad funkcija u tenkina Puasono lygtį b.v. $x\in\Omega$.

Tarkime, $m=1$, $f\in \mathrm{W}_2^1(\Omega)$, $\xi\in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$, $\operatorname{supp}\xi\subset\Omega'$, $\xi(x)=1$, kai $x\in\Omega''$: $\overline{\Omega''}\subset\Omega'$. Tada

$$\int\limits_{\Omega''}\sum_{|\alpha|=3}(D^\alpha u_\rho)^2\,dx \le C\int\limits_{\Omega'}\left(u_{xx}^2+f_x^2\right)dx;$$

čia konstanta C priklauso nuo atstumo $\operatorname{dist}\{\partial\Omega',\operatorname{supp}\xi\}$. Iš šios nelygybės (žr. 4.7 lemos įrodymą) išplaukia, kad $u\in \mathrm{W}_2^3(\Omega'')$ ir

$$\int\limits_{\Omega''}\sum_{|\alpha|=3}(D^\alpha u)^2\,dx \le C\int\limits_{\Omega'}\left(u_{xx}^2+f_x^2\right)dx \le C'\int\limits_{\Omega}\left(u_x^2+f_x^2+f^2\right)dx.$$

Taip samprotaudami toliau, gausime, kad apibendrinto sprendinio glodumas padidėja lygiai tiek kiek padidėja funkcijos f glodumas. Tiksliau, teisinga tokia teorema.

4.11 teorema. *Tegu $m\ge 0$, $f\in \mathrm{W}_2^m(\Omega)$ ir u yra apibendrintasis Puasono lygties sprendinys srityje Ω. Tada $u\in \mathrm{W}_2^{m+2}(\Omega')$, $\forall\Omega' : \overline{\Omega'}\subset\Omega$ ir*

$$\sum_{|\alpha|=m+2}\|D^\alpha u\|_{\mathrm{L}_2(\Omega')}\le C\big(\|u_x\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)}+\|f\|_{\mathrm{W}_2^m(\Omega)}\big).$$

P a s t a b a. Teorema išlieka teisinga, jeigu funkcija $f \in \mathrm{L}_2(\Omega)$ ir kiekvienoje griežtai vidinėje srityje Ω' turi sumuojamas kvadratu apibendrintas išvestines iki m-osios eilės imtinai.

I š v a d o s:

1. Jeigu funkcija f turi m-osios eilės apibendrintas išvestines kokioje nors srityje $\Omega_0 \subset \Omega$, tai Puasono lygties apibendrintas sprendinys turi $(m+2)$-osios eilės apibendrintas išvestines srityje $\Omega_0' : \overline{\Omega_0'} \subset \Omega_0$.

2. Tegu $f \in \mathrm{W}_2^{\mathrm{m}}(\Omega)$ ir u yra apibendrintas Puasono lygties sprendinys srityje Ω. Tada:

   (a) Jeigu $m+2 > n/2$ ir $k < m+2-n/2$, tai $u \in \mathrm{C}^{\mathrm{k}}(\overline{\Omega'})$, $\forall \Omega' : \overline{\Omega'} \subset \Omega$.

   (b) Jeigu $\alpha < k-m-2-n/2$, $\alpha \in (0,1)$, tai $u \in \mathrm{C}^{\mathrm{k},\alpha}(\overline{\Omega'})$, $\forall \Omega' : \overline{\Omega'} \subset \Omega$.

Išnagrinėsime bendrąjį atvejį. Tarkime, u yra apibendrintas (4.71) lygties sprendinys. Tada teisinga integralinė tapatybė

$$\int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_j} \eta_{x_i} + \sum_{i=1}^n a_i u_{x_i} \eta + a u \eta \Big)\, dx = \int_\Omega f \eta\, dx, \quad \forall \eta \in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega).$$

Pakankamai mažiems $\rho > 0$ funkcija $(D^\alpha \eta)_\rho \in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$. Todėl tokiems ρ teisinga integralinė tapatybė

$$\int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_j} (D^\alpha \eta)_{\rho x_i} + \Big(\sum_{i=1}^n a_i u_{x_i} + a u \Big) (D^\alpha \eta)_\rho \Big)\, dx = \int_\Omega (D^\alpha \eta)_\rho f\, dx.$$

Pasinaudoję (2.29) formule ir 5 apibendrintų išvestinių savybe, perrašysime šią tapatybę taip:

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}\, D_j\, u)_\rho (D^\alpha \eta)_{x_i}\, dx = \int_\Omega g_\rho\, D^\alpha\, \eta\, dx; \tag{4.75}$$

čia

$$g = f - \sum_{i=1}^n a_i u_{x_i} - a u.$$

Remdamiesi šia tapatybe, įrodysime, kad (4.71) lygties apibendrinto sprendinio glodumas padidėja lygiai tiek kiek padidėja operatoriaus A koeficientų bei funkcijos f glodumas.

4.12 teorema. *Tegu u yra apibendrintas (4.71) lygties sprendinys srityje Ω, $f \in \mathrm{L}_2(\Omega)$, operatoriaus A koeficientai $a_{ij} \in \mathrm{C}^{0,1}(\overline{\Omega})$, $a_i, a \in \mathrm{L}_\infty(\Omega)$, $\forall i, j = 1, \ldots, n$. Tada funkcija $u \in \mathrm{W}_2^2(\Omega')$, $\forall \Omega' : \overline{\Omega'} \subset \Omega$ ir teisinga nelygybė*

$$\|u_{xx}\|_{\mathrm{L}_2(\Omega')} \leq C \big(\|u\|_{\mathrm{W}_2^1(\Omega)} + \|f\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)} \big); \tag{4.76}$$

čia konstanta C priklauso tik nuo $\operatorname{dist}\{\partial\Omega, \Omega'\}$.

◁ Tarkime, (4.75) tapatybėje $D^\alpha = \partial/\partial x_k$, $\eta = u_{\rho x_k}\xi^2$, $\xi\in C_0^\infty(\Omega)$, $\xi(x)\geq 0$, $\forall x\in\Omega$, $\xi(x) = 1$, kai $x\in\overline{\Omega'}$: $\overline{\Omega'} \subset \Omega$ – griežtai vidinė sritis, ρ – pakankamai mažas teigiamas skaičius. Gautas tapatybes susumavę pagal k nuo 1 iki n ir pasinaudoję integravimo dalimis formule, gausime

$$-\int\limits_\Omega \sum_{k=1}^n \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}\, D_j\, u)_{\rho x_k} (u_{\rho x_k}\xi^2)_{x_i}\, dx = \int\limits_\Omega \sum_{k=1}^n g_\rho (u_{\rho x_k}\xi^2)_{x_k}\, dx. \tag{4.77}$$

Įvertinsime šiuos integralus. Iš pradžių pastebėsime, kad

$$\Big|\int\limits_\Omega \sum_{k=1}^n g_\rho (u_{\rho x_k}\xi^2)_{x_k}\, dx\Big| \leq$$

$$\leq \int\limits_\Omega \big(\varepsilon u_{\rho xx}^2 \xi^2 + C_\varepsilon (u_{\rho x}^2 \xi_x^2 + f_\rho^2 \xi^2 + u_x^2 + u^2)\big)\, dx, \quad \forall \varepsilon > 0;$$

čia $C_\varepsilon \to \infty$, kai $\varepsilon \to 0$. Integralas

$$\int\limits_\Omega \sum_{k=1}^n \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}\, D_j\, u)_{\rho x_k} (u_{\rho x_k}\xi^2)_{x_i}\, dx =$$

$$= \int\limits_\Omega \sum_{k=1}^n \sum_{i,j=1}^n \Big(\int \omega_{\rho x_k}(x-y)(a_{ij}(y) - a_{ij}(x)) u_{y_j}(y)\, dy\Big)(u_{\rho x_k}\xi^2)_{x_i}\, dx +$$

$$+ \int\limits_\Omega \sum_{k=1}^n \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{\rho x_k x_j} (u_{\rho x_k}\xi^2)_{x_i}\, dx.$$

Priminsime (žr. 2 skyrelį), kad $\omega_\rho(x) = C\rho^{-n}\omega(|x|^2/\rho^2)$. Jos išvestinė

$$\omega_{\rho x_k}(x) = C\rho^{-n-2}\omega'(|x|^2/\rho^2) 2x_k, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Tarkime, ω yra monotoniškai mažėjanti funkcija, t.y. $\omega'(t)\leq 0$, $\forall t\geq 0$. Tada formulė

$$\widetilde{\omega}_\rho(x) = -\widetilde{C}\rho^{-n-2}\omega'(|x|^2/\rho^2)|x|^2, \quad \widetilde{C} = 2C/n,$$

apibrėžia be galo diferencijuojamą neneigiamą funkciją $\widetilde{\omega}_\rho$, kuri lygi nuliui kai $|x|\geq\rho$, ir

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \widetilde{\omega}_\rho(x)\, dx = -\frac{1}{n} C\rho^{-n}|S_1| \int\limits_0^\rho r^n \omega'(r^2/\rho^2) 2r/\rho^2\, dr =$$

$$= C\rho^{-n}|S_1| \int\limits_0^\rho \omega(r^2/\rho^2) r^{n-1}\, dr = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega_\rho(x)\, dx = 1, \quad \forall \rho > 0.$$

Taigi funkcijos u vidutinė funkcija

$$\widetilde{u}_\rho(x) = \int \widetilde{\omega}_\rho(x-y) u(y)\, dy$$

pasižymi tomis pačiomis savybėmis kaip ir vidutinė funkcija u_ρ.

Pagal prielaidą operatorius A yra griežtai elipsinis. Todėl

$$\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{\rho x_k x_j} (u_{\rho x_k}\xi^2)_{x_i}\, dx \geq$$

$$\geq \nu \int\limits_\Omega u^2_{\rho xx}\xi^2\, dx - \int\limits_\Omega (\varepsilon u^2_{\rho xx}\xi^2 + C_\varepsilon u^2_{\rho x}\xi^2_x)\, dx.$$

Kadangi koeficientai $a_{ij} \in \mathrm{C}^{0,1}(\overline{\Omega})$, tai egzistuoja tokia konstanta L, kad

$$|a_{ij}(x) - a_{ij}(y)| \leq L|x-y|, \quad \forall i,j=1,\dots,n, \quad x,y \in \Omega.$$

Kartu $\forall k, i = 1,\dots,n$ teisinga nelygybė

$$\Big|\sum_{j=1}^n \int \omega_{\rho x_k}(x-y)(a_{ij}(y) - a_{ij}(x)) u_{y_j}(y)\, dy\Big| \leq$$

$$\leq C \int \widetilde{\omega}_\rho(x-y)|u_y|\, dy \leq C\Big(\int \widetilde{\omega}_\rho(x-y) u^2_y(y)\, dy\Big)^{1/2} := C\widetilde{v}(x).$$

Pasinaudoję šia nelygybe, įvertinsime integralą

$$\Big|\int\limits_\Omega \sum_{k=1}^n \sum_{i,j=1}^n \Big(\int \omega_{\rho x_k}(x-y)(a_{ij}(y) - a_{ij}(x)) u_{y_j}(y)\, dy\Big)(u_{\rho x_k}\xi^2)_{x_i}\, dx\Big| \leq$$

$$\leq C \int\limits_\Omega \widetilde{v}(u_{\rho xx}\xi^2 + u_{\rho x} 2\xi\xi_x)\, dx \leq \int\limits_\Omega \big(\varepsilon u^2_{\rho xx}\xi^2 + C_\varepsilon \widetilde{v}^2\xi^2 + C_\varepsilon u^2_{\rho x}\xi^2_x\big)\, dx.$$

Be to, pastebėsime, kad

$$\int\limits_\Omega \widetilde{v}^2\xi^2\, dx \leq \int\limits_\Omega u^2_x\, dx.$$

Iš šių įverčių ir (4.77) tapatybės išplaukia nelygybė

$$\int\limits_\Omega u^2_{\rho xx}\xi^2\, dx \leq C \int\limits_\Omega (u^2_{\rho x}\xi^2_x + f^2_\rho \xi^2 + u^2_x + u^2)\, dx.$$

Tolesnis teoremos įrodymas yra visiškai toks pats kaip 4.7 lemos. ▹

Šią teoremą galima apibendrinti. Tiksliau, matematinės indukcijos metodu galima įrodyti tokį teiginį.

4.13 teorema. *Tegu* u *yra apibendrintas* (4.71) *lygties sprendinys srityje* Ω, *funkcija* $f \in \mathrm{W}^{\mathrm{k}}_2(\Omega)$, $k \geq 1$, *o operatoriaus* A *koeficientai* $a_{ij} \in \mathrm{C}^{\mathrm{k},1}(\overline{\Omega})$, $a_i, a \in \mathrm{C}^{\mathrm{k}-1,1}(\overline{\Omega})$, $\forall i,j = 1,\dots,n$. *Tada* $u \in \mathrm{W}^{\mathrm{k}+2}_2(\Omega')$, $\forall \Omega' : \overline{\Omega'} \subset \Omega$ *ir teisinga nelygybė*

$$\|u\|_{\mathrm{W}^{\mathrm{k}+2}_2(\Omega')} \leq C\big(\|u\|_{\mathrm{W}^1_2(\Omega)} + \|f\|_{\mathrm{W}^{\mathrm{k}}_2(\Omega)}\big); \tag{4.78}$$

čia konstanta C *priklauso tik nuo* $\operatorname{dist}\{\partial\Omega, \Omega'\}$.

I š v a d o s:

1. Tegu u yra apibendrintas (4.71) lygties sprendinys srityje Ω ir operatoriaus A koeficientai a_{ij}, a_i, a bei f yra be galo diferencijuojamos srityje Ω funkcijos. Tada u taip pat yra be galo diferencijuojama srityje Ω funkcija.

2. Jeigu operatoriaus A koeficientai $a_{ij}\in \mathrm{C}^{0,1}(\overline{\Omega}), a_i, a\in \mathrm{L}_\infty(\Omega)\ \forall i, j = 1, \dots, n,$ ir funkcija $f\in \mathrm{L}_2(\Omega),$ tai b.v. $x\in\Omega$ funkcija u tenkina (4.71) lygtį.

P a s t a b a. Atkreipsime dėmesį į tai, kad (4.78) nelygybėje $\|u\|_{\mathrm{W}_2^1(\Omega)}$ galima pakeisti $\|u\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)}$.

4.9. GLOBALUSIS APIBENDRINTŲJŲ SPRENDINIŲ GLODUMAS

Pirmojo, antrojo ir trečiojo kraštinio uždavinio apibendrintų sprendinių glodumo tyrimas skiriasi tik tam tikromis techninėmis detalėmis. Todėl šiame skyrelyje apsiribosime pirmuoju (Dirichlė) kraštiniu uždaviniu

$$A\,u = f(x), \quad x\in\Omega; \quad u\big|_S = \varphi(x), \quad x \in S. \tag{4.79}$$

Natūralu, kad apibendrintų sprendinių glodumas čia priklauso ne tik nuo operatoriaus A koeficientų bei funkcijos f glodumo, bet ir nuo paviršiaus S bei funkcijos φ glodumo.

Iš pradžių nagrinėsime paprasčiausią atvejį, kai $A = -\Delta$ ir $\varphi = 0$. Tiksliau, tegu u yra apibendrintas Dirichlė uždavinio

$$-\Delta u = f(x), \quad x\in\Omega; \quad u\big|_S = 0 \tag{4.80}$$

sprendinys.

4.14 teorema. *Tarkime,* Ω *yra aprėžta erdvėje* $\mathbb{R}^n$ *sritis,* $S = \partial\Omega$ – C^2 *klasės paviršius,* $f\in \mathrm{L}_2(\Omega)$. *Tada* $u\in \mathrm{W}_2^2(\Omega)$ *ir teisingas įvertis*

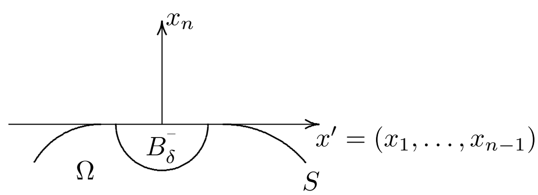
$$\|u\|_{\mathrm{W}_2^2(\Omega)}\leq C\|f\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)}. \tag{4.81}$$

◁ Pagal 4.7 lemą $u\in \mathrm{W}_2^2(\Omega')$ bet kokioje griežtai vidinėje srityje Ω'. Todėl reikia įrodyti, kad u turi antrosios eilės sumuojamas kvadratu apibendrintas išvestines kokioje nors paviršiaus S aplinkoje. Įrodymą išskaidysime į tris etapus.

1. Tarkime, paviršiaus S dalis yra hiperplokštuma (žr. 4.3 pav.). Be to, tegu ji yra apibrėžta lygtimi

$$x_n = 0$$

ir pusrutulys $B_\delta^- = \{x\in\mathbb{R}^n : |x| < \delta, x_n < 0\} \subset \Omega$.



4.3 pav.

Įrodysime, kad $u\in \mathrm{W}_2^2(B_{\delta/2}^-)$.

Šiame skyrelyje vidutinę funkciją apibrėšime kitaip – ne pagal visus kintamuosius x, o tik pagal x'. Tegu $\omega\in \mathrm{C}^\infty[0,\infty)$, $\omega(t) > 0, \forall t\in[0,1)$, $\omega(t) = 0, \forall t\geq 1$. Apibrėžkime be galo diferencijuojamų funkcijų seką

$$\omega_\rho(x') = C\rho^{-n+1}\omega(|x'|^2/\rho^2), \quad x'\in\mathbb{R}^{n-1},\ \rho > 0.$$

Konstantą C parinkime taip, kad

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \omega_\rho(x')\,dx' = 1, \quad \forall \rho > 0.$$

Akivaizdu, kad $\omega_\rho \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ ir

$$\omega_\rho(x') > 0, \quad \text{kai } |x'| < \rho,$$

$$\omega_\rho(x') = 0, \quad \text{kai } |x'| \geq \rho.$$

Tegu u yra sumuojama srityje Ω funkcija. Prilyginę ją nuliui srities Ω išorėje, gausime funkciją (ją žymėsime ta pačia raide), apibrėžtą visoje erdvėje $\mathbb{R}^n$. Funkcijos u vidutinę funkciją kintamųjų x' atžvilgiu[8] apibrėšime taip:

$$u_\rho(x) = \int \omega_\rho(x' - y')u(y', x_n)\,dy'.$$

Pagal apibendrinto sprendinio apibrėžimą $\forall \eta \in \mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)$ teisinga integralinė tapatybė

$$\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n u_{x_i}\eta_{x_i}\,dx = \int\limits_\Omega f\eta\,dx. \tag{4.82}$$

Tegu ξ yra be galo diferencijuojama pusrutulyje B_δ^- funkcija tokia, kad

$$\xi(x) = \begin{cases} 1, & \text{kai } |x| < \delta/2; \\ 0, & \text{kai } |x| > (\delta + h)/2, \end{cases} \qquad h < \delta.$$

Tada funkcija $\eta = (D_k\,u_\rho \xi^2)_{x_k\rho}$ priklauso erdvei $\mathring{\mathrm{W}}_2^1(B_\delta^-)$, $\forall k = 1, \ldots, n-1$, ir yra teisinga integralinė tapatybė

$$\int\limits_{B_\delta^-} \sum_{i=1}^n u_{x_i}(D_k\,u_\rho\xi^2)_{x_k\rho x_i}\,dx = \int\limits_{B_\delta^-} (D_k\,u_\rho\xi^2)_{x_k\rho} f\,dx.$$

Pakankamai mažiems ρ šią tapatybę galima perrašyti taip:

$$-\int\limits_{B_\delta^-} \sum_{i=1}^n u_{\rho x_i x_k}(D_k\,u_\rho\xi^2)_{x_i}\,dx = \int\limits_{B_\delta^-} (D_k\,u_\rho\xi^2)_{x_k} f_\rho\,dx.$$

Iš jos išvedama nelygybė

$$\int\limits_{B_\delta^-} \sum_{i=1}^n u_{\rho x_i x_k}^2 \xi^2\,dx \leq C \int\limits_{B_\delta^-} (f_\rho^2\xi^2 + u_{\rho x_k}^2 \xi_x^2)\,dx.$$

[8]Vidutines funkcijas kintamųjų x' ir x atžvilgiu žymėsime ta pačia raide.

Susumavę šias nelygybes pagal k nuo 1 iki $n-1$, gausime

$$\int\limits_{B_\delta^-} u_{\rho x x'}^2 \xi^2\, dx \leq C \int\limits_{B_\delta^-} (f_\rho^2 \xi^2 + u_{\rho x'}^2 \xi_x^2)\, dx;$$

čia

$$u_{\rho x x'}^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n-1} u_{\rho x_i x_k}^2, \quad u_{\rho x'}^2 = \sum_{k=1}^{n-1} u_{\rho x_k}^2, \quad \xi_x^2 = \sum_{i=1}^{n} \xi_{x_i}^2.$$

Tiesiogiai galima įsitikinti, kad

$$\int\limits_{B_\delta^-} f_\rho^2 \xi^2\, dx \leq \int\limits_{B_\delta^-} f^2\, dx, \quad \int\limits_{B_\delta^-} u_{\rho x_k}^2 \xi_x^2\, dx \leq C \int\limits_{B_\delta^-} u_{x_k}^2\, dx.$$

Todėl

$$\int\limits_{B_{\delta/2}^-} u_{\rho x x'}^2\, dx \leq C \int\limits_{B_\delta^-} (f^2 + u_x^2)\, dx < \infty;$$

čia konstanta C priklauso tik nuo skirtumo $\delta - h$. Iš šios nelygybės ir 4.7 lemos įrodymo išplaukia, kad pusrutulyje $B_{\delta/2}^-$ egzistuoja funkcijos u sumuojamos kvadratu antrosios eilės apibendrintos išvestinės (išskyrus $u_{x_n x_n}$). Remiantis 4.7 lemos išvada, pastarąją išvestinę galima rasti iš Puasono lygties, t.y.

$$u_{x_n x_n} = f - \sum_{i=1}^{n-1} u_{x_i x_i}.$$

Iš šios išraiškos išplaukia, kad funkcija $u_{x_n x_n} \in \mathrm{L}_2(B_{\delta/2}^-)$. Kartu galime tvirtinti, kad $u \in \mathrm{W}_2^2(B_{\delta/2}^-)$ ir teisinga nelygybė

$$\|u\|_{\mathrm{W}_2^2(B_{\delta/2}^-)} \leq C\Big(\|f\|_{\mathrm{L}_2(B_\delta^-)} + \|u\|_{\mathrm{W}_2^1(B_\delta^-)}\Big).$$

2. Laisvai pasirinkime tašką $x^0 \in S$. Perkelkime koordinačių pradžią į tašką x^0 ir pasukime koordinates taip, kad vienos iš jų kryptis sutaptų su paviršiaus S taške x^0 išorinės normalės kryptimi, o kitos koordinatės gulėtų liečiamojoje plokštumoje. Atlikus tokią transformaciją, lygtis ir kraštinė sąlyga išlieka tos pačios. Todėl iš karto galime tarti, kad taškas x^0 yra koordinačių pradžioje, o ašis x_n nukreipta išorinės normalės kryptimi.

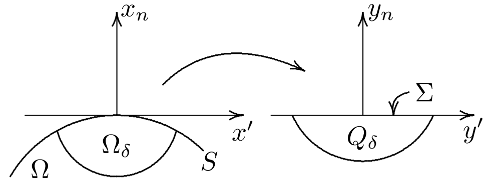
Pakankamai mažoje koordinačių pradžios taško aplinkoje paviršių S galima apibrėžti lygtimi

$$x_n = \varphi(x'), \quad x' = (x_1, \dots, x_{n-1}).$$

Kadangi S yra C^2 klasės paviršius, tai funkcija φ yra dukart diferencijuojama. Be to, galima nurodyti tokį skaičių $\delta > 0$ (nepriklausantį nuo taško $x^0 \in S$ pasirinkimo), kad keitinys

$$y_1 = x_1, \dots, y_{n-1} = x_{n-1}, y_n = x_n - \varphi(x')$$

abipusiškai vienareikšmiškai transformuotų sritį $\Omega_\delta = \Omega \cap B_\delta$ į sritį Q_δ. Paviršiaus $S \cap B_\delta$ vaizdą pažymėkime raide Σ (žr. 4.4 pav.).



4.4 pav.

Tiesiogiai galima įsitikinti, kad tokios transformacijos jakobianas lygus vienetui.

Tarkime, $\operatorname{supp}\eta\in\Omega_\delta$. Tada (4.82) tapatybėje Ω galima pakeisti sritimi Ω_δ. Funkcijos f, u ir η yra apibrėžtos srityje Ω_δ. Perėję nuo kintamųjų x prie kintamųjų y, gausime funkcijas (jas žymėsime tomis pačiomis raidėmis), apibrėžtas srityje Q_δ. Funkcijos u išvestinės

$$u_{x_i} = u_{y_i} - \varphi_{x_i} u_{y_n}, \quad i = 1, \dots, n \quad (\varphi_{x_n} = 0).$$

Analogiškai skaičiuojamos funkcijos η išvestinės. Perėję (4.82) tapatybėje prie naujų koordinačių, gausime

$$\int\limits_{Q_\delta} \sum_{i=1}^n u_{y_i}\eta_{y_i}\, dy = \int\limits_{Q_\delta} \Big(f\eta + \sum_{i=1}^n \eta_{y_i} g_i \Big)\, dy;$$

čia

$$g_i = u_{y_n}\varphi_{y_i}, \quad i = 1, \dots, n-1,$$
$$g_n = \sum_{i=1}^{n-1} u_{y_i}\varphi_{y_i} - u_{y_n} \sum_{i=1}^{n-1} \varphi_{y_i}^2.$$

Tegu $\eta = (D_k\, u_\rho \xi^2)_{\rho y_k}$, $k < n$, ξ – be galo diferencijuojama funkcija, lygi vienetui, kai $y\in Q_{\delta/2}$, ir lygi nuliui srities Q_h išorėje, $\delta/2 < h < \delta$. Tada pakankamai mažiems ρ paskutinę tapatybę galima perrašyti taip:

$$\int\limits_{Q_\delta} \sum_{i=1}^n u_{\rho y_i y_k} (D_k\, u_\rho \xi^2)_{y_i}\, dy + \int\limits_{Q_\delta} (D_k\, u_\rho \xi^2)_{y_k} f_\rho\, dy =$$

$$= \int\limits_{Q_\delta} \sum_{i=1}^n g_{i\rho y_k} (D_k\, u_\rho \xi^2)_{y_i}\, dy.$$

Iš šios tapatybės išplaukia įvertis

$$\int\limits_{Q_\delta} u_{\rho y y'}^2 \xi^2\, dy \le C \int\limits_{Q_\delta} (f_\rho^2 \xi^2 + u_{\rho y'}^2 \xi_y^2 + u_y^2)\, dy. \tag{4.83}$$

Norint tuo įsitikinti, pakanka pastebėti, kad integralus kairiojoje tapatybės pusėje galima įvertinti visiškai taip pat kaip šios teoremos įrodymo pirmame etape, o dešiniojoje tapatybės pusėje integralo modulis

$$\Big|\int\limits_{Q_\delta}\sum_{i=1}^{n} g_{i\rho y_k}(D_k\, u_\rho \xi^2)_{y_i}\, dy\Big| \leq$$

$$\leq (\varepsilon+\varepsilon_0)\int\limits_{Q_\delta} u^2_{\rho y y'}\xi^2\, dy + C_\varepsilon \int\limits_{Q_\delta}(u^2_{\rho y}\xi^2_y + u^2_y)\, dy;$$

čia $\varepsilon_0 = \max\limits_{y'\in\sigma}\big(\sum\limits_{i=1}^{n-1}\varphi^2(y')\big)^{1/2} \to 0$, kai $\delta\to 0$, $\varepsilon>0$ ir $C_\varepsilon\to\infty$, kai $\varepsilon\to 0$.

Įrodant šią nelygybę, reiškinį $g_{i\rho y_k}$ reikia išskaidyti į dvi dalis ir kiekvieną dalį įvertinti atskirai. Kai $i<n$,

$$g_{i\rho y_k}(y) = \varphi_{y_i}(y')u_{\rho y_k y_n} + \int \widetilde{\omega}_\rho(y'-z')\theta_{ik}(y',z')u_{y_n}(z',y_n)\, dz';$$

čia funkcija

$$\widetilde{\omega}_\rho(y') = -\frac{2}{n-1}C\rho^{-n-1}\omega'(|y'|^2/\rho^2)|y'|^2$$

tenkina tas pačias savybes (žr. 4.8 skyrelį) kaip ir funkcija $\omega_\rho(y')$, o funkcija

$$\theta_{ik}(y',z') = \frac{\varphi_{z_i}(z')-\varphi_{y_i}(y')}{|z'-y'|}\cdot\frac{z_k-y_k}{|z'-y'|}\cdot\frac{n-1}{2}$$

yra aprėžta. Kai $i=n$, reiškinys $g_{n\rho y_k}$ lygus n narių sumai. Kiekvienas iš jų išsiskaido į dvi dalis visiškai taip pat kaip atveju $i<n$.

Iš (4.83) nelygybės išplaukia, kad srityje $Q_{\delta/2}$ egzistuoja funkcijos u sumuojamos kvadratų antrosios eilės apibendrintos išvestinės (išskyrus $u_{y_n y_n}$). Remiantis 4.7 lemos išvada, pastarąją išvestinę galima rasti iš Puasono lygties. Naujose koordinatėse ši lygtis yra

$$\Delta_y u - 2\sum_{i=1}^{n-1} u_{y_i y_n}\varphi_{y_i} + u_{y_n y_n}\sum_{i=1}^{n-1}\varphi^2_{y_i} - u_{y_n}\sum_{i=1}^{n-1}\varphi_{y_i y_i} = -f(y).$$

Todėl

$$u_{y_n y_n} = \Big(2\sum_{i=1}^{n-1} u_{y_i y_n}\varphi_{y_i} - \sum_{i=1}^{n-1} u_{y_i y_i} + u_{y_n}\sum_{i=1}^{n-1}\varphi_{y_i y_i} - f\Big)\Big(1+\sum_{i=1}^{n-1}\varphi^2_{y_i}\Big)^{-1}.$$

Iš šios formulės išplaukia, kad $u_{y_n y_n}\in \mathrm{L}_2(Q_{\delta/2})$. Kartu galime tvirtinti, kad funkcija $u\in \mathrm{W}^2_2(Q_{\delta/2})$ ir teisinga nelygybė

$$\|u\|_{\mathrm{W}^2_2(Q_{\delta/2})} \leq C(\|f\|_{\mathrm{L}_2(Q_\delta)} + \|u\|_{\mathrm{W}^1_2(Q_\delta)}).$$

Sugrįžę prie senų kintamųjų $x_1,\dots,x_n$, gausime, kad funkcija $u\in \mathrm{W}_2^2(\Omega_{\delta/2})$ ir teisinga nelygybė

$$\|u\|_{\mathrm{W}_2^2(\Omega_{\delta/2})}\le C(\|f\|_{\mathrm{L}_2(\Omega_\delta)}+\|u\|_{\mathrm{W}_2^1(\Omega_\delta)}).$$

3. Paviršiuje S parinkime baigtinį skaičių tokių taškų $x^1,\dots,x^N$, kad rutuliai $B_{\delta/2}(x^i)$ dengtų visą juostą $\Omega\setminus\Omega'$; čia Ω' – griežtai vidinė sritis, o δ toks kaip antrame teoremos įrodymo etape. Tada

$$u\in \mathrm{W}_2^2(\Omega_{\delta/2}(x^i)),\quad \Omega_{\delta/2}(x^i)=\Omega\cap B_{\delta/2}(x^i),\quad \forall i=1,\dots,N,$$

ir teisingas įvertis

$$\|u\|_{\mathrm{W}_2^2(\Omega_{\delta/2}(x^i))}\le C(\|f\|_{\mathrm{L}_2(\Omega_\delta(x^i))}+\|u\|_{\mathrm{W}_2^1(\Omega_\delta(x^i))}).$$

Remdamiesi 4.7 lema, galime tvirtinti, kad $u\in \mathrm{W}_2^2(\Omega)$ ir

$$\|u\|_{\mathrm{W}_2^2(\Omega)}\le C(\|f\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)}+\|u\|_{\mathrm{W}_2^1(\Omega)}).$$

Beliko įrodyti tik (4.81) nelygybę. Kai $\eta=u$, iš (4.82) tapatybės gausime

$$\int\limits_\Omega u_x^2\,dx=\int\limits_\Omega fu\,dx.$$

Pagal Helderio nelygybę

$$\int\limits_\Omega fu\,dx\le\|f\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)}\|u\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)}.$$

Todėl

$$\|u_x\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)}\le\|f\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)}\|u\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)}.$$

Remiantis Frydrichso nelygybe,

$$\|u\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)}\le d\|u_x\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)},\quad d=\operatorname{diam}\Omega.$$

Iš šių nelygybių išplaukia, kad

$$\|u\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)}\le d^2\|f\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)},$$

$$\|u_x\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)}\le d\|f\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)}.$$

Todėl

$$\|u\|_{\mathrm{W}_2^1(\Omega)}\le C\|f\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)}.$$

Kartu galime tvirtinti, kad yra teisinga (4.81) nelygybė. ▷

Tarkime, u yra apibendrintas lygties $-\Delta u=f$ sprendinys srityje Ω ir egzistuoja tokia funkcija $\varphi\in \mathrm{W}_2^2(\Omega)$, kad $u-\varphi\in \mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)$. Tada $v=u-\varphi$ yra apibendrintas Dirichlė uždavinio

$$-\Delta v=f(x)+\Delta\varphi(x),\quad x\in\Omega;\quad v\big|_S=0$$

sprendinys. Kadangi $f+\Delta\varphi\in \mathrm{L}_2(\Omega)$, tai pagal 4.14 teoremą $v\in \mathrm{W}_2^2(\Omega)$ ir yra teisingas įvertis

$$\|v\|_{\mathrm{W}_2^2(\Omega)}\leq C\|g\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)}, \quad g = f + \Delta\varphi.$$

Kartu galime tvirtinti, kad $u\in \mathrm{W}_2^2(\Omega)$ ir

$$\|u\|_{\mathrm{W}_2^2(\Omega)}\leq C(\|f\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)} + \|\varphi\|_{\mathrm{W}_2^2(\Omega)}).$$

Jeigu u yra apibendrintas (4.80) uždavinio sprendinys, $S\in \mathrm{C}^3$ ir $f\in \mathrm{W}_2^1(\Omega)$, tai imdami 4.14 teoremos įrodyme

$$\eta = D^{\alpha'}(D^{\alpha'} u_\rho\xi^2)_\rho, \quad \alpha' = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, 0), \quad |\alpha'| = 2,$$

gausime, kad funkcijos u trečiosios eilės išvestinės

$$D^{\alpha'} D_i u\in \mathrm{L}_2(\Omega), \quad \forall i = 1, \dots, n,$$

ir teisingas įvertis

$$\| D^{\alpha'} D_i u\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)}\leq C\|f_x\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)}.$$

Likusias išvestines galima rasti iš lygčių

$$- D_i \Delta u = D_i f, \quad i = 1, \dots, n.$$

Taip samprotaudami toliau gausime, kad apibendrinto sprendinio glodumas padidėja lygiai tiek kiek paviršiaus S bei funkcijų f ir φ glodumas. Tiksliau, teisinga tokia teorema.

4.15 teorema. *Tarkime, u yra apibendrintasis lygties $-\Delta u = f$ sprendinys srityje Ω, $S\in \mathrm{C}^{k+2}$, $f\in \mathrm{W}_2^k(\Omega)$ ir egzistuoja tokia funkcija $\varphi\in \mathrm{W}_2^{k+2}(\Omega)$, kad $u - \varphi\in \mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)$. Tada $u\in \mathrm{W}_2^{k+2}(\Omega)$ ir teisingas įvertis*

$$\|u\|_{\mathrm{W}_2^{k+2}(\Omega)}\leq C(\|f\|_{\mathrm{W}_2^k(\Omega)} + \|\varphi\|_{\mathrm{W}_2^{k+2}(\Omega)}). \tag{4.84}$$

Iš 4.13 ir 4.15 teoremų išplaukia bendresnis teiginys.

4.16 teorema. *Tarkime, u yra apibendrintasis lygties $A u = f$ sprendinys srityje Ω. Tada:*

1. *Jeigu $S\in \mathrm{C}^2$, funkcija $f\in \mathrm{L}_2(\Omega)$, operatoriaus A koeficientai $a_{ij}\in \mathrm{C}^{0,1}(\overline{\Omega})$, a_i, $a\in \mathrm{L}_\infty(\Omega)$, $\forall i, j = 1, \dots, n$, ir egzistuoja tokia funkcija $\varphi\in \mathrm{W}_2^2(\Omega)$, kad $u - \varphi\in \mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)$, tai $u\in \mathrm{W}_2^2(\Omega)$ ir teisingas įvertis*

$$\|u\|_{\mathrm{W}_2^2(\Omega)}\leq C(\|u\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)} + \|f\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)} + \|\varphi\|_{\mathrm{W}_2^2(\Omega)}). \tag{4.85}$$

2. *Jeigu $S\in \mathrm{C}^{k+2}$, $f\in \mathrm{W}_2^k(\Omega)$, $k\geq 1$, operatoriaus A koeficientai $a_{ij}\in \mathrm{C}^{k,1}(\overline{\Omega})$, $a_i, a\in \mathrm{C}^{k-1,1}(\overline{\Omega})$, $\forall i, j = 1, \dots, n$, ir egzistuoja tokia funkcija $\varphi\in \mathrm{W}_2^{k+2}(\Omega)$, kad $u - \varphi\in \mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)$. Tada $u\in \mathrm{W}_2^{k+2}(\Omega)$ ir teisingas įvertis*

$$\|u\|_{\mathrm{W}_2^{k+2}(\Omega)}\leq C(\|u\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)} + \|f\|_{\mathrm{W}_2^k(\Omega)} + \|\varphi\|_{\mathrm{W}_2^{k+2}(\Omega)}). \tag{4.86}$$

I š v a d o s:

1. Jeigu operatoriaus A koeficientai bei f ir φ yra be galo diferencijuojamos uždaroje srityje $\overline{\Omega}$ funkcijos ir $S \in \mathrm{C}^\infty$, tai $u \in \mathrm{C}^\infty(\overline{\Omega})$.

2. Tarkime, paviršius S ir operatoriaus A koeficientai tenkina 4.16 teoremos pirmojo teiginio sąlygas. Tada Dirichlė uždavinio tikrinės funkcijos

$$v_k \in \mathrm{W}_2^2(\Omega) \cap \mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega).$$

P a s t a b a. Tarkime, $k = 0$ ir operatorius

$$A\, u = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) u_{x_i} + a(x) u.$$

Tada 4.16 teorema išlieka teisinga, jeigu koeficientai a_{ij} yra tik tolydūs. Be to, jeigu $n = 2$, tai teorema išlieka teisinga ir tuo atveju, kai koeficientai a_{ij} yra tik aprėžti (žr. [28]).

4.10. DIFRAKCIJOS UŽDAVINIAI

Įvairius elektromagnetinius, akustinius ir kitokius procesus (stacionarius arba nestacionarius) nehomogeninėje aplinkoje[9] aprašo kraštiniai uždaviniai su trūkiais koeficientais. Tokie uždaviniai vadinami difrakcijos uždaviniais. Formuluojant juos papildomai reikalaujama, kad koeficientų trūkio taškuose būtų patenkintos vadinamosios *suderinamumo sąlygos*. Šios sąlygos nusako aplinkos tolydumą ir ją veikiančių jėgų pusiausvyrą.

Klasikinėje teorijoje difrakcijos uždaviniai iš esmės skiriasi nuo įprastų kraštinių uždavinių. Netgi paprasčiausiais atvejais, kai koeficientai yra dalimis pastovūs, jų tyrimas yra daug sudėtingesnis. Tačiau apibendrintų sprendinių teorijos požiūriu difrakcijos uždavinius galima nagrinėti kaip įprastų kraštinių uždavinių atskirą atvejį.

Iš pradžių išnagrinėsime vieną pavyzdį. Tarkime, glodus $(n-1)$-matis paviršius Γ dalija sritį Ω į dvi dalis Ω_1, Ω_2,

$$a(x) = \begin{cases} c_1, & x\in\Omega_1, \\ c_2, & x\in\Omega_2, \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x\in\Omega_1, \\ f_2(x), & x\in\Omega_2; \end{cases}$$

čia: c_1, c_2 – teigiamos konstantos, f_1, f_2 – žinomos funkcijos. Reikia rasti funkciją u, kuri srityse Ω_1 ir Ω_2 tenkintų lygtį

$$-a\Delta u = f(x), \tag{4.87}$$

paviršiaus S taškuose kraštinę sąlygą

$$u|_S = 0 \tag{4.88}$$

ir paviršiaus Γ taškuose suderinamumo sąlygas

$$[u]_\Gamma = 0, \quad \Big[a\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\Big]_\Gamma = 0. \tag{4.89}$$

Pirmoji iš (4.89) sąlygų reiškia, kad funkcija u yra tolydi paviršiaus Γ aplinkoje, o antroji – kad jos normalinė išvestinė $\partial u/\partial \mathbf{n}$ turi trūkį.

Tarkime, u yra klasikinis (4.87)–(4.89) uždavinio sprendinys. Tada su kiekviena funkcija $\eta\in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$ yra teisinga integralinė tapatybė

$$-\int\limits_\Omega a\Delta u\eta\, dx = \int\limits_\Omega f\eta\, dx. \tag{4.90}$$

Pritaikę integravimo dalimis formulę, perrašysime šią tapatybę taip:

$$\int\limits_\Omega a\sum_{i=1}^n u_{x_i}\eta_{x_i}\, dx - \int\limits_\Gamma \Big[a\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\Big]\eta\, d\Gamma = \int\limits_\Omega f\eta\, dx.$$

[9] Dažniausiai nagrinėjama aplinka yra dviejų arba kelių homogeninių aplinkų suma.

Pagal prielaidą $\left[a\partial u/\partial \mathbf{n}\right]_\Gamma = 0$. Todėl paviršinis integralas lygus nuliui ir

$$\int\limits_\Omega a\sum_{i=1}^n u_{x_i}\eta_{x_i}\,dx = \int\limits_\Omega f\eta\,dx. \tag{4.91}$$

Kadangi aibė $\mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$ yra tiršta erdvėje $\mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)$, tai pastaroji tapatybė išlieka teisinga $\forall\eta\in\mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)$. Be to, į ją įeinantis integralai konverguoja, kai $u\in\mathrm{W}_2^1(\Omega)$, $f\in\mathrm{L}_2(\Omega)$. Todėl natūralus toks apibrėžimas.

A p i b r ė ž i m a s. Sakysime, funkcija $u\in\mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)$ yra (4.87)–(4.89) uždavinio *apibendrintasis sprendinys,* jeigu $\forall\eta\in\mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)$ ji tenkina (4.91) integralinę tapatybę.

Pagal šį apibrėžimą klasikinis (4.87)–(4.89) uždavinio sprendinys yra ir jo apibendrintas sprendinys. Įrodysime atvirkštinį teiginį. Tegu $u\in\mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)$ yra (4.87)–(4.89) uždavinio apibendrintas sprendinys ir pakankamai glodi (pavyzdžiui, $u\in\mathrm{C}^2(\overline{\Omega}_i)$, $i = 1,2$). Tada nuo (4.91) tapatybės grįžę prie (4.90), gausime, kad funkcija u tenkina (4.87) lygtį bei antąją iš (4.89) sąlygų. Likusios dvi sąlygos taip pat bus patenkintos, nes $u\in\mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)$ ir yra pakankamai glodi.

Akivaizdu, kad (4.87)–(4.89) uždavinio apibendrintas sprendinys yra vienintelis. Jeigu egzistuotų du apibendrinti sprendiniai u_1 ir u_2, tai jų skirtumas $u = u_1 - u_2$ tenkintų integralinę tapatybę

$$\int\limits_\Omega a\sum_{i=1}^n u_{x_i}\eta_{x_i}\,dx = 0.$$

Kai $\eta = u$, iš šios tapatybės gausime $u = 0$. Apibendrinto sprendinio egzistavimas įrodomas visiškai taip pat kaip 4.4 skyrelyje. Tik energinę skaliarinę sandaugą reikia apibrėžti taip:

$$[u,v] = \int\limits_\Omega a\sum_{i=1}^n u_{x_i}v_{x_i}\,dx.$$

Taigi beliko ištirti tik apibendrinto sprendinio glodumą. Remiantis bendra teorija (žr. 4.8 skyrelį), elipsinių lygčių apibendrintų sprendinių glodumas yra lokali savybė. Tiksliau, jeigu kokioje nors srities Ω dalyje žinomos funkcijos turi tam tikrą glodumą, tai toje srities dalyje atitinkamą glodumą turi ir apibendrintas sprendinys. Taigi atskirai reikia ištirti tik apibendrinto sprendinio glodumą paviršiaus Γ aplinkoje. Jeigu paviršiai S ir Γ nesikerta, tai pastarasis uždavinys iš esmės yra toks pat kaip apibendrinto sprendinio glodumo tyrimas paviršiaus S aplinkoje. Tuo atveju, kai paviršiai S ir Γ turi bendrų taškų, tai jų aplinkoje reikia papildomo tyrimo.

Visiškai taip pat nagrinėjamas bendresnis difrakcijos uždavinys: rasti funkciją u, kuri srityje Ω tenkintų lygtį

$$A\,u = f, \tag{4.92}$$

paviršiuje S kraštinę sąlygą

$$u|_S = 0 \tag{4.93}$$

ir paviršiuje Γ suderinamumo sąlygas

$$[u]_\Gamma = 0, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial N}\right]_\Gamma = 0; \tag{4.94}$$

čia

$$A\,u = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}(x)u_{x_j}\Big) + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)u_{x_i} + a(x)u,$$

$$\frac{\partial u}{\partial N} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_j}\cos(\mathbf{n}, x_i),$$

o operatoriaus A koeficientai bei funkcija f tenkina 4.3 skyrelio sąlygas.

A p i b r ė ž i m a s. Sakysime, funkcija $u\in \overset{\circ}{\mathrm{W}}{}_2^1(\Omega)$ yra (4.92)–(4.94) uždavinio *apibendrintasis sprendinys,* jeigu $\forall\eta\in \overset{\circ}{\mathrm{W}}{}_2^1(\Omega)$ teisinga integralinė tapatybė

$$\int\limits_{\Omega}\Big(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_{x_i}\eta_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i}\eta + au\eta\Big)\,dx = \int\limits_{\Omega} f\eta\,dx. \tag{4.95}$$

P a s t a b a. Atkreipsime dėmesį, kad į (4.95) tapatybę ,,sutalpinta“ ne tik (4.92) lygtis, bet ir antroji iš (4.94) sąlygų. Likusios dvi sąlygos ,,patalpintos“ į reikalavimą, kad $u\in \overset{\circ}{\mathrm{W}}{}_2^1(\Omega)$.

Iš šio apibrėžimo matome, kad funkcija $u\in \overset{\circ}{\mathrm{W}}{}_2^1(\Omega)$ yra apibendrintas (4.92)–(4.94) uždavinio sprendinys tada ir tik tada, kai ji yra Dirichlė uždavinio

$$A\,u = f(x), \quad x\in\Omega; \quad u|_S = 0 \tag{4.96}$$

apibendrintas sprendinys. Todėl (žr. 4.3, 4.4 skyrelius) (4.92)–(4.94) uždavinio apibendrintas sprendinys egzistuoja ir yra vienintelis. Jeigu kiekvienoje iš sričių Ω_1, Ω_2 koeficientai a_{ij} turi apibendrintas išvestines $a_{ijx_k}\in \mathrm{L}_\infty(\Omega)$, tai apibendrintas sprendinys $u\in \mathrm{W}_2^2(\Omega_i')$, $\forall\overline{\Omega_i'} \subset \Omega_i$, $i = 1,2$. Be to, jeigu paviršiai S ir $\Gamma\in \mathrm{C}^2$ ir neturi bendrų taškų[10], tai $u\in \mathrm{W}_2^2(\Omega_i)$, $i = 1,2$. Kartu galime tvirtinti, kad ne tik u, bet ir jos pirmosios eilės išvestinės u_{x_i} turi pėdsakus paviršiuje Γ ir jie yra erdvės $\mathrm{L}_2(\Gamma)$ elementai. Funkcijos u pėdsakas paviršiuje Γ srities Ω_1 atžvilgiu (kaip erdvės $\mathrm{L}_2(\Gamma)$ elementas) sutampa su jos pėdsaku srities Ω_2 atžvilgiu. Funkcijų u_{x_i} pėdsakai paviršiuje Γ turi trūkį. Tačiau konormalinės išvestinės $\partial u/\partial N$ pėdsakai sričių Ω_1 ir Ω_2 atžvilgiu paviršiuje Γ sutampa. Tai išplaukia iš (4.95) integralinės tapatybės. Be to, kiekvienoje srityje Ω_i, $i = 1,2$, funkcija u tenkina (4.96) lygtį.

Analogiškai nagrinėjamas difrakcijos uždavinys su antrąja arba trečiąja kraštine sąlyga. Be to, gali būti bendresnės ir suderinamumo sąlygos. Pavyzdžiui, galima ieškoti (4.92) lygties sprendinio, tenkinančio trečiąją kraštinę sąlygą

$$\Big(\frac{\partial u}{\partial N} + \sigma u\Big)\Big|_S = \varphi \tag{4.97}$$

ir suderinamumo sąlygas

$$[u]_\Gamma = 0, \quad \Big[\frac{\partial u}{\partial N} + \sigma u\Big]_\Gamma = 0; \tag{4.98}$$

čia σ yra aprėžta žinoma funkcija[11].

[10] Jeigu paviršiai S ir Γ turi bendrų taškų, tai jų aplinkoje reikia papildomo tyrimo.

[11] Raide σ žymėsime dvi skirtingas funkcijas. Viena iš jų yra apibrėžta paviršiuje S, o kita paviršiuje Γ.

A p i b r ė ž i m a s. Sakysime, funkcija $u \in \mathrm{W}_2^1(\Omega)$ yra (4.92), (4.97), (4.98) uždavinio *apibendrintasis sprendinys,* jeigu $\forall \eta \in \mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)$ teisinga integralinė tapatybė

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i} \eta_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i} \eta + au\eta \, dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega} f\eta \, dx + \int\limits_{S} (\varphi - \sigma u)\eta \, dS + \int\limits_{\Gamma} [\sigma] u\eta \, d\Gamma.$$

Jeigu paviršius Γ turi tą patį glodumą kaip ir paviršius S (žr. 4.7 skyrelį), tai pastaroji integralinė tapatybė iš esmės nieko nesiskiria nuo (4.66) integralinės tapatybės. Todėl (4.92), (4.97), (4.98) uždavinio apibendrinto sprendinio egzistavimas ir vienatis įrodoma visiškai taip pat kaip trečiojo kraštinio uždavinio.

P a s t a b a. Analogiškai nagrinėjami nestacionarūs difrakcijos uždaviniai parabolinėms ir hiperbolinėms lygtims. Į tokius uždavinius taip pat galima žiūrėti kaip į įprastus kraštinius uždavinius su trūkiais koeficientais (žr. 5 ir 6 skyrius).

4.11. STIPRIAI ELIPSINĖS SISTEMOS

Tegu Ω yra aprėžta erdvėje $\mathbb{R}^n$ sritis, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ – multiindeksai,

$$A\,\mathbf{u} = \sum_{|\alpha|,\,|\beta| \le k} (-1)^{|\alpha|}\, D^\alpha \Big(A_{\alpha\beta}(x)\, D^\beta\, \mathbf{u} \Big);$$

čia $\mathbf{u} = \operatorname{colon}(u_1, \dots, u_N)$, $A_{\alpha\beta}$ – kvadratinės N-osios eilės matricos su aprėžtais mačiais srityje Ω elementais. Be to, tegu $A_{\alpha\beta} = A_{\beta\alpha}$, kai $|\alpha| = |\beta| = k$.

Sudarykime matricą

$$A(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=|\beta|=k} A_{\alpha\beta}(x)\xi^{\alpha+\beta}, \quad \xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \xi_n^{\alpha_n}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

A p i b r ė ž i m a s. Sakysime, operatorius A taške $x \in \Omega$ yra *stipriai elipsinis*, jeigu $\forall \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \ne 0$ ir $\forall \zeta = \operatorname{colon}(\zeta_1, \dots, \zeta_N) \ne 0$ yra teisinga nelygybė

$$(A(x,\xi)\zeta, \zeta) > 0. \tag{4.99}$$

Jeigu pastaroji nelygybė yra teisinga kiekviename srities Ω taške, tai sakysime, kad operatorius A stipriai elipsinis srityje Ω.

Atkreipsime dėmesį į tai, kad (4.99) sąlyga yra susijusi tik su matricų $A_{\alpha\beta}$ simetrine dalimi. Iš tikrųjų tegu

$$\hat{A}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\big(A_{\alpha\beta} + A^*_{\alpha\beta}\big) \quad \text{ir} \quad \check{A}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\big(A_{\alpha\beta} - A^*_{\alpha\beta}\big)$$

yra atitinkamai simetrinė ir antisimetrinė matricos $A_{\alpha\beta}$ dalys. Tada tiesiogiai galima įsitikinti, kad

$$(A(x,\xi)\zeta, \zeta) = (\hat{A}(x,\xi)\zeta, \zeta).$$

Jeigu operatorius A yra stipriai elipsinis ir matricų $A_{\alpha\beta}$ elementai, kai $|\alpha| = |\beta| = k$, yra pastovūs, tai operatorius A yra *griežtai elipsinis*, t.y. egzistuoja tokia teigiama konstanta $\nu > 0$, kad

$$\int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=|\beta|=k} A_{\alpha\beta}\, D^\alpha\, \mathbf{u}\, D^\beta\, \mathbf{u}\, dx \ge \nu \int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=k} \Big(D^\alpha\, \mathbf{u} \Big)^2 dx.$$

Bendru atveju tokia nelygybė yra neteisinga (žr. 4.6 skyrelį). Tačiau jeigu minėtų matricų elementai yra tolydžios uždaroje srityje $\overline{\Omega}$ funkcijos, tai teisinga (žr. [5]) Gordingo nelygybė. Tiksliau, egzistuoja tokios teigiamos konstantos ν ir μ, kad

$$\int\limits_\Omega \Big(\sum_{|\alpha|=|\beta|=k} A_{\alpha\beta}\, D^\alpha\, \mathbf{u}\, D^\beta\, \mathbf{u} + \mu \mathbf{u}^2 \Big)\, dx \ge \nu \int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=k} |\, D^\alpha\, \mathbf{u}|^2\, dx. \tag{4.100}$$

Nagrinėsime Dirichlė uždavinį: rasti vektorinę funkciją $\mathbf{u}$, srityje Ω tenkinančią lygčių sistemą

$$A\,\mathbf{u} = \mathbf{f} \tag{4.101}$$

ir paviršiaus S taškuose homogenines kraštines sąlygas

$$\mathbf{u}\Big|_S = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}}\Big|_S = \cdots = \frac{\partial^{k-1} \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}^{k-1}}\Big|_S = 0; \tag{4.102}$$

čia: $\mathbf{f} = \mathrm{colon}(f_1, \dots, f_N),\ f_i \in \mathrm{L}_2(\Omega)$ – žinomos funkcijos, $S = \partial\Omega$ – dalimis glodus paviršius, $\mathbf{n}$ – vienetinis paviršiaus S išorinės normalės vektorius.

Tegu A yra stipriai elipsinis operatorius. Bendru atveju (4.101), (4.102) uždavinys neturi klasikinio (glodaus) sprendinio. Todėl šį uždavinį reikia ,,patalpinti" į integralinę tapatybę ir apibrėžti apibendrinto sprendinio sąvoką.

A p i b r ė ž i m a s. Sakysime, $\mathbf{u} \in \mathrm{W}_2^k(\Omega)$ yra (4.101), (4.102) uždavinio *apibendrintasis sprendinys* srityje Ω, jeigu $\mathbf{u} \in \overset{\circ}{\mathrm{W}}{}_2^k(\Omega)$ ir $\forall \boldsymbol{\eta} \in \overset{\circ}{\mathrm{W}}{}_2^k(\Omega)$ teisinga integralinė tapatybė

$$\int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|,\,|\beta| \le k} A_{\alpha\beta}(x)\, D^\alpha \mathbf{u}\, D^\beta \boldsymbol{\eta}\, dx = \int\limits_\Omega \mathbf{f}\boldsymbol{\eta}\, dx. \tag{4.103}$$

4.17 teorema. *Tarkime, matricos $A_{\alpha\beta}$ tenkina (4.100) nelygybę su tam tikromis teigiamomis konstantomis ν ir μ. Be to, tegu koeficientų matrica A_{00} prie ieškomos funkcijos $\mathbf{u}$ tenkina sąlygą*

$$(A_{00}\, \mathbf{u}, \mathbf{u}) \ge C(\mathbf{u}, \mathbf{u}); \tag{4.104}$$

čia C – pakankamai didelė teigiama konstanta (žr. teoremos įrodymą). Tada (4.101), (4.102) uždavinys negali turėti dviejų skirtingų apibendrintų sprendinių.

◃ Tarkime, $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$ yra du skirtingi (4.101), (4.102) uždavinio apibendrinti sprendiniai. Tada jų skirtumas $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ tenkina integralinę tapatybę

$$\int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|,\,|\beta| \le k} A_{\alpha\beta}\, D^\alpha \mathbf{u}\, D^\beta \boldsymbol{\eta}\, dx = 0.$$

Imkime šioje tapatybėje $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{u}$ ir gautą lygybę perrašykime taip:

$$\int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=|\beta|=k} A_{\alpha\beta}\, D^\alpha \mathbf{u}\, D^\beta \mathbf{u}\, dx + \int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|+|\beta|<2k} A_{\alpha\beta}\, D^\alpha \mathbf{u}\, D^\beta \mathbf{u}\, dx = 0.$$

Pagal teoremos sąlygą

$$\int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=|\beta|=k} A_{\alpha\beta}\, D^\alpha \mathbf{u}\, D^\beta \mathbf{u}\, dx \ge \nu \int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=k} \Big(D^\alpha \mathbf{u}\Big)^2 dx - \mu \int\limits_\Omega \mathbf{u}^2\, dx,$$

$$\int\limits_\Omega A_{00}\, \mathbf{u}\mathbf{u}\, dx \ge C \int\limits_\Omega \mathbf{u}^2\, dx.$$

Likusius narius galima įvertinti taip:

$$\Big|\int\limits_\Omega \sum_{0<|\alpha|+|\beta|<2k} A_{\alpha\beta}\, D^\alpha \mathbf{u}\, D^\beta \mathbf{u}\, dx\Big| \le \frac{\nu}{2} \int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=k} \Big(D^\alpha \mathbf{u}\Big)^2 dx + C_\nu \int\limits_\Omega \mathbf{u}^2\, dx;$$

čia C_ν – teigiama konstanta (išvedant šią nelygybę reikia pasinaudoti 3.19 teorema). Kartu galime tvirtinti, kad yra teisinga tokia nelygybė:

$$\frac{\nu}{2}\int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=k}\Big(D^\alpha\,\mathbf{u}\Big)^2\,dx+\int\limits_\Omega (C-\mu-C_\nu)\mathbf{u}^2\,dx\leq 0.$$

Tarkime, konstanta $C>\mu+C_\nu$. Tada pastaroji nelygybė yra teisinga tik tuo atveju, kai $\mathbf{u}(x)=0$ b.v. $x\in\Omega$, t.y. kai $\mathbf{u}_1=\mathbf{u}_2$. $\triangleright$

Aibėje $\mathring{\mathrm{W}}_2^{\mathrm{k}}(\Omega)$ apibrėžkime kitą skaliarinę sandaugą

$$[\mathbf{u},\boldsymbol{\eta}]=\int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=|\beta|=k}\hat{A}_{\alpha\beta}\,D^\alpha\,\mathbf{u}\,D^\beta\,\boldsymbol{\eta}\,dx+\mu\int\limits_\Omega \mathbf{u}\boldsymbol{\eta}\,dx$$

ir ją atitinkančią normą

$$\|\mathbf{u}\|=\sqrt{[\mathbf{u},\mathbf{u}]}.$$

Aibė $\mathring{\mathrm{W}}_2^{\mathrm{k}}(\Omega)$ su taip apibrėžta skaliarine sandauga yra Hilberto erdvė. Ją toliau žymėsime raide H_A. Elementams $\mathbf{u}\in\mathring{\mathrm{W}}_2^{\mathrm{k}}(\Omega)$ normos $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_{\mathring{\mathrm{W}}_2^{\mathrm{k}}(\Omega)}$ yra ekvivalenčios (patikrinkite). Todėl erdvė $\mathring{\mathrm{W}}_2^{\mathrm{k}}(\Omega)$ sutampa su erdve H_A. Pasinaudoję skaliarinės sandaugos apibrėžimu, (4.103) tapatybę perrašykime taip:

$$[\mathbf{u},\boldsymbol{\eta}]+\int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=|\beta|=k}\check{A}_{\alpha\beta}(x)\,D^\alpha\,\mathbf{u}\,D^\beta\,\boldsymbol{\eta}\,dx+ \tag{4.105}$$

$$+\int\limits_\Omega\Big(\sum_{|\alpha|+|\beta|<2k}A_{\alpha\beta}\,D^\alpha\,\mathbf{u}\,D^\beta\,\boldsymbol{\eta}-\mu\mathbf{u}\boldsymbol{\eta}\Big)\,dx=\int\limits_\Omega \mathbf{f}\boldsymbol{\eta}\,dx.$$

Integralai kairiojoje ir dešiniojoje šios tapatybės pusėje yra tiesiniai aprėžti funkcionalai erdvėje H_A. Pagal Ryso teoremą juos galima išreikšti skaliarine sandauga. Tiksliau, egzistuoja elementai $K\,\mathbf{u}$, $B\,\mathbf{u}$ ir $\mathbf{F}\in\mathrm{H}_A$ tokie, kad

$$\begin{aligned}
[K\,\mathbf{u},\boldsymbol{\eta}] &= \int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=|\beta|=k}\check{A}_{\alpha\beta}(x)\,D^\alpha\,\mathbf{u}\,D^\beta\,\boldsymbol{\eta}\,dx,\\
[B\,\mathbf{u},\boldsymbol{\eta}] &= \int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|+|\beta|<2k}\Big(A_{\alpha\beta}\,D^\alpha\,\mathbf{u}\,D^\beta\,\boldsymbol{\eta}-\mu\mathbf{u}\boldsymbol{\eta}\Big)\,dx,\\
[\mathbf{F},\boldsymbol{\eta}] &= \int\limits_\Omega \mathbf{f}\boldsymbol{\eta}\,dx,\quad \forall\boldsymbol{\eta}\in\mathrm{H}_A.
\end{aligned}$$

Taigi (4.105) integralinę tapatybę galima perrašyti taip:

$$[\mathbf{u},\boldsymbol{\eta}]+[K\,\mathbf{u},\boldsymbol{\eta}]+[B\,\mathbf{u},\boldsymbol{\eta}]=[\mathbf{F},\boldsymbol{\eta}],\quad \forall\boldsymbol{\eta}\in\mathrm{H}_A.$$

Kartu galime tvirtinti, kad $\mathbf{u}\in\mathring{\mathrm{W}}_2^{\mathrm{k}}(\Omega)$ yra (4.101), (4.102) Dirichlė uždavinio apibendrintas sprendnys tada ir tik tada, kai $\mathbf{u}$ yra operatorinės lygties

$$\mathbf{u}+K\,\mathbf{u}+B\,\mathbf{u}=\mathbf{F} \tag{4.106}$$

sprendinys erdvėje H_A. Visiškai taip pat kaip 4.6 skyrelyje galima įrodyti, kad erdvėje H_A operatorius K yra aprėžtas, o operatorius B – visiškai tolydus. Be to, operatorius K yra antisimetrinis. Iš tikrųjų

$$[K\,\mathbf{u},\boldsymbol{\eta}] = [\mathbf{u}, K^*\,\boldsymbol{\eta}] = -[\mathbf{u}, K\,\boldsymbol{\eta}] = -[K\,\boldsymbol{\eta},\mathbf{u}].$$

Kiekvieno antisimetrinio operatoriaus spektras yra menamoje ašyje. Todėl operatorius $(I+K)$ turi atvirkštinį. Lengvai galima įrodyti (žr. 4.4 skyrelį), kad operatorius

$$(I+K)^{-1} : \mathrm{H}_A \to \mathrm{H}_A$$

yra aprėžtas. Taigi (4.106) lygtį galima perrašyti taip:

$$\mathbf{u} + (I+K)^{-1}\,B\,\mathbf{u} = (I+K)^{-1}\mathbf{F}. \tag{4.107}$$

Šioje lygtyje operatorius $(I+K)^{-1}\,B : \mathrm{H}_A \to \mathrm{H}_A$, kaip aprėžto ir visiškai tolydaus operatorių sandauga, yra visiškai tolydus. Taigi (4.107) lygtis yra Fredholmo tipo lygtis ir jai yra teisingos Fredholmo teoremos (žr. 1.3 skyrelį). Atskiru atveju galime tvirtinti, kad (4.107) lygtis turi vienintelį sprendinį su kiekviena funkcija $(I+K)^{-1}\mathbf{F}\in \mathrm{H}_A$, jeigu homogeninė lygtis

$$\mathbf{u} + (I+K)^{-1}\,B\,\mathbf{u} = 0$$

turi tik trivialų sprendinį. Kadangi (4.107) lygtis yra ekvivalenti (4.103) tapatybei, tai teisinga tokia teorema.

4.18 teorema. *Tarkime, 4.17 teoremos sąlygos patenkintos. Tada kiekvienai funkcijai* $\mathbf{f}$, $f_i\in \mathrm{L}_2(\Omega)$, $i=1,\dots,n$, *egzistuoja vienintelis* (4.102), (4.103) *Dirichlė uždavinio apibendrintasis sprendinys.*

P a s t a b o s:

1. Norint išsamiai ištirti (4.102), (4.103) uždavinį, reikia (4.102) lygties dešinėje pridėti narį $\lambda\mathbf{u}$ su kompleksiniu parametru λ ir gautą uždavinį nagrinėti kompleksinėje erdvėje $\mathrm{W}_2^{\mathrm{k}}(\Omega)$.

2. Kitų kraštinių sąlygų atveju apibendrinto sprendinio egzistavimą ir vienatį erdvėje $\mathrm{W}_2^{\mathrm{k}}(\Omega)$ galima įrodyti taip pat, jeigu tik šias sąlygas galima ,,patalpinti" į integralinę tapatybę, t.y. jeigu apibendrintas sprendinys yra apibrėžiamas kaip funkcija $\mathbf{u}\in \mathrm{W}_2^{\mathrm{k}}(\Omega)$, tenkinanti integralinę tapatybę

$$\int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|,\,|\beta|\le k} A_{\alpha\beta}(x)\,D^\alpha\,\mathbf{u}\,D^\beta\,\boldsymbol{\eta}\,dx +$$

$$+\int\limits_S \sum_{|\alpha|,\,|\beta|\le k-1} \tilde{A}_{\alpha\beta}(x)\,D^\alpha\,\mathbf{u}\,D^\beta\,\boldsymbol{\eta}\,dS = \int\limits_\Omega \mathbf{f}\boldsymbol{\eta}\,dx;$$

čia $\boldsymbol{\eta}$ priklauso kokiam nors erdvės $\mathrm{W}_2^{\mathrm{k}}(\Omega)$ poerdviui, o matricų $\tilde{A}_{\alpha\beta}$ elementai yra aprėžtos paviršiuje S funkcijos.

4.12. ŠAUDERIO TEORIJA

Šiame skyrelyje nagrinėsime Dirichlė uždavinį:

$$A\,u = f(x), \quad x \in \Omega; \tag{4.108}$$

$$u|_S = \varphi(x), \quad x \in S; \tag{4.109}$$

čia: Ω – aprėžta erdvėje $\mathbb{R}^n$ sritis, $S = \partial\Omega$,

$$A\,u = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) u_{x_i} + a(x)u.$$

Tarkime, operatorius A yra *griežtai elipsinis* uždaroje srityje $\overline{\Omega}$, t.y. egzistuoja tokia teigiama konstanta ν, kad

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \nu\xi^2, \quad \forall x \in \overline{\Omega}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Be to, tegu operatoriaus A koeficientai $a_{ij} = a_{ji}$, a_i ir $a \in \mathrm{C}^{\mathrm{k}-2+\alpha}(\overline{\Omega})$, funkcija $f \in \mathrm{C}^{\mathrm{k}-2+\alpha}(\overline{\Omega})$, $\varphi \in \mathrm{C}^{\mathrm{k}+\alpha}(S)$, $S \in \mathrm{C}^{\mathrm{k}+\alpha}$, $k \geq 2$ – sveikasis skaičius, $\alpha \in (0,1)$.

Lygtys $A\,u = f$, kurių koeficientai tenkina Helderio sąlygą su rodikliu α, yra ,,artimos" lygtims su pastoviais koeficientais. Remdamasis šia idėja, J. Šauderis sukūrė bendrąją teoriją. Jos pagrindinį rezultatą galima suformuluoti taip:

4.19 teorema. (Šauderio) *Tarkime, operatoriaus A koeficientai a_{ij}, a_i ir a bei paviršius S tenkina ką tik suformuluotas sąlygas. Be to, tegu homogeninis Dirichlė uždavinys*

$$A\,u = 0, \quad x \in \Omega; \quad u\big|_S = 0$$

turi tik trivialų sprendinį erdvėje $\mathrm{C}^{\mathrm{k}+\alpha}(\overline{\Omega})$. Tada su bet kokiomis funkcijomis

$$f \in \mathrm{C}^{\mathrm{k}-2+\alpha}(\overline{\Omega}), \quad \varphi \in \mathrm{C}^{\mathrm{k}+\alpha}(S)$$

egzistuoja vienintelis (4.108), (4.109) *uždavinio sprendinys erdvėje $\mathrm{C}^{\mathrm{k}+\alpha}(\overline{\Omega})$.*

Šioje teoremoje tvirtinama, kad nehomogeninis Dirichlė uždavinys turi vienintelį sprendinį, jeigu homogeninis Dirichlė uždavinys turi tik trivialų sprendinį. Viena iš paprasčiausių sąlygų, kada homogeninis Dirichlė uždavinys turi tik trivialų sprendinį, yra tokia:

$$\max_{x \in \Omega} a(x) < 0. \tag{4.110}$$

Jeigu ši sąlyga patenkinta ir $u \in \mathrm{C}^2(\Omega) \cap \mathrm{C}(\overline{\Omega})$ yra (4.108) lygties sprendinys, tai yra teisinga nelygybė

$$\max_{x \in \Omega} |u(x)| \leq \max\Big\{\max_{x \in S} |u(x)|; \max_{x \in \Omega} \big|f(x)/a(x)\big|\Big\}.$$

Šios nelygybės įrodymą galima rasti [28] knygoje. Be to, šioje knygoje įrodyta bendresnė nelygybė

$$\max_{x\in\Omega}|u(x)|\leq \max_{x\in\Omega}(\sigma - e^{-\gamma x_1}) \max\Big\{\max_{x\in S}\Big|\frac{u(x)}{\sigma - e^{-\gamma x_1}}\Big|,$$

$$\max_{x\in\Omega}\frac{|f(x)|}{\gamma e^{-\gamma x_1}(a_{11}(x)\gamma - a_1(x)) - a(x)(\sigma - e^{-\gamma x_1})}\Big\}; \tag{4.111}$$

čia σ ir γ – teigiamos konstantos, parinktos taip, kad reiškiniai vardikliuose yra teigiami, o koordinačių pradžia perkelta į sritį Ω. Iš šios nelygybės išplaukia, kad homogeninis Dirichlė uždavinys turi tik trivialų sprendinį ir tuo atveju, kai (4.110) sąlygoje nelygybė nėra griežta. Atkreipsime dėmesį dar į tai, kad (4.111) nelygybė išlieka teisinga ir tuo atveju, kai (4.110) sąlyga negalioja, tačiau srities Ω diametras x_1 ašies kryptimi yra ,,pakankamai" mažas.

Taigi jeigu patenkinta (4.110) sąlyga arba srities Ω diametras kokia nors kryptimi yra pakankamai mažas, tai homogeninis Dirichlė uždavinys turi tik trivialų sprendinį ir remdamiesi Šauderio teorema galime tvirtinti, kad nehomogeninis Dirichlė uždavinys erdvėje $\mathrm{C}^{k+\alpha}(\overline{\Omega})$ turi vienintelį sprendinį su kiekviena funkcija $f\in \mathrm{C}^{k-2+\alpha}(\overline{\Omega})$ ir $\varphi\in \mathrm{C}^{k+\alpha}(S)$.

P a s t a b a. Iš tikrųjų J. Šauderis įrodė bendresnį teiginį. Jis į lygties $A\,u = f$ dešiniąją pusę įtraukė narį λu su kompleksiniu parametru λ ir įrodė, kad Dirichlė uždaviniui

$$A\,u = \lambda u + f(x), \quad x\in\Omega; \quad u\big|_S = \varphi(x), \quad x\in S$$

yra teisingos Fredholmo teoremos.

Centrinę vietą Šauderio teoremos įrodyme užima *Šauderio nelygybė*

$$\|u\|_{\mathrm{C}^{k+\alpha}(\overline{\Omega})}\leq C\Big(\|\,A\,u\|_{\mathrm{C}^{k-2+\alpha}(\overline{\Omega})} + \|u\|_{\mathrm{C}(\overline{\Omega})} + \|u\|_{\mathrm{C}^{k+\alpha}(S)}\Big); \tag{4.112}$$

čia konstanta C priklauso tik nuo operatoriaus A koeficientų normų $\mathrm{C}^{k-2+\alpha}(\overline{\Omega})$ erdvėje, konstantos ν, paviršiaus $S\in \mathrm{C}^{k+\alpha}$ ir skaičiaus k. Jeigu operatoriaus A koeficientas a tenkina (4.110) sąlygą, tai (4.112) nelygybėje narį $\|u\|_{\mathrm{C}(\overline{\Omega})}$ galima atmesti. Šauderio nelygybės įrodymas remiasi potencialų teorija, tiksliau, tokiais trimis teiginiais.

4.8 lema. *Tarkime,* $f\in \mathrm{C}^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ *yra finičioji funkcija,* $\alpha\in(0,1)$. *Tada tūrinis potencialas*

$$v(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} E(x-y)f(y)\,dy$$

bei jo dalinės išvestinės iki antrosios eilės imtinai yra tolydžios ir

$$\sum_{i,j=1}^{n}\|v_{x_ix_j}\|_{\mathrm{C}^{\alpha}(\mathbb{R}^n)}\leq C\|f\|_{\mathrm{C}^{\alpha}(\mathbb{R}^n)}; \tag{4.113}$$

čia konstanta $C = C(\alpha, n)$.

1 išvada *Tegu* $u \in C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^n)$ *yra finičioji funkcija. Tada*

$$\sum_{i,j=1}^{n} \|u_{x_i x_j}\|_{C^\alpha(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\Delta u\|_{C^\alpha(\mathbb{R}^n)}; \tag{4.114}$$

čia konstanta $C = C(\alpha, n)$ *nepriklauso nuo konkretaus elemento* u*.*

$\triangleleft$ Laisvai pasirinkime tokį rutulį B, kad $\operatorname{supp} u \subset B$. Tada funkcija $u \in C^2(\overline{B})$ ir ją galima išreikšti fundamentaliu Laplaso lygties sprendiniu (žr. 3.13 formulę). Sferos ∂B taškuose u lygi nuliui. Be to, $\Delta u = 0$ ritulio B išorėje. Todėl pastarojoje formulėje paviršiniai integralai lygūs nuliui, o tūrinį integralą galima pakeisti integralu visa erdve $\mathbb{R}^n$. Taigi funkciją u galima išreikšti Niutono potencialu

$$u(x) = -\int_{\mathbb{R}^n} E(x - y) \Delta u(y)\, dy$$

su finičiu tankiu Δu. Kartu galime tvirtinti, kad funkcijai u teisingas (4.114) įvertis. $\triangleright$

4.9 lema. *Tarkime,* φ *yra dukart diferencijuojama erdvėje* $\mathbb{R}^{n-1}$ *funkcija,*

$$\sum_{i,j=1}^{n-1} \|\varphi_{x_i x_j}\|_{C^\alpha(\mathbb{R}^{n-1})} < \infty, \quad \alpha \in (0, 1).$$

Be to, tegu[12] *dideliems* $|x'|$ *yra teisingos nelygybės:*

$$|\varphi(x')| \leq M|x'|^\alpha, \quad \sum_{i=1}^{n-1} \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right| \leq M|x'|^{\alpha-1}, \quad \sum_{i,j=1}^{n-1} \left|\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i x_j}\right| \leq M|x'|^{\alpha-2},$$

$x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$. *Tada dvilypio sluoksnio potencialas*

$$w(x) = 2 \int_{y_n=0} \frac{\partial E(x - y)}{\partial y_n} \varphi(y')\, dy'$$

bei jo dalinės išvestinės iki antrosios eilės imtinai yra tolydžios puserdvėje $\mathbb{R}^{n-1}_+$ *ir*

$$\sum_{i,j=1}^{n} \|v_{x_i x_j}\|_{C^\alpha(\mathbb{R}^n_+)} \leq C \sum_{i,j=1}^{n-1} \|\varphi_{x_i x_j}\|_{C^\alpha(\mathbb{R}^{n-1})}; \tag{4.115}$$

čia konstanta $C = C(\alpha, n)$*.*

P a s t a b a. Jeigu funkcija φ dideliems $|x'|$ tenkina sąlygą

$$\varphi(x') = O(|x'|^{-\beta}), \quad \beta > 0,$$

tai dvilypio sluoksnio potencialas w yra Dirichlė uždavinio

$$\Delta w = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n_+; \quad w\big|_{x_n=0} = \varphi(x'), \quad x' \in \mathbb{R}^{n-1},$$

sprendinys. Norint tuo įsitikinti, reikia:

[12] Šios nelygybės tenkinamos, jeigu funkcija φ finiti.

1. Sprendinio ieškoti dvilypio sluoksnio potencialo

$$w(x)=-\int\limits_{y_n=0}\frac{\partial E(x-y)}{\partial \mathbf{n}_{y'}}\mu(y')\,dy'$$

pavidalu.

2. Suvesti Dirichlė uždavinį į integralinę lygtį

$$\frac{1}{2}\mu(x')-\int\limits_{y_n=0}\frac{\partial E(x'-y)}{\partial \mathbf{n}_{y'}}\mu(y')\,dy'=\varphi(x')$$

ir pastebėti, kad šioje lygtyje integralas hiperplokštuma $y_n=0$ lygus nuliui.

Šių techniškai sudėtingų lemų įrodymą galima rasti [28] knygoje.

4.10 lema. *Tarkime, funkcijos f ir φ yra lygios nuliui sferos S_R išorėje ir u yra Dirichlė uždavinio*

$$\begin{cases}\Delta u &= f(x), & x \in \mathbb{R}^n_+,\\ u|_{x_n=0} &= \varphi(x'), & x' \in \mathbb{R}^{n-1},\end{cases}$$

sprendinys, artėjantis į nulį, kai $|x|\to\infty$. Tada teisingas įvertis

$$\sum_{i,j=1}^{n}\|u_{x_ix_j}\|_{C^\alpha(\mathbb{R}^n_+)}\leq C\Big(\|f\|_{C^\alpha(\mathbb{R}^n_+)}+\sum_{i,j=1}^{n-1}\|\varphi_{x_ix_j}\|_{C^\alpha(\mathbb{R}^{n-1})}\Big); \tag{4.116}$$

čia konstanta $C=C(\alpha,n)$.

◁ Funkciją f pratęskime lyginiu būdu į puserdvę $x_n\leq 0$ ir gautą funkciją pažymėkime ta pačia raide f. Akivaizdu, kad

$$\|f\|_{C^\alpha(\mathbb{R}^n_+)}=\|f\|_{C^\alpha(\mathbb{R}^n)}.$$

Apibrėžkime Niutono potencialą

$$v(x)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}E(x-y)f(y)\,dy.$$

Taip apibrėžta funkcija v yra Puasono lygties

$$\Delta v=-f(x),\quad x\in\mathbb{R}^n,$$

sprendinys. Kartu galime tvirtinti, kad funkcija $w=u+v$ yra Laplaso lygties $\Delta w=0$ sprendinys. Be to, $w(x',0)=\varphi(x')+v(x',0)$ ir $w(x)\to 0$, kai $|x|\to\infty$. Todėl ją galima išreikšti dvilypio sluoksnio potencialu

$$w(x)=2\int\limits_{y_n=0}\frac{\partial E(x-y)}{y_n}\big(\varphi(y')+v(y',0)\big)\,dy'.$$

Taigi funkcija u lygi dvilypio ir tūrinio potencialų skirtumui. Reminatis 4.8 ir 4.9 lemomis funkcijai u yra teisingas (4.116) įvertis. ▷

Grįžkime prie Šauderio nelygybės. Ją įrodysime, kai $k = 2$ (atvejis $k > 2$ lengvai susiveda į pastarąjį). Tegu $u\in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$, $S\in C^{2+\alpha}$, $\varphi\in C^{2+\alpha}(S)$, operatoriaus A koeficientai a_{ij}, a_i ir $a\in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$. Be to, tegu $\Omega_1, \ldots, \Omega_N$ yra toks srities Ω denginys, kad

$$\overline{\Omega} \subset \bigcup_{m=1}^{N} \Omega_m, \quad \operatorname{diam} \Omega_m \leq \delta, \quad m = 1, \ldots, N,$$

δ – pakankamai mažas teigiamas skaičius (jį patikslinsime vėliau). Denginiui $\Omega_1, \ldots, \Omega_N$ konstruojame vieneto skaidinį $\xi_1, \ldots, \xi_N$:

$$\sum_{m=1}^{N} \xi_m(x) = 1, \quad \forall x\in\overline{\Omega}, \quad \operatorname{supp} \xi_m \subset \Omega_m, \quad \xi_m\in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n).$$

Tada

$$u(x) = \sum_{m=1}^{N} u_m(x), \quad u_m(x) = u(x)\xi_m(x).$$

Lygybę

$$A\, u = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) u_{x_i} + a(x) u$$

padauginkime iš funkcijos ξ_m ir perrašykime taip:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{m x_i x_j} = F_m(x); \tag{4.117}$$

čia

$$\begin{aligned} F_m(x) = \xi_m\, A\, u \quad &+ \quad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)(2u_{x_i}\xi_{m x_j} + u\xi_{m x_i x_j}) - \\ &- \quad \sum_{i=1}^{n} a_i(x) u_{x_i} \xi_m - a(x) u \xi_m. \end{aligned}$$

Atskirai išnagrinėsime du atvejus:

1. Sritis $\Omega_m \subset \Omega$.

2. Sritis Ω_m kerta paviršių S.

Pirmuoju atveju funkciją u_m pratęskime nuliu į srities Ω_m išorę ir gautą funkciją pažymėkime ta pačia raide. Taip pratęsta funkcija $u_m\in C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^n)$ ir tenkina (4.117) lygtį. Perrašykime ją taip:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x^0) u_{m x_i x_j} = F_m(x) + \sum_{i,j=1}^{n} \big(a_{ij}(x^0) - a_{ij}(x)\big) u_{m x_i x_j};$$

čia x^0 – laisvai pasirinktas taškas srityje Ω_m. Taške x^0 apibrėžkime naują ortogonalią koordinačių sistemą $y_1, \dots, y_n$ taip, kad

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x^0)\frac{\partial y_s}{\partial x_i}\frac{\partial y_r}{\partial x_j} = \begin{cases} 1, & \text{kai } s = r, \\ 0, & \text{kai } s \neq r. \end{cases}$$

Naujose koordinatėse gausime lygtį

$$\Delta u_m = \tilde{F}_m(y) + \sum_{i,j=1}^{n} \big(\tilde{a}_{ij}(0) - \tilde{a}_{ij}(y)\big) u_{my_iy_j}.$$

Funkcija u_m tenkina 1 išvados sąlygas. Todėl jai yra teisingas (4.114) įvertis, t.y.

$$\sum_{i,j=1}^{n} \|u_{my_iy_j}\|_{\mathrm{C}^\alpha(\mathbb{R}^n)} \leq C \Big\| \tilde{F}_m(y) + \sum_{i,j=1}^{n} \big(\tilde{a}_{ij}(0) - \tilde{a}_{ij}(y)\big) u_{my_iy_j} \Big\|_{\mathrm{C}^\alpha(\mathbb{R}^n)}.$$

Prisiminę funkcijos $\tilde{F}_m$ apibrėžimą, kintamųjų x ir y ryšį bei kaip yra skaičiuojama dviejų funkcijų sandaugos Helderio norma, gausime nelygybę

$$\sum_{i,j=1}^{n} \|u_{my_iy_j}\|_{\mathrm{C}^\alpha(\mathbb{R}^n)} \leq C \max_{\substack{i,j=1,\dots,n \\ y \in \operatorname{supp} u_m}} |\tilde{a}_{ij}(0) - \tilde{a}_{ij}(y)| \sum_{i,j=1}^{n} \|u_{my_iy_j}\|_{\mathrm{C}^\alpha(\mathbb{R}^n)} +$$
$$+ C_1\big(\|f\|_{\mathrm{C}^\alpha(\Omega_m)} + \|u\|_{\mathrm{C}^2(\Omega_m)}\big).$$

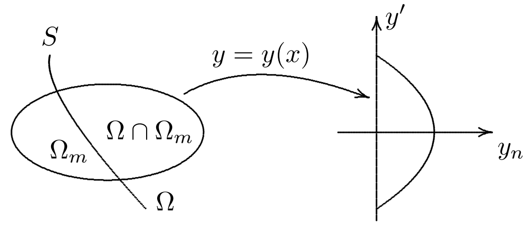
Skaičių δ parinkime taip, kad

$$\max_{\substack{i,j=1,\dots,n \\ y \in \operatorname{supp} u_m}} |\tilde{a}_{ij}(0) - \tilde{a}_{ij}(y)| \leq 1/2C.$$

Tada

$$\sum_{i,j=1}^{n} \|u_{my_iy_j}\|_{\mathrm{C}^\alpha(\mathbb{R}^n)} \leq 2C_1\big(\|f\|_{\mathrm{C}^\alpha(\Omega_m)} + \|u\|_{\mathrm{C}^2(\Omega_m)}\big). \tag{4.118}$$

Tarkime dabar, sritis Ω_m kerta paviršių S. Kadangi paviršius $S \in \mathrm{C}^{2+\alpha}$, tai egzistuoja toks klasės $\mathrm{C}^{2+\alpha}$ difeomorfizmas $y = y(x)$, kuris sritį $\Omega_m \cap \Omega$ atvaizduoja į puserdvę $y_n \geq 0$, o paviršių $S \cap \Omega_m$ į hiperplokštumą $y_n = 0$ (žr. 4.5 pav.).



4.5 pav.

Naujose koordinatėse (4.117) lygtis pereis į tokio pat pavidalo lygtį

$$\sum_{i,j=1}^{n} \tilde{a}_{ij}(y) u_{my_iy_j} = \tilde{F}_m(y); \tag{4.119}$$

čia $\tilde{u}_m(y) = u_m(x(y))$. Koeficientai $\tilde{a}_{ij}$ bei funkcija $\tilde{F}_m$ perskaičiuojami pagal įprastas formules. Funkciją $\tilde{u}_m$ pratęskime nuliu tuose puserdvės $y_n \geq 0$ taškuose y, kurie nepriklauso srities $\Omega \cap \Omega_m$ vaizdui, ir pratęstą funkciją pažymėkime ta pačia raide $\tilde{u}_m$. Tada puserdvėje $y_n > 0$ ji tenkins (4.119) lygtį, o hiperplokštumoje $y_n = 0$ kraštinę sąlygą

$$\tilde{u}_m(y)|_{y_n=0} = \tilde{\varphi}_m(y');$$

čia $\tilde{\varphi}_m(y') = \varphi_m(x(y))$, $\varphi_m(x) = \varphi(x)\xi_m(x)$. Perrašykime (4.119) lygtį taip:

$$\sum_{i,j=1}^{n} \tilde{a}_{ij}(y^0)\tilde{u}_{my_iy_j} = \tilde{F}_m(y) + \sum_{i,j=1}^{n} \big(\tilde{a}_{ij}(y^0) - \tilde{a}_{ij}(y)\big)\tilde{u}_{my_iy_j};$$

čia y^0 – laisvai pasirinktas taškas iš srities $\Omega \cap \Omega_m$ vaizdo. Tolesnis įrodymas yra visiškai toks pat kaip pirmuoju atveju. Reikia tik taške y^0 atitinkamai apibrėžti vietinę ortogonalią koordinačių sistemą $z_1, \dots, z_n$ ir pasinaudoti 4.10 lema (o ne 1 išvada). Po to parinkti pakankamai mažą skaičių δ ir pasinaudoti (4.116) nelygybe. Tada gausime įvertį

$$\sum_{i,j=1}^{n} \|\tilde{u}_{mz_iz_j}\|_{\mathrm{C}^\alpha(\mathbb{R}^n_+)} \leq 2C_2\big(\|f\|_{\mathrm{C}^\alpha(\overline{\Omega_m \cap \Omega})} + \|\varphi_m\|_{\mathrm{C}^{2+\alpha}(S)} + \|u\|_{\mathrm{C}^2(\overline{\Omega_m \cap \Omega})}\big).$$

Reiškinius kairiojoje pastarosios ir (4.118) nelygybių pusėse galima pakeisti atitinkamai normomis $\|\tilde{u}_m\|_{\mathrm{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^n_+)}$ ir $\|u_m\|_{\mathrm{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^n)}$. Norint tuo įsitikinti, reikia pasinaudoti interpoliacine nelygybe

$$\|u\|_{\mathrm{C}^k(\overline{\Omega})} \leq \varepsilon \sum_{|\beta|=k} \| D^\beta u\|_{\mathrm{C}^\alpha(\overline{\Omega})} + C_\varepsilon \|u\|_{\mathrm{C}(\overline{\Omega})};$$

čia konstanta $C_\varepsilon \to \infty$, kai $\varepsilon \to 0$ (šios nelygybės įrodymą galima rasti [39] knygoje). Gautose nelygybėse grįžkime prie senų kintamųjų ir po to jas sudėkime m atžvilgiu nuo 1 iki N. Tada gausime nelygybę

$$\|u\|_{\mathrm{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C\big(\|f\|_{\mathrm{C}^\alpha(\overline{\Omega})} + \|\varphi\|_{\mathrm{C}^{2+\alpha}(S)} + \|u\|_{\mathrm{C}^2(\overline{\Omega})}\big).$$

Iš jos ir interpoliacinės nelygybės lengvai galima išvesti (4.112) nelygybę, kai $k = 2$.

P a s t a b a. Šauderio nelygybėje konstantą C galima parinkti taip, kad ji nepriklausytų nuo srities Ω diametro. Norint tuo įsitikinti, srities Ω denginį $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ reikia parinkti taip, kad jis turėtų baigtinį kartotinumą.

4.20 teorema. *Tegu* $S \in \mathrm{C}^{2+\alpha}$. *Tada su kiekviena funkcija* $f \in \mathrm{C}^\alpha(\overline{\Omega})$ *Dirichlė uždavinys*

$$\Delta u = f(x), \quad x \in \Omega; \quad u|_S = 0, \quad x \in S,$$

turi sprendinį erdvėje $\mathrm{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$.

Šios teoremos įrodymą galima rasti [28] knygoje.

4.21 teorema. *Tegu* A *yra griežtai elipsinis operatorius su koeficientais* $a_{ij},\ a_i$ *ir* $a\in \mathrm{C}^{\alpha}(\overline{\Omega}),\, S\in \mathrm{C}^{2+\alpha},\ a(x)\leq 0$. *Tada* (4.108), (4.109) *Dirichlė uždavinys turi vienintelį sprendinį erdvėje* $\mathrm{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega}),\, \forall f\in \mathrm{C}^{\alpha}(\overline{\Omega})$ *ir* $\varphi\in \mathrm{C}^{2+\alpha}(S)$.

◁ Teoremą pakanka įrodyti, kai $\varphi = 0$. Norint tuo įsitikinti, reikia vietoje ieškomos funkcijos u apibrėžti naują ieškomą funkciją $v = u - \tilde{\varphi}$. Čia $\tilde{\varphi}\in \mathrm{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ – kokia nors funkcija, sutampanti su φ paviršiuje S. Taigi toliau nagrinėsime homogeninį Dirichlė uždavinį

$$A\,u = f(x), \quad x\in\Omega; \quad u\big|_S = 0, \quad x\in S. \tag{4.120}$$

Kiekvienam $\tau\in[0,1]$ apibrėžkime operatorių

$$A_\tau = (1-\tau)\Delta + \tau\, A = \Delta + \tau(A - \Delta).$$

Taip apibrėžti operatoriai yra griežtai elipsiniai:

$$(1-\tau)\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 + \tau \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq (1-\tau)\xi^2 + \nu\tau\xi^2 \geq \nu_1\xi^2.$$

Be to, elipsiškumo konstanta $\nu_1 = \min\{1,\nu\}$ nepriklauso nuo parametro τ.

Lygiagrečiai su (4.120) uždaviniu nagrinėsime Dirichlė uždavinių šeimą

$$A_\tau\, u = f(x), \quad x\in\Omega; \quad u\big|_S = 0, \quad x\in S. \tag{4.121}$$

Iš (4.111) išplaukia, kad kiekvienam šio uždavinio sprendiniui $u(x,\tau)$ yra teisinga nelygybė

$$\max_{x\in\Omega} |u(x,\tau)| \leq M \max_{x\in\Omega} |f(x)| \tag{4.122}$$

su konstanta M, nepriklausančia nuo τ. Be to, iš (4.122) ir Šauderio nelygybės išplaukia įvertis

$$\|u(x,\tau)\|_{\mathrm{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})} \leq M_1 \|\, A_\tau\, u(x,\tau)\|_{\mathrm{C}^{\alpha}(\overline{\Omega})} = M_1 \|f\|_{\mathrm{C}^{\alpha}(\overline{\Omega})}; \tag{4.123}$$

čia konstanta M_1 taip pat nepriklauso nuo τ.

Tegu $\tau = 0$. Tada (4.121) uždavinys sutampa su (4.120). Remiantis 4.20 teorema Dirichlė uždavinys

$$\Delta u = f(x), \quad x\in\Omega; \quad u|_S = 0, \quad x\in S,$$

turi vienintelį sprendinį erdvėje $\mathrm{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ su kiekviena funkcija $f\in \mathrm{C}^{\alpha}(\overline{\Omega})$. Todėl operatorius Δ nusako apipusiškai vienareikšmę Banacho erdvės $\mathrm{C}^{\alpha}(\overline{\Omega})$ ir Banacho erdvės $\mathrm{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ poerdvio

$$\mathrm{C}_0^{2+\alpha}(\overline{\Omega}) = \{u\in \mathrm{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega}) : u|_S = 0\}$$

atitiktį. Tegu

$$\Delta^{-1} : \mathrm{C}^{\alpha}(\overline{\Omega}) \to \mathrm{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$$

yra atvirkštinis operatorius. Tada (4.121) uždavinį galima perrašyti taip:

$$u + \tau\Delta^{-1}(A - \Delta)u = \Delta^{-1} f. \tag{4.124}$$

Tai yra lygtis erdvėje $\mathrm{C}_0^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$. Patikrinsime, kad operatorius $\Delta^{-1}(A-\Delta)$ yra aprėžtas. Su kiekviena funkcija $v\in \mathrm{C}_0^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ norma

$$\|(A-\Delta)v\|_{\mathrm{C}^\alpha(\overline{\Omega})}\leq C\|v\|_{\mathrm{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})}.$$

Iš (4.123) išplaukia nelygybė

$$\|\Delta^{-1}\|\leq M_1.$$

Todėl

$$\|\Delta^{-1}(A-\Delta)v\|_{\mathrm{C}^\alpha(\overline{\Omega})}\leq M_1\|(A-\Delta)v\|_{\mathrm{C}^\alpha(\overline{\Omega})}\leq M_1C\|v\|_{\mathrm{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})}$$

ir

$$\|\Delta^{-1}(A-\Delta)\|\leq M_1C.$$

Tegu

$$\tau_1=\frac{1}{\|\Delta^{-1}(A-\Delta)\|}.$$

Tada (4.124) lygtis turi vienintelį sprendinį erdvėje $\mathrm{C}_0^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$, $\forall\,\tau\in[0,\tau_1)$. Tokiems τ operatorius A_τ nustato abipusiškai vienareikšmę Banacho erdvių $\mathrm{C}_0^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ ir $\mathrm{C}^\alpha(\overline{\Omega})$ atitiktį. Tegu $A_\tau^{-1}:\mathrm{C}_0^\alpha(\overline{\Omega})\to\mathrm{C}_0^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ – atvirkštinis operatorius. Perrašykime (4.121) lygtį taip:

$$\Delta u+\tau'(A-\Delta)u+(\tau-\tau')(A-\Delta)u=f.$$

Tada (4.121) uždavinys $\forall\tau'\in[0,\tau_1)$ yra ekvivalentus lygčiai

$$u+(\tau-\tau')\,A_{\tau'}^{-1}(A-\Delta)u=A_{\tau'}^{-1}\,f. \tag{4.125}$$

Patikrinsime, kad erdvėje $\mathrm{C}_0^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ operatorius $A_{\tau'}^{-1}(A-\Delta)$ yra aprėžtas. Kiekvienai funkcijai $v\in\mathrm{C}_0^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ norma

$$\|\,A_{\tau'}^{-1}(A-\Delta)v\|_{\mathrm{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})}\leq M_1\|(A-\Delta)v\|_{\mathrm{C}^\alpha(\overline{\Omega})}\leq M_1C\|v\|_{\mathrm{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})}.$$

Todėl

$$\|\,A_{\tau'}^{-1}(A-\Delta)\|\leq M_1C$$

ir galime tvirtinti, kad (4.125) lygtis turi vienintelį sprendinį $\forall\tau$, tenkinančiam nelygybę

$$0\leq\tau-\tau'<\frac{1}{\|\,A_{\tau'}(A-\Delta)\|}.$$

Taigi (4.121) uždavinio išsprendžiamumas ,,pasistūmėjo" per žingsnį

$$\frac{1}{\|\,A_{\tau'}(A-\Delta)\|}\geq\frac{1}{M_1C}.$$

Akivaizdu, kad atlikę baigtinį skaičių tokių žingsnių pasieksime reikšmę $\tau=1$. Taigi (4.121) uždavinis $\forall\tau\in[0,1]$ turi vienintelį sprendinį erdvėje $\mathrm{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$. Kartu galime tvirtinti, kad šioje erdvėje turi vienintelį sprendinį ir (4.120) uždavinys. $\triangleright$

4.13. UŽDAVINIAI

1. Tegu $\mathrm{W}^2_{2,0}(\Omega)$ yra aibės $\{u\in \mathrm{C}^2(\overline{\Omega})\ :\ u\big|_S = 0\}$ uždarinys erdvėje $\mathrm{W}^2_2(\Omega)$, $S\in \mathrm{C}^2$. Įrodykite, kad
$$\mathrm{W}^2_{2,0}(\Omega) = \mathrm{W}^2_2(\Omega)\cap \mathring{\mathrm{W}}^1_2(\Omega).$$

2. Tarkime, A yra formaliai savijungis operatorius, $S\in \mathrm{C}^2$ ir operatoriaus A koeficientai tenkina 4.16 pirmojo teiginio sąlygas. Įrodykite, kad Dirichlė uždavinio
$$A\,u = \lambda u, \quad x\in\Omega; \quad u\big|_S = 0$$
tikrinės funkcijos $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ yra erdvės $\mathrm{W}^2_2(\Omega)\cap \mathring{\mathrm{W}}^1_2(\Omega)$ bazė, t.y. kiekvieną funkciją $u\in \mathrm{W}^2_2(\Omega)\cap \mathring{\mathrm{W}}^1_2(\Omega)$ galima skleisti Furjė eilute
$$u = \sum_{k=1}^{\infty}(u, u_k)v_k.$$
Be to, šią eilutę galima du kartus diferencijuoti panariui pagal kintamuosius x_i ir gautos eilutės[13] konverguoja erdvėje $\mathrm{L}_2(\Omega)$.
N u r o d y m a s. Erdvėje $\mathrm{W}^2_2(\Omega)$ apibrėžkite ekvivalenčią skaliarinę sandaugą
$$\{u, v\} = (A\,u - \lambda_0 u, A\,v - \lambda_0 v), \quad \lambda_0 \geq \max_{x\in\Omega} a(x),$$
ir pastebėkite, kad su kiekviena funkcija $u\in \mathrm{W}^2_2(\Omega)\cap \mathring{\mathrm{W}}^1_2(\Omega)$ eilutė
$$\{u, u\} = \sum_{k=1}^{n}(u, u_k)^2(\lambda_k - \lambda_0)^2 = \sum_{k=1}^{n}(A\,u, u_k)^2(\lambda_k - \lambda_0)^2\lambda_k^{-2} < \infty.$$

3. Tarkime, $\Omega = \{x\in\mathbb{R}^2 : x_1 = r\cos\theta, x_2 = r\sin\theta, r\in(0,1),\ \theta\in(0,\alpha)\}$, o φ – pakankamai glodi funkcija, apibrėžta kontūro $l = \partial\Omega$ taškuose ir lygi nuliui koordinačių pradžios taško aplinkoje. Įrodykite, kad Dirichlė uždavinio
$$\Delta u = 0, \quad x\in\Omega; \quad u\big|_S = \varphi$$
sprendinys priklauso erdvei $\mathrm{W}^1_2(\Omega)$, $\forall\alpha\in(0, 2\pi]$, tačiau nepriklauso $\mathrm{W}^2_2(\Omega)$, kai $\pi < \alpha < 2\pi$.

4. Tegu Ω yra aprėžta erdvėje $\mathbb{R}^n$ sritis, $S = \partial\Omega$ – dalimis glodus paviršius. Įrodykite, kad kiekvienai funkcijai $u\in \mathrm{C}^2(\overline{\Omega}) : u\big|_S = 0$ yra teisinga nelygybė
$$\|u_{xx}\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)} \leq C\|\Delta u\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)};$$
čia konstanta C nepriklauso nuo konkretaus u.

[13] Atkreipkite dėmesį, kad eilutės
$$\sum_{k=1}^{\infty}(u, u_k)v_{kx_i}, \quad \sum_{k=1}^{\infty}(u, u_k)v_{kx_ix_j}$$
nėra ortogonalios erdvėje $\mathrm{L}_2(\Omega)$.

5. Tegu Ω yra iškila erdvėje $\mathbb{R}^n$ sritis, $S\in \mathrm{C}^2$. Įrodykite, kad kiekvienai funkcijai $u\in \mathrm{C}^2(\overline{\Omega}) : u\big|_S = 0$ yra teisinga nelygybė

$$\|u_{xx}\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)}\leq\|\Delta u\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)}.$$

6. Tegu A ir B yra griežtai elipsiniai operatoriai, kurių koeficientai tenkina 4.16 teoremos pirmojo teiginio sąlygas, $u\in \mathrm{W}^2_{2,0}(\Omega)$. Įrodykite nelygybę

$$\|u\|^2_{\mathrm{W}^2_2(\Omega)}\leq C_1 \int_\Omega A\, u\, B\, u\, dx + C_2\|u\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)}. \tag{4.126}$$

N u r o d y m a s. Dukart pritaikykite integravimo dalimis formulę ir pasinaudokite tuo, kad dvi teigiamai apibrėžtas kvadratines formas vienu metu galima suvesti į kvadratų sumą.

7. Tegu $A\, u = \sum\limits_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u_{x_ix_j} + \sum\limits_{i=1}^n a_i(x)u_{x_i} + a(x)u$ yra griežtai elipsinis operatorius srityje Ω, $a_{ij}\in \mathrm{C}(\overline{\Omega})$, a_i, $a\in \mathrm{L}_\infty(\Omega)$, $S = \partial\Omega\in \mathrm{C}^2$. Įrodykite, kad kiekvienai funkcijai $u\in \mathrm{C}^2(\overline{\Omega}) : u\big|_S = 0$ yra teisinga nelygybė

$$\|u\|_{\mathrm{W}^2_2(\Omega)}\leq C\big(\|\, A\, u\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)} + \|u\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)}\big).$$

8. Įrodykite, kad Noimano uždavinys

$$-\Delta u = f(x), \quad x\in\Omega; \quad \partial u/\partial \mathbf{n}\big|_S = 0$$

turi apibendrintą sprendinį erdvėje $\mathrm{W}^1_2(\Omega)$ tada ir tik tada, kai

$$\int_\Omega f(x)\, dx = 0.$$

9. Funkcija $u\in \mathrm{W}^2_2(\Omega)$ yra biharmoninės lygties

$$\Delta^2 u = f(x), \quad x\in\Omega$$

apibendrintas sprendinys, jeigu $\forall\eta\in \mathring{\mathrm{W}}^2_2(\Omega)$ yra teisinga integralinė tapatybė

$$\int_\Omega \Delta u \Delta\eta\, dx = \int_\Omega f\eta\, dx.$$

Funkcija u yra kraštinio uždavinio

$$\Delta^2 u = f(x), \quad x\in\Omega; \quad u\big|_S = 0, \quad \partial u/\partial\mathbf{n}\big|_S = 0$$

apibendrintas sprendinys, jeigu ji yra biharmoninės lygties apibendrintas sprendinys ir $u\in \mathring{\mathrm{W}}^2_2(\Omega)$. Įrodykite, kad $\forall f\in \mathrm{L}_2(\Omega)$ šis uždavinys turi vienintelį apibendrintą sprendinį erdvėje $\mathring{\mathrm{W}}^2_2(\Omega)$.

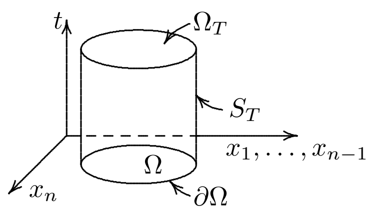
5 SKYRIUS

Kraštiniai parabolinių lygčių uždaviniai

Šiame skyriuje nagrinėsime kraštinius antrosios eilės tiesinių parabolinių lygčių uždavinus su aprėžtais koeficientais (neaprėžtų koeficientų atvejis nagrinėjamas analogiškai (žr. [29]). Daugiausiai dėmesio skirsime pirmajam kraštiniam uždaviniui. Įrodysime šio uždavinio apibendrintų sprendinių egzistavimą ir vienatį $\mathring{W}_2^{1,0}(Q_T)$ ir $\mathring{W}_2^{1,1}(Q_T)$ erdvėse. Ištirsime apibendrintų sprendinių glodumą.

5.1. UŽDAVINIŲ FORMULAVIMAS. PAGALBINIAI TEIGINIAI

Tegu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – aprėžta[1] sritis, $S = \partial\Omega$, $Q_T = \Omega \times (0, T) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ – cilindras, kurio apatinis pagrindas Ω, o viršutinis pagrindas Ω_T, S_T – cilindro Q_T šoninis paviršius (žr. 5.1 pav.).



5.1 pav.

Šiame skyriuje nagrinėsime *tolygiai parabolines lygtis*, t.y. lygtis

$$u_t + A\,u = f(t, x), \tag{5.1}$$

kuriose operatoriaus

$$A\,u = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\big(a_{ij}(x,t)u_{x_j}\big) + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)u_{x_i} + a(x,t)u$$

koeficientai $a_{ij} = a_{ji}$ cilindre Q_T tenkina sąlygą

$$\nu \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \le \mu \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \nu, \mu = const > 0.$$

Pirmasis kraštinis uždavinys formuluojamas taip: rasti funkciją u, kuri cilindre Q_T tenkintų (5.1) lygtį, srities Ω taškuose pradinę sąlygą

$$u|_{t=0} = \varphi(x) \tag{5.2}$$

[1]Ši prielaida nėra esminė. Visi rezultatai išlieka teisingi neaprėžtos srities atveju. Tačiau juos reikia patikslinti.

ir paviršiaus S_T taškuose pirmąją kraštinę sąlygą

$$u|_{S_T} = \psi(x,t). \tag{5.3}$$

Antrasis ir trečiasis kraštiniai uždaviniai formuluojami visiškai taip pat. Tik pirmąją kraštinę sąlygą reikia atitinkamai pakeisti antrąja

$$\frac{\partial u}{\partial N}\Big|_{S_T} \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_{x_j}\cos(\mathbf{n},x_i)\big|_{S_T} = \psi(x,t) \tag{5.4}$$

arba trečiąja

$$\frac{\partial u}{\partial N} + \sigma(x,t)u\big|_{S_T} = \psi(x,t) \tag{5.5}$$

kraštine sąlyga[2].

Koši uždavinys formuluojamas taip: rasti funkciją u, kuri juostoje $\mathbb{R}^n \times (0,T)$ tenkintų (5.1) lygtį, o taškuose $t = 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ – (5.2) pradinę sąlygą.

Jeigu operatoriaus A koeficientai bei lygties pradinių ir kraštinių sąlygų dešiniosios pusės nėra pakankamai glodžios, tai bendruoju atveju (5.1) lygtis neturi klasikinio sprendinio, tenkinančio atitinkamas pradines ir kraštines sąlygas. Todėl sprendinio reikia ieškoti platesnėje funkcijų klasėje. Ši klasė turi būti pakankamai siaura. Tiksliau, tokia, kurioje ieškomasis sprendinys būtų vienintelis. Jos pasirinkimą lemią operatoriaus A koeficientų bei funkcijų, įeinančių į lygties pradinių ir kraštinių sąlygų dešiniąsias puses, glodumas.

Nagrinėjant parabolines lygtis (ir ne tik jas), kintamasis t yra išskiriamas iš kitų kintamųjų. Žymint Sobolevo erdves, šį kintamąjį taip pat patogu išskirti. Todėl Hilberto erdvę $\mathrm{W}_2^1(Q_T)$ toliau žymėsime $\mathrm{W}_2^{1,1}(Q_T)$. Skaliarinė sandauga $\mathrm{W}_2^{1,1}(Q_T)$ erdvėje apibrėžiama įprastu būdu:

$$(u,v)_{\mathrm{W}_2^{1,1}(Q_T)} = \int\limits_{Q_T} \Big(uv + u_t v_t + \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}v_{x_i}\Big)\,dxdt.$$

Šią skaliarinę sandaugą atitinka norma

$$\|u\|_{\mathrm{W}_2^{1,1}(Q_T)} = \sqrt{(u,u)_{\mathrm{W}_2^{1,1}(Q_T)}}.$$

Greta nagrinėsime Hilberto erdvę

$$\mathrm{W}_2^{1,0}(Q_T) = \{u \in \mathrm{L}_2(Q_T) : u_{x_i} \in \mathrm{L}_2(Q_T), \forall i = 1,\dots,n\}$$

su skaliarine sandauga

$$(u,v)_{\mathrm{W}_2^{1,0}(Q_T)} = \int\limits_{Q_T} \Big(uv + \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}v_{x_i}\Big)\,dxdt.$$

[2] Čia, kaip ir 4 skyrelyje, $\mathbf{n}$ – paviršiaus S vienetinis normalės vektorius, išorinis srities Ω atžvilgiu.

Šią skaliarinę sandaugą atitinka norma

$$\|u\|_{\mathrm{W}_2^{1,0}(Q_T)} = \sqrt{(u,u)_{\mathrm{W}_2^{1,0}(Q_T)}}.$$

Kartu nagrinėsime šių erdvių poerdvius $\mathring{\mathrm{W}}_2^{1,1}(Q_T)$, $\mathring{\mathrm{W}}_2^{1,0}(Q_T)$ ir D_T.

Sakysime, $u \in \mathring{\mathrm{W}}_2^{1,0}(Q_T)$, jeigu egzistuoja tokia seka $\{u_m\} \subset \mathrm{C}^\infty(\overline{Q_T})$, kad funkcijos u_m lygios nuliui paviršiaus S_T aplinkoje ir

$$\|u_m - u\|_{\mathrm{W}_2^{1,0}(Q_T)} \to 0,$$

kai $m \to \infty$.

Sakysime, $u \in \mathring{\mathrm{W}}_2^{1,1}(Q_T)$, jeigu egzistuoja tokia seka $\{u_m\} \subset \mathrm{C}^\infty(\overline{Q_T})$, kad funkcijos u_m lygios nuliui paviršiaus S_T aplinkoje ir

$$\|u_m - u\|_{\mathrm{W}_2^{1,1}(Q_T)} \to 0,$$

kai $m \to \infty$.

Sakysime, $u \in D_T$, jeigu egzistuoja tokia seka $\{u_m\} \subset \mathrm{C}^\infty(\overline{Q_T})$, kad funkcijos u_m lygios nuliui paviršiaus S_T bei taško $t = T$ aplinkoje ir

$$\|u_m - u\|_{\mathrm{W}_2^{1,1}(Q_T)} \to 0,$$

kai $m \to \infty$.

5.1 lema. *Tarkime,* $u = w(t)v(x)$, $v \in \mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)$. *Tada:*

1. *Jeigu* $w \in \mathrm{L}_2(0,T)$, *tai* $u \in \mathring{\mathrm{W}}_2^{1,0}(Q_T)$.
2. *Jeigu* $w \in \mathrm{W}_2^1(0,T)$, *tai* $u \in \mathring{\mathrm{W}}_2^{1,1}(Q_T)$.
3. *Jeigu* $w \in \mathrm{W}_2^1(0,T)$ *ir* $w(T) = 0$, *tai* $u \in D_T$.

◁ Tegu $v \in \mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)$. Tada egzistuoja tokia seka $\{v_k\} \subset \mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$, kad

$$\|v_k - v\|_{\mathrm{W}_2^1(\Omega)} \to 0,$$

kai $k \to \infty$.

Įrodysime pirmąjį lemos teiginį. Tegu $w \in \mathrm{L}_2(0,T)$. Aibė $\mathrm{C}^\infty[0,T]$ yra tiršta erdvėje $\mathrm{L}_2(0,T)$. Todėl egzistuoja tokia seka $\{w_k\} \subset \mathrm{C}^\infty[0,T]$, kad

$$\|w_k - w\|_{\mathrm{L}_2(0,T)} \to 0,$$

kai $k \to \infty$. Funkcijų v_k ir w_k sandauga $v_k \cdot w_k \in \mathrm{C}^\infty(\overline{Q_T})$ ir paviršiaus S_T aplinkoje yra lygi nuliui. Be to,

$$\|u - v_k w_k\|_{\mathrm{W}_2^{1,0}(Q_T)} \le \|w(v - v_k)\|_{\mathrm{W}_2^{1,0}(Q_T)} + \|v_k(w_k - w)\|_{\mathrm{W}_2^{1,0}(Q_T)} \to 0,$$

kai $k \to \infty$. Taigi $u = vw \in \mathring{\mathrm{W}}_2^{1,0}(Q_T)$.

Tarkime, $w \in \mathrm{W}_2^1(0,T)$. Tada egzistuoja tokia seka $\{w_k\} \subset \mathrm{C}^\infty[0,T]$, kad

$$\|w_k - w\|_{\mathrm{W}_2^1(0,T)} \to 0,$$

kai $k \to \infty$. Funkcijų v_k ir w_k sandauga $v_k \cdot w_k \in \mathrm{C}^\infty(\overline{Q_T})$ ir paviršiaus S_T aplinkoje yra lygi nuliui. Be to,

$$\|u - v_k w_k\|_{\mathrm{W}_2^{1,1}(Q_T)} \le \|w(v - v_k)\|_{\mathrm{W}_2^{1,1}(Q_T)} + \|v_k(w_k - w)\|_{\mathrm{W}_2^{1,1}(Q_T)} \to 0,$$

kai $k \to \infty$. Taigi $u = vw \in \mathring{\mathrm{W}}_2^{1,1}(Q_T)$.

Įrodysime trečiąjį lemos teiginį. Tegu $w \in \mathrm{W}_2^1(0,T)$ ir $w(T) = 0$. Apibrėžkime seką funkcijų

$$w_\delta(t) = \begin{cases} w(t), & \text{kai } t \le T - \delta, \\ 0, & \text{kai } t > T - \delta. \end{cases}$$

Pakankamai mažiems $\rho > 0$ (pavyzdžiui, kai $\rho < \delta/2$) vidutinės funkcijos $(w_\delta)_\rho$ yra be galo diferencijuojamos ir lygios nuliui taško $t = T$ aplinkoje. Todėl galima parinkti artėjančių į nulį skaičių δ_k ir ρ_k sekas taip, kad funkcijos $(w_{\delta_k})_{\rho_k} v_k \in \mathrm{C}^\infty(\overline{Q_T})$ būtų lygios nuliui paviršiaus S_T bei taško $t = T$ aplinkoje ir

$$\begin{aligned} \|u - (w_{\delta_k})_{\rho_k} v_k\|_{\mathrm{W}_2^{1,1}(Q_T)} &\le \|w(v - v_k)\|_{\mathrm{W}_2^{1,1}(Q_T)} + \\ &+ \|v_k(w - (w_{\delta_k})_{\rho_k})\|_{\mathrm{W}_2^{1,1}(Q_T)} \to 0, \end{aligned}$$

kai $k \to \infty$. Taigi $u = vw \in D_T$. $\triangleright$

5.2 lema. *Tegu $\{v_k\}_{k=1}^\infty$ yra bazė erdvėje $\mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)$, $w_k \in \mathrm{C}^\infty[0,T]$, $k = 1, 2, \ldots$, $\mathfrak{M}$ – visų galimų tiesinių darinių*

$$\sum_{k=1}^N w_k(t) v_k(x), \quad N \in \mathbb{N},$$

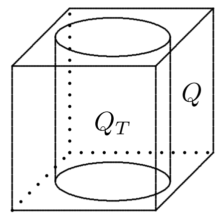
aibė. Tada yra teisingi tokie teiginiai:

1. *Aibė $\mathfrak{M}$ yra tiršta erdvėje $\mathring{\mathrm{W}}_2^{1,0}(Q_T)$.*
2. *Aibė $\mathfrak{M}$ yra tiršta erdvėje $\mathring{\mathrm{W}}_2^{1,1}(Q_T)$.*
3. *Jeigu papildomai pareikalausime, kad $w_k(T) = 0$, $\forall k = 1, 2, \ldots$, tai taip apibrėžta aibė $\mathfrak{M}$ bus tiršta erdvėje D_T.*

$\triangleleft$ Laisvai pasirinkime funkciją $u \in \mathring{\mathrm{W}}_2^{1,0}(Q_T)$ ir skaičių $\varepsilon > 0$. Pagal poerdvio $\mathring{\mathrm{W}}_2^{1,0}(Q_T)$ apibrėžimą egzistuoja tokia funkcija $\tilde{u} \in \mathrm{C}^\infty(\overline{Q_T})$, lygi nuliui paviršiaus S_T aplinkoje, kad

$$\|u - \tilde{u}\|_{\mathrm{W}_2^{1,0}(Q_T)} \le \varepsilon/2.$$

Pratęskime funkciją $\tilde{u}$ į paviršiaus S_T išorę nuliu. Pratęstą funkciją pažymėkime ta pačia raide $\tilde{u}$. Tada platesnėje srityje $Q \supset Q_T$ funkcija $\tilde{u} \in \mathrm{C}^\infty(\overline{Q})$. Tarkime, Q yra kubas (žr. 5.2 pav.).



5.2 pav.

Kiekvienam skaičiui $\varepsilon_1 > 0$ egzistuoja toks polinomas $P = P(x,t)$, kad

$$\|P - \tilde{u}\|_{\mathrm{C}^1(Q)} \le \varepsilon_1.$$

Tegu $\Omega_\delta = \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \delta\},\ \delta > 0,\ \xi \in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega),\ \xi(x) = 1$, kai $x \in \Omega_\delta$. Skaičių δ parinkime taip, kad $\tilde{u}(x,t) = 0$, kai $x \in \Omega \setminus \Omega_\delta$. Tada

$$\|P - P\xi\|_{\mathrm{C}^1(\overline{Q})} = \|P(1-\xi)\|_{\mathrm{C}^1(\overline{Q \setminus Q_{T,\delta}})} \le$$

$$\le \|(1-\xi)(P - \tilde{u})\|_{\mathrm{C}^1(\overline{Q \setminus Q_{T,\delta}})} \le c(\delta)\varepsilon_1;$$

čia $Q_{T,\delta} = \Omega_\delta \times (0,T)$.

Skaičių ε_1 parinkime taip, kad

$$\|u - \xi P\|_{\mathrm{W}_2^{1,0}(Q_T)} \le \|u - \tilde{u}\|_{\mathrm{W}_2^{1,0}(Q_T)} + \|\tilde{u} - P\|_{\mathrm{W}_2^{1,0}(Q_T)} +$$

$$+ \|P - \xi P\|_{\mathrm{W}_2^{1,0}(Q_T)} \le \varepsilon/2 + \varepsilon_1 |Q_T| + c(\delta)\varepsilon_1 |Q_T| < 3\varepsilon/4.$$

Kadangi P yra polinomas, tai sandaugą $P(x,t)\xi(x)$ galima išreikšti tokiu pavidalu:

$$P(x,t)\xi(x) = \sum_{k=1}^{m} c_k(x) b_k(t);$$

čia $c_k \in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega),\ b_k \in \mathrm{C}^\infty[0,T]$. Kiekvieną funkciją c_k erdvėje $\mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)$ galima aproksimuoti bazinių elementų v_k tiesiniu dariniu. Todėl $\forall \varepsilon_2 > 0$ ir $\forall k = 1, \ldots, m$ egzistuoja tokie skaičiai $\alpha_{k1}, \ldots, \alpha_{kN}$, kad

$$\Big\| c_k - \sum_{i=1}^{N} \alpha_{ki} v_i \Big\|_{\mathrm{W}_2^1(\Omega)} \le \varepsilon_2, \quad \forall k = 1, \ldots, m.$$

Pažymėkime

$$q_k = c_k - \sum_{i=1}^{N} \alpha_{ki} v_i.$$

Reiškinys

$$\Big\| \sum_{k=1}^{m} b_k q_k \Big\|_{\mathrm{W}_2^{1,0}(Q_T)} \le \Big(\sum_{k=1}^{m} \|b_k\|_{\mathrm{L}_2(0,T)}^2 \Big)^{1/2} \Big(\sum_{k=1}^{m} \|q_k\|_{\mathrm{W}_2^1(\Omega)}^2 \Big)^{1/2} \le C\varepsilon_2.$$

Parinkime skaičių ε_2 taip, kad $C\varepsilon_2 < \varepsilon/4$. Tada

$$\Big\| u - \sum_{i=1}^{N} w_i(t) v_i(x) \Big\|_{\mathrm{W}_2^{1,0}(Q_T)} < 3\varepsilon/4 + \varepsilon/4 = \varepsilon;$$

čia

$$w_i(t) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{ki} b_k(t) \in \mathrm{C}^\infty[0,T]\,.$$

Taigi aibė $\mathfrak{M}$ yra tiršta erdvėje $\overset{\circ}{\mathrm{W}}{}_2^{1,0}(Q_T)$.

Antrasis lemos teiginys įrodomas analogiškai. Įrodysime trečiąjį lemos teiginį. Laisvai pasirinkime funkciją $u \in D_T$ ir skaičių $\varepsilon > 0$. Pagal poerdvio D_T apibrėžimą egzistuoja tokia funkcija $\tilde{u} \in \mathrm{C}^\infty(\overline{Q_T})$, lygi nuliui paviršiaus S_T bei plokštumos $t = T$ aplinkoje, kad

$$\|u - \tilde{u}\|_{\mathrm{W}_2^{1,0}(Q_T)} \le \varepsilon/2.$$

Kiekvienam $\varepsilon_1 > 0$ egzistuoja toks polinomas $P = P(x,t)$, kad

$$\|\tilde{u} - P\|_{\mathrm{C}^1(\overline{Q_T})} \le \varepsilon_1.$$

Tegu $\zeta \in \mathrm{C}^\infty[0,T]$ ir $\zeta(t) = 1$, kai $t \le T - \delta_1$, $\delta_1 > 0$. Skaičių δ_1 parinkime taip, kad $\tilde{u}(x,t) = 0$, kai $t \ge T - \delta_1$. Tada funkcija $P(x,t)\xi(x)\zeta(t) = 0$ pakankamai mažoje paviršiaus S_T bei plokštumos $t = T$ aplinkoje ir

$$\|P - P\xi\zeta\|_{\mathrm{C}^1(\overline{Q})} \le c(\delta,\delta_1)\varepsilon_1.$$

Tolesnis įrodymas yra visiškai toks pats kaip pirmojo teiginio. $\triangleright$

5.2. PIRMASIS KRAŠTINIS UŽDAVINYS. APIBENDRINTŲJŲ SPRENDINIŲ APIBRĖŽIMAI

Tarkime, operatoriaus A koeficientai $a_{ij} = a_{ji}$, a_i ir $a \in \mathrm{L}_\infty(Q_T)$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, $f \in \mathrm{L}_2(Q_T)$, $\varphi \in \mathrm{L}_2(\Omega)$. Nagrinėsime pirmąjį kraštinį uždavinį

$$\begin{cases} u_t + A\,u &= f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T; \\ u\big|_{S_T} &= 0, \quad (x,t) \in S_T; \\ u\big|_{t=0} &= \varphi(x), \quad x \in \Omega. \end{cases} \tag{5.6}$$

Bendru atveju taip suformuluotas uždavinys neturi klasikinio sprendinio. Jis netgi neturi prasmės. Norint suteikti jam tam tikrą prasmę, reikia apibrėžti apibendrinto sprendinio sąvoką. Kitais žodžiais tariant, reikia ,,patalpinti“ šį uždavinį į integralinę tapatybę. Laikinai tarkime, kad operatoriaus A koeficientai bei funkcija f yra pakankamai glodūs ir u yra glodus (5.6) lygties sprendinys. Padauginę abi šios lygties puses iš funkcijos $\eta \in \mathrm{C}^\infty(Q_T)$, gautus reiškinius suintegravę cilindru $Q_\tau = \Omega \times (0,\tau)$ ir pasinaudoję integravimo dalimis formule, gausime integralinę tapatybę

$$\int\limits_{Q_\tau} \Big(u_t\eta + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} \eta_{x_j} + \sum_{i=1}^n a_i u_{x_i} \eta + au\eta \Big)\,dxdt =$$

$$= \int\limits_{S_\tau} \frac{\partial u}{\partial N} \eta\,dSdt + \int\limits_{Q_\tau} f\eta\,dxdt, \quad \tau \in (0,T], \quad S_\tau = S \times (0,\tau).$$

Jeigu operatoriaus A koeficientai yra tik aprėžti, tai pastaroji tapatybė prasmę turi, o (5.6) lygtis neturi. Nagrinėjant pirmąjį kraštinį uždavinį, išvestinė $\partial u/\partial N$ paviršiuje S_T yra neapibrėžta. Todėl natūralu funkciją η apibrėžti taip, kad paviršiaus S_T aplinkoje ji būtų lygi nuliui. Šiuo atveju gausime tapatybę

$$\int\limits_{Q_\tau} \Big(u_t\eta + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} \eta_{x_j} + \sum_{i=1}^n a_i u_{x_i} \eta + au\eta \Big)\,dxdt = \int\limits_{Q_\tau} f\eta\,dxdt; \tag{5.7}$$

čia $\tau \in (0,T]$. Funkcijų $\eta \in \mathrm{C}^\infty(\overline{Q_T})$, lygių nuliui paviršiaus S_T aplinkoje, aibė yra tiršta erdvėje $\mathring{\mathrm{W}}_2^{1,0}(Q_T)$. Todėl pastaroji tapatybė turi prasmę su kiekviena funkcija $\eta \in \mathring{\mathrm{W}}_2^{1,0}(Q_T)$.

A p i b r ė ž i m a s. Sakysime, funkcija $u \in \mathring{\mathrm{W}}_2^{1,1}(Q_T)$ yra (5.6) uždavinio *apibendrintasis sprendinys*, jeigu $\forall \eta \in \mathring{\mathrm{W}}_2^{1,0}(Q_T)$ teisinga (5.7) integralinė tapatybė ir

$$\|u(x,t) - \varphi(x)\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)} \to 0,$$

kai $t \to 0$.

Apibendrinto sprendinio galima ieškoti platesnėje funkcijų klasėje. Tiksliau, galime atsisakyti apibendrintos išvestinės u_t egzistavimo. Šiuo atveju reikia pastebėti, kad

$$\int\limits_{Q_\tau} u_t\eta\,dxdt = \int\limits_{\Omega} u(x,t)\eta(x,t)\big|_{t=0}^{t=\tau}\,dx - \int\limits_{Q_\tau} u\eta_t\,dxdt,$$

ir vietoje $u(x,0)$ įrašyti $\varphi(x)$. Laisvai pasirinktai funkcijai $u \in \mathrm{W}_2^{1,0}(Q_T)$ integralas

$$\int\limits_{\Omega} u(x,t)\eta(x,t)\Big|_{t=\tau}\,dx$$

neturi prasmės. Todėl reikia paimti $\tau = T$ ir funkciją $\eta \in \mathrm{C}^\infty(\overline{Q_T})$ apibrėžti taip, kad ji būtų lygi nuliui ir hiperplokštumos $t = T$ aplinkoje. Tokioms funkcijoms η gausime tapatybę

$$\int\limits_{Q_T}\Big(-u\eta_t + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i}\eta_{x_j} + \sum_{i=1}^n a_i u_{x_i}\eta + au\eta\Big)\,dxdt = \\ = \int\limits_{Q_T} f\eta\,dxdt + \int\limits_{\Omega}\varphi(x)\eta(x,0)\,dx. \tag{5.8}$$

Funkcijų $\eta \in \mathrm{C}^\infty(\overline{Q_T})$, lygių nuliui paviršiaus S_T bei hiperplokštumos $t = T$ aplinkoje, aibė yra tiršta erdvėje D_T. Todėl pastaroji tapatybė turi prasmę $\forall\eta \in D_T$.

A p i b r ė ž i m a s. Sakysime, funkcija $u \in \mathring{\mathrm{W}}_2^{1,0}(Q_T)$ yra (5.6) uždavinio *apibendrintasis sprendinys*, jeigu $\forall\eta \in D_T$ teisinga (5.8) integralinė tapatybė.

Šiuo atveju į integralinę tapatybę ,,sutalpinta" ne tik lygtis su kraštine sąlyga, bet ir pradinė sąlyga.

P a s t a b o s:

1. Pagal 3.11 teoremą kiekviena funkcija u iš $\mathrm{W}_2^{1,1}(Q_T)$ arba iš $\mathring{\mathrm{W}}_2^{1,1}(Q_T)$ turi pėdsaką $u|_{t=\tau} \in \mathrm{L}_2(\Omega)$ ir

   $$\|u(\cdot,\tau) - u(\cdot,\tau-\varepsilon)\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)} \to 0,$$

   kai $\varepsilon \to 0$, t.y. $u \in \mathrm{C}([0,T] \to \mathrm{L}_2(\Omega))$.

2. Šiame skyrelyje pateikti apibendrintų sprendinių apibrėžimai neišsemia visų galimų atvejų. Smulkiau apie tai galima sužinoti [29] knygoje.

5.3. ENERGINĖS NELYGYBĖS. VIENATIES TEOREMOS

Šiame skyrelyje išvesime energinę ir jai dualią nelygybes. Po to, remdamiesi šiomis nelygybėmis, įrodysime kraštinių uždavinių apibendrintų sprendinių vienaties teoremas $\mathrm{W}_2^{1,1}(Q_T)$ ir $\mathrm{W}_2^{1,0}(Q_T)$ erdvėse.

5.1 teorema. *Tarkime, funkcija* $u \in \overset{\circ}{\mathrm{W}}{}_2^{1,1}(Q_T)$ *yra* (5.6) *uždavinio apibendrintasis sprendinys ir*

$$|\!|\!| u |\!|\!|_{Q_T} = \Big(\max_{t\in[0,T]} \|u\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} + \|u_x\|^2_{\mathrm{L}_2(Q_T)} \Big)^{1/2}.$$

Tada yra teisinga energinė nelygybė

$$|\!|\!| u |\!|\!|^2_{Q_T} \le C \Big(\|f\|^2_{\mathrm{L}_2(Q_T)} + \|\varphi\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} \Big); \tag{5.9}$$

čia konstanta C *nepriklauso nuo konkretaus elemento* u.

◁ Pagal apibendrinto sprendinio apibrėžimą $\forall \eta \in \overset{\circ}{\mathrm{W}}{}_2^{1,0}(Q_T)$ teisinga (5.7) integralinė tapatybė. Imkime šioje tapatybėje $\eta = u$. Tada pastebėję, kad

$$2uu_t = \partial u^2/\partial t$$

ir pasinaudoję integravimo dalimis formule, gausime lygybę

$$\frac{1}{2}\int_\Omega u^2(x,t)\Big|_{t=0}^{t=\tau} dx + \int_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} u_{x_j}\, dxdt =$$

$$= \int_{Q_\tau} \Big(fu - \sum_{i=1}^n a_i u_{x_i} u - au^2 \Big)\, dxdt. \tag{5.10}$$

Kadangi (5.6) lygtis yra tolygiai parabolinė, tai

$$\int_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} u_{x_j}\, dxdt \ge \nu \int_{Q_\tau} u_x^2\, dxdt.$$

Be to, operatoriaus A koeficientai a_i ir a yra aprėžti. Todėl egzistuoja tokios teigiamos konstantos μ_0 ir μ_1, kad

$$\operatorname*{vraisup}_{(x,t)\in Q_T} |a(x,t)| \le \mu_0, \quad \operatorname*{vraisup}_{(x,t)\in Q_T} \Big(\sum_{i=1}^n a_i^2(x,t) \Big)^{1/2} \le \mu_1.$$

Pasinaudoję Helderio nelygybe, įvertinsime integralą

$$\Big| \int_{Q_\tau} \Big(fu - \sum_{i=1}^n a_i u_{x_i} u - au^2 \Big)\, dxdt \Big| \le$$

$$\leq \varepsilon \int\limits_{Q_\tau} u_x^2\,dxdt + \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau} f^2\,dxdt + C_\varepsilon \int\limits_{Q_\tau} u^2\,dxdt, \quad \forall \varepsilon > 0;$$

čia $C_\varepsilon = \mu_1^2/2\varepsilon + \mu_0 + 1/2$.

Tegu $\varepsilon = \nu/2$. Tada iš (5.10) ir gautų įverčių išplaukia nelygybė

$$\int\limits_\Omega u^2(x,\tau)\,dx + \nu \int\limits_{Q_\tau} u_x^2\,dxdt \leq$$

$$\leq C \int\limits_{Q_\tau} u^2\,dxdt + \int\limits_{Q_\tau} f^2\,dxdt + \int\limits_\Omega \varphi^2\,dx; \tag{5.11}$$

čia $C = 2\mu_1^2/\nu + 2\mu_0 + 1$. Pažymėkime

$$\Phi(\tau) = \int\limits_{Q_\tau} u^2(x,t)\,dxdt.$$

Funkcija Φ yra neneigiama ir nemažėjanti. Be to, ji turi sumuojamą išvestinę

$$\Phi'(\tau) = \int\limits_\Omega u^2(x,\tau)\,dx$$

ir teisinga nelygybė

$$\Phi'(\tau) \leq C\Phi(\tau) + F(\tau);$$

čia

$$F(\tau) = \int\limits_{Q_\tau} f^2(x,t)\,dxdt + \int\limits_\Omega \varphi^2(x)\,dx.$$

Remdamiesi Gronuolo lema, galime tvirtinti, kad

$$\Phi(\tau) = \int\limits_{Q_\tau} u^2(x,t)\,dxdt \leq \frac{e^{C\tau} - 1}{C}\Big(\int\limits_{Q_\tau} f^2(x,t)\,dxdt + \int\limits_\Omega \varphi^2(x)\,dx\Big).$$

Sugretinę šią ir (5.11) nelygybes, gausime

$$\int\limits_\Omega u^2(x,\tau)\,dx + \nu \int\limits_{Q_\tau} u_x^2(x,t)\,dxdt \leq e^{C\tau}\Big(\int\limits_{Q_\tau} f^2(x,t)\,dxdt + \int\limits_\Omega \varphi^2(x)\,dx\Big).$$

Kartu yra teisinga nelygybė

$$\max_{\tau\in[0,T]} \int\limits_\Omega u^2(x,\tau)\,dx + \nu \int\limits_{Q_T} u_x^2(x,t)\,dxdt \leq$$

$$\leq e^{CT}\Big(\int\limits_{Q_T} f^2(x,t)\,dxdt + \int\limits_\Omega \varphi^2(x)\,dx\Big).$$

Akivaizdu, kad pastaroji ir (5.9) nelygybės yra ekvivalenčios. ▷

Tarkime, operatoriaus A koeficientai a_{ij} ir a_i cilidre Q_T turi aprėžtas išvestines a_{ijt} ir a_{ix_i}. Be to, tegu

$$\max_{i,j=1,\dots,n} \operatorname*{vraisup}_{(x,t)\in Q_T} |a_{ijt}(x,t)| = \mu_2, \quad \operatorname*{vraisup}_{(x,t)\in Q_T} \Big| a(x,t) - \sum_{i=1}^n a_{ix_i}(x,t) \Big| = \mu_3.$$

Tada yra teisinga teorema.

5.2 teorema. *Tarkime,* $u \in \overset{\circ}{\mathrm{W}}{}_2^{1,0}(Q_T)$ *yra* (5.6) *uždavinio apibendrintasis sprendinys,*

$$q(x,t) = \int_0^t u(x,s)\,ds.$$

Tada yra teisinga dualioji energinė nelygybė

$$\frac{\nu}{4} \max_{t\in[0,\tau]} \|q_x(x,t)\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} + \|q_t\|^2_{\mathrm{L}_2(Q_\tau)} \le$$
$$\le e^{8C\tau/\nu} \Big(\|f\|^2_{\mathrm{L}_2(Q_T)} + 2d^2\nu^{-1}\|\varphi\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} \Big); \tag{5.12}$$

čia $\tau \in [0, \nu/8C]$, $C = 1 + d^2 + n\mu_2 + d^2\mu_3$, $d = \operatorname{diam}\Omega$.

◁ Tegu $u \in \overset{\circ}{\mathrm{W}}{}_2^{1,0}(Q_T)$ yra (5.6) uždavinio apibendrintas sprendinys. Tada $\forall \eta \in D_T$ yra teisinga (5.8) integralinė tapatybė

$$\int_{Q_T} \Big(-u\eta_t + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i}\eta_{x_j} + \sum_{i=1}^n a_i u_{x_i}\eta + au\eta \Big)\,dxdt =$$
$$= \int_{Q_T} f\eta\,dxdt + \int_\Omega \varphi(x)\eta(x,0)\,dx.$$

Fiksuokime $\tau \in (0,T]$ ir apibrėžkime funkciją

$$\eta(x,t) = \begin{cases} \int_t^\tau u(x,s)\,ds, & \text{kai } t \in [0,\tau], \\ 0, & \text{kai } t \in [\tau, T]. \end{cases}$$

Taip apibrėžta funkcija $\eta \in D_T$ (patikrinkite). Be to, $\eta_t = -u$, $\eta_{tx_i} = -u_{x_i}$, kai $t < \tau$. Įstatę ją į pastarąją integralinę tapatybę, gausime

$$\int_{Q_\tau} \Big(\eta_t^2 - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\eta_{x_i t}\eta_{x_j} - \sum_{i=1}^n a_i\eta_{tx_i}\eta - a\eta_t\eta \Big)\,dxdt =$$
$$= \int_{Q_\tau} f\eta\,dxdt + \int_\Omega \varphi(x)\eta(x,0)\,dx.$$

Pasinaudoję integravimo dalimis formule, šią lygybę perrašysime taip:

$$\int\limits_{Q_\tau} \eta_t^2\,dxdt + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\eta_{x_i}\eta_{x_j}\big|_{t=0}\,dx = \int\limits_{Q_\tau} f\eta\,dxdt+$$

$$+\int\limits_{\Omega}\varphi(x)\eta(x,0)\,dx - \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ijt}\eta_{x_i}\eta_{x_j}\,dxdt + \int\limits_{Q_\tau}\Big(a - \sum_{i=1}^{n} a_{ix_i}\Big)\eta_t\eta\,dxdt.$$

Iš šios lygybės įprastu būdu išvedama nelygybė

$$\|\eta_t\|^2_{\mathrm{L}_2(Q_\tau)} + \frac{\nu}{2}\|\eta_x(x,0)\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} \le$$

$$\le \|f\|^2_{\mathrm{L}_2(Q_T)} + 2d^2\nu^{-1}\|\varphi\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} + C\|\eta_x\|^2_{\mathrm{L}_2(Q_\tau)};$$

čia $C = 1 + d^2 + n\mu_2 + d^2\mu_3$.

Pagal apibrėžimą funkcija

$$\eta(x,t) = \int\limits_{t}^{\tau} u(x,\tau)\,d\tau = q(x,\tau) - q(x,t).$$

Be to, $\eta(x,0) = q(x,\tau)$ ir

$$\|\eta_x\|^2_{\mathrm{L}_2(Q_\tau)} = \int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}\big(q_{x_i}(x,\tau) - q_{x_i}(x,t)\big)^2\,dxdt \le$$

$$\le 2\tau\|q_x(x,\tau)\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} + 2\|q_x(x,t)\|^2_{\mathrm{L}_2(Q_\tau)}.$$

Pasinaudoję šia nelygybe, gausime

$$\|q_t\|^2_{\mathrm{L}_2(Q_\tau)} + \big(\nu/2 - 2\tau C\big)\|q_x(x,\tau)\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} \le$$

$$\le \|f\|^2_{\mathrm{L}_2(Q_T)} + \frac{2d^2}{\nu}\|\varphi\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} + 2C\|q_x\|^2_{\mathrm{L}_2(Q_\tau)}. \tag{5.13}$$

Kai $\tau \le \nu/8C$, daugiklis $\nu/2 - 2\tau C \ge \nu/4$. Todėl iš (5.13) ir 1.1 lemos išplaukia nelygybė

$$\|q_t\|^2_{\mathrm{L}_2(Q_\tau)} + \frac{\nu}{4}\|q_x(x,\tau)\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} \le$$

$$\le e^{8C\tau/\nu}\big(\|f\|^2_{\mathrm{L}_2(Q_T)} + 2d^2\nu^{-1}\|\varphi\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)}\big).$$

Kartu yra teisinga (5.12) nelygybė. $\triangleright$

Klasikinėje teorijoje vienaties teoremų įrodymas paraboliniams kraštiniams uždaviniams remiasi maksimumo principu. Nagrinėjant apibendrintus sprendinius erdvėse $\mathring{\mathrm{W}}_2^{1,1}(Q_T)$ ir $\mathring{\mathrm{W}}_2^{1,0}(Q_T)$, vienaties teoremos išlieka teisingos. Jos lengvai išvedamos iš energinių nelygybių.

5.3 teorema. *Erdvėje* $\overset{\circ}{\mathrm{W}}{}_2^{1,1}(Q_T)$ *negali egzistuoti du skirtingi* (5.6) *kraštinio uždavinio apibendrinti sprendiniai.*

◁ Tegu u_1 ir u_2 yra du (5.6) uždavinio apibendrinti sprendiniai $\overset{\circ}{\mathrm{W}}{}_2^{1,1}(Q_T)$ erdvėje. Tada jų skirtumas $u = u_1 - u_2 \in \overset{\circ}{\mathrm{W}}{}_2^{1,1}(Q_T)$ yra kraštinio uždavinio

$$u_t + A\,u = 0, \quad (x,t) \in Q_T; \quad u\big|_{S_T} = 0; \quad u\big|_{t=0} = 0$$

apibendrintas sprendinys. Todėl yra teisinga energinė nelygybė

$$\max_{t\in[0,T]} \|u\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} + \|u_x\|^2_{\mathrm{L}_2(Q_T)} \le 0.$$

Iš jos išplaukia, kad $\|u\|_{\mathrm{W}_2^{1,1}(Q_T)} = 0$. Taigi bet kokie du (5.6) uždavinio apibendrinti sprendiniai erdvėje $\overset{\circ}{\mathrm{W}}{}_2^{1,1}(Q_T)$ sutampa. ▷

5.4 teorema. *Tarkime, operatoriaus* A *koeficientai* a_{ij}, a_i, a *ir jų išvestinės* a_{ijt} *ir* a_{ix_i} *yra aprėžtos. Tada erdvėje* $\overset{\circ}{\mathrm{W}}{}_2^{1,0}(Q_T)$ *bet kokie du* (5.6) *kraštinio uždavinio apibendrinti sprendiniai sutampa.*

◁ Tegu u_1, u_2 yra du apibendrinti (5.6) uždavinio sprendiniai $\overset{\circ}{\mathrm{W}}{}_2^{1,0}(Q_T)$ erdvėje ir $u = u_1 - u_2$. Tada yra teisinga dualioji energinė nelygybė

$$\frac{\nu}{4}\max_{t\in[0,\tau]} \|q_x(x,t)\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} + \|q_t\|^2_{\mathrm{L}_2(Q_\tau)} \le 0, \quad \tau \in (0, \nu/8C];$$

čia

$$q(x,t) = \int_0^t u(x,s)\,ds.$$

Iš jos išplaukia, kad $u = 0$ cilindre $\Omega \times [0,\tau]$. Funkcija u tenkina (5.8) integralinę tapatybę, kurioje funkcijos f ir φ lygios nuliui. Todėl ją galima perrašyti taip:

$$\int_\tau^T \int_\Omega \Big(-u\eta_t + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} \eta_{x_j} + \sum_{i=1}^n a_i u_{x_i} + au \Big)\, dxdt = 0.$$

Kartu galime tvirtinti, kad u yra kraštinio uždavinio

$$\begin{cases} u_t + A\,u &= 0, \quad (x,t) \in \Omega \times (\tau, T); \\ u\big|_{S_{\tau,T}} &= 0, \quad (x,t) \in S_{\tau,T} = S \times (\tau, T); \\ u\big|_{t=\tau} &= 0, \quad x \in \Omega, \end{cases}$$

apibendrintas sprendinys ir cilindre $\Omega \times [\tau, 2\tau]$ yra teisinga dualioji energinė nelygybė. Todėl šiame cilindre $u = 0$. Taip toliau samprotaudami, gausime, kad $u = 0$ visame cilindre Q_T. ▷

P a s t a b a. Reikalavimas, kad koeficientai a_{ij} ir a_i turėtų aprėžtas išvestines a_{ijt} ir a_{ix_i}, nėra esminis. Teorema išlieka teisinga ir tuo atveju, kai koeficientai a_{ij} ir a_i yra tik aprėžti (žr. [29]). Šiuo atveju įrodoma, kad apibendrinti sprendiniai iš $\overset{\circ}{\mathrm{W}}{}_2^{1,0}(Q_T)$ yra erdvės $\overset{\circ}{\mathrm{W}}{}_2^{1,1/2}(Q_T)$ elementai.

5.4. APIBENDRINTOJO SPRENDINIO EGZISTAVIMAS. GALIORKINO METODAS

Tarkime, operatoriaus A koeficientai a_{ij}, a_i ir a bei jų išvestinės a_{ijt} yra aprėžtos cilindre Q_T, $f \in \mathrm{L}_2(Q_T)$, $\varphi \in \mathrm{W}_2^1(\Omega)$. Įrodysime, kad erdvėje $\mathring{\mathrm{W}}_2^{1,1}(Q_T)$ pirmasis kraštinis uždavinys turi bent vieną apibendrintą sprendinį.

Priminsime, kad funkcija u yra (5.6) uždavinio apibendrintas sprendinys erdvėje $\mathring{\mathrm{W}}_2^{1,1}(Q_T)$, jeigu teisinga (5.7) integralinė tapatybė. Perrašykime šią tapatybę taip:

$$\int_0^\tau \Big((u_t,\eta) + A(u,\eta) - (f,\eta)\Big)\,dt = 0, \quad \tau \in (0,T], \quad \forall \eta \in \mathring{\mathrm{W}}_2^{1,0}(Q_T);$$

čia $(\cdot,\cdot)$ – skaliarinė sandauga erdvėje $\mathrm{L}_2(\Omega)$,

$$A(u,\eta) = \int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} \eta_{x_j} + \sum_{i=1}^n a_i u_{x_i} \eta + au\eta\Big)\,dx.$$

Jeigu $u \in \mathring{\mathrm{W}}_2^{1,1}(Q_T)$, $\eta \in \mathring{\mathrm{W}}_2^{1,0}(Q_T)$ ir $f \in \mathrm{L}_2(Q_T)$, tai (u_t,η), $A(u,\eta)$ ir (f,η) yra sumuojamos intervale $(0,T)$ funkcijos.

Tegu $\{v_k\}_{k=1}^\infty$ yra bazė erdvėje $\mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)$, ortonormuota erdvėje $\mathrm{L}_2(\Omega)$. Apytikslio pirmojo kraštinio uždavinio apibendrinto sprendinio ieškosime tokiu pavidalu:

$$u^{(N)}(x,t) = \sum_{k=1}^N w_k^{(N)}(t) v_k(x);$$

čia funkcijos $w_k^{(N)} = (u^{(N)}, v_k)$ randamos iš sąlygų:

$$(u_t^{(N)}, v_k) + A(u^{(N)}, v_k) = (f, v_k), \quad \forall k = 1,\ldots,N; \tag{5.14}$$

$$u^{(N)}\big|_{t=0} = \varphi^{(N)}(x) := \sum_{k=1}^N (\varphi, v_k) v_k(x). \tag{5.15}$$

Fiksuokime skaičių N ir pažymėkime $w_k^{(N)} = w_k$. Tada šias sąlygas galima perrašyti taip:

$$\begin{cases} w_k'(t) + \sum\limits_{j=1}^N \alpha_{kj} w_j(t) = f_k(t), \quad t \in (0,T), \\ w_k(0) = \varphi_k, \end{cases} \quad k = 1,\ldots,N;$$

čia $\alpha_{kj} = A(v_k, v_j)$, $f_k = (f, v_k)$, $\varphi_k = (\varphi, v_k)$. Taigi gavome Koši uždavinį pirmosios eilės tiesinių paprastųjų diferencialinių lygčių sistemai. Pastarąjį uždavinį galima užrašyti vektoriniu pavidalu

$$\begin{cases} \mathbf{w}'(t) = \mathfrak{A}\mathbf{w}(t) + \mathbf{f}(t), \quad t \in (0,T), \\ \mathbf{w}(0) = \boldsymbol{\varphi}; \end{cases} \tag{5.16}$$

čia $\mathfrak{A} = \{-\alpha_{kj}\}$ yra $N \times N$ eilės matrica, $\mathbf{w} = \mathrm{colon}(w_1, \dots, w_N)$ – ieškoma, o $\mathbf{f} = \mathrm{colon}(f_1, \dots, f_N)$ ir $\boldsymbol{\varphi} = \mathrm{colon}(\varphi_1, \dots, \varphi_N)$ – žinomos funkcijos.

Tegu $\mathfrak{M} = \{\mathbf{w} = \mathrm{colon}(w_1, \dots, w_N)\}$ yra aibė tokių absoliučiai tolydžių segmente $[0, T]$ funkcijų, kad $w_i' \in \mathrm{L}_2(0, T), \forall i = 1, \dots, N$. Įrodysime, kad aibėje $\mathfrak{M}$ egzistuoja vienintelis (5.16) Koši uždavinio sprendinys. Tiksliau, yra teisinga tokia lema.

5.3 lema. *Tarkime, matricos* $\mathfrak{A}$ *elementai yra aprėžtos, mačios intervale* $(0, T)$ *funkcijos,* $\mathbf{f} \in \mathrm{L}_2(0, T)$. *Tada aibėje* $\mathfrak{M}$ *egzistuoja vienintelis* (5.16) *Koši uždavinio sprendinys.*

$\triangleleft$ Funkcija $\mathbf{w} \in \mathfrak{M}$ yra (5.16) Koši uždavinio sprendinys tada ir tik tada, kai ji yra integralinės lygties

$$\mathbf{w}(t) = \boldsymbol{\varphi} + \int_0^t \mathbf{f}(s)\, ds + \int_0^t \mathfrak{A}(s)\mathbf{w}(s)\, ds \tag{5.17}$$

sprendinys erdvėje $\mathrm{L}_2(0, T)$. Todėl pakanka įrodyti, kad (5.17) lygtis turi vienintelį sprendinį erdvėje $\mathrm{L}_2(0, T)$. Jo ieškosime nuosekliųjų artinių metodu. Tegu

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_0(t) &= \boldsymbol{\varphi} + \int_0^t \mathbf{f}(s)\, ds, \\ \mathbf{w}_1(t) &= \int_0^t \mathfrak{A}(s)\mathbf{w}_0(s)\, ds, \\ &\vdots \\ \mathbf{w}_n(t) &= \int_0^t \mathfrak{A}(s)\mathbf{w}_{n-1}(s)\, ds \end{aligned}$$

ir t.t.. Taikant matematinės indukcijos metodą, galima įrodyti, kad

$$|\mathbf{w}_n(t)| \le \frac{M^n t^n}{n!} \max_{t \in [0,T]} |\mathbf{w}_0(t)|, \quad n = 0, 1, \dots;$$

čia $M = \max_{t \in [0,T]} |\mathfrak{A}(t)|$. Iš šio įverčio išplaukia, kad eilutė

$$\mathbf{w}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{w}_i(t)$$

tolygiai konverguoja intervale $[0, T]$. Be to, funkcija $\mathbf{w}(t)$ yra absoliučiai tolydi, tenkina (5.17) lygtį ir taške $t = 0$ lygi $\boldsymbol{\varphi}$. Kartu galime tvirtinti, kad jos išvestinė $\mathbf{w}' \in \mathrm{L}_2(0, T)$.

Įrodysime, kad sukonstruotas sprendinys yra vienintelis. Tegu $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in \mathfrak{M}$ yra du (5.17) lygties sprendiniai. Tada jų skirtumas $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2$ yra homogeninės lygties

$$\mathbf{w}(t) = \int_0^t \mathfrak{A}(s)\mathbf{w}(s)\, ds := \mathfrak{A}\mathbf{w}(t)$$

sprendinys. Iš jos išplaukia, kad

$$\mathbf{w}(t) = \mathfrak{A}\mathbf{w}(t) = \mathfrak{A}^2\mathbf{w}(t) = \cdots = \mathfrak{A}^n\mathbf{w}(t).$$

Pakankamai dideliems n

$$\max_{t\in[0,T]} |\mathbf{w}(t)| = \max_{t\in[0,T]} |\mathfrak{A}^n\mathbf{w}(t)| \le \frac{M^nT^n}{n!} \max_{t\in[0,T]} |\mathbf{w}(t)| < \max_{t\in[0,T]} |\mathbf{w}(t)|.$$

Todėl $\mathbf{w}(t) = 0$ ir $\mathbf{w}_1(t) = \mathbf{w}_2(t)$. Taigi bet kokie du (5.17) lygties sprendiniai sutampa. $\triangleright$

Iš šios lemos išplaukia, kad $\forall N$ egzistuoja tokios funkcijos $w_1^{(N)}, \dots, w_N^{(N)}$, kad

$$u^{(N)} = \sum_{k=1}^{N} w_k^{(N)}(t)v_k(x)$$

tenkina (5.14), (5.15) sąlygas. Kartu galime tvirtinti, kad su kiekviena funkcija $\eta = \sum_{k=1}^{N} q_k(t)v_k(x)$, q_k – glodžios funkcijos, yra teisinga integralinė tapatybė

$$\int_0^\tau \Big((u_t^{(N)}, \eta) + A(u^{(N)}, \eta) - (f, \eta)\Big)\,dt = 0; \quad \tau \in [0, T]. \tag{5.18}$$

Imkime šioje tapatybėje $\eta = u^{(N)}$. Tada pakartoję energinės nelygybės išvedimą, gausime

$$\max_{t\in[0,T]} \|u^{(N)}\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} + \|u_x^{(N)}\|^2_{\mathrm{L}_2(Q_T)} \le$$

$$\le C\Big(\|f\|^2_{\mathrm{L}_2(Q_T)} + \|\varphi^{(N)}\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)}\Big) \le C\Big(\|f\|^2_{\mathrm{L}_2(Q_T)} + \|\varphi\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)}\Big).$$

Imkime (5.18) tapatybėje $\eta = u_t^{(N)}$. Tada pasinaudoję integravimo dalimis formule, gausime lygybę

$$\int_0^\tau \big(u_t^{(N)}, u_t^{(N)}\big)\,dt + \frac{1}{2}\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_{x_i}^{(N)}u_{x_j}^{(N)}\Big|_{t=0}^{t=\tau} dx =$$

$$= \int_{Q_\tau} \Big(\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ijt}u_{x_i}^{(N)}u_{x_j}^{(N)} - \sum_{i=1}^{n} a_iu_{x_i}^{(N)}u_t^{(N)} - au^{(N)}u_t^{(N)} + fu_t^{(N)}\Big)\,dxdt.$$

Iš jos įprastai išvedama nelygybė

$$\int_{Q_\tau} \Big(u_t^{(N)}\Big)^2 dxdt + \int_\Omega \Big(u_x^{(N)}\Big)^2\Big|_{t=\tau} dx \le$$

$$\le C\Big(\int_{Q_T} f^2\,dxdt + \int_\Omega \big(\varphi_x^2 + \varphi^2\big)\,dx\Big).$$

Kartu galime tvirtinti, kad

$$\int\limits_{Q_T} \left(u_t^{(N)}\right)^2 dxdt + \max_{\tau\in[0,T]} \int\limits_{\Omega} \left(u_x^{(N)}\right)^2\Big|_{t=\tau} dx \le$$

$$\le C\Big(\int\limits_{Q_T} f^2\, dxdt + \int\limits_{\Omega} \left(\varphi_x^2 + \varphi^2\right) dx\Big) < \infty.$$

Taigi erdvėje $\overset{\circ}{\mathrm{W}}{}_2^{1,1}(Q_T)$ seka $\{u^{(N)}\}$ yra aprėžta. Todėl iš jos galima išskirti posekį, silpnai konverguojantį į elementą $u \in \overset{\circ}{\mathrm{W}}{}_2^{1,1}(Q_T)$. Be to, pastaroji nelygybė išlieka teisinga ir ribinei funkcijai u, t.y.

$$\int\limits_{Q_T} u_t^2\, dxdt + \max_{\tau\in[0,T]} \int\limits_{\Omega} u_x^2(x,t)\Big|_{t=\tau} dx \le$$

$$\le C\Big(\int\limits_{Q_T} f^2\, dxdt + \int\limits_{\Omega} \left(\varphi_x^2 + \varphi^2\right) dx\Big). \tag{5.19}$$

Įrodysime, kad u yra pirmojo kraštinio uždavinio apibendrintas sprendinys. Tegu $M \le N$, $\eta = \sum\limits_{k=1}^{M} q_k(t) v_k(x)$, $q_k \in \mathrm{C}^\infty[0,T]$. Su kiekviena taip apibrėžta funkcija η yra teisinga integralinė tapatybė

$$\int\limits_0^\tau \big((u_t^{(N)}, \eta) + A(u^{(N)}, \eta) - (f, \eta)\big)\, dt = 0, \quad \tau \in (0, T].$$

Tegu posekis $\{u^{(N_k)}\}$ silpnai konverguoja į elementą u. Tada ribinė funkcija u tenkins integralinę tapatybę

$$\int\limits_0^\tau \big((u_t, \eta) + A(u, \eta) - (f, \eta)\big)\, dt = 0, \quad \tau \in [0, T],\ \forall \eta = \sum_{k=1}^{M} q_k(t) v_k(x).$$

Pagal 5.2 lemą tokių funkcijų aibė yra tiršta erdvėje $\overset{\circ}{\mathrm{W}}{}_2^{1,0}(Q_T)$. Todėl pastaroji tapatybė teisinga $\forall \eta \in \overset{\circ}{\mathrm{W}}{}_2^{1,0}(Q_T)$.

Įrodysime, kad funkcija u tenkina pradinę sąlygą. Pagal Minkovskio nelygybę

$$\|u(x,t) - \varphi(x)\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)} \le$$

$$\le \|u - u^{(N)}\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)} + \|u^{(N)} - \varphi^{(N)}\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)} + \|\varphi^{(N)} - \varphi\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)}.$$

Kiekviena aprėžta aibė $\overset{\circ}{\mathrm{W}}{}_2^{1,1}(Q_T)$ erdvėje yra sąlyginis kompaktas $\mathrm{L}_2(\Omega)$ erdvėje. Todėl iš kiekvienos aprėžtos erdvėje $\overset{\circ}{\mathrm{W}}{}_2^{1,1}(Q_T)$ sekos galima išskirti konverguojantį erdvėje $\mathrm{L}_2(\Omega)$ posekį. Tegu $u^{(N_k)} \to u$ erdvėje $\mathrm{L}_2(\Omega)$. Be to, konvergavimas yra tolygus $t \in [0, T]$ atžvilgiu.

Laisvai pasirenkame skaičių $\varepsilon > 0$. Pagal jį randame tokį skaičių k_0, kad

$$\|u - u^{(N_k)}\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)} < \varepsilon/3, \quad \forall k \geq k_0.$$

Norma

$$\|\varphi^{(N_k)} - \varphi\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)} \leq \sqrt{\sum_{i=N_k+1}^{\infty} (\varphi, v_i)^2} \to 0,$$

kai $N_k \to \infty$. Todėl egzistuoja toks skaičius k_1, kad

$$\|\varphi^{(N_k)} - \varphi\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)} \leq \varepsilon/3, \quad \forall k \geq k_1.$$

Fiksuokime kokį nors $k \geq \max\{k_0, k_1\}$. Norma

$$\|u^{(N_k)} - \varphi^{(N_k)}\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N_k} \big(w_i^{(N_k)}(t) - w_i^{(N_k)}(0)\big)^2}.$$

Funkcijos $w_i^{(N_k)}$ yra absoliučiai tolydžios. Todėl galima nurodyti tokį skaičių $t_0 > 0$, kad

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{N_k} \big(w_i^{(N_k)}(t) - w_i^{(N_k)}(0)\big)^2} \leq \varepsilon/3,$$

kai $t \leq t_0$. Tokiems t norma

$$\|u(x,t) - \varphi(x)\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)} \leq \varepsilon.$$

Taigi $u(x,t) \to \varphi(x)$ erdvėje $\mathrm{L}_2(\Omega)$, kai $t \to 0$. Kartu galime tvirtinti, kad teisinga tokia teorema.

5.5 teorema. *Tarkime,* a_{ij}, a_{ijt}, a_i *ir* $a \in \mathrm{L}_\infty(Q_T)$, $f \in \mathrm{L}_2(Q_T)$, $\varphi \in \mathrm{W}_2^1(\Omega)$. *Tada erdvėje* $\mathring{\mathrm{W}}_2^{1,1}(Q_T)$ *egzistuoja vienintelis* (5.6) *uždavinio apibendrintasis sprendinys.*

Analogiškai galima įrodyti (5.6) uždavinio apibendrinto sprendinio egzistavimą erdvėje $\mathring{\mathrm{W}}_2^{1,0}(Q_T)$. Tiksliau, teisinga tokia teorema.

5.6 teorema. *Tarkime,* a_{ij}, a_i *ir* $a \in \mathrm{L}_\infty(Q_T)$, $f \in \mathrm{L}_2(Q_T)$, $\varphi \in \mathrm{L}_2(\Omega)$. *Tada erdvėje* $\mathring{\mathrm{W}}_2^{1,0}(Q_T)$ *egzistuoja bent vienas* (5.6) *uždavinio apibendrintasis sprendinys*

Šios teoremos įrodymą galima rasti [27] knygoje.

5.5. FURJĖ METODAS

Tarkime, operatoriaus A koeficientai nepriklauso nuo kintamojo t. Be to, tegu (dėl paprastumo) koeficientai $a_i = 0$, $\forall i = 1, \dots, n$, t.y. operatorius

$$A\,u = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{dx_i}\big(a_{ij}(x)u_{x_j}\big) + a(x)u$$

yra savijungis. Tada pirmojo, antrojo ir trečiojo kraštinių uždavinių apibendrintų sprendinių galima ieškoti Furjė metodu (trečiojo kraštinio uždavinio atveju koeficientas σ taip pat turi nepriklausyti nuo kintamojo t). Čia nagrinėsime pirmąjį kraštinį uždavinį

$$u_t + A\,u = f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T; \quad u\big|_{S_T} = 0; \quad u\big|_{t=0} = \varphi(x). \tag{5.20}$$

Ši uždavinį patogu išskaidyti į du paprastesnius:

$$u_t + A\,u = 0, \quad (x,t) \in Q_T; \quad u\big|_{S_T} = 0; \quad u\big|_{t=0} = \varphi(x), \tag{5.21}$$

$$u_t + A\,u = f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T; \quad u\big|_{S_T} = 0; \quad u\big|_{t=0} = 0. \tag{5.22}$$

Iš pradžių nagrinėsime (5.21) uždavinį. Tegu $u(x,t) = w(t)\,v(x)$. Įstatę taip apibrėžtą funkciją į homogeninę lygtį

$$u_t + A\,u = 0, \quad (x,t) \in Q_T,$$

ir atskyrę kintamuosius, gausime lygybę

$$-\frac{w'(t)}{w(t)} = \frac{A\,v(x)}{v(x)}.$$

Reiškinys kairiojoje šios lygybės pusėje yra kintamojo t, o dešiniojoje – kintamojo x funkcija. Šios funkcijos gali sutapti tik tuo atveju, kai kiekviena iš jų yra konstanta. Pažymėkime bendrąją jų reikšmę raide λ. Tada funkcija $u = w\,v$ yra homogeninės lygties $u_t + A\,u = 0$ sprendinys, jeigu funkcija w yra lygties

$$w' + \lambda\,w = 0, \tag{5.23}$$

o funkcija v lygties

$$A\,v = \lambda\,v \tag{5.24}$$

sprendinys. Be to, funkcija $u = w\,v$ tenkins pirmąją homogeninę kraštinę sąlygą, jeigu šią sąlygą tenkins funkcija v. Taigi funkcijos v atžvilgiu gavome Šturmo–Liuvilio uždavinį: *reikia rasti tas parametro λ reikšmes, kurioms egzistuoja netrivialus* (5.24) *lygties sprendinys, tenkinantis kraštinę sąlygą*

$$v\big|_S = 0. \tag{5.25}$$

Šį uždavinį nagrinėjome 4.5 skyrelyje. Pagal 4.6 teoremą tikrinės reikšmės $\{\lambda_k\}$ yra artėjančių į $+\infty$ realiųjų skaičių seka; neigiamų tikrinių reikšmių gali būti tik baigtinis skaičius; tikrinių funkcijų aibė $\{v_k\}$ yra pilna ortogonali erdvėse $\mathrm{L}_2(\Omega)$ ir $\mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)$ funkcijų sistema. Be to, ją galima parinkti taip, kad vienoje iš šių erdvių ji būtų ortonormuota.

Tarkime[3], $a(x) > 0, \forall x \in \Omega$. Tada visos tikrinės reikšmės $\lambda_k > 0$. Be to, tegu tikrinės funkcijos v_k yra ortonormuotos erdvėje $\mathrm{L}_2(\Omega)$, t.y.

$$(v_k, v_l) = \int\limits_\Omega v_k(x) v_l(x)\, dx = \delta_k^l, \quad k, l = 1, 2, \dots$$

Tada

$$[v_k, v_l] = \int\limits_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} v_{kx_i} v_{lx_j} + a v_k v_l \Big)\, dx = \lambda_k \delta_k^l.$$

Jeigu funkcija $\varphi \in \mathrm{L}_2(\Omega)$, tai

$$\|\varphi\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} = \sum_{k=1}^\infty \varphi_k^2 < \infty;$$

čia $\varphi_k = (\varphi, v_k)$ – funkcijos φ Furjė koeficientai. Jeigu funkcija $\varphi \in \mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)$, tai

$$\|\varphi\|^2 = [\varphi, \varphi] = \sum_{k=1}^\infty \lambda_k \varphi_k^2 < \infty.$$

Imkime (5.23) lygtyje $\lambda = \lambda_k$. Tada bendrasis šios lygties sprendinys

$$w_k(t) = C_k e^{-\lambda_k t}.$$

Apytikslio (5.21) uždavinio sprendinio ieškosime tokiu pavidalu:

$$u^{(N)}(x, t) = \sum_{k=1}^N C_k e^{-\lambda_k t} v_k(x).$$

Tiesiogiai galima įsitikinti, kad

$$(u_t^{(N)}, v_k) + [u^{(N)}, v_k] = 0, \quad t \geq 0, \quad k = 1, \dots, N.$$

[3] Ši prielaida nėra esminė. Iš tikrųjų vietoje ieškomos funkcijos u apibrėžkime kitą ieškomą funkciją v formule:

$$u(x, t) = e^{\lambda t} v(x, t).$$

Tada funkcijos v atžvilgiu gausime lygtį

$$v_t - \sum_{i,j=1}^n \frac{d}{dx_i} \quad a_{ij} v_{x_j} \quad + (\lambda + a) v = 0,$$

kurioje koeficientas prie ieškomos funkcijos v lygus $a + \lambda$. Todėl skaičių λ pakanka apibrėžti taip, kad $a + \lambda > 0$.

Kadangi tikrinių funkcijų aibė $\{v_k\}$ yra tiršta erdvėje $\mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)$, tai

$$(u_t^{(N)},\eta)+[u^{(N)},\eta]=0,\quad t\geq 0,\quad \forall\eta\in\mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega). \tag{5.26}$$

Pareikalavę, kad apytikslis sprendinys taške $t=0$ tenkintų sąlygą

$$u^{(N)}\Big|_{t=0}=\varphi^{(N)}=\sum_{k=1}^{N}\varphi_k v_k,$$

gausime $C_k=\varphi_k$ (atkreipsime dėmesį, kad konstantos C_k čia nepriklauso nuo indekso N).

Sudarykime formalią eilutę

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k e^{-\lambda_k t}v_k(x).$$

Funkcija u, apibrėžta šia eilute, yra formalus (5.21) uždavinio sprendinys. Ištirsime šios eilutės konvergavimą.

Tarkime, $\varphi\in\mathrm{L}_2(\Omega)$. Tada

$$\Big\|\sum_{k=N}^{N+M}\varphi_k e^{-\lambda_k t}v_k(x)\Big\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)}\leq\sum_{k=N}^{N+M}\varphi_k^2\ \to\ 0,$$

kai $N,M\to\infty$ (tolygiai t atžvilgiu). Todėl funkcija $u\in\mathrm{C}([0,T]\to\mathrm{L}_2(\Omega))$. Reiškinys

$$\int_0^T\Big|\sum_{k=N}^{N+M}\varphi_k e^{-\lambda_k t}v_k(x)\Big|^2dt=\int_0^T\sum_{k=N}^{N+M}\varphi_k^2 e^{-2\lambda_k t}\lambda_k\,dt\leq\sum_{k=N}^{N+M}\varphi_k^2\to 0,$$

kai $N,M\to\infty$. Iš čia išplaukia, kad

$$\int_{Q_T}\Big(\sum_{k=N}^{N+M}\varphi_k e^{-\lambda_k t}v_{kx_i}(x)\Big)^2dxdt\ \to\ 0,\quad \forall i=1,\dots,n,$$

kai $N,M\to\infty$. Todėl galime tvirtinti, kad seka $\{u^{(N)}\}$ konverguoja į funkciją u erdvėje $\mathring{\mathrm{W}}_2^{1,0}(Q_T)$ ir $u\in\mathring{\mathrm{W}}_2^{1,0}(Q_T)$. Įrodysime, kad u yra apibendrintas sprendinys.

Tegu q_k yra be galo diferencijuojamos intervale $[0,T]$ ir lygios nuliui taško $t=T$ aplinkoje funkcijos. Imkime (5.26) formulėje $\eta=v_k$, gautus reiškinius padauginkime iš q_k, susumuokime pagal k nuo 1 iki M ir suintegruokime kintamojo t atžvilgiu nuo 0 iki T. Tada gausime integralinę tapatybę

$$\int_{Q_T}\Big(u_t^{(N)}\xi+\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}u_{x_j}^{(N)}\xi_{x_i}+au^{(N)}\xi\Big)\,dxdt=0;$$

čia $\xi(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{M} q_k(t)v_k(x)$. Pasinaudoję integravimo dalimis formule, perrašykime šią tapatybę taip:

$$\int\limits_{Q_T} \Big(-u^{(N)}\xi_t + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u^{(N)}_{x_j}\xi_{x_i} + au^{(N)}\xi\Big)\,dxdt = \int\limits_{\Omega} u^{(N)}(x,0)\xi(x,0)\,dx.$$

Seka $\{u^{(N)}\}$ konverguoja į u erdvėje $\mathring{\mathrm{W}}_2^{1,0}(Q_T)$, o seka $\{u^{(N)}(\cdot,0)\}$ konverguoja į φ erdvėje $\mathrm{L}_2(\Omega)$. Todėl šioje tapatybėje galima pereiti prie ribos. Tiksliau, galime tvirtinti, kad teisinga tokia tapatybė:

$$\int\limits_{Q_T} \Big(-u\xi_t + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_{x_j}\xi_{x_i} + au\xi\Big)\,dxdt = \int\limits_{\Omega} \varphi(x)\xi(x,0)\,dx.$$

Pagal 5.2 lemą aibė

$$\Big\{\xi : \xi(x,t) = \sum_{k=1}^{M} q_k(t)v_k(x)\Big\}$$

yra tiršta erdvėje D_T. Todėl pastaroji tapatybė teisinga $\forall\xi \in D_T$, o funkcija u yra apibendrintas (5.21) uždavinio sprendinys erdvėje $\mathring{\mathrm{W}}_2^{1,0}(Q_T)$.

Tarkime, $\varphi \in \mathring{\mathrm{W}}_2^{1}(\Omega)$. Tada reiškinys

$$\Big\| \sum_{k=N}^{N+M} \varphi_k e^{-\lambda_k t} v_k(x) \Big\|^2 = \sum_{k=N}^{N+M} \varphi_k^2 e^{-2\lambda_k t}\lambda_k \le \sum_{k=N}^{N+M} \varphi_k^2 \lambda_k \;\to\; 0,$$

kai $N, M \to \infty$ (tolygiai kintamojo t atžvilgiu). Todėl

$$u \in \mathrm{C}([0,T] \to \mathring{\mathrm{W}}_2^{1}(\Omega))$$

ir

$$\| u(x,t) - \varphi(x) \| \to 0,$$

kai $t \to 0$. Kartu galime tvirtinti, kad $u^{(N)}_{x_i} \to u_{x_i}$ erdvėje $\mathrm{L}_2(Q_T)$, kai $N \to \infty$, $\forall i = 1,\dots,n$.

Reiškinys

$$\Big\| \sum_{k=N}^{N+M} \lambda_k\varphi_k e^{-\lambda_k t} v_k(x) \Big\|^2_{\mathrm{L}_2(Q_T)} = \int\limits_0^T \sum_{k=N}^{N+M} \lambda_k^2\varphi_k^2 e^{-2\lambda_k t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=N}^{N+M} \lambda_k\varphi_k^2\Big(1 - e^{-2\lambda_k T}\Big) \le \sum_{k=N}^{N+M} \lambda_k\varphi_k^2 \to 0,$$

kai $N, M \to \infty$. Todėl $u_t^{(N)} \to u_t$ erdvėje $\mathrm{L}_2(Q_T)$. Kartu galime tvirtinti, kad $u^{(N)} \to u$ erdvėje $\mathring{\mathrm{W}}_2^{1,1}(Q_T)$, kai $N \to \infty$ ir $u \in \mathring{\mathrm{W}}_2^{1,1}(Q_T)$.

Įrodysime, kad taip apibrėžta funkcija u yra (5.21) uždavinio apibendrintas sprendinys erdvėje $\mathring{\mathrm{W}}_2^{1,1}(Q_T)$. Imkime (5.26) formulėje $\eta = v_k$, gautus reiškinius padauginkime iš $q_k \in \mathrm{C}^\infty[0,T]$, susumuokime pagal k nuo 1 iki M ir suintegruokime kintamojo t atžvilgiu nuo 0 iki τ. Tada gausime integralinę tapatybę

$$\int\limits_{Q_\tau} \Big(u_t^{(N)} \xi + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_j}^{(N)} \xi_{x_i} + a u^{(N)} \xi \Big)\, dxdt = 0, \quad \xi = \sum_{k=1}^M q_k v_k.$$

Kadangi $u^{(N)} \to u$ erdvėje $\mathring{\mathrm{W}}_2^{1,1}(Q_T)$, tai šioje tapatybėje galima pereiti prie ribos, kai $N \to \infty$. Kartu galime tvirtinti, kad

$$\int\limits_{Q_\tau} \Big(u_t \xi + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_j} \xi_{x_i} + a u \xi \Big)\, dxdt = 0, \quad \forall \xi = \sum_{k=1}^M q_k v_k.$$

Pagal 5.2 lemą aibė

$$\Big\{ \xi : \xi(x,t) = \sum_{k=1}^N q_k(t) v_k(x) \Big\}$$

yra tiršta $\mathring{\mathrm{W}}_2^{1,0}(Q_T)$ erdvėje. Todėl $\forall \xi \in \mathring{\mathrm{W}}_2^{1,0}(Q_T)$ yra teisinga pastaroji tapatybė. Dabar belieka tik pastebėti, kad

$$\|u(x,t) - \varphi(x)\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)} \le C |\!|\!| u(x,t) - \varphi(x) |\!|\!| \to 0,$$

kai $t \to 0$. Taigi $u \in \mathring{\mathrm{W}}_2^{1,1}(Q_T)$ yra (5.21) uždavinio apibendrintas sprendinys.

Nehomogeninės lygties atveju formalusis (5.22) uždavinio sprendinys

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^\infty w_k(t) v_k(x); \tag{5.27}$$

čia:

$$w_k(t) = \int\limits_0^t f_k(\tau) e^{-\lambda_k (t-\tau)}\, d\tau$$

yra Koši uždavinio

$$w_k'(t) + \lambda_k w_k(t) = f_k(t), \quad w_k(0) = 0,$$

sprendinys, $f_k = (f, v_k)$ – funkcijos f Furjė koeficientai.

Ištirsime (5.27) eilutės konvergavimą. Tarkime, $f \in \mathrm{L}_2(Q_T)$. Tada

$$\|f\|^2_{\mathrm{L}_2(Q_T)} = \sum_{k=1}^\infty \int\limits_0^T f_k^2(t)\, dt$$

ir b.v. $t \in (0,T)$ funkciją f galima skleisti Furjė eilute

$$f(x,t) = \sum_{k=1}^\infty f_k(t) v_k(x).$$

Reiškinys

$$\Big\| \sum_{k=N}^{N+M} w_k(t)v_k(x) \Big\|^2 = \sum_{k=N}^{N+M} w_k^2(t)\lambda_k \leq \frac{1}{2} \sum_{k=N}^{N+M} \int\limits_0^T f_k^2(\tau)\, d\tau \to 0,$$

kai $N, M \to \infty$ (tolygiai kintamojo t atžvilgiu). Todėl

$$u \in \mathrm{C}\big([0,T] \to \mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)\big)$$

ir $\|u\| \to 0$, kai $t \to 0$. Kartu galime tvirtinti, kad $u_{x_i} \in \mathrm{L}_2(Q_T)$ ir $u_{x_i}^{(N)} \to u_{x_i}$ erdvėje $\mathrm{L}_2(Q_T)$, kai $N \to \infty$.

Apytikslis (5.22) uždavinio sprendinys

$$u^{(N)} = \sum_{k=1}^{N} w_k(t)v_k(x).$$

Tiesiogiai galima įsitikinti, kad

$$(u_t^{(N)}, v_k) + [u^{(N)}, v_k] = \begin{cases} f_k, & k \leq N, \\ 0, & k > N. \end{cases}$$

Todėl

$$(u_t^{(N)}, u_t^{(N)}) + [u^{(N)}, u_t^{(N)}] = \sum_{k=1}^{N} f_k w_k' = (f^{(N)}, u_t^{(N)}),$$

$$(u_t^{(N)}, u_t^{(M)}) + [u^{(N)}, u_t^{(M)}] = \sum_{k=1}^{M} f_k w_k' = (f^{(N)}, u_t^{(M)}).$$

Iš šių formulių išplaukia tapatybė

$$\int\limits_0^\tau (u_t^{(N)} - u_t^{(M)}, u_t^{(N)} - u_t^{(M)}) + [u^{(N)} - u^{(M)}, u_t^{(N)} - u_t^{(M)}]\, dt =$$

$$= \int\limits_0^\tau (f^{(N)} - f^{(M)}, u_t^{(N)} - u_t^{(M)})\, dt.$$

Pasinaudoję integravimo dalimis formule, perrašykime pastarąją tapatybę taip:

$$2\int\limits_{Q_\tau} \Big(u_t^{(N)} - u_t^{(M)}\Big)^2 dxdt + \|u^{(N)} - u^{(M)}\|^2\Big|_{t=0}^{t=\tau} =$$

$$= 2\int\limits_0^\tau (f^{(N)} - f^{(M)}, u_t^{(N)} - u_t^{(M)})\, dt.$$

Funkcijos w_k, $k = 1, 2, \ldots$, taške $t = 0$ yra lygios nuliui. Todėl $\|u^{(N)} - u^{(M)}\|$ taške $t = 0$ lygi nuliui. Be to, integralas

$$\int_0^\tau (f^{(N)} - f^{(M)}, u_t^{(N)} - u_t^{(M)})\, dt \le$$

$$\le \frac{1}{2} \int_{Q_\tau} \Big(f^{(N)} - f^{(M)}\Big)^2 dxdt + \frac{1}{2} \int_{Q_\tau} \Big(u_t^{(N)} - u_t^{(M)}\Big)^2 dxdt.$$

Pasinaudoję šia nelygybe, gausime

$$\int_{Q_\tau} \Big(u_t^{(N)} - u_t^{(M)}\Big)^2 dxdt + \|u^{(N)} - u^{(M)}\|^2\Big|_{t=\tau} \le \int_0^T \int_\Omega \Big(f^{(N)} - f^{(M)}\Big)^2 dxdt.$$

Integralas šios nelygybės dešinėje nepriklauso nuo τ. Todėl yra teisinga nelygybė

$$\int_{Q_T} \Big(u_t^{(N)} - u_t^{(M)}\Big)^2 dxdt + \max_{t\in[0,T]} \|u^{(N)} - u^{(M)}\|^2 \le \int_0^T \int_\Omega \Big(f^{(N)} - f^{(M)}\Big)^2 dxdt.$$

Kadangi $f \in \mathrm{L}_2(Q_T)$, tai integralas šios nelygybės dešinėje artėja į nulį, kai $N, M \to \infty$. Todėl integralas kairėje taip pat artėja į nulį, kai $N, M \to \infty$. Tačiau tada seka $\{u_t^{(N)}\}$ konverguoja į u_t erdvėje $\mathrm{L}_2(Q_T)$ ir $u_t \in \mathrm{L}_2(Q_T)$. Kartu galime tvirtinti, kad $u^{(N)} \to u$ erdvėje $\mathring{\mathrm{W}}_2^{1,1}(Q_T)$, kai $N \to \infty$, ir $u \in \mathring{\mathrm{W}}_2^{1,1}(Q_T)$.

Dabar beliko tik įrodyti, kad Furjė metodu sukonstruotas formalusis sprendinys u yra apibendrintas (5.22) uždavinio sprendinys. Tai daroma visiškai taip pat kaip homogeninės lygties atveju. Rekomenduojame skaitytojui įrodyti tai savarankiškai.

5.6. KITŲ KRAŠTINIŲ SĄLYGŲ ATVEJIS. KOŠI UŽDAVINYS

Tarkime, operatoriaus A koeficientai bei funkcijos f ir φ tenkina pirmojo kraštinio uždavinio sąlygas, $S = \partial\Omega$ – dalimis glodus paviršius, o σ – aprėžta paviršiuje S_T funkcija. Nagrinėsime kraštinį uždavinį[4]

$$\begin{cases} u_t + A\,u &= f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T; \\ \partial u/\partial N + \sigma u\big|_{S_T} &= 0, \quad (x,t) \in S_T; \\ u\big|_{t=0} &= \varphi(x), \quad x \in \Omega. \end{cases} \tag{5.28}$$

Taip apibrėžtas uždavinys vadinamas trečiuoju kraštiniu uždaviniu, o jo atskiras atvejis, kai $\sigma = 0$, – antruoju kraštiniu uždaviniu.

A p i b r ė ž i m a s. Sakysime, $u \in \mathrm{W}_2^{1,1}(Q_T)$ yra (5.28) uždavinio *apibendrintasis sprendinys*, jeigu $\forall\eta \in \mathring{\mathrm{W}}_2^{1,0}(Q_T)$ teisinga integralinė tapatybė

$$\int\limits_{Q_\tau} \Big(u_t\eta + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i}\eta_{x_j} + \sum_{i=1}^n a_i u_{x_i}\eta + au\eta \Big)\,dxdt =$$

$$= \int\limits_{Q_\tau} f\eta\,dxdt - \int\limits_{S_\tau} \sigma u\eta\,dSdt, \quad \tau \in (0,T] \tag{5.29}$$

ir

$$\|u(x,t) - \varphi(x)\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)} \to 0,$$

kai $t \to 0$.

A p i b r ė ž i m a s. Sakysime, $u \in \mathrm{W}_2^{1,0}(Q_T)$ yra (5.28) uždavinio *apibendrintas sprendinysis*, jeigu $\forall\eta \in D_T$ teisinga integralinė tapatybė

$$\int\limits_{Q_T} \Big(-u\eta_t + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i}\eta_{x_j} + \sum_{i=1}^n a_i u_{x_i}\eta + au\eta \Big)\,dxdt = \tag{5.30}$$

$$= \int\limits_{Q_T} f\eta\,dxdt - \int\limits_{S_T} \sigma u\eta\,dSdt + \int\limits_{\Omega} \varphi(x)\eta(x,0)\,dx.$$

Taip apibrėžtiems sprendiniams išlieka teisingos (5.9) ir (5.12) energinės nelygybės. Jos išvedamos iš (5.29) ir (5.30) tapatybių. Šiose tapatybėse, lyginant jas su (5.7) ir (5.8), yra vienas naujas narys (paviršinis integralas). Įvertinant šį integralą reikia pasinaudoti nelygybe

$$\int\limits_{S_t} u^2\,dSdt \le \varepsilon \int\limits_{Q_t} u_x^2\,dxdt + C_\varepsilon \int\limits_{Q_t} u^2\,dxdt, \quad \forall t \in (0,T] \quad \forall\varepsilon > 0;$$

[4] Nehomogeninės kraštinės sąlygos atvejis

$$\partial u/\partial N + \sigma u\,\Big|_{S_T} = \psi(x,t)$$

įprastu būdu suvedamas į tokį patį uždavinį su homogene kraštine sąlyga.

čia $C_\varepsilon \to \infty$, kai $\varepsilon \to 0$. Pastarosios nelygybės įrodymas išplaukia iš 4.6 lemos. Apibendrintų sprendinių vienatis erdvėse $\mathrm{W}_2^{1,0}(Q_T)$ ir $\mathrm{W}_2^{1,1}(Q_T)$ įrodoma visiškai taip pat kaip pirmojo kraštinio uždavinio atveju. Apibendrintų sprendinių egzistavimą šiose erdvėse bendru atveju galima įrodyti Galiorkino metodu. Reikia tik atkreipti dėmesį į tai, kad funkcijos $\{v_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, turi sudaryti bazę erdvėje $\mathrm{W}_2^1(\Omega)$, o ne poerdvyje $\mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)$ (žr. 5.4 skyrelį). Be to, funkcijas v_k reikia parinkti taip, kad jos būtų ortonormuotos erdvėje $\mathrm{L}_2(\Omega)$. Taigi teisingos tokios dvi teoremos.

5.7 teorema. *Tarkime, paviršius S yra dalimis glodus, $a_{ij} = a_{ji}$, a_i ir $a \in \mathrm{L}_\infty(Q_T)$, $f \in \mathrm{L}_2(Q_T)$, $\varphi \in \mathrm{L}_2(\Omega)$, $\sigma \in \mathrm{L}_\infty(S_T)$. Tada erdvėje $\mathrm{W}_2^{1,0}(Q_T)$ egzistuoja bent vienas* (5.28) *uždavinio apibendrintasis sprendinys. Jeigu, be minėtų sąlygų, koeficientai a_{ij}, a_i, a ir funkcija σ turi išvestines a_{ijt}, $a_{ix_i} \in \mathrm{L}_\infty(Q_T)$ ir $\sigma_t \in \mathrm{L}_\infty(S_T)$, tai bet kokie du* (5.28) *uždavinio apibendrintieji sprendiniai erdvėje $\mathrm{W}_2^{1,0}(Q_T)$ sutampa.*

P a s t a b a. Reikalavimas, kad a_{ijt}, $a_{ix_i} \in \mathrm{L}_\infty(Q_T)$ ir $\sigma_t \in \mathrm{L}_\infty(S_T)$, nėra esminis. Šių prielaidų galima atsisakyti (žr. [27]).

5.8 teorema. *Tarkime, paviršius S yra dalimis glodus, $a_{ij} = a_{ji}$, a_{ijt} a_i ir $a \in \mathrm{L}_\infty(Q_T)$, $f \in \mathrm{L}_2(Q_T)$, $\varphi \in \mathrm{W}_2^1(\Omega)$, $\sigma \in \mathrm{L}_\infty(S_T)$. Tada erdvėje $\mathrm{W}_2^{1,1}(Q_T)$ egzistuoja vienintelis* (5.28) *uždavinio apibendrintasis sprendinys.*

P a s t a b o s:

1. Jeigu operatoriaus A koeficientai a_{ij}, a_i ir a bei funkcija σ nepriklauso nuo kintamuojo t, tai (5.7) ir (5.8) teoremose apibendrintų sprendinių egzistavimą galima įrodyti Furjė metodu.

2. Suformuluotos teoremos išlieka teisingos, jeigu (5.28) uždavinio trečiąją kraštinę sąlygą pakeisime mišriąja kraštine sąlyga

$$u\big|_{S'_T} = 0, \quad \partial u/\partial N + \sigma u\big|_{S''_T} = 0;$$

čia $S'_T = S' \times [0, T]$, $S''_T = S'' \times [0, T]$, $S' \cup S'' = S$. Reikia tik atkreipti dėmesį į tai, kad $\{v_k\}$ turi būti bazė ne erdvėje $\mathrm{W}_2^1(\Omega)$, o erdvės $\mathrm{W}_2^1(\Omega)$ poerdvyje, kurio elementai yra lygūs nuliui paviršiuje S'.

K o š i u ž d a v i n y s. Juostoje $Q_T = \mathbb{R}^n \times (0, T)$ ieškosime lygties

$$u_t + A\,u = f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \tag{5.31}$$

sprendinio, tenkinančio pradinę sąlygą

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{5.32}$$

Tarkime, operatoriaus A koeficientai tenkina šio skyriaus pradžioje nurodytas sąlygas su $Q_T = \mathbb{R}^n \times (0, T)$, $f \in \mathrm{L}_2(Q_T)$, $\varphi \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R}^n)$.

A p i b r ė ž i m a s. Sakysime, $u \in \mathrm{W}_2^{1,1}(Q_T)$ yra (5.31), (5.32) uždavinio *apibendrintas sprendinys,* jeigu teisinga integralinė tapatybė

$$\int\limits_{Q_\tau} \Big(u_t\eta + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i}\eta_{x_j} + \sum_{i=1}^n a_i u_{x_i}\eta + au\eta \Big)\, dxdt =$$

$$= \int\limits_{Q_\tau} f\eta\, dxdt, \quad \tau \in (0,T], \quad \forall \eta \in \mathrm{W}_2^{1,0}(Q_T) \tag{5.33}$$

ir

$$\|u(x,t) - \varphi(x)\|_{\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^n)} \to 0,$$

kai $t \to 0$.

A p i b r ė ž i m a s. Sakysime, $u \in \mathrm{W}_2^{1,0}(Q_T)$ yra (5.31), (5.32) uždavinio *apibendrintas sprendinys,* jeigu $\forall \eta \in D_T$ yra teisinga integralinė tapatybė

$$\int\limits_{Q_T} \Big(-u\eta_t + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i}\eta_{x_j} + \sum_{i=1}^n a_i u_{x_i}\eta + au\eta \Big)\, dxdt =$$

$$= \int\limits_{Q_T} f\eta\, dxdt + \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\eta(x,0)\, dx.$$

P a s t a b a. Galimi ir kiti korektiški (5.31), (5.32) Koši uždavinio apibendrintų sprendinių apibrėžimai (žr., pavyzdžiui, [29]).

5.9 teorema. *Tarkime, operatoriaus A koeficientai bei funkcijos f ir φ tenkina 5.5 teoremos sąlygas su $Q_T = \mathbb{R}^n \times (0,T)$. Tada erdvėje $\mathrm{W}_2^{1,1}(Q_T)$ egzistuoja vienintelis (5.31), (5.32) Koši uždavinio apibendrintasis sprendinys.*

◁ Tegu $\xi \in \mathrm{C}^\infty[0,\infty)$, $\xi(t) = 1$, kai $t \le 1/2$ ir $\xi(t) = 0$, kai $t \ge 1$. Be to, tegu

$$Q_{T,R} = \{(x,t) \in Q_T : |x| < R, t \in (0,T)\}$$

cilindras erdvėje $\mathbb{R}^{n+1}$,

$$S_{T,R} = \{(x,t) : |x| = R, t \in [0,T]\}$$

jo šoninis paviršius, $\varphi^{(R)}(x) = \varphi(x)\xi(|x|/R)$. Remiantis (5.5) teorema, kraštinis uždavinys

$$\begin{cases} u_t + A\,u &= & f(x,t), & (x,t) & \in & Q_{T,R};\\ u|_{S_{T,R}} &= & 0, & (x,t) & \in & S_{T,R};\\ u\big|_{t=0} &= & \varphi^{(R)}(x), & |x| & < & R, \end{cases}$$

turi vienintelį apibendrintą sprendinį $u^{(R)} \in \mathrm{W}_2^{1,1}(Q_{T,R})$.

Funkciją $u^{(R)}$ pratęskime nuliu į cilindro $Q_{T,R}$ išorę ir pratęstą funkciją pažymėkime ta pačia raide. Tada teisinga integralinė tapatybė

$$\int\limits_{Q_\tau} \Big(u_t^{(R)}\eta + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i}^{(R)}\eta_{x_j} + \sum_{i=1}^n a_i u_{x_i}^{(R)}\eta + au^{(R)}\eta \Big)\, dxdt =$$

$$= \int\limits_{Q_\tau} f\eta\, dxdt, \quad \tau \in (0,T], \quad \forall \eta \in \mathring{\mathrm{W}}_2^{1,0}(Q_{T,R})$$

ir

$$\|u^{(R)}(x,t) - \varphi^{(R)}(x)\|_{\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^n)} \to 0,$$

kai $t \to 0$. Be to,

$$\max_{t\in[0,T]} \|u^{(R)}\|^2_{\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^n)} + \|u_x^{(R)}\|^2_{\mathrm{L}_2(Q_T)} \le C\Big(\|f\|^2_{\mathrm{L}_2(Q_T)} + \|\varphi^{(R)}\|_{\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^n)}\Big),$$

$$\max_{t\in[0,T]} \|u_x^{(R)}\|^2_{\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^n)} + \|u_t^{(R)}\|^2_{\mathrm{L}_2(Q_T)} \le C\Big(\|f\|^2_{\mathrm{L}_2(Q_T)} + \|\varphi^{(R)}\|_{\mathrm{W}_2^1(\mathbb{R}^n)}\Big).$$

Pakankamai dideliems R norma

$$\|\varphi^{(R)}\|_{\mathrm{W}_2^1(\mathbb{R}^n)} \le \|\varphi\|_{\mathrm{W}_2^1(\mathbb{R}^n)} + \|\varphi^{(R)} - \varphi\|_{\mathrm{W}_2^1(\mathbb{R}^n)} \le \|\varphi\|_{\mathrm{W}_2^1(\mathbb{R}^n)} + 1.$$

Todėl seka $\{u^{(R)}\}$ yra aprėžta erdvėje $\mathrm{W}_2^{1,1}(Q_T)$ ir iš jos galima išskirti silpnai konverguojantį posekį. Tegu $u^{(R_k)} \rightharpoonup u \in \mathrm{W}_2^{1,1}(Q_T)$. Tada $\forall \eta \in \mathrm{W}_2^{1,0}(Q_T)$ ribinė funkcija u tenkina (5.33) integralinę tapatybę.

Įrodysime, kad funkcija u tenkina pradinę sąlygą. Laisvai pasirenkame skaičių $\varepsilon > 0$. Pagal Minkovskio nelygybę

$$\|u(x,t) - \varphi(x)\|_{\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^n)} \le \|u(x,t) - u^{(R_k)}(x,t)\|_{\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^n)} +$$

$$+ \|u^{(R_k)}(x,t) - \varphi^{(R_k)}(x)\|_{\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^n)} + \|\varphi^{(R_k)} - \varphi\|_{\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^n)}.$$

Fiksuokime tokį k, kad

$$\|u(x,t) - u^{(R_k)}(x,t)\|_{\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^n)} \le \varepsilon/3$$

ir

$$\|\varphi^{(R_k)} - \varphi\|_{\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^n)} \le \varepsilon/3.$$

Tegu t_0 toks, kad

$$\|u^{(R_k)}(x,t) - \varphi^{(R_k)}(x)\|_{\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^n)} \le \varepsilon/3, \quad \forall t \le t_0.$$

Tada

$$\|u(x,t) - \varphi(x)\|_{\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^n)} \le \varepsilon, \quad \forall t \le t_0.$$

Taigi funkcija u yra (5.31), (5.32) Koši uždavinio apibendrintas sprendinys erdvėje $\mathrm{W}_2^{1,1}(Q_T)$. Apibendrinto sprendinio vienatis erdvėje $\mathrm{W}_2^{1,1}(Q_T)$ įrodoma visiškai taip pat kaip 5.3 teoremoje. ▷

P a s t a b a. Analogiškai galima įrodyti (5.31), (5.32) Koši uždavinio apibendrinto sprendinio egzistavimą ir vienatį erdvėje $\mathrm{W}_2^{1,0}(Q_T)$.

5.7. APIBENDRINTŲJŲ SPRENDINIŲ GLODUMAS

Šiame skyrelyje įrodysime, kad parabolinis operatorius turi tas pačias savybes kaip ir elipsinis. Tiksliau, įrodysime, kad diferencialinio reiškinio $u_t + A\,u$ visi nariai priklauso erdvei $\mathrm{L}_2(Q_T)$, jeigu tik šis reiškinys priklauso $\mathrm{L}_2(Q_T)$.

Nagrinėsime pirmąjį kraštinį uždavinį

$$\begin{cases} u_t + A\,u &= f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T; \\ u\big|_{S_T} &= 0, \quad (x,t) \in S_T; \\ u\big|_{t=0} &= \varphi(x), \quad x \in \Omega. \end{cases} \tag{5.34}$$

Dėl paprastumo tarkime, operatoriaus A koeficientai a_{ij}, a_i ir a nepriklauso nuo kintamojo t.

5.10 teorema. *Tegu* $S \in \mathrm{C}^2$, $a_{ij} \in \mathrm{C}^{0,1}(\overline{\Omega})$, a_i *ir* $a \in \mathrm{L}_\infty(\Omega)$, *funkcija* $f \in \mathrm{L}_2(Q_T)$, $\varphi \in \mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)$ *ir* u *yra* (5.34) *uždavinio apibendrintas sprendinys erdvėje* $\mathring{\mathrm{W}}_2^{1,1}(Q_T)$. *Tada* $u \in \mathrm{W}_2^{2,1}(Q_T)$ *ir*

$$\operatorname*{vraisup}_{t\in[0,T]} \|u\|^2_{\mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)} + \|u_{xx}\|^2_{\mathrm{L}_2(Q_T)} + \|u_t\|^2_{\mathrm{L}_2(Q_T)} \leq$$
$$\leq C\big(\|f\|^2_{\mathrm{L}_2(Q_T)} + \|\varphi\|^2_{\mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)}\big). \tag{5.35}$$

Be to, b.v. $(x,t) \in Q_T$ *funkcija* u *tenkina lygtį*

$$u_t + A\,u = f(x,t).$$

Jeigu, be nurodytų sąlygų, $\varphi \in \mathrm{W}_2^2(\Omega)$, $f_t \in \mathrm{L}_2(Q_T)$, *tai*

$$\operatorname*{vraisup}_{t\in[0,T]} \|u_t\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} + \operatorname*{vraisup}_{t\in[0,T]} \|u\|^2_{\mathrm{W}_2^2(\Omega)} + \|u_{tx}\|^2_{\mathrm{L}_2(Q_T)} \leq$$
$$\leq C\big(\|f\|^2_{\mathrm{L}_2(Q_T)} + \|f_t\|^2_{\mathrm{L}_2(Q_T)} + \|\varphi\|^2_{\mathrm{W}_2^2(\Omega)}\big). \tag{5.36}$$

◁ Tarkime, u yra (5.34) uždavinio apibendrintas sprendinys $\mathring{\mathrm{W}}_2^{1,1}(Q_T)$ erdvėje. Tada b.v. $t \in [0,T]$ teisinga tapatybė

$$(u_t, \eta) + A(u,\eta) = (f,\eta), \quad \forall \eta \in \mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega).$$

Šią tapatybę galima perrašyti taip:

$$A(u,\eta) = (h,\eta), \quad \forall \eta \in \mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega);$$

čia $h = f - u_t \in \mathrm{L}_2(\Omega)$. Todėl b.v. $t \in [0,T]$ funkcija u yra Dirichlė uždavinio

$$A\,u = h(x,t), \quad x \in \Omega; \quad u\big|_S = 0$$

apibendrintas sprendinys erdvėje $\mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)$. Remdamiesi 4.16 teorema, galime tvirtinti, kad $u \in \mathrm{W}_2^2(\Omega)$ ir teisinga nelygybė

$$\|u\|^2_{\mathrm{W}_2^2(\Omega)} \leq C\Big(\|h\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} + \|u\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)}\Big) \leq$$

$$\leq C\Big(\|f\|^2_{L_2(\Omega)} + \|u_t\|^2_{L_2(\Omega)} + \|u\|^2_{L_2(\Omega)}\Big).$$

Suintegravę šią nelygybę kintamojo t atžvilgiu nuo 0 iki T ir pasinaudoję (5.9) bei (5.19) nelygybėmis, gausime įvertį

$$\operatorname*{vraisup}_{t\,\in\,[0,T]} \|u_x\|^2_{L_2(\Omega)} + \|u_{xx}\|^2_{L_2(Q_T)} + \|u_t\|^2_{L_2(Q_T)} \leq$$

$$\leq C\Big(\|f\|^2_{L_2(Q_T)} + \|\varphi\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)}\Big).$$

Iš šio įverčio išplaukia, kad cilindre Q_T funkcija u turi antrosios eilės sumuojamas kvadratu išvestines erdvinių kintamųjų x atžvilgiu. Taigi funkcija u priklauso erdvei $\overset{\circ}{W}{}^{2,1}_2(Q_T)$. Be to, galime tvirtinti, kad b.v. $(x,t)\in Q_T$ funkcija u tenkina lygtį

$$u_t + A\,u = f(x,t)$$

ir yra teisinga (5.35) nelygybė.

Tarkime dabar, kad $\varphi \in W^2_2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega),\ f,\ f_t \in L_2(Q_T)$. Fiksuokime skaičių $N \geq 1$. Apytikslis (5.34) uždavinio sprendinys

$$u^{(N)}(x,t) = \sum_{k=1}^{N} w_k(t) v_k(x);$$

čia $\{v_k\}$ yra bazė erdvėje $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$, o funkcijos w_k randamos iš sąlygų:

$$(u^{(N)}_t, v_k) + A(u^{(N)}, v_k) = (f, v_k), \quad k = 1, \dots, N. \tag{5.37}$$

$$u^{(N)}\big|_{t=0} = \varphi^{(N)}(x) := \sum_{k=1}^{N} (\varphi, v_k) v_k(x).$$

Diferencijuodami (5.37) sąlygą t atžvilgiu, gausime lygybę

$$(\tilde{u}^{(N)}_t, v_k) + A(\tilde{u}^{(N)}, v_k) = (f_t, v_k);$$

čia $\tilde{u}^{(N)} = u^{(N)}_t$. Padauginę ją iš w'_k ir susumavę pagal k nuo 1 iki N, gausime formulę

$$(\tilde{u}^{(N)}_t, \tilde{u}^{(N)}) + A(\tilde{u}^{(N)}, \tilde{u}^{(N)}) = (f_t, \tilde{u}^{(N)}).$$

Iš šios formulės bei Gronuolo lemos išvedama nelygybė

$$\operatorname*{vraisup}_{t\,\in\,[0,T]} \|u^{(N)}_t\|^2_{L_2(\Omega)} + \|u^{(N)}_{tx}\|^2_{L_2(Q_T)} \leq$$

$$\leq C(\|f\|^2_{L_2(Q_T)} + \|f_t\|^2_{L_2(Q_T)} + \|\,A\,\varphi\|^2_{L_2(\Omega)}) \leq$$
$$\leq C(\|f\|^2_{L_2(Q_T)} + \|f_t\|^2_{L_2(Q_T)} + \|\varphi\|^2_{W^2_2(\Omega)}).$$

Artindami čia $N \to \infty$, gausime, kad pastaroji nelygybė yra teisinga ir funkcijai u, t.y.

$$\operatorname*{vraisup}_{t\,\in\,[0,T]} \|u_t\|^2_{L_2(\Omega)} + \|u_{tx}\|^2_{L_2(Q_T)} \leq \tag{5.38}$$

$$\leq C(\|f\|^2_{\mathrm{L}_2(Q_T)} + \|f_t\|^2_{\mathrm{L}_2(Q_T)} + \|\varphi\|^2_{\mathrm{W}^2_2(\Omega)}).$$

Tarkime, kad $\{v_k\}$ yra Dirichlė uždavinio

$$-\Delta v = \lambda v, \quad x \in \Omega; \quad v\big|_S = 0$$

tikrinės funkcijos, o $\{\lambda_k\}$ yra jas atitinkančios tikrinės reikšmės. Padauginę (5.37) lygybę iš $\lambda_k w_k$ ir susumavę pagal k nuo 1 iki N, gausime

$$A(u^{(N)}, -\Delta u^{(N)}) = (f - u_t^{(N)}, -\Delta u^{(N)}).$$

Paviršiaus S taškuose reiškinys $-\Delta u^{(N)} = 0$. Todėl

$$A(u^{(N)}, -\Delta u^{(N)}) = (A\, u^{(N)}, -\Delta u^{(N)}).$$

Remiantis (4.126) nelygybe,

$$\|u_{xx}^{(N)}\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} \leq 2\nu^{-1}(A\, u^{(N)}, -\Delta u^{(N)}) + C_1\|u^{(N)}\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)}; \tag{5.39}$$

čia konstanta C_1 priklauso tik nuo ν, μ, paviršiaus S bei koeficientų a_{ij}, a_i ir a normų erdvėje $\mathrm{L}_\infty(\Omega)$.

Reiškinys

$$(f - u_t^{(N)}, -\Delta u^{(N)}) \leq \varepsilon\|u_{xx}^{(N)}\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} + C_\varepsilon\Big(\|f\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} + \|u_t^{(N)}\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)}\Big),$$

$\forall \varepsilon > 0$. Imkime čia $\varepsilon = \nu/4$. Tada

$$\|u_{xx}^{(N)}\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} \leq C\Big(\|f\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} + \|u_t^{(N)}\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} + \|u^{(N)}\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)}\Big).$$

Artindami čia $N \to \infty$ gausime, kad pastaroji nelygybė teisinga funkcijai u. Kartu galime tvirtinti, kad

$$\operatorname*{vraisup}_{t \in [0,T]} \|u_t\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} + \operatorname*{vraisup}_{t \in [0,T]} \|u\|^2_{\mathrm{W}^2_2(\Omega)} + \|u_{tx}\|^2_{\mathrm{L}_2(Q_T)} \leq$$

$$\leq C\Big(\|f\|^2_{\mathrm{L}_2(Q_T)} + \|f_t\|^2_{\mathrm{L}_2(Q_T)}\|\varphi\|^2_{\mathrm{W}^2_2(\Omega)}\Big).$$

Teorema įrodyta. ▷

P a s t a b o s:

1. Analogiškai nagrinėjamas tolesnis apibendrintų sprendinių glodumo didėjimas priklausomai nuo paviršiaus S, operatoriaus A koeficientų bei funkcijų f ir φ glodumo didėjimo. Iš pradžių įrodomas glodumo padidėjimas kintamojo t atžvilgiu, po to (remiantis atitinkamais elipsinių lygčių teorijos teiginiais) kintamųjų x atžvilgiu. Žinomų funkcijų ir apibendrintų sprendinių glodumo ryšį galima nusakyti taip: jeigu žinomų funkcijų glodumą x atžvilgiu padidinsime vienetu, o t atžvilgiu – viena antrąja, tai tiek pat padidės ir apibendrintų sprendinių glodumas. Tą patį galima pasakyti ir apie antrojo, trečiojo bei Koši uždavinių apibendrintus sprendinius (smulkiau apie tai žr. [29] knygoje).

2. Jeigu paviršius S nėra glodus, tai negalima tvirtinti, kad (5.34) uždavinio apibendrinti sprendiniai priklauso erdvei $\mathrm{W}_2^{2,1}(Q_T)$. Šiuo atveju galima įrodyti tik lokalų apibendrintų sprendinių glodumą. Tiksliau, 5.10 teoremos teiginiai išlieka teisingi, sritį Ω pakeitus bet kokia griežtai vidine sritimi Ω'. Atkreipsime dėmesį, kad išvedant atitinkamus apriorinius įverčius, (5.37) sąlygą reikia pakeisti tokia:

$$(u_t^{(N)}, v_k\xi^2) + A(u^{(N)}, v_k\xi^2) = (f, v_k\xi^2), \quad k = 1, \dots, N;$$

čia $\xi = \xi(x)$ – glodi funkcija, lygi vienetui srityje Ω' ir lygi nuliui paviršiuje S. Be to, jeigu funkcija φ nepriklauso poerdviui $\mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)$, tai apibendrintų sprendinių glodumą galima įrodyti cilindre $\Omega' \times (\tau, T)$, $\tau > 0$. Šiuo atveju atitinkamus reiškinius reikia padauginti dar iš ζ^2; čia $\zeta = \zeta(t)$ – glodi funkcija, lygi vienetui, kai $t \geq \tau$, ir lygi nuliui taške $t = 0$.

5.8. UŽDAVINIAI

1. Tegu u yra pakankamai glodi cilindre $Q_T = \Omega \times (0,T)$ funkcija, lygi nuliui paviršiuje S_T ir

$$u_t - \Delta u = f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \quad f \in \mathrm{L}_2(Q_T).$$

Įrodykite nelygybes:

(a)
$$\max_{t\in[0,T]} \|u_x\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} + \|u_t\|^2_{\mathrm{L}_2(Q_T)} + \|u_{xx}\|^2_{\mathrm{L}_2(Q_T)} \leq$$
$$\leq C\Big(\|f\|^2_{\mathrm{L}_2(Q_T)} + \|u(\cdot,0)\|^2_{\mathring{\mathrm{W}}^1_2(\Omega)}\Big).$$

(b)
$$\max_{t\in[0,T]} \|u_t\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} + \max_{t\in[0,T]} \|u_{xx}\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} \leq$$
$$\leq C\big(\|f\|^2_{\mathrm{L}_2(Q_T)} + \|f_t\|^2_{\mathrm{L}_2(Q_T)} + \|u(\cdot,0)\|^2_{\mathrm{W}^2_2(\Omega)}\big).$$

2. Tegu u yra glodus šilumos laidumo lygties

$$u_t - \Delta u = 0, \quad (x,t) \in Q_T = \Omega \times (0,T)$$

sprendinys, lygus nuliui paviršiaus S_T taškuose. Įrodykite nelygybę

$$\|u(\cdot,t)\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)} \leq e^{-\lambda_1 t}\|u(\cdot,t)\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)}, \quad t \geq 0;$$

čia $\lambda_1 \geq 0$ yra Dirichlė uždavinio

$$-\Delta u = \lambda u; \quad u\big|_S = 0$$

mažiausia tikrinė reikšmė.

3. Tegu u yra glodi funkcija cilindre $Q_T = \Omega \times (0,T)$. Įrodykite nelygybę

$$\max_{t\in[0,T]} \|u\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} \leq C\big(\|u\|_{\mathrm{L}_2(Q_T)} + \|u_t\|_{\mathrm{L}_2(Q_T)}\big).$$

4. Tegu $u \in \mathrm{W}^2_2(\Omega) \cap \mathring{\mathrm{W}}^1_2(\Omega)$. Įrodykite nelygybę

$$\|u\|^2_{\mathrm{W}^2_2(\Omega)} \leq 2\nu^{-1}(A\,u, -\Delta u) + C\|u\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)}.$$

5. Įrodykite kraštinio uždavinio

$$\left\{\begin{array}{rcccl} u_t - \Delta u &=& f(x,t), & (x,t) &\in& Q_T; \\ u\big|_{S_T} &=& 0, & (x,t) &\in& S_T; \\ u\big|_{t=0} &=& \varphi(x), & x &\in& \Omega, \end{array}\right.$$

apibendrinto sprendinio egzistavimą ir vienatį erdvėje $\mathring{\mathrm{W}}^{1,1}_2(Q_T)$.

6. Įrodykite kraštinio uždavinio

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= f(x,t), & (x,t) &\in & Q_T; \\ \partial u/\partial \mathbf{n}\big|_{S_T} &= 0, & (x,t) &\in & S_T; \\ u\big|_{t=0} &= \varphi(x), & x &\in & \Omega, \end{cases}$$

apibendrinto sprendinio egzistavimą ir vienatį erdvėje $\overset{\circ}{\mathrm{W}}{}_2^{1,1}(Q_T)$.

7. Įrodykite, (5.31), (5.32) Koši uždavinio apibendrinto sprendinio egzistavimą ir vienatį erdvėje $\mathrm{W}_2^{1,0}(Q_T)$; čia $Q_T = \mathbb{R}^n \times (0,T)$.

6 SKYRIUS

Kraštiniai hiperbolinių lygčių uždaviniai

Šiame skyriuje nagrinėsime pagrindinius matematinės fizikos antrosios eilės tiesinių hiperbolinių lygčių uždavinius su aprėžtais koeficientais. Įrodysime tokių uždavinių apibendrintų sprendinių egzistavimą ir vienatį erdvėje $\overset{\circ}{\mathrm{W}}{}_2^{1,1}(Q_T)$. Ištirsime apibendrintų sprendinių glodumą. Daugiausiai dėmesio skirsime pirmajam kraštiniam uždaviniui.

6.1. PAGRINDINIAI UŽDAVINIAI

Nagrinėsime *tolygiai hiperbolines lygtis*, t.y. lygtis

$$u_{tt} + A\,u = f(x,t), \tag{6.1}$$

kuriose operatoriaus[1]

$$A\,u = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\big(a_{ij}(x,t)u_{x_j}\big) + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)u_{x_i} + a(x,t)u$$

koeficientai $a_{ij} = a_{ji}$ tenkina sąlygą

$$\nu\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \le \mu\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2, \quad \forall\xi\in\mathbb{R}^n, \quad \nu,\mu = const > 0.$$

Iš koeficientų prie antrosios eilės išvestinių sudarykime kvadratinę formą

$$\Lambda(x,t,\xi,\tau) = \tau^2 - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j, \quad \xi\in\mathbb{R}^n, \tau\in\mathbb{R}^1.$$

Tegu S yra glodus, apibrėžtas lygtimi

$$\omega(x,t) = 0,$$

paviršius erdvėje $\mathbb{R}^{n+1}$. Sakysime, paviršius S yra *charakteristinis* (6.1) lygties atžvilgiu, jeigu kiekviename šio paviršiaus taške

$$\Lambda(x,t,\omega_x,\omega_t) = \omega_t^2 - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\omega_{x_i}\omega_{x_j} = 0.$$

[1] Į reiškinį $A\,u$ dar galima įtraukti narius $\sum_{i=1}^{n} a_{i0}u_{tx_i}$ ir a_0u_t. Tačiau jie jokios įtakos nedaro nei pateiktiems samprotavimams, nei galutiniams rezultatams. Todėl naudosime sutrumpintą operatoriaus A išraišką.

Paviršių S, kurio taškuose $\Lambda(x,t,\omega_x,\omega_t) > 0$, vadinsime *orientuotu erdvėje*, o tą, kurio taškuose $\Lambda(x,t,\omega_x,\omega_t) < 0$, – *orientuotu laike*. Pavyzdžiui, plokštumos, apibrėžtos lygtimi $t - C = 0$, yra orientuoti erdvėje paviršiai, o cilindriniai paviršiai, sudaryti iš tiesių, lygiagrečių su t ašimi, – orientuoti laike.

Tegu $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ yra orientuotas erdvėje paviršius, φ ir ψ – apibrėžtos paviršiuje S žinomos funkcijos. Bendruoju atveju Koši uždavinys formuluojamas taip: reikia rasti funkciją u, kuri kokioje nors paviršiaus S aplinkoje tenkintų (6.1) lygtį, o paviršiaus S taškuose pradines sąlygas

$$u\big|_S = \varphi\big|_S, \quad u_t\big|_S = \psi\big|_S.$$

Toliau nagrinėsime dažniausiai pasitaikantį matematinės fizikos uždavinių atvejį, kai paviršius S apibrėžiamas lygtimi $t = 0$. Tiksliau, juostoje $\mathbb{R}^n \times (0,T)$ ieškosime (6.1) lygties sprendinį tenkinantį pradines sąlygas:

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t\big|_{t=0} = \psi(x), \quad x\in\mathbb{R}^n. \tag{6.2}$$

P a s t a b a. Jeigu vietoje kintamojo t apibrėšime naują kintamąjį $\tau = -t$, tai gausime tokį patį uždavinį juostoje $\mathbb{R}^n \times (-T,0)$. Todėl nagrinėjant (6.1), (6.2) Koši uždavinį visada galima tarti, kad $t\in[0,T]$, $T > 0$.

Tegu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – kokia nors sritis, $S = \partial\Omega$; $Q_T = \Omega \times (0,T)$ – cilindras erdvėje $\mathbb{R}^{n+1}$, kurio apatinis pagrindas Ω, o viršutinis pagrindas Ω_T; $S_T = \{(x,t)\in\mathbb{R}^{n+1} : x\in S, t\in(0,T)\}$ – cilindro Q_T šoninis paviršius (žr. 5.1 pav.). Pirmasis kraštinis uždavinys (6.1) lygčiai formuluojamas taip: rasti funkciją u, kuri cilindre Q_T tenkintų (6.1) lygtį, pirmąją kraštinę sąlygą

$$u|_{S_T} = \vartheta(x,t), \quad (x,t)\in S_T,$$

ir srities Ω taškuose (6.2) pradines sąlygas.

Antrasis ir trečiasis kraštiniai uždaviniai formuluojami visiškai taip pat. Reikia tik pirmą kraštinę sąlygą pakeisti atitinkamai antrąja

$$\frac{\partial u}{\partial N}\Big|_{S_T} \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_j} \cos(\mathbf{n}, x_i)\Big|_{S_T} = \vartheta(x,t)$$

arba trečiąja

$$\frac{\partial u}{\partial N}\Big|_{S_T} + \sigma u = \vartheta(x,t)$$

kraštinėmis sąlygomis.

6.2. ENERGINĖ NELYGYBĖ

Tegu $K_\tau \subset \mathbb{R}^{n+1}$ yra nupjautinis kūgis, kurio pagrindai $\Omega = \Omega_0$ ir Ω_τ yra plokštumose $t = 0$ ir $t = \tau$; S_τ – glodus kūgio K_τ šoninis paviršius, apibrėžtas lygtimi $\omega(x,t) = 0$, $(\omega_x, \omega_t) \neq 0$; paviršiaus S_τ taškuose tenkinama sąlyga[2]

$$\omega_t^2 - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\omega_{x_i}\omega_{x_j} \geq 0.$$

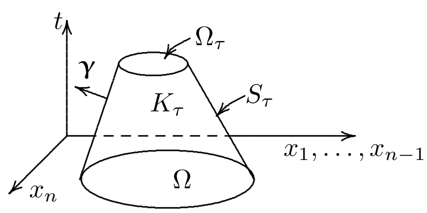
Pastarąją sąlygą galima perrašyti taip:

$$\cos^2(\boldsymbol{\gamma}, t) - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\cos(\boldsymbol{\gamma}, x_i)\cos(\boldsymbol{\gamma}, x_j) \geq 0;$$

čia $\boldsymbol{\gamma}$ – paviršiaus S_τ vienetinis normalės vektorius, išorinis kūgio K_τ atžvilgiu. Iš šios sąlygos išplaukia, kad

$$\cos^2(\boldsymbol{\gamma}, t) \geq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\cos(\boldsymbol{\gamma}, x_i)\cos(\boldsymbol{\gamma}, x_j) \geq \nu \sum_{i=1}^n \cos^2(\boldsymbol{\gamma}, x_i) > 0, \tag{6.3}$$

t.y. kampas tarp normalės $\boldsymbol{\gamma}$ ir t ašies yra smailusis (žr. 6.1 pav.).



6.1 pav.

Tarkime, operatoriaus A koeficientai a_{ij}, a_{ijt}, a_i ir $a \in \mathrm{L}_\infty(K_\tau)$, $f \in \mathrm{L}_2(K_\tau)$ ir $u \in \mathrm{W}_2^{2,2}(K_\tau)$ yra hiperbolinės lygties

$$u_{tt} + A\,u = f$$

sprendinys kūgyje K_τ. Abi šios lygties puses padauginkime iš u_t ir gautus reiškinius suintegruokime kūgiu K_τ. Tada gausime lygybę

$$\int_{K_\tau} (u_{tt} + A\,u)u_t\,dxdt = \int_{K_\tau} f u_t\,dxdt. \tag{6.4}$$

Integralą kairiojoje šios lygybės pusėje išskaidykime į du integralus ir kiekvieną iš jų pertvarkykime atskirai. Pirmas integralas

$$\int_{K_\tau} u_t u_{tt}\,dxdt = \frac{1}{2}\int_{K_\tau} \frac{d}{dt}u_t^2\,dxdt = \frac{1}{2}\int_{\partial K_\tau} u_t^2 \cos(\boldsymbol{\gamma}, t)\,d\partial K_\tau =$$

[2]Vietoje nupjautinio kūgio K_τ galima imti bet kokį kitą paviršių su analogiškomis savybėmis. Smulkiau apie tai žr. [27].

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_t} u_t^2\,dx\Big|_{t=0}^{t=\tau} + \frac{1}{2}\int\limits_{S_\tau} u_t^2\cos(\boldsymbol{\gamma},t)\,dS_\tau.$$

Antrasis

$$\int\limits_{K_\tau} u_t\,A\,u\,dxdt = \int\limits_{K_\tau} u_t\Big(-\sum_{i,j=1}^n (a_{ij}u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^n a_iu_{x_i} + au\Big)\,dxdt =$$

$$= \int\limits_{K_\tau}\Big(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i}u_{tx_j} + \sum_{i=1}^n a_iu_{x_i}u_t + auu_t\Big)\,dxdt -$$

$$-\int\limits_{S_\tau}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i}u_t\cos(\boldsymbol{\gamma},x_i)\,dS_\tau =$$

$$= \int\limits_{K_\tau}\Big(\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \big(a_{ij}u_{x_i}u_{x_j}\big)_t - \sum_{i,j=1}^n a_{ijt}u_{x_i}u_{x_j} + \sum_{i=1}^n a_iu_{x_i}u_t + auu_t\Big)\,dxdt -$$

$$-\int\limits_{S_\tau}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i}u_t\cos(\boldsymbol{\gamma},x_i)\,dS_\tau = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i}u_{x_j}\,dx\Big|_{t=0}^{t=\tau} +$$

$$+\int\limits_{K_\tau}\Big(-\sum_{i,j=1}^n a_{ijt}u_{x_i}u_{x_j} + \sum_{i=1}^n a_iu_{x_i}u_t + auu_t\Big)\,dxdt +$$

$$+\int\limits_{S_\tau}\Big(\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i}u_{x_j}\cos(\boldsymbol{\gamma},t) - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i}u_t\cos(\boldsymbol{\gamma},x_i)\Big)\,dS_\tau.$$

Todėl (6.4) lygybę galima perrašyti taip:

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_t}\Big(u_t^2 + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i}u_{x_j}\Big)\,dx\Big|_{t=0}^{t=\tau} + \frac{1}{2}\int\limits_{S_\tau}\Big(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i}u_{x_j}\cos(\boldsymbol{\gamma},t) -$$

$$-2\sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i}u_t\cos(\boldsymbol{\gamma},x_i) + u_t^2\cos(\boldsymbol{\gamma},t)\Big)\,dS_\tau + \tag{6.5}$$

$$+\int\limits_{K_\tau}\Big(-\sum_{i,j=1}^n a_{ijt}u_{x_i}u_{x_j} + \sum_{i=1}^n a_iu_{x_i}u_t + auu_t\Big)\,dxdt = \int\limits_{K_\tau} fu_t\,dxdt.$$

Remiantis (6.3) sąlyga, lengvai galima įsitikinti, kad pointegralinis reiškinys paviršiniame integrale yra neneigiamas. Todėl iš pastarosios lygybės išvedama nelygybė

$$\Phi'(\tau)\le C\Phi(\tau) + F(\tau);$$

čia

$$\Phi(\tau) = \int\limits_{K_\tau} (u_t^2 + u_x^2 + u^2)\,dxdt,$$

$$F(\tau) = \int\limits_{K_\tau} f^2\,dxdt + C_1 \int\limits_{\Omega} (u^2 + u_t^2 + u_x^2)\,dx.$$

Pagal Gronuolo lemą

$$\Phi(\tau) \le \frac{e^{C\tau} - 1}{C} F(\tau).$$

Kartu yra teisinga nelygybė

$$\Phi'(\tau) \le e^{C\tau} F(\tau).$$

Ją galima perrašyti taip:

$$\int\limits_{\Omega_\tau} (u^2 + u_t^2 + u_x^2)\,dx \le e^{C\tau} \Big[\int\limits_{K_\tau} f^2\,dxdt + C_1 \int\limits_{\Omega} (u^2 + u_t^2 + u_x^2)\,dx \Big]. \tag{6.6}$$

Čia konstantos C ir C_1 priklauso tik nuo ν, μ ir nuo funkcijų a_{ij}, a_{ijt}, a_i ir a normų erdvėje $\mathrm{L}_\infty(K_\tau)$. Pastaroji nelygybė yra vadinama *energine nelygybe*.

I š v a d o s:

1. Tarkime, u_1 ir u_2 yra Koši uždavinių

$$\begin{cases} u_{tt} + A\,u &= f_1(x,t), \\ u\big|_{t=0} &= \varphi_1(x), \\ u_t\big|_{t=0} &= \psi_1(x), \end{cases} \qquad \begin{cases} u_{tt} + A\,u &= f_2(x,t), \\ u\big|_{t=0} &= \varphi_2(x), \\ u_t\big|_{t=0} &= \psi_2(x) \end{cases}$$

sprendiniai erdvėje $\mathrm{W}_2^{2,2}(K_T)$, $f_1(x,t) = f_2(x,t)$ kūgyje K_T, $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$ ir $\psi_1(x) = \psi_2(x)$ srityje Ω. Tada kūgyje K_T sprendiniai u_1 ir u_2 sutampa.

◁ Tegu $u = u_1 - u_2$. Tada funkcija u tenkina homogeninę lygtį

$$u_{tt} + A\,u = 0, \quad (x,t) \in K_T$$

ir homogenines pradines sąlygas

$$u\big|_{t=0} = 0, \quad u_t\big|_{t=0} = 0, \quad x \in \Omega.$$

Pritaikę jai (6.5) nelygybę, gausime, kad kūgyje K_T funkcija u lygi nuliui. ▷

2. Tarkime, funkcija u tenkina lygtį

$$u_{tt} + A\,u = f(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,T),$$

ir pradines sąlygas

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t\big|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Jeigu apatinio kūgio K_τ pagrinde Ω funkcijos φ ir ψ yra lygios nuliui, o funkcija f lygi nuliui kūgyje K_τ, tai $u = 0$ kūgyje K_τ. Be to, funkcijų φ ir ψ pokytis pagrindo Ω išorėje bei funkcijos f pokytis kūgio K_τ išorėje neturi įtakos sprendiniui kūgyje K_τ. Tiksliau, šis pokytis turės įtakos sprendiniui tik po tam tikro laiko. Todėl galima tvirtinti, kad hiperbolinės lygtys aprašo procesus, kurių sklidimo greitis yra baigtinis. Remiantis šiomis savybėmis Koši uždavinio sprendinio juostoje $\mathbb{R}^n \times (0, T)$ galima ieškoti dalimis, išskaidant šią juostą į baigtines sritis K_τ. Pavyzdžiui, jegu mus domina Koši uždavinio sprendinys kokioje nors baigtinėje srityje $Q \subset \mathbb{R}^n \times (0, T)$, tai (priešingai negu elipsinėms ir parabolinėms lygtims) nebūtina jo ieškoti visoje juostoje $\mathbb{R}^n \times (0, T)$. Pakanka sritį Q įdėti į kūgį K_τ ir rasti sprendinį kūgyje K_τ. Be to, jeigu kūgio K_τ apatinis pagrindas yra apatiniame kokio nors cilindro Q_τ pagrinde, tai vietoje Koši uždavinio galima spręsti pirmąjį kraštinį uždavinį

$$\left\{\begin{array}{rcllcl} u_{tt} + A\,u & = & f(x,t), & (x,t) & \in & Q_\tau, \\ u\big|_{S_\tau} & = & 0, & (x,t) & \in & S_\tau, \\ u\big|_{t=0} & = & \tilde{\varphi}(x), & x & \in & \Omega, \\ u_t\big|_{t=0} & = & \tilde{\psi}(x), & x & \in & \Omega; \end{array}\right.$$

čia funkcijos $\tilde{\varphi}$ ir $\tilde{\psi}$ sutampa su funkcijomis φ ir ψ apatiniame kūgio K_τ pagrinde ir lygios nuliui cilindro Q_τ apatinio pagrindo kraštinių taškų aplinkoje. Atkreipsime dėmesį, kad toks sprendimo kelias ne visada yra paprasčiausias (ypač tais atvejais, kai sprendinio ieškome skaitiniais metodais).

6.3. APIBENDRINTOJO SPRENDINIO APIBRĖŽIMAS. VIENATIES TEOREMA

Pirmąjį kraštinį uždavinį visada galima suvesti į tokį patį uždavinį su homogenine kraštine sąlyga. Todėl iš karto tarkime, kad $\vartheta = 0$. Taigi nagrinėsime kraštinį uždavinį

$$\begin{cases} u_{tt} + A\,u &= f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \\ u\big|_{S_T} &= 0, \quad (x,t) \in S_T, \\ u\big|_{t=0} &= \varphi(x), \quad x \in \Omega, \\ u_t\big|_{t=0} &= \psi(x), \quad x \in \Omega. \end{cases} \tag{6.7}$$

Tarkime, operatoriaus A koeficientai $a_{ij},\ a_i$ ir $a \in \mathrm{L}_\infty(Q_T),\ f \in \mathrm{L}_2(Q_T),\ \varphi \in \mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega),\ \psi \in \mathrm{L}_2(\Omega)$. Bendru atveju taip suformuluotas uždavinys neturi klasikinio sprendinio. Todėl apibrėšime apibendrinto sprendinio sąvoką. Tiksliau ,,patalpinsime“ šį uždavinį į atitinkamą integralinę tapatybę.

Laikinai tarkime, kad visos į (6.7) uždavinį įeinančios funkcijos yra pakankamai glodžios, η – be galo diferencijuojama funkcija, lygi nuliui paviršiaus S_T ir hiperplokštumos $t = T$ aplinkoje. Padauginę abi lygties puses iš funkcijos η, gautus reiškinius suintegravę cilindru Q_T ir pasinaudoję integravimo dalimis formule (taip, kad neliktų funkcijos u antrosios eilės išvestinių), gausime integralinę tapatybę

$$\int\limits_{Q_T} \Big(-u_t\eta_t + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_{x_i}\eta_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i}\eta + au\eta\Big)\,dxdt =$$

$$= \int\limits_{Q_T} f\eta\,dxdt + \int\limits_{\Omega} \psi(x)\eta(x,0)\,dx. \tag{6.8}$$

Be galo diferencijuojamų lygių nuliui paviršiaus S_T ir hiperplokštumos $t = T$ aplinkoje funkcijų aibė yra tiršta erdvėje D_T (žr. (5.1) skyrelį). Todėl ši tapatybė išlieka teisinga $\forall\eta\in D_T$. Kadangi operatoriaus A koeficientai yra aprėžti, tai integralai kairiojoje tapatybės pusėje konverguoja $\forall u\in \mathrm{W}_2^{1,1}(Q_T)$. Be to, funkcijos iš erdvių $\mathrm{W}_2^{1,1}(Q_T)$, $\mathrm{W}_2^{1,0}(Q_T)$ elementai su kiekviena fiksuota kintamojo t reikšme yra apibrėžti kaip erdvės $\mathrm{L}_2(\Omega)$ elementai ir kintamojo t atžvilgiu yra tolydūs erdvėje $\mathrm{L}_2(\Omega)$, t.y. priklauso erdvei $\mathrm{C}([0,T] \to \mathrm{L}_2(\Omega))$. Todėl tokioms funkcijoms integralai konverguoja ir kairiojoje tapatybės pusėje. Kartu yra natūralus toks apibrėžimas.

A p i b r ė ž i m a s. Sakysime, funkcija u yra (6.7) kraštinio uždavinio *apibendrintas sprendinys* erdvėje $\mathrm{W}_2^{1,1}(Q_T)$, jeigu ji priklauso $\mathring{\mathrm{W}}_2^{1,1}(Q_T)$ poerdviui, tenkina pirmąją pradinę sąlygą ir $\forall\eta\in D_T$ yra teisinga (6.8) integralinė tapatybė.

6.1 teorema. *Tarkime, operatoriaus A koeficientai a_{ij}, a_i, a ir jų išvestinės $a_{ijt}, a_{it} \in \mathrm{L}_\infty(Q_T)$. Be to, tegu (6.1) lygtis yra tolygiai hiperbolinė. Tada (6.7) uždavinys erdvėje $\mathrm{W}_2^{1,1}(Q_T)$ negali turėti dviejų skirtingų apibendrintų sprendinių.*

$\triangleleft$ Tegu $u_1,\ u_2$ yra du (6.7) uždavinio apibendrinti sprendiniai $\mathrm{W}_2^{1,1}(Q_T)$ erdvėje. Tada jų skirtumas $u = u_1 - u_2 \in \mathring{\mathrm{W}}_2^{1,1}(Q_T)$, $u|_{t=0} = 0$ ir $\forall\eta\in D_T$ teisinga integralinė tapatybė

$$\int\limits_{Q_T} \Big(-u_t\eta_t + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_j}\eta_{x_i} + \sum_{i=1}^n a_i u_{x_i}\eta + au\eta \Big)\, dxdt = 0. \tag{6.9}$$

Fiksuokime $\tau\in[0,T]$ ir apibrėžkime funkciją

$$\eta(x,t) = \begin{cases} \int\limits_t^\tau u(x,s)\,ds, & \text{kai } t\in[0,\tau],\\ 0, & \text{kai } t\in[\tau,T]. \end{cases}$$

Taip apibrėžta funkcija $\eta\in D_T$ (patikrinkite). Be to, $\eta_t = -u$, $\eta_{tt} = -u_t$, $\eta_{tx_i} = -u_{x_i}$, kai $t\le\tau$. Todėl (6.9) tapatybę galima perrašyti taip:

$$\int\limits_{Q_\tau} \Big(\eta_t\eta_{tt} - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\eta_{x_j}\eta_{tx_i} - \sum_{i=1}^n a_i\eta_{tx_i}\eta - a\eta_t\eta \Big)\, dxdt = 0.$$

Pastebėsime, kad

$$\int\limits_{Q_\tau} \eta_t\eta_{tt}\, dxdt = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega \eta_t^2\big|_{t=\tau}\, dx;$$

$$\int\limits_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\eta_{x_j}\eta_{tx_i}\, dxdt = -\frac{1}{2}\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\eta_{x_j}\eta_{x_i}\big|_{t=0}\, dx -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^n a_{ijt}\eta_{x_j}\eta_{x_i}\, dxdt;$$

$$\int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n a_i\eta_{tx_i}\eta\, dxdt = -\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n a_i\eta_{x_i}\eta\big|_{t=0}\, dx -$$

$$-\int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n (a_{it}\eta_{x_i}\eta + a_i\eta_{x_i}\eta_t)\, dxdt;$$

Pasinaudoję šiomis formulėmis, gausime tapatybę

$$\frac{1}{2}\int\limits_\Omega \Big(\eta_t^2\big|_{t=\tau} + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\eta_{x_j}\eta_{x_i}\big|_{t=0} + \sum_{i=1}^n a_i\eta_{x_i}\eta\big|_{t=0} \Big)\, dx =$$

$$= -\int\limits_{Q_\tau} \Big(\sum_{i,j=1}^n a_{ijt}\eta_{x_j}\eta_{x_i} + \sum_{i=1}^n (a_{it}\eta_{x_i}\eta + a_i\eta_{x_i}\eta_t) - a\eta_t\eta \Big)\, dxdt.$$

Kadangi

$$\Big| \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n a_i\eta_{x_i}\eta\big|_{t=0}\, dx \Big| \le \frac{\nu}{2}\int\limits_\Omega \eta_x^2\big|_{t=0}\, dx + C_\nu \int\limits_\Omega \eta^2\big|_{t=0}\, dx,$$

tai iš pastarosios tapatybės išplaukia nelygybė

$$\int\limits_{\Omega}\Big(\eta_t^2\big|_{t=\tau}+\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\eta_{x_j}\eta_{x_i}\big|_{t=0}\Big)\,dx\leq C\int\limits_{Q_\tau}(\eta_x^2+\eta_t^2+\eta^2)\,dxdt.$$

Tegu

$$q(x,t)=\int\limits_0^t u(x,\tau)\,d\tau.$$

Pasinaudoję funkcijos η apibrėžimu, įvertinsime integralus

$$\int\limits_{\Omega}\eta^2\big|_{t=0}\,dx\leq\tau\int\limits_{Q_\tau}u^2\,dxdt,\quad \int\limits_{Q_\tau}\eta^2\,dxdt\leq\tau^2\int\limits_{Q_\tau}u^2\,dxdt$$

ir pastebėsime, kad

$$\eta(x,t)=\int\limits_t^\tau u(x,\tau)\,d\tau=q(x,\tau)-q(x,t),\quad \eta_t\big|_{t=\tau}=-u(x,\tau).$$

Tada

$$\int\limits_{\Omega}\Big(u^2(x,\tau)+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,0)q_{x_i}(x,\tau)q_{x_j}(x,\tau)\Big)\,dx\leq$$

$$\leq C_1\int\limits_{Q_\tau}\Big(\big(q(x,\tau)-q(x,t)\big)_x^2+u^2(x,t)\Big)\,dxdt\leq$$

$$\leq 2C_1\tau\int\limits_{\Omega}q_x^2(x,\tau)\,dx+2C_1\int\limits_{Q_\tau}\big(q_x^2(x,t)+u^2(x,t)\big)\,dxdt.$$

Kartu yra teisinga nelygybė

$$\int\limits_{\Omega}\Big(u^2(x,\tau)+\big(\nu/2-2C_1\tau\big)q_x^2(x,\tau)\Big)\,dx\leq 2C_1\int\limits_{Q_\tau}\big(q_x^2(x,t)+u^2(x,t)\big)\,dxdt.$$

Tegu $\tau\in[0,\nu/8C_1]$. Tada $\nu/2-2C_1\tau\geq\nu/4$. Pažymėkime

$$\Phi(\tau)=\int\limits_{Q_\tau}\big(u^2(x,t)+q_x^2(x,t)\big)\,dxdt.$$

Tada

$$\Phi'(\tau)\leq C_2\Phi(\tau).$$

Be to, $\Phi(0)=0$. Todėl (žr. 1.1 lemą) $\Phi(\tau)=0,\forall\tau\in[0,\nu/8C_1]$. Kartu galime tvirtinti, kad $u(x,\tau)=0$, $q_{x_i}(x,\tau)=0$, kai $\tau\in[0,\nu/8C_1]$. Pakartoję šį įrodymą intervalui $[\nu/8C_1,2\nu/8C_1]$, gausime, kad šiame intervale $u(x,t)=0$. Atlikę baigtinį skaičių tokių veiksmų, gausime, kad $u(x,t)=0$ visame cilindre Q_T. ▹

P a s t a b a. Teorema išliks teisinga, jeigu vietoje koeficientų a_{it} aprėžtumo reikalausime koeficientų a_{ix_i} aprėžtumo.

6.4. APIBENDRINTOJO SPRENDINIO EGZISTAVIMAS. GALIORKINO METODAS

Sakykime, kad (6.1) lygtis yra tolygiai hiperbolinė. Įrodysime, kad (6.7) uždavinys turi bent vieną apibendrintą sprendinį erdvėje $\mathrm{W}_2^{1,1}(Q_T)$.

6.2 teorema. *Tarkime,* $a_{ij},\ a_{ijt},\ a_i$ *ir* $a \in \mathrm{L}_\infty(Q_T),\ f \in \mathrm{L}_2(Q_T),\ \varphi \in \mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega),\ \psi \in \mathrm{L}_2(\Omega)$. *Tada erdvėje* $\mathring{\mathrm{W}}_2^{1,1}(Q_T)$ *egzistuoja bent vienas* (6.7) *uždavinio apibendrintasis sprendinys.*

◁ Tegu $\{v_k\}_{k=1}^\infty$ yra bazė erdvėje $\mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)$, ortonormuota erdvėje $\mathrm{L}_2(\Omega)$. Apytikslio (6.7) kraštinio uždavinio sprendinio ieškosime tokiu pavidalu:

$$u^{(N)}(x,t) = \sum_{k=1}^N w_k^{(N)}(t) v_k(x);$$

čia funkcijos $w_k^{(N)} = (u^{(N)}, v_k),\ k = 1, \dots, N$, randamos iš sąlygų:

$$(u_{tt}^{(N)}, v_k) + A(u^{(N)}, v_k) = (f, v_k), \tag{6.10}$$

$$u^{(N)}\big|_{t=0} = \sum_{k=1}^N (\varphi, v_k) v_k(x) := \varphi^{(N)}(x), \tag{6.11}$$

$$u_t^{(N)}\big|_{t=0} = \sum_{k=1}^N (\psi, v_k) v_k(x) := \psi^{(N)}(x). \tag{6.12}$$

Fiksuokime skaičių N ir pažymėkime $w_k^{(N)} = w_k$. Tada šias sąlygas galima perrašyti taip:

$$\begin{cases} w_k''(t) + \sum\limits_{j=1}^N \alpha_{kj} w_j(t) = f_k(t), \quad t \in (0,T), \\ w_k(0) = \varphi_k, \quad w_k'(0) = \psi_k; \end{cases}$$

čia $k = 1, \dots, N$, $\alpha_{kj} = A(v_k, v_j)$, $f_k = (f, v_k)$, $\varphi_k = (\varphi, v_k)$, $\psi_k = (\psi, v_k)$. Taigi gavome Koši uždavinį antrosios eilės tiesinių paprastų diferencialinių lygčių sistemai. Visiškai taip pat kaip 5.4 skyrelyje galima parodyti, kad ši sistema turi vienintelį sprendinį. Be to, $w_k'' \in \mathrm{L}_2(0,T)$. Todėl $\forall N$ egzistuoja tokios funkcijos $w_1^{(N)}, \dots, w_N^{(N)}$, kad funkcija

$$u^{(N)} = \sum_{k=1}^N w_k^{(N)}(t) v_k(x)$$

tenkina (6.10), (6.11), (6.12) sąlygas. Padauginę (6.10) lygtį iš w_k' ir susumavę pagal k nuo 1 iki N, gausime lygybę

$$(u_{tt}^{(N)}, u_t^{(N)}) + A(u^{(N)}, u_t^{(N)}) = (f, u_t^{(N)}).$$

Iš šios lygybės išvedama nelygybė

$$\int\limits_{\Omega}\Big((u^{(N)})^2+(u_t^{(N)})^2+(u_x^{(N)})^2\Big)\,dx\leq \tag{6.13}$$

$$\leq C(T)\Big(\int\limits_{Q_T} f^2\,dxdt+\int\limits_{\Omega}(\varphi_x^2+\psi^2)\,dx\Big),\quad t\in[0,T].$$

Pastaroji nelygybė įrodoma visiškai taip pat kaip (6.6) energinė nelygybė. Reikia tik atkreipti dėmesį į tai, kad ją išvesdami gausime (6.5) formulės analogą, kuriame vietoje neneigiamo integralo paviršiumi S_τ atsiras integralas paviršiumi S_T. Pastarasis integralas yra lygus nuliui, nes paviršiaus S_T taškuose funkcija $u^{(N)}$ lygi nuliui.

Kadangi (6.13) nelygybėje konstanta $C(T)$ nepriklauso nei nuo N, nei nuo $t\in[0,T]$, tai galime tvirtinti, kad seka $\{u^{(N)}\}$ yra aprėžta erdvėje $\mathrm{W}_2^{1,1}(Q_T)$. Todėl iš jos galima išskirti posekį $\{u^{(N_k)}\}$, silpnai konverguojantį į elementą $u\in\mathring{\mathrm{W}}_2^{1,1}(Q_T)$. Be to, šis posekis konverguoja tolygiai $t\in[0,T]$ atžvilgiu erdvėje $\mathrm{L}_2(\Omega)$.

Įrodysime, kad u yra (6.7) uždavinio apibendrintas spendinys. Tuo tikslu padauginkime (6.10) lygtį iš funkcijos $q_k\in\mathrm{W}_2^1(0,T)$, tenkinančios sąlygą $q_k(0)=0$, gautus reiškinius susumuokime pagal k nuo 1 iki M, $M\leq N$, rezultatą suintegruokime kintamojo t atžvilgiu nuo 0 iki T ir pasinaudokime integravimo dalimis formule. Tada gausime tapatybę

$$\int\limits_{Q_T}\Big(-u_t^{(N)}\eta_t+\sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_j}^{(N)}\eta_{x_i}+\sum_{i=1}^n a_iu_{x_i}^{(N)}\eta+au^{(N)}\eta\Big)\,dxdt=$$

$$=\int\limits_{\Omega}u_t^{(N)}\eta\big|_{t=0}\,dx+\int\limits_{Q_T}f\eta\,dxdt,\quad \eta=\sum_{k=1}^M q_k(t)v_k(x).$$

Kadangi $u^{(N_k)}\rightharpoonup u$ erdvėje $\mathrm{W}_2^{1,1}(Q_T)$, tai pastarojoje tapatybėje galima pereiti prie ribos kai $k\to\infty$. Kartu galime tvirtinti, kad ribinė funkcija u tenkina integralinę tapatybę

$$\int\limits_{Q_T}\Big(-u_t\eta_t+\sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_j}\eta_{x_i}+\sum_{i=1}^n a_iu_{x_i}\eta+au\eta\Big)\,dxdt=$$

$$=\int\limits_{\Omega}\psi(x)\eta(x,0)\,dx+\int\limits_{Q_T}f\eta\,dxdt,\quad \eta=\sum_{k=1}^M q_k(t)v_k(x). \tag{6.14}$$

Pagal 5.2 lemą aibė tokių funkcijų yra tiršta poerdvyje D_T. Todėl (6.14) tapatybė yra teisinga $\forall\eta\in D_T$.

Beliko įrodyti, kad

$$\|u(x,t)-\varphi(x)\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)}\to 0,$$

kai $t\to 0$. Tai daroma visiškai taip pat kaip 5.4 skyrelyje. ▹

P a s t a b a. Jeigu patenkintos 5.5 teoremos sąlygos, tai lengvai galima įsitikinti, kad visa seka $\{u^{(N)}\}$ silpnai konverguoja į u.

6.5. APIBENDRINTOJO SPRENDINIO EGZISTAVIMAS. FURJĖ METODAS

Tarkime, operatoriaus A koeficientai nepriklauso nuo kintamojo t. Be to, tegu koeficientai $a_i = 0$, $\forall i = 1, \dots, n$, t.y. operatorius

$$A\,u = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{dx_i}\big(a_{ij}(x)u_{x_j}\big) + a(x)u,$$

yra formaliai savijungis. Tada pirmojo, antrojo ir trečiojo kraštinių uždavinių apibendrintų sprendinių galima ieškoti Furjė metodu (trečiojo kraštinio uždavinio atveju koeficientas σ taip pat turi nepriklausyti nuo kintamojo t). Nagrinėsime pirmąjį kraštinį uždavinį

$$\begin{cases} u_{tt} + A\,u = f(x,t), & (x,t) \in Q_T, \\ u\big|_{S_T} = 0, & (x,t) \in S_T, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), & x \in \Omega, \\ u_t\big|_{t=0} = \psi(x), & x \in \Omega. \end{cases} \tag{6.15}$$

Tegu $\{\lambda_k\}$ yra operatoriaus A tikrinių reikšmių ir $\{v_k\}$ – ją atitinkančių tikrinių funkcijų sistema, ortonormuota erdvėje $\mathrm{L}_2(\Omega)$. Jeigu koeficientas $a(x) \geq 0$, tai visos tikrinės reikšmės λ_k yra teigiamos. Dėl paprastumo tarkime, kad pastaroji sąlyga taip pat patenkinta.

6.3 teorema. *Tegu* $f \in \mathrm{L}_2(Q_T), \varphi \in \mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega), \psi \in \mathrm{L}_2(\Omega)$ *ir operatoriaus* A *koeficientai yra aprėžti. Tada erdvėje* $\mathrm{W}_2^{1,1}(Q_T)$ *egzistuoja* (6.15) *uždavinio apibendrintas sprendinys*

◃ Apytikslio (6.15) uždavinio sprendinio ieškosime pavidalu

$$u^{(N)}(x,t) = \sum_{i=1}^{N} w_k(t)v_k(x).$$

Koeficientus w_k apibrėžkime taip, kad b.v. $t \in (0,T)$ ir $\forall \eta \in \mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)$ būtų patenkintos tokios sąlygos:

$$\begin{aligned} (u_{tt}^{(N)}, \eta) + [u^{(N)}, \eta] &= (f^{(N)}, \eta), \quad \forall \eta \in \mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega), \\ u^{(N)}\big|_{t=0} &= \varphi^{(N)}(x), \\ u_t^{(N)}\big|_{t=0} &= \psi^{(N)}(x); \end{aligned}$$

čia

$$[u,v] = \int\limits_{\Omega} \Big(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_{x_i}v_{x_j} + auv \Big)\, dx$$

energinė skaliarinė sandauga[3],

$$f^{(N)}(x,t) = \sum_{k=1}^{N} f_k(t) v_k(x),$$

$$\varphi^{(N)}(x) = \sum_{k=1}^{N} \varphi_k v_k(x),$$

$$\psi^{(N)}(x) = \sum_{k=1}^{N} \psi_k v_k(x).$$

Imdami $\eta = v_k,\ k = 1, \ldots, N$, gausime, kad w_k yra Koši uždavinio

$$\begin{aligned} w_k''(t) + \lambda_k w_k(t) &= f_k(t), \\ w_k(0) &= \varphi_k, \\ w_k'(0) &= \psi_k \end{aligned}$$

sprendinys. Jo ieškoma įprastu būdu. Iš pradžių randamas homogeninės lygties sprendinys, tenkinantis pradines sąlygas. Po to (pavyzdžiui, Diuamelio metodu) randamas nehomogeninės lygties sprendinys, tenkinantis homogenines pradines sąlygas. Sudėję šiuos sprendinius, gausime

$$w_k(t) = \varphi_k \cos\sqrt{\lambda_k} t + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \psi_k \sin\sqrt{\lambda_k} t + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int\limits_0^t f_k(\tau) \sin\sqrt{\lambda_k}(t-\tau)\, d\tau.$$

Apibrėžkime formalią eilutę

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k(t) v_k(x). \tag{6.16}$$

Taip apibrėžta funkcija u yra formalus (6.15) uždavinio sprendinys. Ištirsime šios eilutės konvergavimą.

Pagal teoremos sąlygą

$$|\!|\!|\varphi|\!|\!|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \varphi_k^2 < \infty,$$

$$\|\psi\|^2_{L_2(\Omega)} = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k^2 < \infty,$$

[3] Šią skaliarinę sandaugą atitinka energinė norma

$$|\!|\!|u|\!|\!| = \sqrt{[u,u]}.$$

$$\|f\|^2_{\mathrm{L}_2(Q_T)} = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T f_k^2(t)\,dt < \infty.$$

Pasinaudoję šių eilučių konvergavimu, įvertinsime reiškinius

$$\Big\| \sum_{k=N}^{N+M} \varphi_k \cos\sqrt{\lambda_k} t\, v_k(x) \Big\|^2 \le \sum_{k=N}^{N+M} \lambda_k \varphi_k^2,$$

$$\Big\| \sum_{k=N}^{N+M} \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \psi_k \sin\sqrt{\lambda_k} t\, v_k(x) \Big\|^2 \le \sum_{k=N}^{N+M} \psi_k^2,$$

$$\Big\| \sum_{k=N}^{N+M} \gamma_k(t) v_k(x) \Big\|^2 \le \sum_{k=N}^{N+M} \lambda_k \gamma_k^2 \le T \sum_{k=N}^{N+M} \int_0^T f_k^2(t)\,dt;$$

čia

$$\gamma_k(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_0^t f_k(\tau) \sin\sqrt{\lambda_k}(t-\tau)\,d\tau.$$

Iš šių įverčių išplaukia, kad

$$\Big\| \sum_{k=N}^{N+M} w_k(t) v_k(x) \Big\|^2 \rightrightarrows 0,$$

kintamojo t atžvilgiu, kai $N, M \to \infty$. Todėl

$$u \in \mathrm{C}\big([0,T] \to \mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)\big)$$

ir

$$\| u(x,t) - \varphi(x) \| \to 0,$$

kai $t \to 0$. Kartu galime tvirtinti, kad $u_{x_i}^{(N)} \to u_{x_i}$ erdvėje $\mathrm{L}_2(Q_T)$, kai $N \to \infty$, ir $u_{x_i} \in \mathrm{L}_2(Q_T)$.

Įrodysime, kad $u_t \in \mathrm{L}_2(Q_T)$. Iš pradžių pastebėsime, kad

$$\int_{Q_\tau} \Big(u_{tt}^{(N)} \eta + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_j}^{(N)} \eta_{x_i} + a u^{(N)} \eta \Big)\,dxdt = \int_{Q_\tau} f^{(N)} \eta\,dxdt;$$

čia

$$\eta(x,t) = \sum_{k=1}^{M} q_k(t) v_k(x), \quad q_k \in \mathrm{L}_2(0,T).$$

Imkime šioje tapatybėje $\eta = u_t^{(N)}$ ir perrašykime ją taip:

$$\|u_t^{(N)}(x,\tau)\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} + \| u^{(N)}(x,\tau) \|^2 =$$

$$= 2 \int\limits_{Q_\tau} f^{(N)} u_t^{(N)} \, dxdt + \|\psi^{(N)}\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} + \|\varphi^{(N)}\|^2.$$

Iš šios tapatybės išplaukia nelygybė

$$\|u_t^{(N)}(x,\tau)\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} \leq \|u_t^{(N)}\|^2_{\mathrm{L}_2(Q_\tau)} + \|f\|^2_{\mathrm{L}_2(Q_T)} + \|\psi\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} + \|\varphi\|^2.$$

Tegu

$$y(\tau) = \|u_t^{(N)}\|^2_{\mathrm{L}_2(Q_\tau)}.$$

Tada

$$y'(\tau) = \|u_\tau^{(N)}(x,\tau)\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)}$$

ir teisinga nelygybė

$$y'(\tau) \leq y(\tau) + q;$$

čia

$$q = \|f\|^2_{\mathrm{L}_2(Q_T)} + \|\psi\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} + \|\varphi\|^2.$$

Iš šios nelygybės ir 1.1 lemos išplaukia įvertis

$$y(\tau) = \|u_t^{(N)}\|^2_{\mathrm{L}_2(Q_\tau)} \leq C\big(\|f\|^2_{\mathrm{L}_2(Q_T)} + \|\psi\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} + \|\varphi\|^2\big).$$

Todėl iš sekos $\{u_t^{(N)}\}$ galima išskirti silpnai konverguojantį į u_t posekį ir $u_t \in \mathrm{L}_2(Q_T)$. Be to,

$$\|u_t^{(N)}(x,\tau)\|^2 \leq C\Big(\|f\|^2_{\mathrm{L}_2(Q_T)} + \|\psi\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} + \|\varphi\|^2\Big)$$

ir galime tvirtinti, kad $u_t \in \mathrm{L}_2(Q_T)$.

Įrodysime, kad $u_t \in \mathrm{C}\big([0,T] \to \mathrm{L}_2(\Omega)\big)$. Įvertinsime reiškinius

$$\Big\| \sum_{k=N}^{N+M} \varphi_k \sqrt{\lambda_k} \sin \sqrt{\lambda_k} t \, v_k(x) \Big\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} \leq \sum_{k=N}^{N+M} \lambda_k \varphi_k^2,$$

$$\Big\| \sum_{k=N}^{N+M} \psi_k \cos \sqrt{\lambda_k} t \, v_k(x) \Big\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} \leq \sum_{k=N}^{N+M} \psi_k^2,$$

$$\Big\| \sum_{k=N}^{N+M} \gamma_k'(t) v_k(x) \Big\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} \leq T \sum_{k=N}^{N+M} \int\limits_0^T f_k^2(t) \, dt.$$

Iš šių įverčių išplaukia, kad

$$\Big\| \sum_{k=N}^{N+M} w_k'(t) v_k(x) \Big\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} \rightrightarrows 0$$

kintamojo t atžvilgiu, kai $N, M \to \infty$. Taigi $u_t \in \mathrm{C}\big([0,T] \to \mathrm{L}_2(\Omega)\big)$. Kartu galime tvirtinti, kad

$$\|u_t(x,t) - \psi(x)\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)} \to 0,$$

kai $t \to 0$.

Beliko įrodyti, kad funkcija u tenkina (6.8) tapatybę. Visų pirma pastebėsime, kad apytikslis sprendinys $u^{(N)}$ tenkina integralinę tapatybę

$$\int\limits_{Q_T} \Big(-u_t^{(N)} \eta_t + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i}^{(N)} \eta_{x_j} + a u^{(N)} \eta \Big)\, dxdt = \int\limits_{Q_T} f^{(N)} \eta\, dxdt +$$

$$+ \int\limits_{\Omega} \psi^{(N)}(x) \eta(x,0)\, dx, \quad \eta = \sum_{k=1}^{M} q_k(t) v_k(x), \quad M \leq N;$$

čia funkcijos $q_k \in \mathrm{C}^\infty[0,T]$ ir lygios nuliui taško $t = T$ aplinkoje. Perėję šioje tapatybėje prie ribos, gausime

$$\int\limits_{Q_T} \Big(-u_t \eta_t + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i} \eta_{x_j} + a u \eta \Big)\, dxdt = \int\limits_{Q_T} f \eta\, dxdt + \int\limits_{\Omega} \psi(x) \eta(x,0)\, dx.$$

Pagal 5.2 lemą aibė $\{\eta : \eta(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{M} q_k(t) v_k(x)\}$ yra tiršta erdvėje D_T. Todėl pastaroji tapatybė teisinga $\forall \eta \in D_T$ ir u yra (6.15) uždavinio apibendrintas sprendinys erdvėje $\mathrm{W}_2^{1,1}(Q_T)$. $\triangleright$

6.6. KITŲ KRAŠTINIŲ SĄLYGŲ ATVEJIS

Tarkime, operatoriaus A koeficientai $a_{ij},\ a_i$ ir $a \in \mathrm{L}_\infty(Q_T),\ f \in \mathrm{L}_2(Q_T),\ \varphi \in \mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega),\ \psi \in \mathrm{L}_2(\Omega),\ S = \partial\Omega$ – dalimis glodus paviršius, o σ – aprėžta paviršiuje S_T funkcija. Nagrinėsime kraštinį uždavinį[4]

$$\left\{\begin{array}{rcccl} u_{tt} + A\,u &=& f(x,t), & (x,t) & \in\ Q_T, \\ \partial u/\partial N + \sigma u\big|_{S_T} &=& 0, & (x,t) & \in\ S_T, \\ u\big|_{t=0} &=& \varphi(x), & x & \in\ \Omega, \\ u_t\big|_{t=0} &=& \psi(x), & x & \in\ \Omega. \end{array}\right. \tag{6.17}$$

Taip apibrėžtas uždavinys vadinamas trečiuoju kraštiniu uždaviniu, o jo atskiras atvejis, kai $\sigma = 0$, – antruoju kraštiniu uždaviniu[2].

Apibrėžimas. Sakysime, $u \in \mathrm{W}_2^{1,1}(Q_T)$ yra (6.17) uždavinio *apibendrintasis sprendinys*, jeigu $\forall \eta \in \mathrm{W}_2^{1,1}(Q_T),\ \eta(\cdot,T) = 0$, teisinga integralinė tapatybė

$$\int\limits_{Q_{t_1}} \Big(-u_t\eta + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i}\eta_{x_j} + \sum_{i=1}^n a_i u_{x_i}\eta + au\eta\Big)\,dxdt =$$

$$= -\int\limits_{S_T} \sigma u\eta\,dSdt + \int\limits_{\Omega} \psi\eta(x,0)\,dx + \int\limits_{Q_T} f\eta\,dxdt \tag{6.18}$$

ir

$$\|u(x,t) - \varphi(x)\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)} \to 0,$$

kai $t \to 0$.

Trečiojo (taip pat antrojo) kraštinio uždavinio apibendrintų sprendinių egzistavimą bendru atveju galima įrodyti Galiorkino metodu. Čia tik $\{v_k\}$ turi būti bazė erdvėje $\mathrm{W}_2^1(\Omega)$, o ne poerdvyje $\mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)$. Jeigu operatoriaus A koeficientai $a_{ij},\ a_i$ ir a nepriklauso nuo kintamojo t, tai apibendrintų sprendinių egzistavimą galima įrodyti Furjė metodu. Abiem atvejais apytikslio sprendinio $u^{(N)}$ konstrukcija ir jo konvergavimo į u įrodymas yra analogiškas atitinkamų teiginių 6.4 ir 6.5 skyreliuose įrodymams. Tą patį galima pasakyti ir apie energinės nelygybės bei vienaties teoremos įrodymą. Reikia tik atkreipti dėmesį į tai, kad paviršinis integralas

$$\int\limits_{S_T} \sigma u u_t dSdt = \frac{1}{2}\int\limits_{S} \sigma u^2\,dS\Big|_{t=0}^{t=T} - \frac{1}{2}\int\limits_{S_T} \sigma_t u^2\,dSdt$$

ir teisinga nelygybė

$$\int\limits_{S} u^2(x,t)\,dS \le \varepsilon \int\limits_{\Omega} u_x^2(x,t)\,dx + C_\varepsilon \int\limits_{\Omega} u^2(x,t)\,dx \le$$

[4]Nehomogeninės kraštinės sąlygos atvejis įprastu būdu suvedamas į tokį patį uždavinį su homogene kraštine sąlyga.

[2]Jeigu $\sigma = 0$, tai reikalavimą, kad paviršius S būtų dalimis glodus, galima atmesti.

$$\leq \varepsilon \int\limits_{\Omega} u_x^2(x,t)\,dx + 2C_\varepsilon \int\limits_{\Omega} u^2(x,0)\,dx + 2C_\varepsilon t \int\limits_{Q_t} u_t^2(x,t)\,dxdt$$

(žr. 4.6 lemą ir 1 uždavinį.). Abibendrindami visa tai, galime tvirtinti, kad teisinga tokia teorema.

6.4 teorema. *Tarkime, paviršius S yra dalimis glodus, o operatoriaus A koeficientai $a_{ij} = a_{ji}$, a_i, a ir jų išvestinės $a_{ijt} \in \mathrm{L}_\infty(Q_T)$. Be to, tegu σ kartu su savo išvestine $\sigma_t \in \mathrm{L}_\infty(S_T)$. Tada (6.17) uždavinys su bet kokiomis funkcijomis $f \in \mathrm{L}_2(Q_T)$, $\varphi \in \mathrm{W}_2^1(\Omega)$, $\psi \in \mathrm{L}_2(\Omega)$ turi apibendrintą sprendinį erdvėje $\mathrm{W}_2^{1,1}(Q_T)$. Jeigu, be minėtų sąlygų, koeficientai a_i turi išvestines a_{it} arba $a_{ix_i} \in \mathrm{L}_\infty(Q_T)$, tai bet kokie du (6.17) uždavinio apibendrinti sprendiniai erdvėje $\mathrm{W}_2^{1,1}(Q_T)$ sutampa.*

6.7. APIBENDRINTŲJŲ SPRENDINIŲ GLODUMAS

Šiame skyrelyje įrodysime, kad (6.7) kraštinio uždavinio apibendrinti sprendiniai erdvėje $\mathrm{W}_2^{1,1}(Q_T)$ priklauso erdvei $\mathrm{W}_2^{2,2}(Q_T)$, jeigu tik operatoriaus A koeficientai, paviršius S bei funkcijos f, φ ir ψ tenkina tam tikras papildomas glodumo sąlygas.

6.5 teorema. *Tarkime, operatoriaus A koeficientai bei funkcijos f, φ ir ψ tenkina 6.2 teoremos sąlygas ir $u \in \mathrm{W}_2^{1,1}(Q_T)$ yra apibendrintas (6.7) kraštinio uždavinio sprendinys. Be to, tegu koeficientai $a_{ijtt},\ a_{it},\ a_t,\ a_{ijx} \in \mathrm{L}_\infty(Q_T),$ funkcijos f išvestinė $f_t \in \mathrm{L}_2(Q_T),\ \varphi \in \mathrm{W}_2^2(\Omega) \cap \mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega),\ \psi \in \mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega).$ Tada:*

1. *Funkcija u turi antrosios eilės apibendrintas išvestines $u_{tt},\ u_{tx} \in \mathrm{L}_2(Q_T)$ ir teisinga nelygybė*
$$\|u_{tt}\|^2_{\mathrm{L}_2(Q_T)} + \nu\|u_{tx}\|^2_{\mathrm{L}_2(Q_T)} \leq \tag{6.19}$$
$$\leq C\Big(\|\varphi\|^2_{\mathrm{W}_2^2(\Omega)} + \|\psi\|^2_{\mathrm{W}_2^1(\Omega)} + \|f\|^2_{\mathrm{L}_2(Q_T)} + \|f_t\|^2_{\mathrm{L}_2(Q_T)}\Big).$$
Be to,
$$\|u_t(x,t) - \psi(x)\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)} \to 0,$$
kai $t \to 0$.

2. *Jeigu, be minėtų sąlygų, $S \in \mathrm{C}^2$, tai egzistuoja funkcijos u apibendrintosios išvestinės $u_{x_i x_j} \in \mathrm{L}_2(Q_T),\ i,j = 1,\dots,n$. Tuo pačiu $u \in \mathrm{W}_2^{2,2}(Q_T)$.*

$\triangleleft$ Tegu $\{v_k\}_{k=1}^\infty$ yra bazė erdvėje $\mathrm{W}_2^2(\Omega) \cap \mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)$, ortonormuota $\mathrm{L}_2(\Omega)$ erdvėje. Apytikslis (6.7) kraštinio uždavinio sprendinys

$$u^{(N)}(x,t) = \sum_{k=1}^N w_k^{(N)}(t) v_k(x);$$

čia funkcijos $w_k^{(N)}$ randamos iš (6.10), (6.11) ir (6.10) sąlygų. Be to, jos turi sumuojamas kvadratu išvestines iki trečiosios eilės imtinai.

Pagal teoremos sąlygą $\varphi \in \mathrm{W}_2^2(\Omega) \cap \mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)$, $\psi \in \mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)$. Todėl

$$u^{(N)}(x,0) = \sum_{k=1}^N (\varphi, v_k) v_k(x) \xrightarrow{\mathrm{W}_2^2(\Omega)} \varphi(x),$$

$$u_t^{(N)}(x,0) = \sum_{k=1}^N (\psi, v_k) v_k(x) \xrightarrow{\mathrm{W}_2^1(\Omega)} \psi(x),$$

kai $N \to \infty$. Kartu galime tvirtinti, kad

$$\|u^{(N)}(\cdot,0)\|_{\mathrm{W}_2^2(\Omega)} + \|u_t^{(N)}(\cdot,0)\|_{\mathrm{W}_2^1(\Omega)} \leq C\big(\|\varphi\|_{\mathrm{W}_2^2(\Omega)} + \|\psi\|_{\mathrm{W}_2^1(\Omega)}\big); \tag{6.20}$$

čia konstanta C nepriklauso nuo N. Įrodysime, kad norma $\|u_{tt}^{(N)}(\cdot,0)\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)}$ taip pat yra tolygiai aprėžta N atžvilgiu. Tuo tikslu padauginkime (6.10) sąlygą iš $w_{ktt}^{(N)}$, gautus reiškinius susumuokime pagal k nuo 1 iki N ir rezultatą užrašykime taip:

$$(u_{tt}^{(N)}, u_{tt}^{(N)}) + A(u^{(N)}, u_{tt}^{(N)}) = (f, u_{tt}^{(N)}).$$

Imkime šioje lygybėje $t = 0$. Tada pasinaudoję integravimo dalimis formule bei Helderio nelygybe, gausime

$$\|u_{tt}^{(N)}(\cdot,0)\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} \leq C\big(\|\varphi\|_{\mathrm{W}_2^2(\Omega)} + \|f\|_{\mathrm{L}_2(Q_T)}\big); \tag{6.21}$$

čia konstanta C nepriklauso nuo N.

Įrodysime, kad u turi apibendrintas išvestines u_{tt}, $u_{tx} \in \mathrm{L}_2(Q_T)$. Diferencijuokime abi (6.10) sąlygos puses kintamojo t atžvilgiu, po to padauginkime iš $w_{ktt}^{(N)}$, gautus reiškinius susumuokime pagal k nuo 1 iki N, suintegruokime t atžvilgiu nuo 0 iki τ ir rezultatą užrašykime taip:

$$\int_0^\tau (u_{ttt}^{(N)}, u_{tt}^{(N)}) + A(u_t^{(N)}, u_{tt}^{(N)}) + A_t(u^{(N)}, u_{tt}^{(N)})\, dt = \int_0^\tau (f_t, u_{tt}^{(N)})\, dt; \tag{6.22}$$

čia

$$A_t(u^{(N)}, u_{tt}^{(N)}) = \int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^n a_{ijt} u_{x_i}^{(N)} u_{ttx_j}^{(N)} + \sum_{i=1}^n a_{it} u_{x_i}^{(N)} u_{tt}^{(N)} + a_t u^{(N)} u_{tt}^{(N)} \Big)\, dx.$$

Lengvai galima įsitikinti, kad reiškiniai

$$(u_{ttt}^{(N)}, u_{tt}^{(N)}) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_{tt}^{(N)}\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)};$$

$$\begin{aligned}\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{tx_i}^{(N)} u_{tx_j}^{(N)}\, dx &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{tx_i}^{(N)} u_{tx_j}^{(N)}\, dx - \\ &- \frac{1}{2}\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ijt} u_{tx_i}^{(N)} u_{tx_j}^{(N)}\, dx;\end{aligned}$$

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ijt} u_{x_i}^{(N)} u_{ttx_j}^{(N)}\, dx = \frac{d}{dt}\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ijt} u_{x_i}^{(N)} u_{tx_j}^{(N)}\, dx -$$

$$-\int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^n a_{ijtt} u_{x_i}^{(N)} u_{tx_j}^{(N)} - \sum_{i,j=1}^n a_{ijt} u_{tx_i}^{(N)} u_{tx_j}^{(N)} \Big)\, dx.$$

Todėl (6.22) lygybę galima perrašyti taip:

$$\Big(\|u_{tt}^{(N)}\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} + \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{tx_i}^{(N)} u_{tx_j}^{(N)}\, dx + \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ijt} u_{x_i}^{(N)} u_{tx_j}^{(N)}\, dx \Big)\Big|_{t=0}^{t=\tau} =$$

$$= \int\limits_{Q_\tau} \Big[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ijt} u_{tx_i}^{(N)} u_{tx_j}^{(N)} + 2 \sum_{i,j=1}^{n} a_{ijtt} u_{x_i}^{(N)} u_{tx_j}^{(N)} + 2 \sum_{i,j=1}^{n} a_{ijt} u_{tx_i}^{(N)} u_{tx_j}^{(N)} -$$

$$-2 \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i u_{tx_i}^{(N)} + \sum_{i=1}^{n} a_{it} u_{x_i}^{(N)} + a u_t^{(N)} + a_t u^{(N)} - f_t \Big) u_{tt}^{(N)} \Big] \, dxdt.$$

Iš šios lygybės įprastu būdu išvedama nelygybė

$$\Big(\|u_{tt}^{(N)}\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} + \nu \|u_{tx}^{(N)}\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} \Big)\Big|_{t=\tau} \le C_1 \Big(\|u_{tt}^{(N)}\|^2_{\mathrm{L}_2(Q_\tau)} + \nu \|u_{tx}^{(N)}\|^2_{\mathrm{L}_2(Q_T)} \Big) +$$

$$+ C_2 \Big(\|\varphi\|^2_{\mathrm{W}_2^2(\Omega)} + \|\psi\|^2_{\mathrm{W}_2^1(\Omega)} + \|f\|^2_{\mathrm{L}_2(Q_T)} + \|f_t\|^2_{\mathrm{L}_2(Q_T)} \Big).$$

Reikia tik pasinaudoti energine bei (6.20) ir (6.21) nelygybėmis. Iš pastarosios nelygybės bei Gronuolo lemos išplaukia, kad

$$\|u_{tt}^{(N)}\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} + \nu \|u_{tx}^{(N)}\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} \le$$

$$\le C_3 \Big(\|\varphi\|^2_{\mathrm{W}_2^2(\Omega)} + \|\psi\|^2_{\mathrm{W}_2^1(\Omega)} + \|f\|^2_{\mathrm{L}_2(Q_T)} + \|f_t\|^2_{\mathrm{L}_2(Q_T)} \Big);$$

Kartu teisinga nelygybė

$$\|u_{tt}^{(N)}\|^2_{\mathrm{L}_2(Q_T)} + \nu \|u_{tx}^{(N)}\|^2_{\mathrm{L}_2(Q_T)} \le$$

$$\le C \Big(\|\varphi\|^2_{\mathrm{W}_2^2(\Omega)} + \|\psi\|^2_{\mathrm{W}_2^1(\Omega)} + \|f\|^2_{\mathrm{L}_2(Q_T)} + \|f_t\|^2_{\mathrm{L}_2(Q_T)} \Big);$$

čia konstanta C nepriklauso nuo N. Todėl iš sekos $\{u^{(N)}\}$ galima išskirti posekį[5] $\{u^{(N_k)}\}$, silpnai konverguojantį erdvėje $\mathrm{L}_2(Q_T)$ kartu su savo pirmosios eilės išvestinėmis $u_t^{(N)}$, $u_{x_i}^{(N)}$ bei antrosios eilės išvestinėmis $u_{tt}^{(N)}$, $u_{tx_i}^{(N)}$ į funkciją u ir į jos atitinkamas išvestines. Be to, $u, u_t, u_{x_i}, u_{tt}, u_{tx_i} \in \mathrm{L}_2(Q_T)$, $\forall i = 1, \dots, n$, ir pastaroji nelygybė yra teisinga ribinei funkcijai u.

Įrodysime, kad funkcija u tenkina antrąją pradinę sąlygą. Laisvai pasirenkame skaičių $\varepsilon > 0$. Pagal Minkovskio nelygybę

$$\|u_t(\cdot,t) - \psi\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} \le \|u_t(\cdot,t) - u_t^{(N)}(\cdot,t)\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} +$$

$$+ \|u_t^{(N)}(\cdot,t) - \psi^{(N)}\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} + \|\psi^{(N)} - \psi\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)}.$$

Kadangi

$$u^{(N)}(\cdot,t) \xrightarrow{\mathrm{L}_2(\Omega)} u(\cdot,t), \quad \psi^{(N)} \xrightarrow{\mathrm{L}_2(\Omega)} \psi,$$

kai $N \to \infty$, tolygiai kintamojo t atžvilgiu, tai egzistuoja toks skaičius N_0, kad

$$\|u_t(\cdot,t) - u_t^{(N)}(\cdot,t)\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} \le \varepsilon/3, \quad \|\psi^{(N)} - \psi\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} \le \varepsilon/3, \quad \forall N \ge N_0.$$

[5] Kadangi patenkintos vienaties teoremos sąlygos, tai iš tikrųjų visa seka konverguoja į u ir u yra (6.7) kraštinio uždavinio apibendrintas sprendinys erdvėje $\mathrm{W}_2^{1,1}(Q_T)$.

Fiksuokime $N\geq N_0$. Tada galima nurodyti tokį skaičių $t_0 > 0$, kad

$$\|u_t^{(N)}(\cdot,t) - \psi^{(N)}\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)}\leq\varepsilon/3, \quad \forall t\leq t_0.$$

Taigi

$$\|u_t(\cdot,t) - \psi\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)}\leq\varepsilon, \quad \forall t\leq t_0,$$

ir pirmasis teoremos teiginys įrodytas.

Įrodysime antrąjį teoremos teiginį. Iš pradžių pastebėsime, kad b.v. $t\in[0,T]$ teisinga integralinė tapatybė (ji išvedama iš (6.10) sąlygos)

$$\int\limits_{Q_T}\Big(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i}\eta_{x_j} + \sum_{i=1}^n a_i u_{x_i}\eta + au\eta\Big)\,dxdt = \int\limits_{Q_T}(f-u_{tt})\eta\,dxdt,$$

$\forall\eta\in \overset{\circ}{\mathrm{W}}{}^1_2(\Omega)$. Todėl tokiems t funkcija u yra elipsinės lygties

$$A\,u = f - u_{tt}$$

apibendrintas sprendinys erdveje $\overset{\circ}{\mathrm{W}}{}^1_2(\Omega)$ (žr. 4.1 skyrelį). Remdamiesi 4.16 teorema, galime tvirtinti, kad srityje Ω egzistuoja šio sprendinio antrosios eilės apibendrintos išvestinės $u_{x_ix_j}\in\mathrm{L}_2(\Omega)$ ir teisinga nelygybė

$$\|u_{xx}\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)}\leq C(\|f\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)} + \|u_{tt}\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)}).$$

Remdamiesi (6.19) nelygybe, galime tvirtinti, kad

$$\|u_{xx}\|_{\mathrm{L}_2(Q_T)}\leq C\Big(\|\varphi\|_{\mathrm{W}^2_2(\Omega)} + \|\psi\|_{\mathrm{W}^1_2(\Omega)} + \|f\|_{\mathrm{L}_2(Q_T)} + \|f_t\|_{\mathrm{L}_2(Q_T)}\Big). \qquad (6.23)$$

Taigi $u\in\mathrm{W}^{2,2}_2(Q_T)$. Teorema įrodyta. ▹

P a s t a b a . Įrodydami apibendrintų išvestinių u_{tt} ir u_{tx} egzistavimą nereikalavome jokio paviršiaus S glodumo. Paviršiaus S glodumu pasinaudojome tik įrodydami apibendrintų išvestinių $u_{x_ix_j}$ egzistavimą. Jeigu paviršius S nėra glodus, tai galima įrodyti, kad apibendrintos išvestinės $u_{x_ix_j}\in\mathrm{L}_2(Q'_T)$, $Q'_T=\Omega'\cap(0,T)$, $\Omega'\subset\Omega$ – bet kokia griežtai vidinė sritis. Be to, išlieka teisinga (6.23) nelygybė, kurioje vietoje Q_T ir Ω reikia įrašyti atitinkamai Q'_T ir Ω'.

Iš 6.5 bei 3.11 teoremų išplaukia, kad funkcijos $u(\cdot,t)$, $u_t(\cdot,t)$ ir $u_{x_i}(\cdot,t)$, kaip erdvės $\mathrm{L}_2(\Omega)$ elementai, yra tolydžios kintamojo $t\in[0,T]$ atžvilgiu. Pastarąjį teiginį galima įrodyti, jeigu funkcijos f, φ ir ψ tenkina tik 6.2 teoremos sąlygas. Tiksliau, teisinga tokia teorema.

6.6 teorema. *Tarkime, funkcijos f,φ ir ψ tenkina 6.2 teoremos sąlygas, o operatoriaus A koeficientai a_{ij}, a_i ir a tenkina 6.5 teoremos sąlygas. Tada (6.7) uždavinio apibendrintasis sprendinys $u\in\mathrm{C}([0,T]\to\overset{\circ}{\mathrm{W}}{}^1_2(\Omega))$, o jo išvestinė $u_t\in\mathrm{C}([0,T]\to\mathrm{L}_2(\Omega))$.*

◃ Tarkime, funkcijos $f^{(k)}$, $\varphi^{(k)}$ ir $\psi^{(k)}$ $\forall k=1,2,\ldots,$ tenkina 6.5 teoremos sąlygas bei

$$\|f^{(k)}-f\|_{\mathrm{L}_2(Q_T)}\to 0, \quad \|\varphi^{(k)}-\varphi\|_{\overset{\circ}{\mathrm{W}}{}^1_2(\Omega)}\to 0, \quad \|\psi^{(k)}-\psi\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)}\to 0,$$

kai $k \to \infty$. Pakeitę (6.7) uždavinyje funkcijas f, φ ir ψ atitinkamai funkcijomis $f^{(k)}$, $\varphi^{(k)}$ ir $\psi^{(k)}$, gausime uždavinį, kurio apibendrintas sprendinys $u^{(k)}$ yra erdvės $\mathrm{W}_2^{1,1}(Q_T)$ elementas. Remiantis pirmuoju 6.5 teoremos teiginiu, galima tvirtinti, kad $u_{tt}^{(k)}$, $u_{tx_i}^{(k)} \in \mathrm{L}_2(Q_T)$. Be to, teisinga energinė nelygybė

$$\|u^{(k)}(\cdot,t)\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} + \|u_t^{(k)}(\cdot,t)\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} + \|u_x^{(k)}(\cdot,t)\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} \leq$$

$$\leq C\big(\|f^{(k)}\|^2_{\mathrm{L}_2(Q_T)} + \|\varphi_x^{(k)}\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} + \|\psi^{(k)}\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)}\big).$$

Pakeiskime (6.7) uždavinyje funkcijas f, φ ir ψ atitinkamai funkcijomis $f^{(k)} - f^{(s)}$, $\varphi^{(k)} - \varphi^{(s)}$ ir $\psi^{(k)} - \psi^{(s)}$. Tada gausime uždavinį, kurio apibendrintas sprendinys $u^{k,s} = u^{(k)} - u^{(s)}$ ir teisinga energinė nelygybė

$$\|u^{k,s}(\cdot,t)\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} + \|u_t^{k,s}(\cdot,t)\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} + \|u_x^{k,s}(\cdot,t)\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} \leq$$

$$\leq C\Big(\|f^{(k)} - f^{(s)}\|^2_{\mathrm{L}_2(Q_T)} + \|\varphi_x^{(k)} - \varphi_x^{(s)}\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} + \|\psi^{(k)} - \psi^{(s)}\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)}\Big);$$

čia konstanta C nepriklauso nuo k, s ir t. Kai k ir $s \to \infty$, reiškinys dešiniojoje pastarosios nelygybės pusėje tolygiai kintamojo t atžvilgiu artėja į nulį. Todėl egzistuoja tokia funkcija $\tilde{u}$, kad

$$\|u^{(k)}(\cdot,t) - \tilde{u}(\cdot,t)\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)} \to 0,$$

$$\|u_t^{(k)}(\cdot,t) - \tilde{u}_t(\cdot,t)\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)} \to 0,$$

$$\|u_{x_i}^{(k)}(\cdot,t) - \tilde{u}_{x_i}(\cdot,t)\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)} \to 0$$

(tolygiai kintamojo t atžvilgiu), kai $k \to \infty$. Tiesiogiai galima patikrinti, kad $\tilde{u}$ yra (6.7) uždavinio apibendrintas sprendinys erdvėje $\mathrm{W}_2^{1,1}(Q_T)$. Pagal 6.1 teoremą (6.7) uždavinys erdvėje $\mathrm{W}_2^{1,1}(Q_T)$ negali turėti dviejų skirtingų apibendrintų sprendinių. Todėl galime tvirtinti, kad $\tilde{u} = u$. Kadangi funkcijos $u^{(k)}(\cdot,t)$, $u_t^{(k)}(\cdot,t)$ ir $u_{x_i}^{(k)}(\cdot,t) \in \mathrm{L}_2(\Omega)$ ir, kaip erdvės $\mathrm{L}_2(\Omega)$ elementai, yra tolydžios kintamojo t atžvilgiu, tai funkcijos $u(\cdot,t)$, $u_t(\cdot,t)$ ir $u_{x_i}(\cdot,t)$, kaip erdvės $\mathrm{L}_2(\Omega)$ elementai, taip pat yra tolydžios kintamojo t atžvilgiu. Teorema įrodyta. $\triangleright$

Apibendrinto sprendinio egzistavimą erdvėje $\mathrm{W}_2^{1,1}(Q_T)$ įrodėme (žr. 6.4 skyrelį), kai $\varphi \in \mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)$. Kitais žodžiais tariant, reikalavome, kad taškuose $x \in S$, $t = 0$ būtų patenkinta nulinės eilės suderinamumo sąlyga, t.y. būtų suderinta pirmoji pradinė ir kraštinė sąlygos. Įrodydami apibendrinto sprendinio glodumą erdvėje $\mathrm{W}_2^{2,2}(Q_T)$, reikalavome, kad φ ir $\psi \in \mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)$. Šiuo atveju reikalavome, kad taškuose $x \in S$, $t = 0$ būtų patenkinta pirmosios eilės suderinamumo sąlyga, t.y. būtų suderinta ne tik pirmoji, bet ir antroji pradinė sąlyga. Norint įrodyti aukštesnį apibendrintų sprendinių glodumą, reikia pareikalauti, kad būtų patenkintos atitinkamos suderinamumo sąlygos. Visos jos susijusios su funkcijos u išvestinių t atžvilgiu reikšmėmis taškuose $x \in S$, $t = 0$, tiksliau – su sąlyga $D_t^k u\big|_{x \in S, t=0} = 0$. Pavyzdžiui, kai $k = 2$, taškuose $x \in S$, $t = 0$ turi būti patenkinta tokia suderinamumo sąlyga:

$$A\,\varphi - f = u_{tt} = 0.$$

Kai $k > 2$, apibendrintų sprendinių glodumą erdvėje $\mathrm{W}_2^{\mathrm{k},\mathrm{k}}(Q_T)$ galima įrodyti matematinės indukcijos metodu. Bendra įrodymo schema yra tokia. Iš pradžių įrodomas glodumo padidėjimas kintamojo t atžvilgiu. Po to, remiantis elipsinių lygčių teorija, įrodomas glodumo padidėjimas kintamųjų x_i atžvilgiu.

6.8. KOŠI UŽDAVINYS

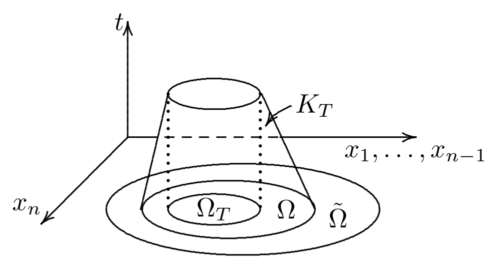
Šiame skyrelyje nagrinėsime Koši uždavinį

$$\left\{\begin{array}{rcllcl} u_{tt}+A\,u & = & f(x,t), & (x,t) & \in & \mathbb{R}^n\times(0,T),\\ u\big|_{t=0} & = & \varphi(x), & x & \in & \mathbb{R}^n,\\ u_t\big|_{t=0} & = & \psi(x), & x & \in & \mathbb{R}^n. \end{array}\right. \tag{6.24}$$

Hiperbolinės lygtys aprašo procesus, kurių sklidimo greitis yra baigtinis. Pasinaudoję šia savybe, Koši uždavinio sprendimą suvesime į kraštinio uždavinio sprendimą.

6.7 teorema. *Tarkime, operatoriaus A koeficientai a_{ij}, a_i, a ir jų dalinės išvestinės a_{ijt}, a_{ijx}, a_{ijtt}, a_{it}, $a_t\in \mathrm{L}_{\infty,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n\times(0,T))$. Be to, tegu $\varphi\in \mathrm{W}^2_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $\psi\in \mathrm{W}^1_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $f,\ f_t\in \mathrm{L}_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n\times(0,T))$. Tada (6.24) Koši uždavinys turi vienintelį sprendinį $u\in \mathrm{W}^{2,2}_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n\times(0,T))$.*

$\triangleleft$ Tegu K_T yra nupjautinis kūgis erdvėje $\mathbb{R}^{n+1}$, $\Omega=\Omega_0$ – jo apatinis pagrindas, esantis plokštumoje $t=0$, Ω_T – viršutinio pagrindo projekcija į plokštumą $t=0$, S_T – glodus šoninis paviršius, $\tilde\Omega$ – tokia aprėžta sritis, kad $\overline{\Omega}\subset\tilde\Omega$ (žr. 6.2 pav.). Be to, tegu paviršius S_T yra arba charakteristinis, arba orientuotas erdvėje.



6.2 pav.

Tegu $\xi\in \mathrm{C}^\infty_0(\tilde\Omega)$, $\xi(x)=1$, kai $x\in\Omega$. Tada

$$\tilde\varphi=\varphi\xi\in \mathrm{W}^2_2(\tilde\Omega)\cap\mathring{\mathrm{W}}^1_2(\tilde\Omega),\quad \tilde\psi=\psi\xi\in\mathring{\mathrm{W}}^1_2(\tilde\Omega).$$

Remdamiesi 6.5 teorema, galime tvirtinti, kad kraštinis uždavinys

$$\left\{\begin{array}{rcllcl} u_{tt}+A\,u & = & f(x,t), & (x,t) & \in & \tilde Q_T=\tilde\Omega\times(0,T),\\ u\big|_{\tilde S_T} & = & 0, & (x,t) & \in & \tilde S_T=\partial\tilde\Omega\times(0,T),\\ u\big|_{t=0} & = & \tilde\varphi(x), & x & \in & \tilde\Omega,\\ u_t\big|_{t=0} & = & \tilde\psi(x), & x & \in & \tilde\Omega, \end{array}\right.$$

turi apibendrintą sprendinį $\tilde u\in \mathrm{W}^{2,2}_2(\tilde Q_T)$. Pasinaudoję energine nelygybe, lengvai galima įsitikinti, kad toks sprendinys yra vienintelis. Tegu u yra funkcijos $\tilde u$ siaurinys cilindre $\Omega_T \times (0,T)$, t.y. $u(x,t) = \tilde{u}(x,t), \forall (x,t) \in \Omega_T \times (0,T)$. Taip apibrėžta funkcija u ir yra ieškomasis (6.24) Koši uždavinio sprendinys cilindre $\Omega_T \times (0,T)$. Kadangi tokiais cilindrais galima padengti visą juostą $\mathbb{R}^n \times (0,T)$, tai (6.24) Koši uždavinys turi vienintelį sprendinį $u \in \mathrm{W}^{2,2}_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n \times (0,T))$. Teorema įrodyta. $\triangleright$

6.9. UŽDAVINIAI

1. Įrodykite, kad $\forall u \in \mathrm{W}_2^{0,1}(Q_T)$ yra teisinga nelygybė

$$\int\limits_{\Omega} u^2(x,t)\,dx \le 2\int\limits_{\Omega} u^2(x,0)\,dx + 2t\int\limits_{Q_t} u_t^2(x,t)\,dxdt.$$

2. Tegu u yra glodi cilindre $Q_T = \Omega \times (0,T)$ funkcija, lygi nuliui paviršiuje S_T ir

$$u_{tt} - \Delta u = f(x,t),\ (x,t) \in Q_T.$$

Įrodykite nelygybes:

(a)
$$\max_{t\in[0,T]} \|u_x\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} + \max_{t\in[0,T]} \|u_t\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} \le$$
$$\le C\big(\|f\|^2_{\mathrm{L}_2(Q_T)} + \|u(\cdot,0)\|^2_{\mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)} + \|u_t(\cdot,0)\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)}\big).$$

(b)
$$\max_{t\in[0,T]} \|u_{tt}\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} + \max_{t\in[0,T]} \|u_{tx}\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} \le$$
$$\le C\big(\|f\|^2_{\mathrm{L}_2(Q_T)} + \|f_t\|^2_{\mathrm{L}_2(Q_T)} + \|u_{xx}(\cdot,0)\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} + \|u_x(\cdot,0)\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)}\big).$$

(c)
$$\max_{t\in[0,T]} \|u_{xx}\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} + \max_{t\in[0,T]} \|u_{tx}\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} + \max_{t\in[0,T]} \|u_{tt}\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} \le$$
$$\le C\big(\|f\|^2_{\mathrm{L}_2(Q_T)} + \|f_t\|^2_{\mathrm{L}_2(Q_T)} + \|u(\cdot,0)\|^2_{\mathrm{W}_2^2(\Omega)} + \|u_t(\cdot,0)\|^2_{\mathrm{W}_2^1(\Omega)}\big).$$

3. Įrodykite kraštinio uždavinio

$$\left\{\begin{array}{rcccc} u_{tt} - \Delta u &=& f(x,t), & (x,t) &\in& Q_T,\\ u\big|_{S_T} &=& 0, & (x,t) &\in& S_T,\\ u\big|_{t=0} &=& \varphi(x), & x &\in& \Omega,\\ u_t\big|_{t=0} &=& \psi(x), & x &\in& \Omega, \end{array}\right.$$

apibendrinto sprendinio egzistavimą ir vienatį erdvėje $\mathring{\mathrm{W}}_2^{1,1}(Q_T)$.

4. Įrodykite kraštinio uždavinio

$$\left\{\begin{array}{rcccc} u_{tt} - \Delta u &=& f(x,t), & (x,t) &\in& Q_T,\\ \partial u/\partial \mathbf{n}\big|_{S_T} &=& 0, & (x,t) &\in& S_T,\\ u\big|_{t=0} &=& \varphi(x), & x &\in& \Omega,\\ u_t\big|_{t=0} &=& \psi(x), & x &\in& \Omega, \end{array}\right.$$

apibendrinto sprendinio egzistavimą ir vienatį erdvėje $\mathring{\mathrm{W}}_2^{1,1}(Q_T)$.

5. Įrodykite, kad uždavinys

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + cu_t = f(x,t), & (x,t) \in (0,1) \times (0,T), \\ u\big|_{S_{0,1}} = 0, & (x,t) \in S_{0,1} = \{0,1\} \times [0,T], \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), & x \in [0,1], \\ u_t\big|_{t=0} = \psi(x), & x \in [0,1], \end{cases}$$

negali turėti dviejų skirtingų apibendrintų sprendinių.

6. Tegu operatorius A yra formaliai savijungis ir jo koeficientai nepriklauso nuo kintamojo t. Furjė metodu įrodykite kraštinio uždavinio

$$\begin{cases} u_{tt} + A\,u = f(x,t), & (x,t) \in Q_T, \\ u\big|_{S_T} = 0, & (x,t) \in S_T, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), & x \in \Omega, \\ u_t\big|_{t=0} = \psi(x), & x \in \Omega. \end{cases}$$

apibendrinto sprendinio glodumą erdvėje $\mathrm{W}_2^{2,2}(Q_T)$.

7 SKYRIUS

Apibendrintosios funkcijos

7.1. PAGRINDINIŲ IR APIBENDRINTŲJŲ FUNKCIJŲ ERDVĖS

Tegu Ω yra sritis erdvėje $\mathbb{R}^n$. *Pagrindinių funkcijų* erdvei $\mathcal{D}(\Omega)$ priskirsime be galo diferencijuojamas ir finičias srityje Ω funkcijas, t.y. $\mathcal{D}(\Omega) = \mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$.

A p i b r ė ž i m a s. Sakysime, seka $\{\varphi_k\}$ iš $\mathcal{D}(\Omega)$ konverguoja į funkciją $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ir žymėsime $\varphi_k \to \varphi$, jeigu:

1. Egzistuoja tokia kompaktiška aibė $K \subset \Omega$, kad
$$\operatorname{supp} \varphi_k \subset K, \quad \forall k \in \mathbb{N};$$
čia $\operatorname{supp} \varphi_k$ – funkcijos φ_k atrama.
2. Su kiekvienu multiindeksu $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ seka $\{D^\alpha \varphi_k\}$ srityje Ω tolygiai konverguoja į $D^\alpha \varphi$, t.y.
$$D^\alpha \varphi_k \rightrightarrows D^\alpha \varphi,$$
kai $k \to \infty$.

Aibė $\mathcal{D}(\Omega)$ su taip apibrėžta topoplogija yra erdvė.

P a v y z d y s. Tegu $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ ir

$$\omega(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}}, & \text{kai } |x| < 1, \\ 0, & \text{kai } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Apibrėžkime sekas:

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{k}\omega(x), \quad \psi_k(x) = \frac{1}{k}\omega(x/k), \quad k = 1, 2, \ldots$$

Tada ω, φ_k, $\psi_k \in \mathcal{D}(\Omega)$ ir $\varphi_k \to 0$, kai $k \to \infty$. Tačiau $\psi_k \not\to 0$, kai $k \to \infty$, nes funkcijos ψ_k netenkina pirmos apibrėžimo sąlygos.

Pagrindinių funkcijų savybės:

1. Diferencijavimo operatorius $D^\alpha : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{D}(\Omega)$ yra tolydus, t.y. jeigu $\varphi_k \to \varphi$ erdvėje $\mathcal{D}(\Omega)$, kai $k \to \infty$, tai $D^\alpha \varphi_k \to D^\alpha \varphi$ erdvėje $\mathcal{D}(\Omega)$, kai $k \to \infty$.
2. Tegu $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ir $a \in \mathrm{C}^\infty(\Omega)$. Tada $a\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ir dauginimo iš a operacija yra tolydus operatorius erdvėje $\mathcal{D}(\Omega)$.
3. Tegu A yra neišsigimusi $n \times n$ matrica. Kiekvienai funkcijai $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ priskirkime funkciją $\varphi_A \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ pagal formulę $\varphi_A(x) = \varphi(A\,x)$. Akivaizdu, kad ši atitinkamybė yra tolydus operatorius erdvėje $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

4. Tegu a yra fiksuotas vektorius erdvėje $\mathbb{R}^n$. Kiekvienai funkcijai $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ priskirkime funkciją $\varphi_a \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ pagal formulę $\varphi_a(x) = \varphi(x+a)$. Taip apibrėžtas poslinkio operatorius yra tolydus erdvėje $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

5. Aibė $\mathcal{D}(\Omega)$ yra tiršta erdvėje $\mathrm{L_p}(\Omega)$, kai $1 \le p < \infty$ (žr. 2.1 teoremą). Todėl pagrindinių funkcijų erdvė $\mathcal{D}(\Omega)$ yra pakankamai plati.

A p i b r ė ž i m a s. Bet kurį tiesinį tolydų funkcionalą, apibrėžtą pagrindinių funkcijų erdvėje $\mathcal{D}(\Omega)$, vadiname *apibendrintąja funkcija*. Apibendrintųjų funkcijų erdvę žymėsime $\mathcal{D}^*(\Omega)$, arba trumpiau – $\mathcal{D}^*$. Simboliu $\langle f, \varphi\rangle$ žymėsime funkcionalo $f \in \mathcal{D}^*(\Omega)$ reikšmę taške $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Paaiškinsime apibendrintosios funkcijos apibrėžimą.

1. Apibendrintoji funkcija f yra *funkcionalas* erdvėje $\mathcal{D}(\Omega)$, t.y. kiekvienai funkcijai $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ priskiria skaičių $\langle f, \varphi\rangle$ (bendru atveju kompleksinį).

2. Apibendrintoji funkcija f yra *tiesinis* funkcionalas erdvėje $\mathcal{D}(\Omega)$, t.y. jeigu $\varphi,\ \psi \in \mathcal{D}(\Omega),\ \lambda,\ \mu \in \mathbb{C}$, tai
$$\langle f, \lambda\varphi + \mu\psi\rangle = \lambda \langle f, \varphi\rangle + \mu \langle f, \psi\rangle .$$

3. Apibendrintoji funkcija f yra *tolydus* funkcionalas ergvėje $\mathcal{D}(\Omega)$, t.y. jeigu $\varphi_k \to \varphi$, kai $k \to \infty$, tai $\langle f, \varphi_k\rangle \to \langle f, \varphi\rangle$, kai $k \to \infty$. Kadangi funkcionalas f yra tiesinis, tai šią savybę pakanka patikrinti, kai $\varphi = 0$.

P a s t a b a. Galimi ir kiti pagrindinių funkcijų aibės $\mathcal{D}(\Omega)$ apibrėžimai. Pavyzdžiui, galima apibrėžti $\mathcal{D}(\Omega) = \mathrm{C}_0^{\mathrm{m}}(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}$; $\mathcal{D}(\Omega) = \mathcal{G}$ (greitai mažėjančių funkcijų klasę, žr. 7.12 skyrelį).

Apibendrintųjų funkcijų $f, g \in \mathcal{D}^*(\Omega)$ tiesinį darinį apibrėžkime pagal formulę
$$\langle \lambda f + \mu g, \varphi\rangle = \lambda \langle f, \varphi\rangle + \mu \langle g, \varphi\rangle , \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$
Tada apibendrintųjų funkcijų aibė $\mathcal{D}^*(\Omega)$ tampa tiesinė.

A p i b r ė ž i m a s. Sakysime, kad apibendrintų funkcijų seka $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ iš $\mathcal{D}^*(\Omega)$ konverguoja į apibendrintąją funkciją $f \in \mathcal{D}^*(\Omega)$, jeigu $k \to \infty$,
$$\langle f_k, \varphi\rangle \ \to \ \langle f, \varphi\rangle , \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Aibė $\mathcal{D}^*(\Omega)$ su taip apibrėžta topologija yra tiesinė erdvė. Šitas apibrėžimas sutampa su žinomu iš funkcinės analizės silpnuoju tiesinių funkcionalų konvergavimu. Todėl galime sakyti, kad erdvėje $\mathcal{D}^*(\Omega)$ yra apibrėžta silpnoji topologija. Tiesinę erdvę su taip apibrėžtu konvergavimu vadinsime *apibendrintųjų funkcijų erdve* $\mathcal{D}^*(\Omega)$.

Išskirsime dvi plačias apibendrintų funkcijų klases.

1. Reguliariosios apibendrintosios funkcijos. Tegu f yra lokaliai integruojama srityje Ω funkcija, t.y. $f \in \mathrm{L_{loc}}(\Omega)$. Integralas
$$\langle f, \varphi\rangle = \int\limits_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \tag{7.1}$$

apibrėžia apibendrintą funkciją $f \in \mathcal{D}^*(\Omega)$. Taip apibrėžta apibendrinta funkcija yra vadinama *reguliariąja apibendrintąja funkcija* ir žymima ta pačia raide f kaip ir ją generuojanti funkcija $f \in \mathrm{L}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Apibendrintos funkcijos f tiesiškumas išplaukia iš integralo savybių:

$$\langle f, \lambda\varphi + \mu\psi \rangle = \int\limits_{\Omega} f(x)[\lambda\varphi(x) + \mu\psi(x)]\, dx =$$

$$= \lambda \int\limits_{\Omega} f(x)\varphi(x)\, dx + \mu \int\limits_{\Omega} f(x)\psi(x)\, dx = \lambda \langle f, \varphi \rangle + \mu \langle f, \psi \rangle .$$

Jos tolydumas išplaukia iš Lebego teoremos apie ribinį perėjimą po integralo ženklu:

$$\langle f, \varphi_k \rangle = \int\limits_{\Omega} f(x)\varphi_k(x)\, dx \ \to \int\limits_{\Omega} f(x)\varphi(x)\, dx = \langle f, \varphi \rangle ,$$

jeigu tik $\varphi_k \to \varphi$ erdvėje $\mathcal{D}$, kai $k \to \infty$.

2. Singuliariosios apibendrindosios funkcijos. Apibendrintąsias funkcijas $f \in \mathcal{D}^*$, kurių negalima išreikšti (7.1) formule, vadinsime *singuliariosiomis apibendrintomis funkcijomis.*

7.1 teorema. *Apibendrintųjų funkcijų erdvė $\mathcal{D}^*(\Omega)$ yra pilna, t.y. jeigu $f_k \to f$ erdvėje $\mathcal{D}^*(\Omega)$ ir*

$$\langle f, \varphi \rangle = \lim_{k\to\infty} \langle f_k, \varphi \rangle , \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

tai $f \in \mathcal{D}^*(\Omega)$.

Šios teoremos įrodymą galima rasti [51] knygoje.

7.2. APIBENDRINTŲJŲ FUNKCIJŲ PAVYZDŽIAI

Pateiksime keletą apibendrintųjų funkcijų pavyzdžių.

1. Viena iš paprasčiausių ir svarbiausių singuliariųjų apibendrintųjų funkcijų yra *Dirako delta funkcija* δ. Ji yra apibrėžiama formule

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Aišku, kad $\delta \in \mathcal{D}^*(\mathbb{R}^n)$. Įrodysime, kad δ yra singuliarioji apibendrintoji funkcija. Tarkime priešingai: egzistuoja tokia funkcija $f \in \mathrm{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, kad

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n). \tag{7.2}$$

Tegu $\psi(x) = |x|^2\varphi(x)$. Tada $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)|x|^2\varphi(x)\,dx = |x|^2\varphi(x)\big|_{x=0} = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Pagal 2.2 teoremą $\psi(x) = 0$ b.v. $x \in \Omega$. Kartu galime tvirtinti, kad $u(x) = 0$ b.v. $x \in \Omega$. Tačiau tai prieštarauja (7.2) lygybei. Gauta prieštara įrodo, kad delta funkcija yra singuliarioji.

2. Tegu S yra dalimis glodus paviršius erdvėje $\mathbb{R}^n$ ir $\mu \in \mathrm{C}(S)$. Apibrėžkime apibendrintąją funkciją $\mu\delta_S$ pagal formulę

$$\langle \mu\delta_S, \varphi \rangle = \int\limits_S \mu(x)\varphi(x)\,dS, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n). \tag{7.3}$$

Nesunku įsitikinti, kad $\mu\delta_S \in \mathcal{D}^*(\mathbb{R}^n)$. Apibendrintoji funkcija $\mu\delta_S$ vadinama *paprastuoju sluoksniu*, o μ – *tankio funkcija.*

3. Apibrėžkime funkcionalą f pagal formulę

$$\langle f, \varphi \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(k), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Kadangi funkcijos φ atrama yra kompaktinė aibė, tai ši suma yra baigtinė. Nesunku įsitikinti, kad taip apibrėžtas funkcionalas yra tiesinis ir tolydus. Todėl jis yra apibendrintoji funkcija, t.y. $f \in \mathcal{D}^*(\mathbb{R}^n)$.

4. Tegu $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Tada integralas

$$\mathrm{Vp}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\Big(\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx + \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx\Big) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\,dx := \left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x},\varphi\right\rangle \tag{7.4}$$

apibrėžia funkcionalą $\mathcal{P}\dfrac{1}{x}$. Įrodysime šio funkcionalo tolydumą erdvėje $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Tegu $\varphi_k \to 0$ erdvėje $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Pagal apibrėžimą egzistuoja toks skaičius $R>0$, kad $\varphi_k(x)=0$, kai $|x|>R$, ir $D^\alpha\varphi_k(x)\rightrightarrows 0\ \forall\alpha$, kai $k\to\infty$. Tada

$$\left|\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x},\varphi_k\right\rangle\right| = \left|\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\varepsilon}^{R}\frac{\varphi_k(x)-\varphi_k(-x)}{x}\,dx\right| =$$

$$= \left|\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\varepsilon}^{R}\frac{2x\varphi_k'(c)}{x}\,dx\right| \le 2R\max_{|x|<R}|\varphi_k'(x)|\to 0,$$

kai $k\to\infty$. Taigi $\mathcal{P}\frac{1}{x}\in\mathcal{D}^*(\mathbb{R})$. Įrodysime formulę

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x+i\varepsilon}\,dx = -i\pi\varphi(0)+\mathrm{Vp}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx,\quad \varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}). \tag{7.5}$$

Fiksuokime tokį skaičių $R>0$, kad $\varphi(x)=0$, kai $|x|>R$. Tada

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x+i\varepsilon}\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{-R}^{R}\frac{x-i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\varphi(x)\,dx =$$

$$= \varphi(0)\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{-R}^{R}\frac{x-i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\,dx + \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{-R}^{R}\frac{x-i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}[\varphi(x)-\varphi(0)]\,dx =$$

$$= -2i\varphi(0)\lim_{\varepsilon\to0}\operatorname{arctg}\frac{R}{\varepsilon} + \int\limits_{-R}^{R}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx =$$

$$= -i\pi\varphi(0)+\mathrm{Vp}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx.$$

Taigi erdvėje $\mathcal{D}^*(\mathbb{R})$ egzistuoja funkcijos $\dfrac{1}{x+i\varepsilon}$ riba, kai $\varepsilon\to+0$, ir ji lygi $-i\pi\delta(x)+\mathcal{P}\dfrac{1}{x}$. Pažymėkime ribinę funkciją $\dfrac{1}{x+i0}$. Tada (7.5) formulę galima perrašyti taip:

$$\frac{1}{x+i0} = -i\pi\delta(x)+\mathcal{P}\frac{1}{x}. \tag{7.6}$$

Analogiškai galima įrodyti, kad

$$\frac{1}{x - i0} = i\pi\delta(x) + \mathcal{P}\frac{1}{x}. \tag{7.7}$$

Pastarosios dvi formulės yra vadinamos *Sochockio formulėmis*. Jos dažnai naudojamos kvantinėje fizikoje.

P a s t a b a . Galima įrodyti, kad $\mathcal{P}\frac{1}{x}$ yra singuliari apibendrinta funkcija.

7.3. DELTA PAVIDALO FUNKCIJŲ SEKOS

Nagrinėsime fizikinį uždavinį apie materialiojo taško tankį. Tarkime, trimatės erdvės koordinačių pradžioje sukoncentruota vienetinė masė. Matematiškai šią sąlygą galima užrašyti taip:

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x)\,dx = 1. \tag{7.8}$$

Jeigu masė yra tolygiai pasiskirsčiusi spindulio ε rutulyje, tai tankio funkcija

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{3}{4\pi\varepsilon^3}, & \text{kai } |x| \le \varepsilon, \\ 0, & \text{kai } |x| > \varepsilon. \end{cases} \tag{7.9}$$

Šios funkcijos riba taške x

$$f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{kai } x = 0, \\ 0, & \text{kai } x \ne 0, \end{cases}$$

negali būti laikoma tankio funkcija, nes ji netenkina (7.8) lygybės. Parodysime, kad sekos $\{f_\varepsilon\}$ riba erdvėje $\mathcal{D}^*(\mathbb{R}^3)$ lygi Dirako δ funkcijai. Tiksliau, įrodysime tokį teiginį.

7.1 lema. *Apibendrintųjų funkcijų erdvėje* $\mathcal{D}^*(\mathbb{R}^3)$ *riba*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(x) = \delta(x). \tag{7.10}$$

$\triangleleft$ Pagal konvergavimo erdvėje $\mathcal{D}^*(\mathbb{R}^3)$ apibrėžimą

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^3} f_\varepsilon(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0) = \langle\delta,\,\varphi\rangle\,, \quad \forall\,\varphi(x)\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^3). \tag{7.11}$$

Kadangi funkcija φ yra tolydi, tai kiekvieną $\rho > 0$ atitinka toks $\varepsilon_0 > 0$, kad $|\varphi(x) - \varphi(0)| < \rho$, kai $|x| < \varepsilon_0$. Todėl su visais $\varepsilon \le \varepsilon_0$ teisinga nelygybė

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Big|\int_{\mathbb{R}^3} f_\varepsilon(x)\varphi(x)\,dx - \varphi(0)\Big| = \frac{3}{4\pi\varepsilon^3}\Big|\int_{|x|<\varepsilon}[\varphi(x)-\varphi(0)]\,dx\Big| \le$$

$$\le \frac{3}{4\pi\varepsilon^3}\int_{|x|<\varepsilon}|\varphi(x)-\varphi(0)|\,dx \le \frac{3\rho}{4\pi\varepsilon^3}\int_{|x|<\varepsilon}dx = \rho \to 0,$$

kai $\rho \to 0$. $\triangleright$

Taigi Dirako δ funkcijos fizikinė prasmė yra vienetinės masės materialaus taško tankis. Taip pat gali būti: taškinio krūvio tankis, taškinio šaltinio intensyvumas, jėgos, veikiančios tašką, intensyvumas ir t.t. Vietoje vieno taško gali būti taškų aibės arba paviršiai. Pavyzdžiui, jeigu taškuose $x_1, \dots, x_N$ sukoncentruotos masės m_k, $k = 1, \dots, N$, tai tankio funkcija

$$f = \sum_{k=1}^{N} m_k\delta_{x_k};$$

čia δ_{x_k} – paslinktoji Dirako delta funkcija, apibrėžiama formule

$$\langle \delta_{x_k}, \varphi \rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \delta(x - x_k)\varphi(x)\, dx = \varphi(x_k).$$

Dažnai praktiniuose ir teoriniuose uždaviniuose pasitaiko sekos lokaliai integruojamų funkcijų, kurios konverguoja į delta funkciją. Šių sekų nariai aproksimuoja delta funkciją. Tai yra svarbu praktiniams skaičiavimams naudojant kompiuterius.

A p i b r ė ž i m a s. Funkcijų seka $\{f_k\} \subset \mathrm{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ vadinama *delta pavidalo funkcijų seka*, jeigu

$$f_k \to \delta \tag{7.12}$$

erdvėje $\mathcal{D}^*(\mathbb{R}^n)$, kai $k \to \infty$.

Tegu $\{f_k\}$ – delta pavidalo funkcijų seka. Pagal apibrėžimą tai reiškia, kad

$$\langle f_k,\, \varphi \rangle \to \langle \delta,\, \varphi \rangle = \varphi(0), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n),$$

arba

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f_k(x)\varphi(x)\, dx \to \varphi(0), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \tag{7.13}$$

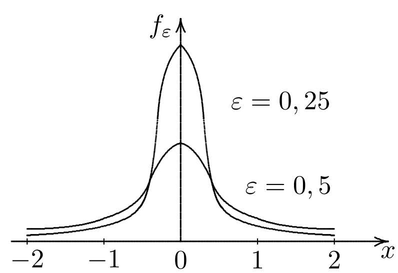
kai $k \to \infty$. Funkcijos f_ε, apibrėžtos (7.9) formule, sudaro delta pavidalo funkcijų seką, kai $\varepsilon \to +0$.

P a v y z d ž i a i:

1. Tegu $n = 1, \varepsilon > 0$. Apibrėžkime seką funkcijų

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}.$$

Kai $\varepsilon = 0,25$ ir $\varepsilon = 0,5$ šių funkcijų grafikai pavaizduoti 7.1 pav. Įrodysime, kad f_ε yra delta pavidalo funkcijų seka.



7.1 pav.

Tiesiogiai galima įsitikinti, kad integralas

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\varepsilon(x)\, dx = 1, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Laisvai pasirenkame funkciją $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ir skaičių $\rho > 0$. Kadangi funkcija φ yra tolydi, tai egzistuoja toks ε_0, kad

$$|\varphi(x) - \varphi(0)| < \rho/2,$$

kai $|x| < \varepsilon_0$. Įvertinsime skirtumą

$$\Big| \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(x)\varphi(x)\,dx - \varphi(0)\Big| \le \int\limits_{|x|<\varepsilon_0} f_\varepsilon(x)|\varphi(x) - \varphi(0)|\,dx +$$

$$+ \int\limits_{|x|\ge\varepsilon_0} f_\varepsilon(x)|\varphi(x) - \varphi(0)|\,dx \le \frac{\rho}{2} \int\limits_{|x|<\varepsilon_0} f_\varepsilon(x)\,dx + 2c \int\limits_{|x|\ge\varepsilon_0} f_\varepsilon(x)\,dx \le$$

$$\le \frac{\rho}{2} + \frac{4c}{\pi} \int\limits_{\varepsilon_0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\,dx = \frac{\rho}{2} + \frac{4c}{\pi}\Big(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\Big) < \frac{\rho}{2} + \frac{\rho}{2} = \rho,$$

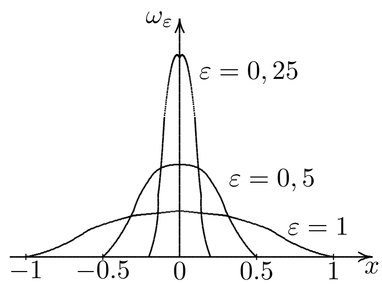
jeigu tik $\varepsilon \le \varepsilon_0$; čia $c = \max\limits_{|x|<\varepsilon_0} |\varphi(x)|$. Todėl

$$\lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(x) = \delta(x).$$

2. Tegu $x \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ ir

$$\omega_\varepsilon(x) = \begin{cases} C_\varepsilon e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |x|^2}}, & \text{kai } x < \varepsilon, \\ 0, & \text{kai } x \le \varepsilon. \end{cases}$$

Kai $\varepsilon = 0,25$, $\varepsilon = 0,5$ ir $\varepsilon = 1$ šių funkcijų grafikai pavaizduoti 7.2 pav.



7.2 pav.

Įrodysime, kad $\{\omega_\varepsilon\}$ yra delta pavidalo funkcijų seka. Parinkime konstantą C_ε taip, kad

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega_\varepsilon(x)\,dx = 1, \quad \forall\varepsilon > 0.$$

Tada

$$\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega_\varepsilon(x)\varphi(x)\,dx - \varphi(0)\Big| \le \int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega_\varepsilon(x)|\varphi(x) - \varphi(0)|\,dx <$$

$$< \max_{|x|<\varepsilon} |\varphi(x) - \varphi(0)| \int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega_\varepsilon(x)\,dx \to 0,$$

kai $\varepsilon \to 0$.

3. Tegu (žr. [1], 9.2. skyrelį)

$$G(x,t) = \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{n/2}} e^{-\dfrac{x^2}{4a^2 t}}$$

yra fundamentalusis šilumos laidumo lygties sprendinys (Gryno funkcija). Remiantis 4-a Gryno funkcijos G savybe (žr. [1], 9.3. skyrelį)

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(x-y,t)\varphi(y)\,dy \rightrightarrows \varphi(x), \quad x \in \operatorname{supp}\varphi, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n),$$

kai $t \to +0$. Iš čia išplaukia, kad $G(\cdot,t)$ yra delta pavidalo funkcijų seka erdvėje $\mathcal{D}^*(\mathbb{R}^n)$, kai $t \to +0$.

4. Furjė eilučių teorijoje (žr. [15], X skyrių) nagrinėjami Dirichlė

$$D_k(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\left(k + \frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t}$$

ir Fejerio

$$F_k(t) = \frac{1}{2\pi k} \frac{\sin^2 \frac{k}{2}t}{\sin^2 \frac{1}{2}t}$$

branduoliai. Galima įrodyti, kad šios funkcijos yra delta pavidalo funkcijų sekos erdvėje $\mathcal{D}^*(-\pi,\pi)$, kai $k \to \infty$.

7.4. APIBENDRINTOSIOS FUNKCIJOS ATRAMA

Nėra prasmės kalbėti apie apibendrintosios funkcijos lygybę nuliui konkrečiame srities Ω taške. Tačiau galima apibrėžti apibendrintos funkcijos lygybę nuliui kokioje nors srityje Ω.

A p i b r ė ž i m a s. Tegu $f \in \mathcal{D}^*(\Omega)$ ir sritis $\Omega' \subset \Omega$. Sakysime, apibendrintoji funkcija f lygi nuliui srityje Ω', ir rašysime $f = 0$ srityje Ω', arba $f(x) = 0$, kai $x \in \Omega'$, jeigu

$$\langle f, \varphi \rangle = 0, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \operatorname{supp} \varphi \subset \Omega'.$$

Sakysime, dvi apibendrintosios funkcijos f ir g yra lygios srityje Ω', jeigu $f - g = 0$ srityje Ω'. Taigi pagal apibrėžimą $f = g$ srityje Ω' tada ir tik tada, kai

$$\langle f, \varphi \rangle = \langle g, \varphi \rangle, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \operatorname{supp} \varphi \subset \Omega'.$$

Tegu apibendrintoji funkcija $f = 0$ srityje Ω'. Tada $f = 0$ kiekvienoje srityje $\Omega'' \subset \Omega'$ arba kiekvieno srities Ω' taško pakankamai mažoje aplinkoje. Teisingas atvirkščias teiginys:

7.2 lema. *Tegu apibendrintoji funkcija f lygi nuliui kiekvieno srities Ω' taško x aplinkoje $U(x) \subset \Omega'$. Tada apibendrintoji funkcija f yra lygi nuliui srityje Ω'.*

$\triangleleft$ Pakanka įrodyti, kad su kiekviena funkcija $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega')$ teisinga lygybė $\langle f, \varphi \rangle = 0$. Laisvai pasirinkime funkciją $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega')$. Funkcijos φ atrama $\operatorname{supp} \varphi$ yra kompaktas. Todėl ją galima uždengti baigtiniu skaičiumi rutulių

$$B_{r_1}(x_1), \ldots B_{r_N}(x_N).$$

Pagal lemos sąlygą funkcija f kiekviename rutulyje $B_{r_k}(x_k)$ lygi nuliui. Tegu $B_{r'_k}(x_k)$, $r'_k < r_k$, $k = 1, 2, \ldots, N$ yra mažesni rutuliai, vis dar dengiantys $\operatorname{supp} \varphi$, ir h_k tokios neneigiamos funkcijos, kad

$$h_k(x) = 1, \ x \in B_{r'_k}(x_k), \quad \operatorname{supp} h_k \subset B_{r_k}(x_k), \quad k = 1, 2, \ldots, N.$$

Funkcijas h_k galima apibrėžti kaip funkcijų, kurios yra lygios vienetui, kai

$$x \in B_{r''_k}(x_k), \quad r'_k < r''_k < r_k,$$

ir lygios nuliui, kai $x \notin B_{r''_k}(x_k)$, vidutines funkcijas (žr. 2 skyrių). Pažymėkime

$$h(x) = \sum_{k=1}^{N} h_k(x), \quad \varphi_k(x) = \varphi(x) \frac{h_k(x)}{h(x)}.$$

Aišku, kad atramos $\operatorname{supp} \varphi$ aplinkoje

$$h(x) \geq 1, \quad \varphi(x) = \sum_{k=1}^{N} \varphi_k(x)$$

ir $\varphi_k \in \mathcal{D}(B_{r_k}(x_k))$. Todėl

$$\langle f, \varphi \rangle = \langle f, \sum_{k=1}^{N} \varphi_k \rangle = \sum_{k=1}^{N} \langle f, \varphi_k \rangle = 0.$$

Lema įrodyta. ▷

Jeigu $f = 0$ srityse Ω_k, tai iš (7.2) lemos įrodymo išplaukia, kad $f = 0$ tų sričių sąjungoje $\bigcup \Omega_k$. Sričių Ω_k skaičius gali būti baigtinis arba begalinis.

A p i b r ė ž i m a s. *Apibendrintosios funkcijos f atrama* vadinamas visų atvirųjų aibių, kuriose funkcija f lygi nuliui, sąjungos papildinys. Apibendrintosios funkcijos f atramą žymėsime simboliu $\operatorname{supp} f$.

Iš apibrėžimo išplaukia šios išvados:

2 išvada *Bet kurioje srityje, kuri nesikerta su atrama* $\operatorname{supp} f$*, apibendrintoji funkcija* f *lygi nuliui, t.y.*

$$\langle f, \varphi \rangle = 0, \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp} \varphi = \emptyset. \tag{7.14}$$

3 išvada *Apibendrintosios funkcijos atrama yra aibė tų ir tik tų taškų, kurių jokioje aplinkoje apibendrintoji funkcija f nėra lygi nuliui.*

P a v y z d ž i a i:

1. Delta funkcijos δ atrama yra taškas 0.
2. Apibendrintosios funkcijos δ_{x_0}, apibrėžiamos formule

   $$\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \varphi(x_0),$$

   atrama yra taškas x_0.
3. Paprastojo sluoksnio $\mu\delta_S$, apibrėžiamo (7.3) lygybe, atrama yra paviršius S.
4. Tegu θ yra Hevisaido funkcija:

   $$\theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{kai } x \geq 0, \\ 0, & \text{kai } x < 0. \end{cases}$$

   Tada apibendrintosios Hevisaido funkcijos

   $$\langle \theta, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x)\varphi(x)\, dx = \int_{0}^{\infty} \varphi(x)\, dx$$

   atrama yra intervalas $[0, \infty)$. Todėl apibendrintoji Hevisaido funkcija nėra finiti.

7.5. APIBENDRINTŲJŲ FUNKCIJŲ SANDAUGA

Tegu $f \in \mathrm{L}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ ir $a \in \mathrm{C}^{\infty}(\Omega)$. Tada

$$\langle af, \varphi \rangle = \int\limits_{\Omega} a(x) f(x) \varphi(x)\, dx = \langle f, a\varphi \rangle\,, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{7.15}$$

Atvaizdis $\varphi \to a\varphi$, $a \in \mathrm{C}^{\infty}(\Omega)$, yra tiesinis ir tolydus operatorius erdvėje $\mathcal{D}(\Omega)$ (žr. 7.1 skyrelį). Todėl funkcionalas af, apibrėžiamas (7.15) formule, priklauso apibendrintųjų funkcijų erdvei $\mathcal{D}^*(\Omega)$. Be to, dauginimo iš funkcijos $a \in \mathrm{C}^{\infty}(\Omega)$ operacija yra tiesinis tolydus operatorius erdvėje $\mathcal{D}^*(\Omega)$:

$$a \cdot (\lambda f + \mu g) = \lambda (a \cdot f) + \mu (a \cdot g), \quad f, g \in \mathcal{D}^*(\Omega);$$

$$a \cdot f_k \to a \cdot f,$$

erdvėje $\mathcal{D}^*(\Omega)$, jeigu $f_k \to f$ erdvėje $\mathcal{D}^*(\Omega)$, kai $k \to \infty$.

7.3 lema. *Tegu* $f \in \mathcal{D}^*(\Omega)$, $\eta \in \mathrm{C}^{\infty}(\Omega)$ *ir* $\eta(x) = 1$, *kai* x *priklauso atramos* $\operatorname{supp} f$ *aplinkai. Tada*

$$f = \eta f. \tag{7.16}$$

◁ Su kiekviena funkcija $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ funkcijų f ir $(1-\eta) f$ atramos neturi bendrų taškų, todėl iš (7.15) ir (7.14) išplaukia, kad

$$\langle f - \eta f, \varphi \rangle = \langle (1-\eta) f, \varphi \rangle = \langle f, (1-\eta)\varphi \rangle = 0. \quad \triangleright$$

P a v y z d ž i a i:

1. Tegu $a \in \mathrm{C}^{\infty}(\Omega)$. Tada

$$a(x)\delta(x) = a(0)\delta(x).$$

Pagal apibrėžimą

$$\langle a\delta, \varphi \rangle = \langle \delta, a\varphi \rangle = a(0)\varphi(0),$$
$$\langle a(0)\delta, \varphi \rangle = \langle \delta, a(0)\varphi \rangle = a(0)\varphi(0).$$

Todėl $\langle a\delta, \varphi \rangle = \langle a(0)\delta, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

2. Funkcijų $a(x) = x$ ir $\mathcal{P}\dfrac{1}{x}$ sandauga

$$x\mathcal{P}\frac{1}{x} = 1.$$

Pažymėkime $x\mathcal{P}\dfrac{1}{x} = f(x)$. Tada pagal funkcijos $\mathcal{P}\dfrac{1}{x}$ apibrėžimą

$$\langle f, \varphi \rangle = \mathrm{Vp} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\varphi(x)}{x}\, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, dx = \langle 1, \varphi \rangle\,, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad \triangleright$$

Bendru atveju dviejų funkcijų f ir g iš $\mathcal{D}^*(\Omega)$ sandaugos, kuri būtų asociatyvi ir komutatyvi, apibrėžti negalima. Iš tikrųjų, jeigu tokia sandauga egzistuotų, tai iš anksčiau pateiktų pavyzdžių išplauktų prieštaringa lygybė

$$0 = 0\mathcal{P}\frac{1}{x} = (x\delta(x))\mathcal{P}\frac{1}{x} = (\delta(x)x)\mathcal{P}\frac{1}{x} = \delta(x)\left(x\mathcal{P}\frac{1}{x}\right) = \delta(x).$$

Norint apibrėžti dviejų funkcijų f ir g iš $\mathcal{D}^*(\Omega)$ sandaugą $f \cdot g$, reikia, kad jos tenkintų tam tikras glodumo sąlygas. Šių sąlygų esmė yra tokia. Jeigu laisvai pasirikto taško aplinkoje funkcija f yra ,,nereguliari“, tai to taško aplinkoje funkcija g turi būti pakankamai ,,reguliari“.

7.6. TIESINIS KINTAMŲJŲ KEITIMAS

Tegu $f \in \mathrm{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $x = T\,y$ – neišsigimusi tiesinė erdvės $\mathbb{R}^n$ trasformacija, $T\,y = A\,y + a$; čia: $x, y \in \mathbb{R}^n$ – kintamieji, $a \in \mathbb{R}^n$ – fiksuotas vektorius, A – neišsigimusi matrica ($\det A \neq 0$). Funkciją f_T apibrėžkime formule $f_T(y) = f(T\,y)$. Tada su kiekviena funkcija $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ teisinga lygybė

$$\left\langle f_T, \varphi \right\rangle = \int f(T\,y)\varphi(y)\,dy =$$

$$= \frac{1}{|\det A|} \int f(x)\varphi_{T^{-1}}(x)\,dx = \frac{1}{|\det A|} \left\langle f,\, \varphi_{T^{-1}} \right\rangle .$$

Tegu dabar $f \in \mathcal{D}^*(\mathbb{R}^n)$. Apibrėžkime apibendrintąją funkciją f_T formule:

$$\left\langle f_T, \varphi \right\rangle = \frac{1}{|\det A\,|} \left\langle f, \varphi_{T^{-1}} \right\rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n). \tag{7.17}$$

Atvaizdis $\varphi \to \varphi_{T^{-1}}$ yra tiesinis ir tolydus operatorius erdvėje $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ (žr. skyrelį 7.1). Todėl funkcionalas f_T, apibrėžiamas (7.17) formule, priklauso apibendrintųjų funkcijų erdvei $\mathcal{D}^*(\mathbb{R}^n)$. Iš tikrųjų jis yra tiesinis

$$(\lambda f + \mu g)_T = \lambda f_T + \mu g_T, \quad \forall f, g \in \mathcal{D}^*(\mathbb{R}^n),$$

ir tolydus, t.y. jeigu $f_k \to f$ erdvėje $\mathcal{D}^*(\mathbb{R}^n)$, kai $k \to \infty$, tai

$$f_{k\,T} \to f_T$$

erdvėje $\mathcal{D}^*(\mathbb{R}^n)$, kai $k \to \infty$.

Panagrinėsime atskirus (7.17) formulės atvejus:

1. Tegu A yra ortogonalioji matrica (t.y. $A' = A^{-1}$) ir $a = 0$. Tada

$$\left\langle f_A, \varphi \right\rangle = \left\langle f, \varphi_{A'} \right\rangle;$$

čia A' yra matricos A $transponuotoji$. Priminsime, kad šis kintamųjų keitimas geometriškai reiškia posūkį.

2. Tegu $A = \lambda E$, $\lambda \neq 0$ – skaliaras, E – vienetinė matrica ir $a = 0$. Tada $x = \lambda y$, $y = \lambda^{-1} x$ ir

$$\langle f_{\lambda E}, \varphi \rangle = \lambda^{-n} \langle f, \varphi_{\lambda^{-1}E} \rangle .$$

Šis kintamųjų keitimas geometriškai reiškia panašumo transformaciją.

3. Tegu $A = E$ yra vienetinė matrica, a – fiksuotas erdvėje $\mathbb{R}^n$ vektorius. Tokią transformaciją atitinkančią apibendrintąją funkciją pažymėkime f_a. Tada iš (7.17) gauname

$$\langle f_a, \varphi \rangle = \langle f,\, \varphi_a \rangle ;$$

čia $\varphi_a(x) = \varphi(x - a)$. Apibendrintoji funkcija f_a vadinama apibendrintosios funkcijos f *poslinkiu* per vektorių a. Pavyzdžiui, δ_a yra delta funkcijos δ poslinkis per vektorių a:

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle = \langle \delta, \varphi_a \rangle = \varphi(a).$$

7.7. APIBENDRINTŲJŲ FUNKCIJŲ DIFERENCIJAVIMAS

Tegu $f \in \mathrm{C^k}(\Omega)$. Tada su visais α, $|\alpha| \leq k$, ir $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ teisinga integravimo dalimis formulė

$$\langle D^\alpha f, \varphi \rangle = \int\limits_\Omega D^\alpha f(x) \varphi(x)\, dx =$$

$$(-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega f(x) D^\alpha \varphi(x)\, dx = \langle f, D^\alpha \varphi \rangle .$$

Šia lygybe pasinaudosime apibrėždami apibendrintosios funkcijos išvestinę.

A p i b r ė ž i m a s. Funkcionalą $D^\alpha f$, apibrėžiamą formule

$$\langle D^\alpha f, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, D^\alpha \varphi \rangle , \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \tag{7.18}$$

vadinsime apibendrintoios funkcijos $f \in \mathcal{D}^*(\Omega)$ išvestine.

Operatorius $D^\alpha : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ yra tiesinis ir tolydus (žr. 7.1 skyrelį). Todėl funkcionalas $\mathcal{D}^\alpha f$, apibrėžiamas (7.18) formule, priklauso apibendrintųjų funkcijų erdvei $\mathcal{D}^*(\mathbb{R}^n)$.

Išskirsime pagrindines diferencijavimo operatoriaus D^α savybes.

1. Tegu f yra reguliarioji apibendrinta funkcija, t.y. $f \in \mathrm{L_{loc}}(\Omega)$ ir

   $$\langle f, \varphi \rangle = \int\limits_\Omega f(x) \varphi(x)\, dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

   Be to, tegu $f \in \mathrm{C^k}(\Omega)$. Tada

   $$\langle D^\alpha f, \varphi \rangle = \int_\Omega D^\alpha f(x) \varphi(x)\, dx \quad \forall \alpha : |\alpha| \leq k.$$

   Kitaip sakant, jeigu apibendrintoji funkcija f turi klasikinę išvestinę $D^\alpha f$, tai pastaroji sutampa su apibendrintos funkcijos f išvestine $D^\alpha f$.

2. Tegu funkcija $f \in \mathrm{L_{loc}}(\Omega)$ turi apibendrintąją išvestinę $D^\alpha f$ (žr. 2 skyrių). Tada ji sutampa su apibendrintos funkcijos f išvestine $D^\alpha f$.

3. Diferencijavimo operarorius $D^\alpha : D^*(\Omega) \to \mathcal{D}^*(\Omega)$ yra tiesinis ir tolydus.

   $\lhd$ Tiesiškumas yra akivaizdus. Įrodysime tolydumą. Tegu $f_k \to 0$ erdvėje $\mathcal{D}^*(\Omega)$, kai $k \to \infty$. Tada

   $$\langle D^\alpha f_k,\, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f_k,\, D^\alpha \varphi \rangle \to 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

   kai $k \to \infty$. Todėl $D^\alpha f_k \to 0$ erdvėje $\mathcal{D}^*(\Omega)$, kai $k \to \infty$. $\rhd$

4. Bet kuri apibendrinta funkcija yra be galo diferencijuojama.

   $\lhd$ Kadangi $f \in \mathcal{D}^*(\Omega)$, tai $f_{x_j} \in \mathcal{D}^*(\Omega)$, $f_{x_j x_i} \in \mathcal{D}^*(\Omega)$ ir t.t. $\rhd$

5. Diferencijavimo operatoriai $D^\alpha : \mathcal{D}^*(\Omega) \to \mathcal{D}^*(\Omega)$ ir $D^\beta : \mathcal{D}^*(\Omega) \to \mathcal{D}^*(\Omega)$ yra komutatyvūs, t.y.

$$D^{\alpha+\beta} f = D^\alpha (D^\beta f) = D^\beta (D^\alpha f). \tag{7.19}$$

◁ Iš tikrųjų

$$\left\langle D^{\alpha+\beta} f, \varphi \right\rangle = (-1)^{|\alpha|+|\beta|} \left\langle f, D^{\alpha+\beta}\varphi \right\rangle = (-1)^{|\alpha|} \left\langle D^\beta f, D^\alpha \varphi \right\rangle =$$

$$= \left\langle D^\alpha (D^\beta f), \varphi \right\rangle = (-1)^{|\beta|} \left\langle D^\alpha f, D^\beta \varphi \right\rangle = \left\langle (D^\beta (D^\alpha f), \varphi \right\rangle . \triangleright$$

6. Tegu $f \in \mathcal{D}^*(\Omega)$ ir $a \in \mathrm{C}^\infty(\Omega)$. Tada $af \in \mathcal{D}^*(\Omega)$ (žr. 7.5 skyrelį) ir $\forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ teisinga Leibnico formulė

$$D^\alpha (af) = \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\beta}{\alpha} D^\beta a D^{\alpha-\beta} f; \tag{7.20}$$

čia

$$\binom{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}, \quad \alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!.$$

◁ Tegu $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ir $|\alpha| = 1$. Tada

$$\langle (af)_{x_i}, \varphi \rangle = -\langle af, \varphi_{x_i} \rangle = -\langle f, a\varphi_{x_i} \rangle =$$

$$= -\langle f, (a\varphi)_{x_i} - a_{x_i}\varphi \rangle = -\langle f, (a\varphi)_{x_i} \rangle + \langle f, a_{x_i}\varphi \rangle =$$

$$= \langle f_{x_i}, a\varphi \rangle + \langle a_{x_i} f, \varphi \rangle = \langle af_{x_i} + a_{x_i} f, \varphi \rangle$$

su kiekvienu $i = 1, 2, \dots$ Kai $|\alpha| > 1$, įrodymas analogiškas.

7. Tegu $f \in \mathcal{D}^*(\Omega)$. Tada

$$\operatorname{supp} D^\alpha f \subset \operatorname{supp} f. \tag{7.21}$$

◁ Pažymėkime $\Omega_f = \Omega \setminus \operatorname{supp} f$. Tada pagal apibendrintosios funkcijos atramos apibrėžimą

$$\langle f, \varphi \rangle = 0, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega_f). \tag{7.22}$$

Atkreipsime dėmesį į tai, kad $D^\alpha f \in \mathcal{D}(\Omega_f)$. Todėl pastarojoje formulėje funkciją φ galima pakeisti $D^\alpha \varphi$, t.y.

$$\langle D^\alpha f, \varphi \rangle = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega_f).$$

Taigi $\Omega_f \subset \Omega_{D^\alpha f}$. ▷

P a v y z d ž i a i:

1. Tegu $n = 1$ ir θ yra Hevisaido funkcija:

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{kai } x \geq 0, \\ 0, & \text{kai } x < 0. \end{cases}$$

Tada pagal apibendrintosios funkcijos išvestinės apibrėžimą

$$\langle \theta', \varphi \rangle = -\langle \theta, \varphi' \rangle =$$

$$= -\int\limits_{-\infty}^{\infty} \theta(x)\varphi'(x)\,dx = -\int\limits_{0}^{\infty} \varphi'(x)\,dx = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle .$$

Todėl

$$\theta' = \delta.$$

2. Tegu θ yra daugiamatė Hevisaido funkcija, t.y.

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{kai } x_k \geq 0,\ k = 1, \ldots, n, \\ 0 & \text{kitais atvejais.} \end{cases}$$

Be to, tegu $\alpha = (1, \ldots, 1)$. Tada

$$\langle D^\alpha \theta, \varphi \rangle = (-1)^n \langle \theta, \varphi_{x_1,\ldots,x_n} \rangle =$$

$$= (-1)^n \int\limits_0^\infty \ldots \int\limits_0^\infty \varphi_{x_1,\ldots,x_n}(x)\,dx_1 \ldots dx_n = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle$$

ir yra teisinga formulė

$$D^\alpha \theta = \delta.$$

3. Tegu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yra dalimis glodi funkcija, $x_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \ldots$ – taškai kuriuose arba pati funkcija, arba jos išvestinė turi pirmos rūšies trūkį. Tada teisinga formulė

$$f'(x) = f'_{\text{kl}}(x) + \sum_k [f]_{x_k} \delta(x - x_k); \tag{7.23}$$

čia f'_{kl} – funkcijos f klasikinė išvestinė, $[f]_{x_k}$ – funkcijos f šuolis taške x_k:

$$[f]_{x_k} = f(x_k + 0) - f(x_k - 0).$$

$\triangleleft$ Tegu $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Tada

$$\langle f', \varphi \rangle = -\langle f, \varphi' \rangle = -\sum_k \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\varphi'(x)\,dx =$$

$$= \sum_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} f'_{\mathrm{kl}}(x)\varphi(x)\,dx - \sum_k [f(x_{k+1}-0)\varphi(x_{k+1}) - f(x_k+0)\varphi(x_k)] =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f'_{\mathrm{kl}}(x)\varphi(x)\,dx + \sum_k [f(x_k+0) - f(x_k-0)]\varphi(x_k) =$$

$$= \langle f'_{\mathrm{kl}},\, \varphi\rangle + \sum_k [f]_{x_k}\, \langle \delta_{x_k},\, \varphi\rangle\,.$$

Iš čia gauname (7.23) formulę. ▷

4. Tegu $n = 1$. Rasime delta funkcijos išvestines. Pagal išvestinės apibrėžimą

$$\langle \delta',\, \varphi\rangle = -\langle \delta,\, \varphi'\rangle = -\varphi'(0).$$

Taigi delta funkcijos išvestinė yra funkcionalas. Jis kiekvienai funkcijai $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$ priskiria skaičių $-\varphi'(0)$. Bendru atveju

$$\left\langle \delta^{(n)},\, \varphi\right\rangle = (-1)^n \left\langle \delta,\, \varphi^{(n)}\right\rangle = (-1)^n\varphi^{(n)}(0).$$

5. Tegu $n = 1$. Rasime funkcijos $f(x) = \ln|x|$ išvestinę apibendrintųjų funkcijų prasme. Pagal išvestinės apibrėžimą

$$\langle f',\, \varphi\rangle = -\langle f,\, \varphi'\rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(x)\ln|x|\,dx =$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to+0}\Big(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \varphi'(x)\ln(-x)\,dx - \int_{\varepsilon}^{\infty} \varphi'(x)\ln(x)\,dx\Big) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\Big(-\varphi(x)\ln(-x)\big|_{-\infty}^{-\varepsilon} + \varphi(x)\ln x\big|_{\varepsilon}^{\infty}\Big) +$$

$$+ \lim_{\varepsilon\to+0}\Big(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx - \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx\Big) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}(\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon))\ln\varepsilon + \lim_{\varepsilon\to+0}\Big(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx\Big) =$$

$$= 0 + \mathrm{Vp}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x},\, \varphi\right\rangle.$$

Todėl teisinga formulė

$$(\ln|x|)' = \mathcal{P}\frac{1}{x}.$$

6. Tegu
$$u = \sum_{k=0}^{m-1} c_k \delta^{(k)}. \tag{7.24}$$
Įrodysime, kad taip apibrėžta funkcija u erdvėje $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ tenkina lygtį
$$P_m u = 0; \tag{7.25}$$
čia c_k – laisvosios konstantos, $P_m x = x^m$.
◁ Tegu $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$, $k = 1, 2, \ldots, m-1$. Tada
$$\left\langle P_m \delta^{(k)},\, \varphi \right\rangle = \left\langle \delta^{(k)},\, P_m \varphi \right\rangle = (-1)^k \left\langle \delta,\, (P_m \varphi)^{(k)} \right\rangle =$$
$$= (-1)^k (x^m \varphi)^{(k)} \big|_{x=0} = 0.$$
Todėl
$$P_m \delta^{(k)} = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1.$$
Iš čia išplaukia, kad apibendrintoji funkcija u, apibrėžta (7.24) formule, tenkina (7.25) lygtį. ▷

P a s t a b a. Galima įrodyti, kad (7.24) formulė apibrėžia (7.25) lygties bendrąjį sprendinį (žr. [51], §6).

7. Tegu $S = \partial\Omega$ yra dalimis glodus paviršius, $f \in \mathrm{C}^1(\overline{\Omega}) \cap \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^n \setminus \Omega)$. Tada
$$f_{x_i} = \{f_{x_i}\}_{\text{kl}} + [f]_S \cos(\mathbf{n}, x_i)\delta_S, \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n; \tag{7.26}$$
čia: $\{f_{x_i}\}_{\text{kl}}$ – klasikinė išvestinė, apibrėžta taškuose $x \in \mathbb{R}^n \setminus S$; $[f]_S$ – funkcijos f šuolis pereinant per paviršių S, t.y.
$$[f]_S = \lim_{\substack{x' \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega} \\ x' \to x}} f(x') - \lim_{\substack{x' \in \Omega \\ x' \to x}} f(x');$$
$\mathbf{n} = \mathbf{n}_x$ – paviršiaus S vienetinis normalės taške x vektorius, išorinis srities Ω atžvilgiu; $[f]_S \cos(\mathbf{n}, x_i)\delta_S$ – paprastojo sluoksnio apibendrintoji funkcija (žr. (7.3)).

◁ Naudodamiesi integravimo dalimis formule (žr. [1] (1.10)) ir paprastojo sluoksnio apibrėžimu, gauname:
$$\langle f_{x_i},\, \varphi \rangle = -\langle f,\, \varphi_{x_i} \rangle = -\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi_{x_i}(x)\, dx =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \{f_{x_i}\}_{\text{kl}}\, \varphi(x)\, dx + \int\limits_S [f]_S \cos(\mathbf{n}, x_i)\varphi(x)\, dS =$$
$$= \langle \{f_{x_i}\}_{\text{kl}} + [f]_S \cos(\mathbf{n}, x_i)\delta_S,\, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$
Iš čia išplaukia (7.26). ▷

8. Tegu S yra dalimis glodus paviršius erdvėje $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{n} = \mathbf{n}_x$ – paviršiaus S vienetinis normalės vektorius taške x, funkcija $\nu \in \mathrm{C}(S)$. Apibrėšime apibendrintąją funkciją $-\partial(\nu\delta_S)/\partial\mathbf{n}$ pagal formulę:

$$\left\langle -\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}(\nu\delta_S),\, \varphi \right\rangle = \int\limits_S \nu(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial\mathbf{n}}\, dS, \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Aišku, kad

$$-\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}(\nu\delta_S) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \quad \operatorname{supp}\left[-\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}(\nu\delta_S)\right] \subset S.$$

Apibendrintoji funkcija $-\partial(\nu\delta_S)/\partial\mathbf{n}$ vadinama *dvilypiu sluoksniu* paviršiuje S, o $\nu = \nu(x)$ – tankio funkcija.

Tegu $f \in \mathrm{C}^2(\Omega) \cup \mathrm{C}^1(\overline{\Omega})$ ir $f(x) = 0$, kai $x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$. Tada su kiekviena funkcija $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ teisinga Gryno formulė (žr. [1], (12.9)):

$$\int\limits_\Omega (f\Delta\varphi - \varphi\Delta f)\, dx = \int\limits_S \left(f\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} - \varphi\frac{\partial f}{\partial\mathbf{n}}\right) dS.$$

Remiantis apibendrintųjų funkcijų paprastojo ir dvilypio sluoksnio apibrėžimu, šią formulę galima užrašyti taip:

$$\Delta f = \Delta_{\mathrm{kl}} f - \frac{\partial f}{\partial\mathbf{n}}\delta_S - \frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}(f\delta_S);$$

čia $\Delta_{\mathrm{kl}} f = \Delta f$ – klasikinis Laplaso operatorius. Jis yra apibrėžtas, kai $x \notin S$, ir neapibrėžtas, kai $x \in S$.

7.8. APIBENDRINTŲJŲ FUNKCIJŲ EILUTĖS

Sudarykime formalią apibendrintųjų funkcijų eilutę

$$\sigma = \sum_{i=1}^{\infty} f_k, \qquad f_k \in \mathcal{D}^*(\Omega). \tag{7.27}$$

Sakysime, kad ši eilutė konverguoja, jeigu jos dalinė suma $\sigma_k = f_1 + \ldots + f_k \to \sigma$ erdvėje $\mathcal{D}^*(\Omega)$, kai $k \to \infty$ ir $\sigma \in \mathcal{D}^*(\Omega)$.

Eilutėms, sudarytoms iš reguliariųjų apibendrintųjų funkcijų, yra teisinga teorema.

7.2 teorema. *Tegu $f_k \in \mathrm{L}_{\mathrm{loc}}(\Omega), \forall k = 1, 2, \ldots$, ir (7.27) eilutė konverguoja tolygiai kiekvienoje kompaktinėje aibėje $K \subset \Omega$. Tada ji konverguoja erdvėje $\mathcal{D}^*(\Omega)$.*

◁ Pagal teoremos sąlygą kiekvienoje kompaktinėje aibėje $K \subset \Omega$

$$\sigma_k(x) = \sum_{i=1}^{k} f_i(x) \rightrightarrows \sigma(x), \quad k \to \infty, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

kai $k \to \infty$. Todėl

$$\langle \sigma_k, \varphi \rangle = \int_\Omega \sigma_k(x)\varphi(x)\,dx \to \int_\Omega \sigma(x)\varphi(x)\,dx = \langle \sigma, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

kai $k \to \infty$. Todėl $\sigma_k \to \sigma$, kai $k \to \infty$ erdvėje $\mathcal{D}^*(\Omega)$. ▷

7.3 teorema. *Kiekvieną konverguojančią apibendrintų funkcijų eilutę galima diferencijuoti panariui, tiksliau, teisinga formulė:*

$$D^\alpha \sum_{i=1}^{\infty} f_i = \sum_{i=1}^{\infty} D^\alpha f_i, \quad \forall \alpha. \tag{7.28}$$

◁ Diferencijavimo operatorius D^α yra tolydus erdvėje $\mathcal{D}^*(\Omega)$. Todėl

$$\sum_{i=1}^{k} D^\alpha f_i = D^\alpha \sigma_k \to D^\alpha \sigma = D^\alpha \sum_{i=1}^{\infty} f_i$$

erdvėje $\mathcal{D}^*(\Omega)$, kai $k \to \infty$. ▷

7.4 teorema. *Tarkime, trigonometrinės eilutės*

$$\sigma = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikx}, \quad x \in \mathbb{R}^1, \tag{7.29}$$

koeficientai tenkina nelygybes

$$|a_k| \le a|k|^m + b, \quad m \in \mathbb{N}; \tag{7.30}$$

čia a, b – teigiamos konstantos. Tada rm (7.30) eilutė konverguoja erdvėje $\mathcal{D}^*(\mathbb{R}^1)$.

$\triangleleft$ Iš (7.30) nelygybės išplaukia, kad eilutė

$$\frac{a_0 x^{m+2}}{(m+2)!} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \frac{a_k}{(ik)^{m+2}} e^{ikx}$$

konverguoja tolygiai visoje tiesėje $\mathbb{R}^1$. Šios eilutės $(m+2)$-oji išvestinė sutampa su (7.29) eilute. Remiantis 7.2 ir 7.3 teoremomis, (7.29) eilutė konverguoja erdvėje $\mathcal{D}^*(\Omega)$. $\triangleright$

7.5 teorema. (Švarco) *Trigonometrinė eilutė*

$$\sigma = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

konverguoja erdvėje $\mathcal{D}^*(\mathbb{R}^1)$ *tada ir tik tada, kai su kokiu nors* $m \in \mathbb{N}$ *reiškiniai*

$$\frac{a_k}{|k|^m} \to 0, \quad \frac{b_k}{|k|^m} \to 0,$$

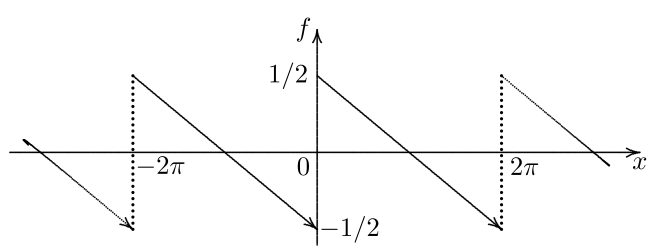
kai $k \to \infty$.

Šios teoremos įrodymą galima rasti [2], [41] knygose.

P a v y z d ž i a i :

1. Tegu f yra 2π periodinė funkcija, apibrėžta formule (žr. 7.3 pav.)

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2\pi}, \quad x \in [0,\, 2\pi).$$



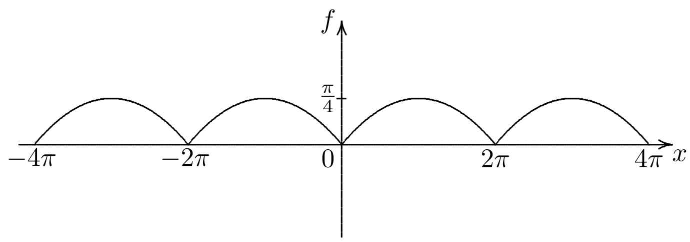
7.3 pav.

Remiantis (7.23), jos išvestinė

$$f'(x) = -\frac{1}{2\pi} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2k\pi). \tag{7.31}$$

2. Tegu f yra funkcija iš pirmojo pavyzdžio, o F yra 2π periodinė funkcija, apibrėžta formule (žr. 7.4 pav.)

$$F(x) = \int_0^x f(y)\,dy = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4\pi}, \quad x \in [0, 2\pi).$$



7.4 pav.

Išskleiskime funkciją F tolygiai konverguojančia Furjė eilute

$$F(x) = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \frac{1}{k^2} e^{ikx}.$$

Remiantis 7.4 teorema, šią eilutę galima diferencijuoti panariui bet kokį skaičių kartų. Todėl

$$F''(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx}.$$

Tačiau

$$F''(x) = f'(x) = -\frac{1}{2\pi} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2k\pi) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} e^{ikx}.$$

Sulyginę šias išraiškas, gausime formulę

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2k\pi). \tag{7.32}$$

7.9. DIFERENCIALINIŲ OPERATORIŲ FUNDAMENTALIEJI SPRENDINIAI

Tegu A yra tiesinis diferencialinis m-osios eilės operatorius, t.y.

$$A = \sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha D^\alpha. \tag{7.33}$$

Be to, operatoriaus A koeficientai $a_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Tada $\forall u \in \mathcal{D}^*(\mathbb{R}^n)$ apibrėžta apibendrinta funkcija $A\,u \in \mathcal{D}^*(\mathbb{R}^n)$ ir teisinga formulė

$$\begin{aligned}\langle A\,u,\, \varphi\rangle &= \sum_{|\alpha|=0}^{m} \langle a_\alpha D^\alpha u,\, \varphi\rangle = \sum_{|\alpha|=0}^{m} \langle D^\alpha u,\, a_\alpha\varphi\rangle = \\ &= \sum_{|\alpha|=0}^{m} (-1)^{|\alpha|} \langle u,\, D^\alpha(a_\alpha\varphi)\rangle = \left\langle u,\, \sum_{|\alpha|=0}^{m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha(a_\alpha\varphi)\right\rangle = \\ &= \langle u,\, A^*\varphi\rangle\,, \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n);\end{aligned} \tag{7.34}$$

čia A^* – formaliai jungtinis operatorius, t.y.

$$A^*\,\varphi = \sum_{|\alpha|=0}^{m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha(a_\alpha\varphi).$$

Erdvėje $\mathcal{D}^*(\mathbb{R}^n)$ nagrinėsime lygtį

$$A\,u = f, \quad f \in \mathcal{D}^*(\mathbb{R}^n). \tag{7.35}$$

Apibendrintoji funkcija $u \in \mathcal{D}^*(\mathbb{R}^n)$ yra (7.35) lygties sprendinys, jeigu

$$\langle A\,u,\, \varphi\rangle = \langle f,\, \varphi\rangle\,, \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n). \tag{7.36}$$

Remiantis (7.34), pastarąją lygybę galima perrašyti taip:

$$\langle u,\, A^*\,\varphi\rangle = \langle f,\, \varphi\rangle\,, \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n). \tag{7.37}$$

A p i b r ė ž i m a s. Apibendrintoji funkcija $\mathcal{E} \in \mathcal{D}^*(\mathbb{R}^n)$ vadinama operatoriaus A *fundamentaliuoju sprendiniu*, jeigu ji yra lygties

$$A\,\mathcal{E} = \delta \tag{7.38}$$

sprendinys

Bendru atveju fundamentalusis sprendinys nėra vienintelis. Jis apibrėžiamas homogeninės lygties $A\,\mathcal{E}_0 = 0$ sprendinio tikslumu. Iš tikrųjų apibendrintoji funkcija $\mathcal{E} + \mathcal{E}_0$ taip pat yra operatoriaus A fundamentalusis sprendinys:

$$A(\mathcal{E} + \mathcal{E}_0) = A\,\mathcal{E} + A\,\mathcal{E}_0 = \delta.$$

Žinant operatoriaus A fundamentalųjį sprendinį $\mathcal{E}$, galima rasti (7.35) lygties sprendinį sąsūkos $u = \mathcal{E} * f$ pavidalu (žr. 7.11 skyrelį). Fundamentaliuosius sprendinius galima rasti naudojantis Furjė transformacijų metodu (žr. 7.13 skyrelį).

Pateiksime keletą svarbiausių matematinės fizikos diferencialinių operatorių fundamentaliųjų sprendinių pavyzdžių.

P a v y z d ž i a i:

1. Tegu funkcija $z \in C^m(\mathbb{R}_+)$ tenkina diferencialinę lygtį

$$A\,z \equiv z^{(m)} + a_1(t)z^{(m-1)} + \ldots + a_m(t)z = 0$$

ir pradines sąlygas:

$$z(0) = z'(0) = \ldots = z^{(m-2)}(0) = 0, \quad z^{(m-1)}(0) = 1. \tag{7.39}$$

Tada funkcija $\mathcal{E} = \theta z$ yra fundamentalusis operatoriaus A sprendinys; čia θ – Hevisaido funkcija. Įrodysime tai. Remdamiesi pradinėmis sąlygomis, apskaičiuosime išvestines:

$$\mathcal{E}'(t) = \delta(t)z(t) + \theta(t)z'(t) = \theta(t)z'(t),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\mathcal{E}^{(m-1)}(t) = \delta(t)z^{(m-2)}(t) + \theta(t)z^{(m-1)}(t) = \theta(t)z^{(m-1)}(t),$$

$$\mathcal{E}^{(m)}(t) = \delta(t)z^{(m-1)}(t) + \theta(t)z^{(m)}(t) = \delta(t) + \theta(t)z^{(m)}(t).$$

Todėl

$$A\,\mathcal{E}(t) = \theta(t)\,A\,z + \delta(t) = \delta(t).$$

2. Tegu A yra Laplaso operatorius, t.y.

$$A = \Delta = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}.$$

Tada jo fundamentalusis sprendinys[1]

$$\mathcal{E}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(2-n)|S_1|}|x|^{2-n}, & n > 2, \\ \dfrac{1}{|S_1|}\ln|x|, & n = 2; \end{cases}$$

čia $|S_1|$ – vienetinės sferos plotas (žr. [1]).

[1]Pirmoje šios knygos dalyje fundamentalioju Laplaso lygties sprendiniu pavadinome funkciją

$$\mathcal{E}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(n-2)|S_1|}|x|^{2-n}, & n > 2, \\ -\dfrac{1}{|S_1|}\ln|x|, & n = 2. \end{cases}$$

Pakanka patikrinti, kad

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathcal{E}(x)\Delta\varphi(x)\,dx = \langle\delta,\,\varphi\rangle\,, \quad \forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n). \tag{7.40}$$

Remiantis dukart diferencijuojamų funkcijų integraline išraiška (žr. [1], (10.4) formulę),

$$\varphi(x) = \int\limits_{\Omega} \mathcal{E}(x-y)\Delta\varphi(y)\,dy,$$

jeigu tik $\operatorname{supp}\varphi\subset\Omega$. Kai $x=0$, iš pastarosios gausime (7.40).

3. Tegu $n=3$ ir

$$\mathcal{E}(x) = -\frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|}, \quad \overline{\mathcal{E}}(x) = -\frac{e^{-ik|x|}}{4\pi|x|}.$$

Įrodysime, kad taip apibrėžtos funkcijos $\mathcal{E}$ ir $\overline{\mathcal{E}}$ yra Helmholco operatoriaus $\Delta + k^2 I$ fundamentalieji sprendiniai; čia I – tapatus operatorius.

Tiesiogiai galima patikrinti, kad

$$\frac{\partial}{\partial x_j}e^{ik|x|} = \frac{ikx_j}{|x|}e^{ik|x|}, \quad \Delta e^{ik|x|} = \left(\frac{2ik}{|x|} - k^2\right)e^{ik|x|}.$$

Be to,

$$\Delta\frac{1}{|x|} = -|S_1|\delta(x) = -4\pi\delta(x).$$

Todėl

$$(\Delta+k^2)\frac{e^{ik|x|}}{|x|} = e^{ik|x|}\Delta\frac{1}{|x|} +$$

$$+2\left(\nabla e^{ik|x|}, \nabla\frac{1}{|x|}\right) + \frac{1}{|x|}\Delta e^{ik|x|} + \frac{k^2}{|x|}e^{ik|x|} =$$

$$= -4\pi e^{ik|x|}\delta(x) + \left(-\frac{2ik}{|x|^2} + \frac{2ik}{|x|^2} - \frac{k^2}{|x|} + \frac{k^2}{|x|}\right)e^{ik|x|} = -4\pi\delta(x).$$

Taigi funkcija $\mathcal{E}$ yra fundamentalusis Helmholco operatoriaus sprendinys. Analogiškai galima įrodyti, kad funkcija $\overline{\mathcal{E}}$ taip pat yra Helmholco operatoriaus sprendinys.

4. Tegu

$$\mathcal{E}(x,t) = \frac{\theta(t)}{(4\pi a^2 t)^{n/2}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}.$$

Įrodysime, kad taip apibrėžta funkcija $\mathcal{E}$ yra šilumos laidumo operatoriaus

$$A = \frac{\partial}{\partial t} - a^2\Delta$$

fundamentalusis sprendinys, t.y.

$$\mathcal{E}_t - a^2 \Delta \mathcal{E} = \delta(x,t). \tag{7.41}$$

Funkcija $\mathcal{E}$ yra lokaliai integruojama erdvėje $\mathbb{R}^{n+1}$, $\mathcal{E}(x,t) = 0$, kai $t < 0$, ir $\mathcal{E}(x,t) > 0$, kai $t > 0$. Be to (žr. [1], 9.3 skyrelio 2 ir 5 savybes),

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathcal{E}(x,t)\,dx = 1, \quad \forall t > 0, \tag{7.42}$$

ir puserdvėje $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$ ji tenkina lygtį

$$\mathcal{E}_t - a^2 \Delta \mathcal{E} = 0.$$

Tegu $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$. Pasinaudoję šiomis savybėmis, gausime

$$\left\langle \mathcal{E}_t - a^2 \Delta \mathcal{E},\, \varphi \right\rangle = -\left\langle \mathcal{E},\, \varphi_t + a^2 \Delta \varphi \right\rangle =$$

$$= -\int\limits_0^\infty \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathcal{E}(x,t) \left(\varphi_t(x,t) + a^2 \Delta \varphi(x,t) \right)\, dxdt =$$

$$= -\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_\varepsilon^\infty \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathcal{E}(x,t) \left(\varphi_t(x,t) + a^2 \Delta \varphi(x,t) \right)\, dxdt =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathcal{E}(x,\varepsilon) \varphi(x,\varepsilon)\, dx + \int\limits_\varepsilon^\infty \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\mathcal{E}_t - a^2 \Delta \mathcal{E} \right) \varphi\, dxdt \Big) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathcal{E}(x,\varepsilon) \varphi(x,0)\, dx + \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathcal{E}(x,\varepsilon) [\varphi(x,\varepsilon) - \varphi(x,0)]\, dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathcal{E}(x,\varepsilon) \varphi(x,0)\, dx. \tag{7.43}$$

Paskutiniame etape pasinaudojome tuo, kad

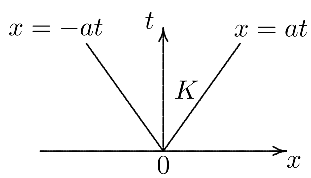
$$\Big| \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathcal{E}(x,\varepsilon) [\varphi(x,\varepsilon) - \varphi(x,0)]\, dx \Big| \le \max_{x \in \mathbb{R}^n} |\varphi(x,\varepsilon) - \varphi(x,0)| \to 0,$$

kai $\varepsilon \to 0$. Kadangi $\{\mathcal{E}(x,\varepsilon)\}$, $\varepsilon \to 0$, yra delta pavidalo funkcijų seka (žr. 7.3 skyrelį), tai

$$\left\langle \mathcal{E}_t - a^2 \Delta \mathcal{E},\, \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathcal{E}(x,\varepsilon) \varphi(x,0)\, dx =$$

$$= \varphi(0,0) = \langle \delta,\, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}^*(\mathbb{R}^{n+1}).$$

5. Tegu $n = 1$ ir
$$\mathcal{E}(x,t) = \frac{1}{2a}\theta(at - |x|).$$
Įrodysime, kad taip apibrėžta funkcija yra fundamentalusis Dalambero operatoriaus
$$\Box_a = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$
sprendinys, t.y. tenkina lygtį
$$\Box_a \mathcal{E}(x,t) = \delta(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2. \tag{7.44}$$
Funkcija $\mathcal{E}$ yra lokaliai integruojama plokštumoje $\mathbb{R}^2$, lygi nuliui kūgio $K = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : |x| \le at,\ t \ge 0\}$ išorėje (žr. 7.5 pav.).



7.5 pav.

Tegu $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$. Tada
$$\langle \Box_a\mathcal{E},\, \varphi\rangle = \langle \mathcal{E},\, \Box_a\varphi\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \mathcal{E}(x,t)\Box_a\varphi(x,t)\,dxdt =$$
$$= \frac{1}{2a}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{|x|/a}^{\infty} \varphi_{tt}(x,t)\,dtdx - \frac{a}{2}\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{-at}^{at} \varphi_{xx}(x,t)\,dxdt =$$
$$= -\frac{1}{2a}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_t(x,t)\big|_{t=|x|/a}\,dx - \frac{a}{2}\int\limits_{0}^{\infty} \varphi_x(x,t)\big|_{x=-at}^{x=at}\,dx =$$
$$= -\frac{1}{2a}\int\limits_{0}^{\infty} \varphi_t(x,t)\big|_{t=x/a}\,dx - \frac{a}{2}\int\limits_{0}^{\infty} \varphi_x(x,t)\big|_{x=at}\,dt -$$
$$-\frac{1}{2a}\int\limits_{0}^{\infty} \varphi_t(-x,t)\big|_{t=x/a}\,dx + \frac{a}{2}\int\limits_{0}^{\infty} \varphi_x(x,t)\big|_{x=-at}\,dt =$$
$$= -\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\infty}\Big[\varphi_t(x,t)\big|_{x=at} + a\varphi_x(x,t)\big|_{x=at}\,dt\Big]\,dt -$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \Big[\varphi_t(-x,t)\big|_{x=-at} - a\varphi_x(x,t)\big|_{x=-at}\,dt\Big]\,dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty d\varphi(at,t) - \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty d\varphi(-at,t) = \frac{1}{2}\varphi(0,0) + \frac{1}{2}\varphi(0,0) = \langle\delta,\,\varphi\rangle\,.$$

Iš čia gauname, kad funkcija $\mathcal{E}$ tenkina (7.44) lygtį.

7.10. TIESIOGINĖ SANDAUGA

Tegu funkcija $f \in \mathrm{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, o funkcija $g \in \mathrm{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^m)$. Tada jų sandauga $fg \in \mathrm{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{n+m})$ ir apibrėžia reguliarią apibendrintą funkciją $fg \in \mathcal{D}^*(\mathbb{R}^{n+m})$:

$$\langle fg, \varphi\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^{n+m}} f(x)g(y)\varphi(x,y)\,dxdy =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) \int\limits_{\mathbb{R}^m} g(y)\varphi(x,y)\,dydx = \langle f, \langle g, \varphi\rangle\rangle\,, \tag{7.45}$$

$$\langle gf, \varphi\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^{n+m}} g(y)f(x)\varphi(x,y)\,dxdy =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^m} g(y) \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x,y)\,dxdy = \langle f, \langle g, \varphi\rangle\rangle\,. \tag{7.46}$$

Į šias formules galima žiūrėti kaip į Fubinio teoremos apie daugialypio ir kartotinių integralų lygybę vieną iš variantų (žr. [18]). Be to, šiomis formulėmis galima apibrėžti apibendrintų funkcijų tiesioginę sandaugą.

A p i b r ė ž i m a s. Funkcijų $f \in \mathcal{D}^*(\mathbb{R}^n)$ ir $g \in \mathcal{D}^*(\mathbb{R}^m)$ *tiesiogine sandauga* vadinsime apibendrintą funkciją $h = f \times g \in \mathcal{D}^*(\mathbb{R}^{n+m})$, apibrėžiamą formule

$$\langle h, \varphi\rangle := \langle f \times g, \varphi\rangle = \langle f, \langle g, \varphi\rangle\rangle\,, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m}). \tag{7.47}$$

Galima įrodyti, kad šis apibrėžimas yra korektiškas, t.y. (7.47) formulė apibrėžia tiesinį tolydų funkcionalą pagrindinių funkcijų erdvėje $\mathcal{D}^*(\mathbb{R}^{n+m})$.

Išvardysime pagrindines tiesioginės sandaugos savybes:

1. Tiesioginė sandauga yra *komutatyvi*:
$$f \times g = g \times f.$$

2. Tiesioginė sandauga yra *asociatyvi*:
$$f \times [g \times h] = [f \times g] \times h.$$

3. Tegu $a \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, $b \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$, $f \in \mathcal{D}^*(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathcal{D}^*(\mathbb{R}^m)$ ir $h = f \times g$. Tada
$$abh = [af] \times [bg].$$

4. Tegu $f \in \mathcal{D}^*(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathcal{D}^*(\mathbb{R}^m)$ ir multiindeksai $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$. Tada
$$D^\alpha D^\beta [f \times g] = [D^\alpha f] \times [D^\beta g].$$

5. Tiesioginė sandauga yra *distributyvi* apibendrintųjų funkcijų sumos atžvilgiu:

$$f \times [\lambda g + \mu h] = \lambda f \times g + \mu f \times h, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}^1;$$

čia $f \in \mathcal{D}^*(\mathbb{R}^n)$, $g, h \in \mathcal{D}^*(\mathbb{R}^m)$.

6. Tegu $f \in \mathcal{D}^*(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathcal{D}^*(\mathbb{R}^m)$. Tada

$$\operatorname{supp}[f \times g] = [\operatorname{supp} f] \times [\operatorname{supp} g].$$

Dešiniojoje šios formulės pusėje yra aibių $\operatorname{supp} f$ ir $\operatorname{supp} g$ Dekarto sandauga.

Šių teiginių įrodymus galima rasti [21], [51], [52] knygose.
P a v y z d y s. Tegu $x \in \mathbb{R}^n$. Tada daugiamatė Hevisaido funkcija

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{kai } x_k \geq 0, \forall k = 1, \dots, n, \\ 0, & \text{kitais atvejais,} \end{cases}$$

gali būti išreikšta vienmačių Hevisaido funkcijų[2] tiesiogine sandauga:

$$\theta(x) = \theta(x_1) \times \theta(x_2) \times \ldots \times \theta(x_n) = \theta(x_1)\theta(x_2)\ldots\theta(x_n).$$

Jos atrama

$$\operatorname{supp} \theta = [0, \infty) \times [0, \infty) \times \ldots \times [0, \infty).$$

Be to (žr. 7.7 skyrelio, 2 pavyzdį),

$$D^{(1,1,\dots,1)}\theta(x) = \delta(x) = \frac{\partial\theta(x_1)}{\partial x_1} \times \frac{\partial\theta(x_2)}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial\theta(x_n)}{\partial x_n}.$$

Todėl daugiamatė delta funkcija gali būti išreikšta vienmačių delta funkcijų tiesiogine sandauga:

$$\delta(x) = \delta(x_1) \times \delta(x_2) \times \ldots \times \delta(x_n).$$

Pagal 4-ą savybę dvimatės Hevisaido funkcijos išvestinė

$$\frac{\partial}{\partial y}\theta(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}[\theta(x) \times \theta(y)] = \theta(x) \times \frac{\partial}{\partial y}\theta(y) = \theta(x) \times \delta(y).$$

[2]Čia ta pačia raide θ žymime daugiamatę ir vienmatę Hevisaido funkcijas.

7.11. SĄSŪKA

Tegu funkcijos f ir $g \in \mathrm{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Tada jų sąsūka apibrėžiama formule

$$(f * g)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy, \tag{7.48}$$

jeigu tik integralas dešiniojoje lygybės pusėje egzistuoja. Taip apibrėžta sąsūka yra komutatyvi

$$(f * g)(x) = (g * f)(x).$$

Tuo lengvai galima įsitikinti atliekant keitinį $z = x - y$. Išskirsime kelis atvejus, kai funkcijų f ir g sąsūka egzistuoja.

7.4 lema. *Tegu* $f, g \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R}^n)$. *Tada* $f * g \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R}^n)$ *ir*

$$\|f * g\|_{\mathrm{L}_1(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{\mathrm{L}_1(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{\mathrm{L}_1(\mathbb{R}^n)}.$$

Šio teiginio įrodymą galima rasti [18] knygoje.

7.5 lema. *Tegu* $f \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathrm{L}_\infty(\mathbb{R}^n)$. *Tada jų sąsūka* $f * g$ *yra aprėžta erdvėje* $\mathbb{R}^n$ *funkcija.*

$\triangleleft$ Tegu $h = f * g$. Tada

$$|h(x)| \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(y)||g(x-y)|\, dy \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |g(x)| \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(y)| dy < \infty. \quad \triangleright$$

7.6 lema. *Tegu funkcijos* $f, g \in \mathrm{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ *ir viena iš jų yra finiti. Tada* $f * g \in \mathrm{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

$\triangleleft$ Tegu $h = f * g$ ir funkcija f yra finiti, t.y. $\operatorname{supp} f \subset \Omega$, Ω – aprėžta sritis. Tada kiekvienai aprėžtai sričiai Q integralas

$$\int\limits_Q |h(x)|\, dx \leq \int\limits_Q \Big(\int\limits_\Omega |f(y) g(x-y)|\, dy \Big)\, dx \leq$$

$$\leq \int\limits_\Omega |f(y)| \int\limits_Q |g(x-y)|\, dx dy \leq C \int\limits_\Omega |f(y)|\, dy < \infty. \quad \triangleright$$

7.7 lema. *Tegu* $n = 1$, $f, g \in \mathrm{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^1)$ *ir funkcijos* f, g *yra lygios nuliui, kai* $x < 0$. *Tada* $f * g \in \mathbf{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^1)$.

$\triangleleft$ Tegu $h = f * g$. Laisvai pasirenkame skaičių $R > 0$. Tada

$$\int_{-R}^{R} |h(x)|\, dx = \int_0^R \int_0^x |g(y)||f(x-y)|\, dydx =$$

$$= \int_0^R |g(y)| \int_y^R |f(x-y)|\, dxdy \le \int_0^R |g(y)|\, dy \int_0^R |f(z)|\, dz < \infty. \quad \triangleright$$

Tarkime, funkcijų $f, g \in \mathrm{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ sąsūka $f * g \in \mathrm{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Tada formulė

$$\langle f * g,\, \varphi \rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} g(y) f(\xi - y) dy \Big) \varphi(\xi) d\xi =$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{2n}} f(x) g(y) \varphi(x+y) dxdy, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n),$$

apibrėžia reguliariąją apibendrintąją funkciją $f * g$.

Į funkcijų f ir g sandaugą galima žiūrėti kaip į tiesioginę sandaugą $f \times g$. Todėl pastarąją formulę galima perrašyti taip:

$$\langle f * g,\, \varphi \rangle = \langle f \times g,\, \varphi^* \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n);$$

čia funkcija $\varphi^* : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^1$ yra apibrėžta formule $\varphi^*(x, y) = \varphi(x + y)$. Funkcija φ^* yra be galo diferencijuojama. Tačiau nėra finiti. Todėl reiškinys dešiniojoje lygybės pusėje turi prasmę ne su visomis apibendrintomis funkcijomis f ir g.

A p i b r ė ž i m a s. Apibendrintųjų funkcijų f ir $g \in \mathcal{D}^*(\mathbb{R}^n)$ sąsūka vadinsime funkcionalą $f * g$, apibrėžtą pagal formulę

$$\langle f * g,\, \varphi \rangle = \langle f \times g,\, \varphi^* \rangle\,, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \tag{7.49}$$

jeigu tik reiškinys dešiniojoje lygybės pusėje turi prasmę.

Išskirsime du atvejus, kai apibendrintų funkcijų sąsūka egzistuoja ir priklauso erdvei $\mathcal{D}^*(\mathbb{R}^n)$.

1. Bent viena iš apibendrintųjų funkcijų f arba g yra finiti.
2. $n = 1$ ir apibendrintųjų funkcijų f ir g atramos yra aprėžtos iš vienos pusės (pavyzdžiui, $f(x) = 0$, kai $x < a$, ir $g(x) = 0$, kai $x < b$, t.y. abiejų funkcijų atramos yra aprėžtos iš kairės).

P a v y z d y s. Bet kokios apibendrintosios funkcijos $f \in \mathcal{D}^*(\mathbb{R}^n)$ sąsūka su delta funkcija yra lygi f, t.y.

$$f * \delta = \delta * f = f, \quad \forall f \in \mathcal{D}^*(\mathbb{R}^n). \tag{7.50}$$

Iš tikrųjų delta funkcijos atrama yra taškas $x = 0$. Todėl sąsūka $f * \delta$ egzistuoja ir

$$\langle \delta * f,\, \varphi \rangle = \langle \delta \times f,\, \varphi^* \rangle = \langle f,\, \langle \delta,\, \varphi^* \rangle \rangle = \langle f,\, \varphi \rangle\,.$$

Analogiškai įrodoma, kad $\langle f * \delta, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle$. Todėl delta funkcija apibendrintų funkcijų erdvėje vaidina vieneto vaidmenį.

S ą s ū k o s s a v y b ė s. Tegu $f, g, h \in \mathcal{D}^*(\mathbb{R}^n)$. Tada:

1. Apibendrintųjų funkcijų sąsūka yra *komutatyvi*:
$$f * g = g * f.$$

2. Sąsūka yra *asociatyvi*:
$$[f * g] * h = f * [g * h].$$

3. Sąsūka yra *distributyvi* apibendrintųjų funkcijų sumos atžvilgiu:
$$f * [\lambda g + \mu h] = \lambda f * g + \mu f * h, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}^1.$$

4. Tegu D^α yra diferencijavimo operatorius. Tada
$$D^\alpha (f * g) = (D^\alpha f) * g = f * (D^\alpha g).$$
Šią savybę galima apibendrinti. Tegu
$$A = \sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha D^\alpha, \quad a_\alpha \in \mathbb{R}^1,$$
yra m-osios eilės diferencijavimo operatorius su pastoviaisiais koeficientais. Tada
$$A(f * g) = (Af) * g = f * (Ag).$$

5. Tegu $f * g \in \mathcal{D}^*(\mathbb{R}^n)$. Tada
$$\operatorname{supp}(f * g) \subset \overline{\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g}.$$

6. Tegu ω_ε yra delta pavidalo funkcijų seka (žr. 7.3 skyrelio 2 pavyzdį). Tada
$$\lim_{\varepsilon \to +0} \omega_\varepsilon * f = f.$$
Funkcija $f_\varepsilon = \omega_\varepsilon * f = f * \omega_\varepsilon$ vadinama apibendrintosios funkcijos f *vidutine funkcija*.

Pirmų keturių savybių įrodymas tiesiogiai išplaukia iš sąsūkos apibrėžimo ir atitinkamų tiesioginės sandaugos savybių. Penktos ir šeštos savybių įrodymus galima rasti [52] knygoje.

7.6 teorema. *Tegu*
$$A = \sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha D^\alpha, \quad a_\alpha \in \mathbb{R}^1,$$

m-osios eilės diferencialinis operatorius su pastoviaisiais koeficientais ir $\mathcal{E}$ – fundamentalusis šio operatoriaus sprendinys. Tada sąsūka

$$u = \mathcal{E} * f,$$

jeigu ji egzistuoja, yra diferencialinės lygties

$$A\,u = f$$

sprendinys.

◁ Remdamiesi 4 sąsūkos savybe, (7.50) formule ir fundamentalaus sprendinio apibrėžimu, gauname

$$A\,u = A(\mathcal{E} * f) = A\,\mathcal{E} * f = \delta * f = f. \quad ▷$$

P a v y z d ž i a i:

1. Tegu
$$\mathcal{E}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(2-n)|S_1|}|x|^{2-n}, & \text{kai } n > 2, \\ \dfrac{1}{2\pi}\ln|x|, & \text{kai } n = 2, \end{cases}$$
yra fundamentalusis Laplaso operatoriaus Δ sprendinys, $f \in \mathcal{D}^*(\mathbb{R}^n)$. Tada sąsūka $u = \mathcal{E} * f$, jeigu ji egzistuoja, yra Puasono lygties
$$\Delta u = f$$
sprendinys. Tarkime, f yra finiti, sumuojama erdvėje $\mathbb{R}^n$ funkcija ir $\Omega = \operatorname{supp} f$. Tada gauname žinomą (žr. [1], 12.9 skyrelį) formulę
$$u(x) = (\mathcal{E} * f)(x) = \int\limits_{\Omega} \mathcal{E}(x-y) f(y)\,dy.$$

2. Tegu S yra dalimis glodus paviršius erdvėje $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$. Tada apibendrintos funkcijos
$$v(x) = (\mathcal{E} * \mu\delta_S)(x), \quad w(x) = -(\mathcal{E} * \partial(\nu\delta_S)/\partial\mathbf{n})(x)$$
vadinamos atitinkamai *paprastojo ir dvilypio sluoksnio potencialais*; čia $\mu\delta_S$ ir $-\partial(\nu\delta_S)/\partial\mathbf{n}$ – paprastasis ir dvilypis sluoksniai paviršiuje S (žr. 7.2 ir 7.7 skyrelius) su tankio funkcijomis μ ir ν. Šios sąvokos apibendrina žinomas iš šio vadovėlio pirmosios dalies paprastojo ir dvilypio potencialo sąvokas (žr. [1], 12.3 skyrelį). Jeigu paviršius S yra aprėžtas, tai galima įrodyti (žr. [52], 83 p.), kad $v, w \in \mathrm{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ir yra teisingos formulės:
$$v(x) = \int\limits_S \mathcal{E}(x-y)\mu(y)\,dS_y, \quad w(x) = -\int\limits_S \frac{\partial\mathcal{E}(x-y)}{\partial\mathbf{n}_y}\nu(y)\,dS_y.$$

7.12. LĖTAI DIDĖJANČIOS APIBENDRINTOSIOS FUNKCIJOS

Vienas iš svarbiausių matematinės fizikos lygčių sprendimo metodų yra Furjė transformacijų metodas. Kitame skyrelyje išdėstysime lėtai didėjančių apibendrintųjų funkcijų Furjė transformacijų teorijos elementus. Šitame skyrelyje nagrinėsime greitai mažėjančių pagrindinių funkcijų ir lėtai didėjančių apibendrintųjų funkcijų klases. Viena iš svarbiausių šių klasių savybių yra ta, kad Furjė transformacija veikia jų viduje.

A p i b r ė ž i m a s. Sakysime, funkcija $\varphi \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ yra *greitai mažėjanti*, jeigu su visais α ir β reiškinys $x^\beta D^\alpha \varphi(x)$ yra aprėžtas erdvėje $\mathbb{R}^n$. Greitai mažėjančių funkcijų klasę žymėsime $\mathcal{G}$.

Pateiksime kitą, ekvivalentų klasės $\mathcal{G}$ apibrėžimą.

A p i b r ė ž i m a s. Sakysime, $\varphi \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ priklauso klasei $\mathcal{G}$, jeigu ji ir visos jos išvestinės nyksta, kai $|x| \to \infty$, greičiau negu bet koks funkcijos $|x|^{-1}$ laipsnis.

Akivaizdu, kad aibė $\mathcal{G}$ yra tiesinė. Apibrėžkime konvergavimą šioje aibėje. Sakysime, seka $\{\varphi_k\} \subset \mathcal{G}$ konverguoja į nulį ir rašysime $\varphi_k \to 0$, kai $k \to \infty$, jeigu su visais α ir β

$$x^\beta D^\alpha \varphi_k(x) \rightrightarrows 0 \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{7.51}$$

kai $k \to \infty$. Aibė $\mathcal{G}$ su taip apibrėžta topologija yra tiesinė erdvė. Erdvę $\mathcal{G}$ vadinsime *pagrindinių greitai mažėjančių funkcijų erdve*. Akivaizdu, kad $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{G}$. Be to, iš konvergavimo erdvėje $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ išplaukia konvergavimas erdvėje $\mathcal{G}$. Erdvė $\mathcal{G}$ nesutampa su erdve $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Pavyzdžiui, funkcija $e^{-|x|^2}$ priklauso $\mathcal{G}$, bet nepriklauso $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Erdvė $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ yra tiršta aibė erdvėje $\mathcal{G}$, t.y. kiekvienai funkcijai $\varphi \in \mathcal{G}$ egzistuoja tokia seka $\varphi_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $k = 1, 2, \ldots$, kad erdvėje $\mathcal{G}$ $\varphi_k \to \varphi$, kai $k \to \infty$. Iš tikrųjų tegu $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\eta(x) = 1$, kai $|x| < 1$, ir

$$\varphi_k(x) = \varphi(x)\eta(x/k), \quad k = 1, 2, \ldots$$

Tada seka $\{\varphi_k\}$ konverguoja į funkciją φ erdvėje $\mathcal{G}$.

Tegu A yra $n \times n$ eilės neišsigimusi matrica, a – fiksuotas vektorius erdvėje $\mathbb{R}^n$ ir T – neišsigimusi erdvės $\mathbb{R}^n$ transformacija. Kiekvienai funkcijai $\varphi \in \mathcal{G}$ priskirkime funkciją $\varphi_T \in \mathcal{G}$ pagal formulę $\varphi_T(x) = \varphi(T\,x)$. Ši atitinkamybė erdvėje $\mathcal{G}$ apibrėžia kintamųjų keitimo operatorių. Lengvai galima įsitikinti, kad taip apibrėžtas operatorius yra tolydus.

Iš erdvės $\mathcal{G}$ apibrėžimo išplaukia, kad diferencijavimo operatorius $D^\alpha : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ yra tolydus su kiekvienu multiindeksu α.

Tegu $a \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ ir $\varphi \in \mathcal{G}$. Sandauga $a\varphi$ gali nepriklausyti greitai mažėjančių funkcijų klasei $\mathcal{G}$. Pavyzdžiui, kai $a(x) = e^{|x|^2}$, $\varphi(x) = e^{-|x|^2}$, sandauga

$$a(x)\varphi(x) = 1 \notin \mathcal{G}.$$

Tačiau jeigu funkcija a ir visos jos išvestinės didėja ne greičiau kaip polinomas, t.y. tenkina nelygybę

$$|D^\alpha a(x)| \leq C_\alpha(1 + |x|)^{m_\alpha}, \quad \forall \alpha, \tag{7.52}$$

tai sandauga $a\varphi$ irgi priklauso $\mathcal{G}$. Be to, dauginimo iš tokios funkcijos operatorius yra tiesinis ir tolydus erdvėje $\mathcal{G}$.

A p i b r ė ž i m a s. Tiesinį tolydų funkcionalą, apibrėžtą pagrindinių funkcijų erdvėje $\mathcal{G}$, vadinsime *lėtai didėjančia apibendrintąja funkcija.* Lėtai didėjančių apibendrintųjų funkcijų klasę žymėsime $\mathcal{G}^*(\mathbb{R}^n)$, arba trumpiau – $\mathcal{G}^*$, o funkcionalo $f \in \mathcal{G}^*$ reikšmę taške $\varphi \in \mathcal{G}$ žymėsime $\langle f,\, \varphi\rangle$.

Aišku, kad G^* yra tiesinė aibė. Apibrėžkime šioje aibėje konvergavimą.

A p i b r ė ž i m a s. Sakysime, apibendrintųjų funkcijų seka f_k iš $\mathcal{G}^*$ konverguoja į apibendrintąją funkciją $f \in \mathcal{G}^*$ ir rašysime $f_k \rightharpoonup f$, jeigu

$$\langle f_k,\, \varphi\rangle \to \langle f,\, \varphi\rangle\,, \quad \forall \varphi \in \mathcal{G},$$

kai $k \to \infty$.

Taigi aibė $\mathcal{G}^*$ su taip apibrėžta topologija yra tiesinė erdvė. Iš šių apibrėžimų gauname, kad $\mathcal{G}^* \subset \mathcal{D}^*(\mathbb{R}^n)$, ir iš konvergavimo erdvėje G^* išplaukia konvergavimas erdvėje $\mathcal{D}^*(\mathbb{R}^n)$. Iš tikrųjų tegu $f \in \mathcal{G}^*$. Tada $f \in \mathcal{D}^*(\mathbb{R}^n)$, nes $\mathcal{D} \subset \mathcal{G}$. Be to, iš konvergavimo erdvėje $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ išplaukia konvergavimas erdvėje $\mathcal{G}$. Todėl, jeigu $f_k \to 0$ erdvėje $\mathcal{G}^*$, kai $k \to \infty$, tai $\langle f_k,\, \varphi\rangle \to 0$, kai $k \to \infty$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{G}$. Kartu galime tvirtinti, kad $f_k \to 0$ erdvėje $\mathcal{D}^*(\mathbb{R}^n)$, kai $k \to \infty$.

7.7 teorema. (L. Švarco) *Tiesinis funkcionalas $f : \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ priklauso erdvei $\mathcal{G}^*$ tada ir tik tada, kai egzistuoja tokie skaičiai $C > 0$ ir $p \geq 0$, kad*

$$|\,\langle f,\, \varphi\rangle\,| \leq C\|\varphi\|_p, \quad \forall \varphi \in \mathcal{G}; \tag{7.53}$$

čia

$$\|\varphi\|_p = \sup_{|\alpha|\leq p}\, \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+|x|)^p |D^\alpha \varphi(x)|.$$

$\triangleleft$P a k a n k a m u m a s . Tegu f yra tiesinis funkcionalas erdvėje $\mathcal{G}$ ir teisinga (7.53) nelygybė. Be to, tegu erdvėje $\mathcal{G}$ seka $\varphi_k \to 0$, kai $k \to \infty$. Tada $\|\varphi_k\|_p \to 0$, kai $k \to \infty$, ir

$$|\,\langle f,\, \varphi_k\rangle\,| \leq C\|\varphi_k\|_p \to 0,$$

kai $k \to \infty$. Tai reiškia, kad f yra tolydus funkcionalas erdvėje $\mathcal{G}$.

B $\bar{\text{u}}$ t i n u m a s . Tegu $f \in \mathcal{G}^*$. Įrodysime, kad egzistuoja tokie skaičiai $C > 0$ ir $p \geq 0$, kad su kiekviena funkcija $\varphi \in \mathcal{G}$ teisinga (7.53) nelygybė. Tarkime priešingai, tokių skaičių nėra. Tada egzistuoja tokia seka $\{\varphi_k\}$ iš $\mathcal{G}$, kad

$$|\,\langle f,\, \varphi_k\rangle\,| \geq k\|\varphi_k\|_k, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{7.54}$$

Tegu

$$\psi_k(x) = \frac{\varphi_k(x)}{\sqrt{k}\|\varphi_k\|_k}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Tada

$$|x^\beta D^\alpha \psi_k(x)| = \frac{|x^\beta D^\alpha \varphi_k(x)|}{\sqrt{k}\|\varphi_k\|_k} \leq \frac{1}{\sqrt{k}},$$

kai $k \geq \max\{|\alpha|, |\beta|\}$. Todėl $\psi_k \to 0$ erdvėje $\mathcal{G}$, kai $k \to \infty$. Kadangi funkcionalas f yra tolydus erdvėje $\mathcal{G}$, tai $\langle f,\, \psi_k\rangle \to 0$, kai $k \to \infty$. Tačiau

$$|\,\langle f,\, \psi_k\rangle\,| = \frac{|\,\langle f,\, \varphi_k\rangle\,|}{\sqrt{k}\|\varphi_k\|_k} \geq \sqrt{k}.$$

Gauta prieštara įrodo, kad padaryta prielaida yra neteisinga. ▷

P a v y z d y s. Tarkime, funkcija $f \in \mathrm{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ir

$$|f(x)| \le C(1+|x|)^m,$$

čia C ir m – teigiamos konstantos. Tada formulė

$$\langle f,\, \varphi\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\, dx, \quad \varphi \in \mathcal{G},$$

apibrėžia funkcionalą $f \in \mathcal{G}^*$. Norint tuo įsitikinti, pakanka pastebėti, kad

$$|\,\langle f,\, \varphi\rangle\,| \le \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)||\varphi(x)|\, dx \le C \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{(1+|x|)^{m+n+1}|\varphi(x)|}{(1+|x|)^{n+1}}\, dx \le$$

$$\le C \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \{(1+|x|)^{m+n+1}|\varphi(x)|\} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{(1+|x|)^{n+1}} =$$

$$= C_1 \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \{(1+|x|)^{m+n+1}|\varphi(x)|\},$$

ir pasinaudoti 7.7 teorema.

7.8 lema. *Tegu $f \in \mathcal{G}^*$. Tada:*

1. $D^\alpha f \in \mathcal{G}^*, \quad \forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n).$
2. *Jeigu $a \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ ir tenkina* (*7.52*) *nelygybę, tai $af \in \mathcal{G}^*$.*
3. *Jeigu $T\,x = A\,x + a$ yra tiesinė neišsigimusi kintamųjų transformacija, tai $f_T \in \mathcal{G}^*$.*

Visi šios lemos teiginiai įrodomi panašiai kaip atitinkami teiginiai erdvėje $\mathcal{D}^*(\mathbb{R}^n)$.

7.13. LĖTAI DIDĖJANČIŲ APIBENDRINTŲJŲ FUNKCIJŲ FURJĖ TRANSFORMACIJOS

Kiekviena funkcija $\varphi \in \mathcal{G}$ yra integruojama erdvėje $\mathbb{R}^n$. Todėl kiekvienai funkcijai $\varphi \in \mathcal{G}$ yra apibrėžta Furjė transformacija[3]

$$F[\varphi](\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{i\xi x}\, dx; \tag{7.55}$$

čia $\xi x = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i x_i$ – skaliarinė sandauga erdvėje $\mathbb{R}^n$.

7.8 teorema. *Furjė transformacija* $F : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$.

$\triangleleft$ Kadangi funkcija φ yra greitai mažėjanti, tai (7.55) integralą galima diferencijuoti po integralo ženklu kintamojo ξ atžvilgiu, t.y.

$$D^\alpha F[\varphi](\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} (ix)^\alpha \varphi(x) e^{i\xi x}\, dx. \tag{7.56}$$

Pasinaudoję šia bei integravimo dalimis formule, įvertinsime reiškinį

$$|\xi^\beta D^\alpha F[\varphi](\xi)| = \Big| \int\limits_{\mathbb{R}^n} (ix)^\alpha \xi^\beta e^{i\xi x} \varphi(x)\, dx \Big| =$$

$$\Big| \int\limits_{\mathbb{R}^n} x^\alpha \varphi(x) D_x^\beta e^{i\xi x}\, dx \Big| = \Big| \int\limits_{\mathbb{R}^n} D_x^\beta \big(x^\alpha \varphi(x)\big) e^{\xi x}\, dx \Big| = \tag{7.57}$$

$$\Big| \int\limits_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{n+1} D_x^\beta \big(x^\alpha \varphi(x)\big) \cdot \frac{e^{\xi x}}{(1+|x|)^{n+1}}\, dx \Big| \le C \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{(1+|x|)^{n+1}}\, dx < \infty.$$

Remiantis funkcijų klasės $\mathcal{G}$ apibrėžimu, $F[\varphi] \in \mathcal{G}$. $\triangleright$

P a s t a b a . Šioje teoremoje erdvės $\mathcal{G}$ negalima pakeisti $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Iš tikrųjų funkcijos $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ Furjė transformacija $F[\varphi]$ nėra finiti funkcija (jeigu tik $\varphi \neq 0$). Todėl $F[\varphi] \notin \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Tegu $\varphi \in \mathcal{G}$. Tada funkcijos φ atvirkštinė Furjė transformacija apibrėžiama formule

$$F^{-1}[\varphi](x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varepsilon^{-i\xi x} \varphi(\xi)\, d\xi. \tag{7.58}$$

---

[3]Kartais Furjė transformacija apibrėžiama ir žymima šiek tiek kitaip, pvz.:

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{i\xi x}\, dx \quad \text{arba} \quad \widehat{\varphi}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-2\pi i \xi x}\, dx.$$

Šiame skyrelyje Furjė transformacijos operatorių žymėsime raide F ir apibrėšime (7.55) formule. Taip pat Furjė transformacija yra apibrėžiama [21], [49], [51]–[53] knygose ir kompiuterinės algebros sistemoje MACSYMA.

Funkcijos $\varphi \in \mathcal{G}$ Furjė transformacija $F[\varphi]$ yra integruojama ir tolygiai diferencijuojama erdvėje $\mathbb{R}^n$ funkcija. Todėl iš bendros Furjė transformacijos teorijos išplaukia, kad

$$\varphi = F^{-1}[F[\varphi]] = F[F^{-1}[\varphi]], \quad \forall \varphi \in \mathcal{G}. \tag{7.59}$$

Be to,

$$F^{-1}[\varphi] = \frac{1}{(2\pi)^n} F[\varphi_{-E}];$$

čia $\varphi_{-E}(x) = \varphi(-x)$. Todėl galime tvirtinti, kad transformacija f yra abipusiškai vienareikšmė ir $F[\mathcal{G}] = \mathcal{G}$.

7.9 teorema. *Furjė transformacija yra tolydus operatorius erdvėje* $\mathcal{G}$.

$\triangleleft$ Tegu $\varphi_k \to 0$, erdvėje $\mathcal{G}$, kai $k \to \infty$. Tada remdamiesi (7.57) nelygybe, gauname

$$|\xi^\beta D^\alpha F[\varphi_k](\xi)| \le \int\limits_{\mathbb{R}^n} |D^\beta(x^\alpha \varphi_k(x))|\, dx \le$$

$$\le \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |D^\beta(x^\alpha \varphi_k(x))|(1 + |x|)^{n+1} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{(1 + |x|)^{n+1}} \rightrightarrows 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

kai $k \to \infty$. Pagal konvergavimo erdvėje $\mathcal{G}$ apibrėžimą, $F[\varphi_k] \to 0$ erdvėje $\mathcal{G}$, kai $k \to \infty$. $\triangleright$

Tegu $f \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R}^n)$. Tada jos Furjė transformacija $F[f]$ yra aprėžta

$$|F[f](\xi)| \le \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx < \infty, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Be to, funkcija $F[f]$ yra tolydi (žr. [18]). Todėl formulė

$$\langle F[f], \varphi \rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n} F[f](\xi)\varphi(\xi)\, d\xi, \quad \varphi \in \mathcal{G},$$

apibrėžia reguliariąją apibendrintąją funkciją $F[f] \in \mathcal{G}^*$. Pagal Fubinio teoremą integralas

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} F[f](\xi)\varphi(\xi)\, d\xi = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{i\xi x}\, dx \Big) \varphi(\xi)\, d\xi =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi) e^{i\xi x}\, d\xi dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) F[\varphi](x)\, dx$$

Todėl

$$\langle F[f], \varphi \rangle = \langle f, F[\varphi] \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{G}. \tag{7.60}$$

A p i b r ė ž i m a s. Apibendrintąją funkciją $F[f] \in \mathcal{G}^*$, apibrėžtą (7.60) formule, vadinsime apibendrintosios funkcijos $f \in \mathcal{G}^*$ Furjė transformacija.

Patikrinsime, kad šis apibrėžimas yra korektiškas, t.y. dešinioji (7.60) lygybės pusė yra tiesinis tolydus funkcionalas erdvėje $\mathcal{G}$. Pagal 7.8 teoremą $F[\varphi] \in \mathcal{G}$, $\forall\varphi \in \mathcal{G}$. Todėl $\langle f,\, F[\varphi]\rangle$ yra tiesinis funkcionalas. Tegu $\varphi_k \to 0$ erdvėje $\mathcal{G}$, kai $k \to \infty$. Pagal 7.9 teoremą $F[\varphi_k] \to 0$ erdvėje $\mathcal{G}$, kai $k \to \infty$. Kadangi $f \in \mathcal{G}^*$, tai $\langle f,\, F[\varphi_k]\rangle \to 0$, kai $k \to \infty$. Taigi nagrinėjamas funkcionalas yra tolydus.

7.9 lema. *Furjė transformacijos operatorius $F : \mathcal{G}^* \to \mathcal{G}^*$ yra tiesinis ir tolydus.*

◁ Tiesiškumas yra akivaizdus. Įrodysime tolydumą. Tegu $f_k \to 0$ erdvėje $\mathcal{G}^*$, kai $k \to \infty$. Remiantis (7.60) formule,

$$\langle F[f_k],\, \varphi\rangle = \langle f_k,\, F[\varphi]\rangle \to 0, \quad \forall\varphi \in \mathcal{G},$$

kai $k \to \infty$. Pagal apibrėžimą tai ir reiškia, kad $F[f_k] \to 0$ erdvėje $\mathcal{G}^*$, kai $k \to \infty$. Taigi Furjė transformacija $F : \mathcal{G}^* \to \mathcal{G}^*$ yra tolydi. ▷

A p i b r ė ž i m a s. Apibendrintąją funkciją $F^{-1}[f] \in \mathcal{G}^*$, apibrėžiamą formule

$$\left\langle F^{-1}[f], \varphi\right\rangle = \frac{1}{(2\pi)^n}\left\langle F[f], \varphi_{-E}\right\rangle, \quad \forall\varphi \in \mathcal{G}, \tag{7.61}$$

vadinsime apibendrintosios funkcijos $f \in \mathcal{G}^*$ atvirkštine Furjė transformacija $F^{-1}[f]$.

7.10 lema. *Atvirkštinė Furjė transformacija $F^{-1} : \mathcal{G}^* \to \mathcal{G}^*$ yra tolydi ir*

$$F^{-1}[F[f]] = F[F^{-1}[f]] = f, \quad f \in \mathcal{G}^*. \tag{7.62}$$

◁ Tegu $\varphi \in \mathcal{G}$. Tada

$$\left\langle F^{-1}[F[f]],\, \varphi\right\rangle = \frac{1}{(2\pi)^n}\left\langle F[F[f]],\, \varphi_{-E}\right\rangle = \frac{1}{(2\pi)^n}\left\langle F[f],\, F[\varphi_{-E}]\right\rangle =$$

$$= \left\langle F[f],\, F^{-1}[\varphi]\right\rangle = \left\langle f,\, F[F^{-1}[\varphi]]\right\rangle = \langle f,\, \varphi\rangle =$$

$$= \left\langle f,\, F^{-1}[F[\varphi]]\right\rangle = \left\langle F^{-1}[f],\, F[\varphi]\right\rangle = \left\langle F[F^{-1}[f]],\, \varphi\right\rangle, \quad \forall\varphi \in \mathcal{G}.$$

Sulyginę šių lygybių kairę ir dešinę puses, gausime (7.62) formulę. Kartu įrodėme, kad kiekviena apibendrinta funkcija $f \in \mathcal{G}^*$ yra apibendrintos funkcijos $\psi = F^{-1}[f] \in \mathcal{G}^*$ Furjė transformacija ir, jeigu $F[f] = 0$, tai $f = 0$. Iš (7.61) išplaukia F^{-1} tolydumas. ▷

7.10 teorema. *Tegu $f \in \mathcal{G}^*$. Tada:*

1. $D^\alpha F[f] = F[I^\alpha f], \quad \forall\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n).$

2. $F[D^\alpha f] = I^{-\alpha} F[f], \quad \forall\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n);$

čia $I(x) = ix$ ir $I^{-1}(x) = -ix$.

◁ Įrodysime pirmąjį teoremos teiginį. Tegu $\varphi \in \mathcal{G}$. Tada

$$\langle D^\alpha F[f],\, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\,\langle F[f],\, D^\alpha\varphi\rangle = (-1)^\alpha\,\langle f,\, F[D^\alpha\varphi]\rangle =$$
$$= (-1)^{|\alpha|}\,\big\langle f,\, I^{-\alpha}F[\varphi]\big\rangle = \langle I^\alpha f,\, F[\varphi]\rangle = \langle F[I^\alpha f],\, \varphi\rangle\,.$$

Iš čia išplaukia (1) formulė.

Įrodysime antrąjį teoremos teiginį. Pagal Furjė transformacijos apibrėžimą

$$\langle F[D^\alpha f],\, \varphi\rangle = \langle D^\alpha f,\, F[\varphi]\rangle = (-1)^{|\alpha|}\,\langle f,\, D^\alpha F[\varphi]\rangle =$$
$$= (-1)^{|\alpha|}\,\langle f,\, F[I^\alpha\varphi]\rangle = (-1)^{|\alpha|}\,\langle F[f],\, I^\alpha\varphi\rangle = \big\langle I^{-\alpha}F[f],\, \varphi\big\rangle\,,$$

$\forall\varphi \in \mathcal{G}$. Iš čia išplaukia (2) formulė. ▷

7.11 teorema. *Tegu A yra neišsigimusi $n \times n$ matrica, $T\,x = A\,x + a$, a – fiksuotas erdvėje $\mathbb{R}^n$ vektorius ir $f \in \mathcal{G}$. Tada*

$$F[f_T] = \frac{1}{|\det A\,|}F[f]_{T^*}; \tag{7.63}$$

čia $T^* = (T^{-1})'$.

4 išvada *Tegu $A = E$ yra vienetinė matrica. Tada operatorius $T\,x = x + a$ yra poslinkio operatorius ir*

$$F[f_a](\xi) = e^{-ia\xi}F[f](\xi).$$

7.12 teorema. *Tegu f ir $g \in \mathcal{G}^*$. Tada:*

1. *Apibendrintų funkcijų f ir g tiesioginės sandaugos Furjė transformacija*

$$F[f \times g] = F[f] \times F[g].$$

2. *Jeigu viena iš funkcijų f, g yra finiti, tai teisinga formulė*

$$F[f * g] = F[g]F[f]. \tag{7.64}$$

Pastarųjų dviejų teoremų įrodymą galima rasti [52] knygoje.

P a v y z d ž i a i:

1. Tegu $\delta_a(x) = \delta(x + a)$. Patikrinsime, kad

$$F[\delta_a](\xi) = e^{-i\xi a}. \tag{7.65}$$

Iš pradžių pastebėsime, kad

$$\langle F[\delta],\, \varphi\rangle = \langle \delta,\, F[\varphi]\rangle = F[\varphi](0) = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi(\xi)\,d\xi = \langle 1,\, \varphi\rangle\,, \quad \forall\varphi \in \mathcal{G}.$$

Todėl

$$F[\delta] = 1. \tag{7.66}$$

Remiantis 7.11 teoremos išvada,

$$F[\delta_a](\xi) = e^{-i\xi a}F[\delta](\xi) = e^{-i\xi a}.$$

2. Iš (7.66) išplaukia, kad

$$\delta = F^{-1}[1] = \frac{1}{(2\pi)^n} F[1].$$

Todėl

$$F[1] = (2\pi)^n \delta(\xi). \tag{7.67}$$

3. Tegu θ yra Hevisaido funkcija ir $\theta_-(x) = \theta(-x)$, $x \in \mathbb{R}^1$. Tada

$$F[\theta](\xi) = \pi\delta(\xi) + i\mathcal{P}\frac{1}{\xi}, \quad F[\theta_-(\xi)] = \pi\delta(\xi) - i\mathcal{P}\frac{1}{\xi}. \tag{7.68}$$

Tegu $\psi(x) = \theta(x)e^{-ax}$, $a > 0$. Tada

$$F[\psi](\xi) = \int_0^\infty e^{-ax+ix\xi}\,dx = \frac{i}{\xi + ia}.$$

Tiesiogiai galima įsitikinti, kad $\theta(x)e^{-ax} \to \theta(x)$ erdvėje $\mathcal{G}^*$, kai $a \to +0$. Kadangi Furjė trasformacija yra tolydus erdvėje $\mathcal{G}^*$ operatorius, tai artindami $a \to 0$ gausime

$$F[\theta](\xi) = \frac{i}{\xi + i0}. \tag{7.69}$$

Iš čia bei (7.6) Sochotskio formulės išplaukia pirmoji iš (7.68). Antroji įrodoma analogiškai.

Apibendrintųjų funkcijų Furjė transformaciją galima panaudoti diferencialinių operatorių fundamentaliesiems sprendiniams rasti. Tegu $A(D)$ yra m-osios eilės diferencialinis operatorius su pastoviaisiais koeficientais, t.y.

$$A(D) = \sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha D^\alpha.$$

7.13 teorema. *Apibendrintoji funkcija $\mathcal{E} \in \mathcal{G}^*$ yra operatoriaus $A(D)$ fundamentalusis sprendinys tada ir tik tada, kai jos Furjė transformacija $F[\mathcal{E}]$ tenkina lygtį*

$$A^*(I)F[\mathcal{E}] = 1; \tag{7.70}$$

čia

$$A^*(I) = \sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha I^{-\alpha}$$

ir (7.70) lygybė suprantama kaip lygybė erdvėje $\mathcal{G}^*$.

$\triangleleft$ Tegu $\mathcal{E} \in \mathcal{G}^*$ yra fundamentalusis operatoriaus $A(D)$ sprendinys, t.y. tenkina lygtį

$$A(D)\mathcal{E} = \delta.$$

Taikydami Furjė transformaciją abiem šios lygybės pusėms, gausime

$$F[A(D)\mathcal{E}] = F[\delta] = 1. \tag{7.71}$$

Tačiau

$$\begin{aligned} F[A(D)\mathcal{E}] &= F\Big[\sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha D^\alpha \mathcal{E}\Big] = \sum_{|\alpha|=0}^{m} F[D^\alpha \mathcal{E}] = \\ &= \sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha I^{-\alpha} F[\mathcal{E}] = A^*(I)F[\mathcal{E}]. \end{aligned} \tag{7.72}$$

Iš (7.71) ir (7.72) išplaukia lygybė (7.70).

Tegu $\mathcal{E} \in \mathcal{G}^*$ ir tenkina (7.70) lygtį. Remdamiesi (7.72), gauname, kad $\mathcal{E}$ tenkina (7.71) lygtį. Taikydami abiem šios lygties pusėms atvirkštinę Furjė transformaciją, gausime (7.70). $\triangleright$

Remiantis įrodyta teorema, fundamentaliojo sprendinio galima ieškoti sprendžiant algebrinę lygtį

$$PX = 1 \tag{7.73}$$

erdvėje $\mathcal{G}^*$; čia P yra n kintamųjų polinomas. Jeigu P^{-1} yra lokaliai integruojama erdvėje $\mathbb{R}^n$ funkcija, tai ją atitinkanti reguliarioji apibendrintoji funkcija P^{-1} yra (7.73) lygties sprendinys. Jeigu P^{-1} nėra lokaliai integruojama erdvėje $\mathbb{R}^n$ funkcija, tai išspręsti (7.73) lygtį apibendrintųjų funkcijų erdvėje yra gana sudėtinga. L. Hermanderis (L. Hőrmander) įrodė, kad (7.73) lygtis erdvėje $\mathcal{G}^*$ visuomet išsprendžiama, jeigu $P \not\equiv 0$.

Išsprendus (7.73) lygtį, dar reikia rasti sprendinio atvirkštinę Furjė transformaciją. Dažnai tai yra gana sunkus uždavinys.

P a v y z d y s. Tegu $n = 3$. Rasime fundamentalų Laplaso lygties sprendinį. Pagal apibrėžimą apibendrintoji funkcija $\mathcal{E}$ yra fundamentalusis Laplaso lygties sprendinys, jeigu ji tenkina lygtį

$$\Delta\mathcal{E} = \delta.$$

Paveikę abi šios lygties puses Furjė transformacija, gausime

$$PF[\mathcal{E}] = 1;$$

čia $P(\xi) = -|\xi|^2$. Reiškinys $-|\xi|^{-2}$ yra lokaliai integruojamas erdvėje $\mathbb{R}^3$. Todėl $F[\mathcal{E}](\xi) = -|\xi|^{-2}$ ir

$$\mathcal{E} = F^{-1}[P^{-1}].$$

Pagal apibrėžimą

$$\big\langle F^{-1}[P^{-1}], \varphi\big\rangle = \frac{1}{(2\pi)^3}\big\langle F[P^{-1}], \varphi_{-E}\big\rangle = \frac{1}{(2\pi)^3}\big\langle P^{-1}, F[\varphi_{-E}]\big\rangle =$$

$$-\frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{\mathbb{R}^3}|x|^{-2}\int\limits_{\mathbb{R}^3}e^{ix\xi}\varphi(-\xi)\,d\xi dx.$$

Integralas

$$\int\limits_{|x|<R}\frac{e^{ix\xi}}{|x|^2}\,dx=\int\limits_0^R\int\limits_0^\pi\int\limits_0^{2\pi}\frac{e^{i|\xi|\rho\cos\alpha}}{\rho^2}\rho^2\sin\alpha\,d\beta d\alpha d\rho=$$

$$2\pi\int\limits_0^R\int\limits_{-1}^1 e^{i|\xi|\rho t}\,dtd\rho=\frac{4\pi}{|\xi|}\int\limits_0^R\frac{\sin|\xi|\rho}{\rho}\,d\rho.$$

Be to,

$$\int\limits_0^\infty\frac{\sin|\xi|\rho}{\rho}\,d\rho=\frac{\pi}{2,}\quad |\xi|\neq 0.$$

Todėl integralas

$$\int\limits_{|x|<R}\frac{e^{ix\xi}}{|x|2}\,dx\to\frac{2\pi^2}{|\xi|}$$

erdvėje $\mathcal{G}^*$, kai $R\to\infty$, ir

$$\left\langle F^{-1}[P^{-1}],\varphi\right\rangle=-\frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{2\pi^2}{|\xi|}\varphi(-\xi)\,d\xi=$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{|\xi|}\varphi(\xi)\,d\xi=\langle\mathcal{E},\varphi\rangle\,,\quad\forall\varphi\in\mathcal{G}.$$

Taigi

$$\mathcal{E}(\xi)=F^{-1}[P^{-1}](\xi)=-\frac{1}{4\pi|\xi|}.$$

7.14. UŽDAVINIAI

1. Tegu $n = 1$ ir:

   1.1. $f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon}, & \text{kai } |x| \le \varepsilon, \\ 0, & \text{kai } |x| > \varepsilon; \end{cases}$

   1.2. $f_\varepsilon(x) = \dfrac{1}{x} \sin \dfrac{x}{\varepsilon}$;

   1.3. $f_\varepsilon(x) = \dfrac{\varepsilon}{\pi x^2} \sin^2 \dfrac{x}{\varepsilon}$.

   Įrodykite, kad $f_\varepsilon(x) \to \delta(x)$, kai $\varepsilon \to +0$.

2. Tegu $n \ge 1$, $f_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} a(x/\varepsilon)$, $a \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $a(x) \ge 0$ ir

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} a(x)\, dx = 1.$$

   Įrodykite, kad $f_\varepsilon(x) \to \delta(x)$, kai $\varepsilon \to +0$.

3. Tegu $n = 1$ ir:

   3.1. $f_k(x) = \sqrt{\dfrac{k}{\pi}} e^{-kx^2}$;

   3.2. $f_k(x) = \dfrac{1}{\pi} \dfrac{k}{e^{kx} + e^{-kx}}$;

   3.3. $f_k(x) = \dfrac{1}{2} k e^{-k|x|}$.

   Įrodykite, kad $f_k(x) \to \delta(x)$, kai $k \to \infty$.

4. Tegu $n = 1$ ir

$$\left\langle \mathcal{P}\frac{\cos kx}{x}, \varphi \right\rangle = \mathrm{Vp} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos kx}{x} \varphi(x)\, dx.$$

   Įrodykite, kad $\mathcal{P}\dfrac{\cos kx}{x} \to 0$ erdvėje $\mathcal{D}^*(\mathbb{R}^1)$, kai $k \to \infty$.

5. Įrodykite, kad:

   5.1. $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{e^{ixt}}{x - i0} = 2\pi i \delta(x)$.

   5.2. $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{e^{ixt}}{x + i0} = 0$.

   5.3. $\lim\limits_{t \to +\infty} t\theta(t) e^{ixt} = i\delta(x)$.

6. Raskite apibendrintųjų funkcijų išvestines:

   6.1. $f(x) = \begin{cases} x, & \text{kai } x \geq 0, \\ 0, & \text{kai } x < 0. \end{cases}$

   6.2. $f(x) = x \operatorname{sign} x$.

   6.3. $f(x) = \theta(x) \cos x$.

   6.4. $f(x) = \begin{cases} 1/\varepsilon, & \text{kai } |x| \leq \varepsilon/2, \\ 0, & \text{kai } |x| > \varepsilon/2. \end{cases}$

7. Įrodykite lygybes:

   7.1. $\Big(\dfrac{d}{dx} + \lambda\Big)\theta(x)e^{-\lambda x} = \delta(x)$.

   7.2. $\Big(\dfrac{d^2}{dx^2} + \omega^2\Big)\dfrac{\theta(x)\sin\omega x}{\omega} = \delta(x)$.

   7.3. $\delta(x^2 - a^2) = \dfrac{1}{2a}[\delta(x-a) + \delta(x+a)]$.

   7.4. $\delta(\sin x) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - k\pi)$.

   7.5. $\dfrac{1}{2\pi} \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx} = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2k\pi)$.

   7.6. $|\sin x|'' + |\sin x| = 2 \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - k\pi)$.

8. Įrodykite, kad apibendrintos funkcijos yra šių diferencialinių lygčių sprendiniai:

   8.1. $y = c_1 + c_2\theta(x) + \ln|x|, \quad xy' = 1$.

   8.2. $y = c_1 + c_2\theta(x) + c_3 - \mathcal{P}\dfrac{1}{x}, \quad xy' = \mathcal{P}\frac{1}{x}$.

   8.3. $y = c_1 + c_2\theta(x) + c_3\delta(x) - \mathcal{P}\dfrac{1}{x}, \quad x^2y' = 1$.

   8.4. $y = c_1 + c_2x + \theta(x)x, \quad y'' = \delta(x)$.

   8.5. $y = c_1 + c_2 + c_3\theta(x+1) + c_4\theta(x+1)(x+1), \quad (x+1)^2y'' = 0$.

9. Įrodykite formules:

   9.1. $\delta(x-a) * \delta(x-b) = \delta(x-a-b)$.

   9.2. $\theta(x) * \theta(x) = \theta(x)x$.

   9.3. $\theta(x) * \theta(x)x^2 = \theta(x)x^3/3$.

   9.4. $\varepsilon^{-ax^2} * xe^{-ax^2} = \sqrt{\dfrac{\pi}{8a}}xe^{-ax^2/2}, \quad a > 0$.

10. Tegu $\alpha > 0$, $f_\alpha(x) = \dfrac{1}{\alpha\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}}$. Įrodykite, kad $f_\alpha * f_\beta = f_{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$.

11. Tegu $\alpha > 0$, $f_\alpha(x) = \dfrac{\alpha}{\pi(x^2+\alpha^2)}$. Įrodykite, kad $f_\alpha * f_\beta = f_{\alpha+\beta}$.

12. Raskite apibendrintosios funkcijos f Furjė transformaciją šiais atvejais:

    12.1. $f(x) = \dfrac{1}{2}[\delta(x-a)+\delta(x+a)]$.

    12.2. $f(x) = \delta^{(k)}(x), \quad k = 1,2,\dots$

    12.3. $f(x) = \theta(x-a)$.

    12.4. $f(x) = \operatorname{sign}(\mathrm{x})$.

    12.5. $f(x) = \mathcal{P}\dfrac{1}{x}$.

    12.6. $f(x) = |x|$.

    12.7. $f(x) = x^k\theta(x), \quad k = 1,2,\dots$

    12.8. $f(x) = |x|^k, \quad k = 2,3,\dots$

13. Tegu $n = 1$. Įrodykite formules:

    13.1. $F[f](\xi) = \dfrac{1}{a+i\xi}$, kai $f(x) = \theta(-x)e^{ax}, \quad a > 0.$

    13.2. $F[f](\xi) = \dfrac{2a}{a^2+\xi^2}$, kai $f(x) = e^{-a|x|} \quad a > 0.$

    13.3. $F[f](\xi) = 2\pi e^{-a|\xi|}$, kai $f(x) = \dfrac{2a}{a^2+x^2} \quad a > 0.$

    13.4. $F[f](\xi) = 2\dfrac{\sin R\xi}{\xi}$, kai $f(x) = \theta(R-|x|)$.

    13.5. $F[f](\xi) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{a}e^{-\xi^2/4a^2}$, kai $f(x) = e^{-a^2x^2}, \quad a \neq 0.$

    13.6. $F[f](\xi) = \sqrt{\pi}e^{-\frac{i}{4}(\xi^2-\pi)}$, kai $f(x) = e^{ix^2}$.

    13.7. $F[f](\xi) = \sqrt{\pi}e^{\frac{i}{4}(\xi^2-\pi)}$, kai $f(x) = e^{-ix^2}$.

14. Įrodykite, kad erdvėje $\mathcal{G}^*(\mathbb{R}^n)$ yra teisingos formulės:

    14.1. $F[f](\xi) = (2i)^n(-i)^{|\alpha|}D^\alpha\delta(\xi)$, kai $f(x) = x^\alpha$.

    14.2. $F[f](\xi) = (-i\xi)^\alpha$, kai $f(x) = D^\alpha\delta(x)$.

    14.3. $F[f](\xi) = 2\pi\dfrac{\sin R|\xi|}{|\xi|}$, kai $f(x) = \dfrac{\theta(R-|x|)}{\sqrt{R^2-|x|^2}}$, $n = 2$.

15. Tegu δ_{S_R} yra paprastojo sluoksnio sferoje $S_R = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = R\}$ apibendrintoji funkcija, t.y.

$$\langle \delta_{S_R}, \varphi\rangle = \int\limits_{S_R} \varphi(x)\, dS_x, \quad \varphi \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^3).$$

Įrodykite, kad

$$F[\delta_{S_R}](\xi) = 4\pi R\frac{\sin R|\xi|}{|\xi|}.$$

16. Raskite diferencialinių operatorių fundamentaliuosius sprendinius:

16.1. $\frac{d^2}{dx^2}+3\frac{d}{dx}+2.$ 16.2. $\frac{d^2}{dx^2}-4\frac{d}{dx}+5.$

16.3. $\frac{d^3}{dx^3}-a^3.$ 16.4. $\frac{d^3}{dx^3}-3\frac{d^2}{dx^2}+2\frac{d}{dx}.$

16.5. $\frac{d^4}{dx^4}-a^4.$ 16.6. $\frac{d^4}{dx^4}-2\frac{d^2}{dx^2}+1.$

17. Tegu $n=2$. Įrodykite, kad funkcija $\mathcal{E}(x)=\frac{1}{8\pi}|x|^2\ln|x|$ yra biharmoninio operatoriaus Δ^2 fundamentalusis sprendinys.

18. Įrodykite, kad funkcija $\mathcal{E}(x,t)=-\frac{i\theta(t)}{2\sqrt{\pi t}}e^{i\left(\frac{x^2}{4t}-\frac{\pi}{4}\right)}$ yra Šrėdingerio operatoriaus $i\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ fundamentalusis sprendinys.

19. Tegu $n=2$. Įrodykite, kad funkcija $\mathcal{E}(x,t)=\frac{\theta(at-|x|)}{2\pi a\sqrt{a^2t^2-|x|^2}}$ yra bangavimo operatoriaus $\Box_a=\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\Delta$ fundamentalusis sprendinys.

20. Įrodykite, kad funkcija $\mathcal{E}(x,t)=\frac{\theta(t)}{4\pi a^2t}\delta_{S_{at}}(x)$ yra trimačio bangavimo operatoriaus $\Box_a=\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\Delta$ fundamentalusis sprendinys. Čia $\delta_{S_{at}}$ – paprastojo sluoksnio sferoje $S_{at}=\{x\in\mathbb{R}^3:|x|=at\}$ apibendrintoji funkcija, t.y.

$$\langle\delta_{S_{at}},\varphi\rangle=\int\limits_{S_{at}}\varphi(x)\,dS_x,\quad \varphi\in\mathcal{G}(\mathbb{R}^4).$$

7.15. ATSAKYMAI

6.1. $f'(x) = \theta(x)$.

6.2. $f'(x) = \text{ sign (x)}$.

6.3. $f'(x) = \delta(x) - \theta(x)\sin(x)$.

6.4. $f'(x) = \varepsilon^{-1}\big(\delta(x+\varepsilon/2) - \delta(x-\varepsilon/2)\big)$.

12.1. $F[f](\xi) = \cos a\xi$.

12.2. $F[f](\xi) = (-i\xi)^k$.

12.3. $F[f](\xi) = \pi\delta(\xi) + ie^{ia\xi}\mathcal{P}\frac{1}{\xi}$.

12.4. $F[f](\xi) = 2i\mathcal{P}\frac{1}{\xi}$.

12.5. $F[f](\xi) = i\pi \operatorname{sign}\xi$.

12.6. $F[f](\xi) = 2\left(\mathcal{P}\frac{1}{\xi}\right)' = -2\mathcal{P}\frac{1}{\xi^2}$.

12.7. $F[f](\xi) = (-i)^k\left[\pi\delta(\xi) + i\mathcal{P}\frac{1}{\xi}\right]^{(k)}$.

12.8. $F[f](\xi) = (-i)^k 2\pi\delta^{(k)}(\xi)$, kai k – lyginis, ir
$F[f](\xi) = (-i)^{k-1}2\left(\mathcal{P}\frac{1}{\xi}\right)^{(k)}$, kai k – nelyginis.

16.1. $\mathcal{E}(x) = \theta(x)(e^{-x} - e^{-2x})$.

16.2. $\mathcal{E}(x) = \theta(x)e^{2x}\sin x$.

16.3. $\mathcal{E}(x) = \dfrac{1}{3}a^{-2-ax/2}\theta(x)\big(e^{3ax/2} - \cos(a\sqrt{3}x/2) - \sqrt{3}\sin(a\sqrt{3}x/2)\big)$.

16.4. $\mathcal{E}(x) = \dfrac{1}{2}\theta(x)(1-e^2)^2$.

16.5. $\mathcal{E}(x) = \dfrac{1}{2}a^{-3}\theta(x)(\sinh ax) - \sin ax)$.

16.6. $\mathcal{E}(x) = \dfrac{1}{2}\theta(x)(x\cosh x - \sinh x)$.

8 SKYRIUS

Variaciniai metodai

Šiame skyriuje nagrinėsime variacinį paprastųjų bei elipsinių diferencialinių lygčių tyrimo metodą. Šio metodo idėja labai paprasta. Tarkime, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yra tolydi funkcija, F – funkcijos f pirmykštė funkcija, t.y. $F'(x) = f(x)$. Tada pagal žinomą analizės teoremą funkcijos F lokalaus ekstremumo taškai tenkina lygtį

$$f(x) = 0. \tag{8.1}$$

Kai F yra iškila funkcija, tai teisingas ir atvirkščias teiginys: (8.1) lygties sprendiniai yra funkcijos F lokalaus ekstremumo taškai (žr., pavyzdžiui, [23]). Todėl užuot sprendę (8.1) lygtį, galime ieškoti funkcijos F ekstremumo taškų. Šią įdėją apibendrinsime begalinio matavimo atveju. Tiksliau, vietoje (8.1) lygties nagrinėsime diferencialinę lygtį, kurioje nežinomasis yra funkcija iš begaliniamatės tiesinės erdvės. Tam tikrais atvejais diferencialinių lygčių apibendrintų sprendinių radimo uždavinys yra ekvivalentus atitinkamų netiesinių funkcionalų ekstremumo taškų radimo uždaviniui.

Šiame skyriuje dėstoma netiesinių funkcionalų, apibrėžtų normuotose erdvėse, ekstremumų taškų radimo teorija. Nagrinėjami pustolydžiai iš apačios funkcionalai, įrodomos teoremos apie nediferencijuojamų funkcionalų minimumo egzistavimą, nagrinėjamos funkcionalų išvestinės Gato ir Frešė prasme, dėstomi iškilųjų funkcionalų teorijos elementai, subgradiento ir subdiferencialo sąvokos. Pateikiami taikymo įvairioms diferencialinėms lygtims pavyzdžiai. Nagrinėjami konkretūs funkcionalų minimumo radimo metodai.

8.1. PUSTOLYDŽIAI IŠ APAČIOS FUNKCIONALAI

Tegu X yra normuota erdvė, $M \subset \mathrm{X}$, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ – išplėstinė realiųjų skaičių aibė, $f : \mathrm{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ – netiesinis funkcionalas. Pagrindinis variacinio skaičiavimo uždavinys funkcionalui f formuluojamas taip: rasti tokį elementą $u \in M$, kad

$$f(u) = \min_{v \in M} f(v). \tag{8.2}$$

Iš pirmo žvilgsnio atrodo, kad šį uždavinį galima spręsti taikant gerai žinomą teoremą (žr. [50]).

8.1 teorema. *Tegu $M \subset \mathrm{X}$ yra kompaktiškoji aibė ir f – tolydusis funkcionalas aibėje M. Tada egzistuoja (8.2) uždavinio sprendinys.*

Tačiau šios teoremos taikymas yra gana ribotas. Atkreipsime dėmesį, kad begalinio matavimo erdvėse kompaktiškosios aibės yra per ,,retos“. Jos neturi vidinių taškų. Be to, teisingas toks teiginys (žr. [33]).

8.1 lema. *Aibė* $\{u \in \mathrm{X} : \|u\|_{\mathrm{X}} \le 1\}$ *yra kompaktiška tada ir tik tada, kai erdvė* X *yra baigtiniamatė.*

Todėl natūralu atsisakyti aibės M kompaktiškumo sąlygos ir pakeisti ją silpnesne. Funkcionalo f tolydumo sąlyga taip pat yra per griežta. Pakanka reikalauti silpnesnės, pustolydumo iš apačios, sąlygos.

A p i b r ė ž i m a s. Funkcionalas $f : \mathrm{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ yra *pustolydis iš apačios* taške $u_0 \in M \subset X$, jeigu su kiekviena seka $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ iš M, $u_n \to u_0$, teisinga nelygybė

$$f(u_0) \le \varliminf_{n\to\infty} f(u_n). \tag{8.3}$$

Sakysime, funkcionalas f yra *pustolydis iš apačios aibėje* M*,* jeigu jis yra pustolydis iš apačios kiekviename aibės M taške.

A p i b r ė ž i m a s. Sakysime, funkcionalas $f : \mathrm{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ yra *silpnai pustolydis iš apačios* taške $u_0 \in M \subset X$, jeigu su kiekviena seka $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ iš M, $u_n \rightharpoonup u_0$, yra teisinga (8.3) nelygybė. Sakysime, funkcionalas f yra *silpnai pustolydis iš apačios aibėje* M*,* jeigu jis yra silpnai pustolydis iš apačios kiekviename aibės M taške.

Priminsime, kad skaičių sekos $\{x_n\}$ apatinė riba yra skaičius

$$\lim_{n\to\infty} \inf\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}.$$

Todėl ši riba kartais žymima $\liminf$. Konvergavimo, silpno konvergavimo, aibių uždarumo Banacho erdvėje sąvokos aptartos 1 skyriuje.

8.2 lema. *Tegu* X *yra normuota erdvė,* $M \subset \mathrm{X}$ *– uždara (silpnai uždara) aibė. Funkcionalas* $f : \mathrm{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ *yra pustolydis (silpnai pustolydis) iš apačios aibėje* M *tada ir tik tada, kai Lebego aibės*

$$E(a) = \{u : u \in M,\ f(u) \le a\}$$

yra uždaros (silpnai uždaros) $\forall a \in \overline{\mathbb{R}}$.

◁ Tegu f yra pustolydis iš apačios funkcionalas. Imkime seką $\{u_n\} \subset E(a)$, $u_n \to u_0 \in M$. Pagal apibrėžimą teisinga (8.3) nelygybė. Kadangi $u_n \in E(a)$, tai $f(u_n) \le a$ ir $\varliminf_{n\to\infty} f(u_n) \le a$. Iš čia ir (8.3) gauname, $f(u_0) \le a$. Todėl $u_0 \in E(a)$. Vadinasi, $E(a)$ – uždara aibė.

Įrodysime atvirkštinį teiginį. Tegu $E(a)$ yra uždara aibė $\forall a \in \overline{\mathbb{R}}$. Reikia įrodyti, kad f – pustolydis iš apačios. Tarkime priešingai: $u_n \to u_0 \in M$ ir $\varliminf_{n\to\infty} f(u_n) < f(u_0)$. Parinkime tokį skaičių a, kad

$$\varliminf_{n\to\infty} f(u_n) < a < f(u_0). \tag{8.4}$$

Pagal apatinės ribos apibrėžimą iš sekos $\{u_n\}$ galima išskirti tokį posekį $\{u_{n_k}\}$, kad $f(u_{n_k}) < a$. Todėl $u_{n_k} \in E(a)$ ir $u_{n_k} \to u_0$. Kadangi $E(a)$ yra uždara aibė, tai $u_0 \in E(a)$ ir $f(u_0) \le a$. Gauta prieštara įrodo atvirkštinį teiginį.

Aibės M silpno uždarumo ir funkcionalo f silpno pustolydumo atvejis įrodomas visiškai analogiškai. ▷

8.3 lema. *Tegu* X *– normuota erdvė. Funkcionalas* $f : \mathrm{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ *yra pustolydis (silpnai pustolydis) iš apačios tada ir tik tada, kai jo viršgrafikis* $\mathrm{epi\,f}$ *yra uždara (silpnai uždara) aibė.*

◁ Tegu f yra pustolydis iš apačios funkcionalas ir $\varphi(u,a) = f(u) - a$. Nesunku įsitikinti, kad teiginiai:

(a) f yra pustolydis iš apačios funkcionalas erdvėje X;

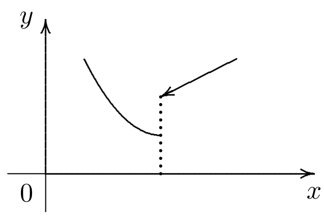
(b) φ yra pustolydi iš apačios funkcija erdvėje $\mathrm{X} \times \mathbb{R}$

yra ekvivalentūs. Funkcijos φ Lebego aibė $E(r) = \{(u,a) : f(u) - a \leq r\}$ yra viršgrafikio $\mathrm{epi\,f} = \{(\mathrm{u},\mathrm{a}) \in \mathrm{X} \times \mathbb{R} : \mathrm{f}(\mathrm{u}) \leq \mathrm{a}\}$ postūmis per vektorių $(0,r)$. Todėl aibė $E(r)$ yra uždaroji tada ir tik tada, kai $\mathrm{epi\,f}$ yra uždaroji aibė. Remiantis 8.2 lema, galima tvirtinti, kad funkcionalas f yra pustolydis iš apačios tada ir tik tada, kai jo viršgrafikis $\mathrm{epi\,f}$ yra uždaroji aibė. Antrasis lemos teiginys įrodomas analogiškai. ▷

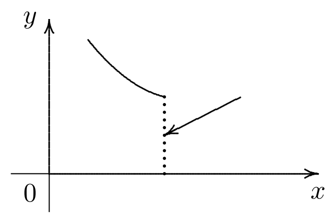
5 išvada *Tegu* f *yra iškilas funkcionalas. Tada pustolydumo iš apačios ir silpno pustolydumo iš apačios sąvokos yra ekvivalenčios.*

◁ Įrodymas išplaukia iš 1.22 teoremos ir 8.3 lemos. ▷

6 išvada *Tegu* X *yra Banacho erdvė,* $M \subset \mathrm{X}$ *– iškila aibė,* f *– tolydus iškilas funkcionalas. Tada aibėje* M *jis yra silpnai pustolydis iš apačios.*



8.1 pav.



8.2 pav.

P a v y z d ž i a i:

1. Funkcija, pavaizduota 8.1 paveikslėlyje, yra pustolydi iš apačios, o 8.2 paveikslėlyje pavaizduota funkcija nėra pustolydi iš apačios. Pirmu atveju funkcijos minimumo radimo uždavinys turi sprendinį, o antruoju – ne.

2. Bet kuris tiesinis, tolydus funkcionalas $f \in \mathrm{X}^*$ yra silpnai pustolydis iš apačios (nes tiesinis funkcionalas yra iškilas).

3. Norma Banacho erdvėje X yra silpnai pustolydis iš apačios funkcionalas, t.y. $\|u_0\|_{\mathrm{X}} \leq \varliminf\limits_{n\to\infty} \|u_n\|_{\mathrm{X}}$, jeigu tik $u_n \rightharpoonup u_0$. Norint tuo įsitikinti, pakanka pastebėti, kad norma yra iškilas funkcionalas, ir pasinaudoti Banacho–Šteinhauzo teorema (žr. 1.14).

8.4 lema. *Tegu* $f : \mathrm{X} \to (-\infty, \infty]$*,* $f \not\equiv \infty$ *– iškilas pustolydis iš apačios funkcionalas. Tada egzistuoja* $g \in \mathrm{X}^*$ *ir* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tokie, kad*

$$f(u) \geq \langle g, u\rangle + \alpha, \qquad \forall u \in \mathrm{X}. \tag{8.5}$$

◁ Tegu $u \in \operatorname{dom} \mathrm{f}$, $a < f(u)$. Tada taškas (u, a) nepriklauso $\operatorname{epi} \mathrm{f}$. Aibė $\operatorname{epi} \mathrm{f}$ yra iškiloji ir uždaroji. Pagal Hano–Banacho teoremą (žr. 1.11) erdvėje $\mathrm{X} \times \mathbb{R}$ galima atskirti viršgrafikį $\operatorname{epi} \mathrm{f}$ ir tašką (u, a) hiperplokštuma

$$\Pi = \{(u, b) \in \mathrm{X} \times \mathbb{R} : \langle h, u\rangle + \beta b = \gamma\}, \quad h \in \mathrm{X}^*, \quad \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Pastebėsime, kad skaičius $\beta \neq 0$ (jeigu skaičius β būtų lygus nuliui, tai taškas (u, a) gulėtų plokštumoje Π ir gautume prieštarą). Be to, jo ženklą galima pasirinkti laisvai, nes hiperplokštumos Π lygtį visada galima perrašyti taip:

$$\Pi = \{(u, b) \in \mathrm{X} \times \mathbb{R} : \langle -h, u\rangle + (-\beta) b = (-\gamma)\}, \quad -h \in \mathrm{X}^*, \quad \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Tarkime, $\beta > 0$. Laisvai pasirinkime elementą $u \in \mathrm{X}$ ir skaičių b tokį, kad taškas (u, b) būtų tarp plokštumos Π ir viršgrafikio $\operatorname{epi} \mathrm{f}$, t.y.

$$f(u) \geq b \quad , \quad \langle h, u\rangle + \beta b - \gamma \geq 0.$$

Iš šių nelygybių išplaukia, kad

$$f(u) \geq -\frac{1}{\beta}\langle h, u\rangle + \frac{1}{\beta}\gamma.$$

Pažymėję $g = -h/\beta$, $\alpha = \gamma/\beta$, gausime (8.5) nelygybę. ▷

8.2. NEDIFERENCIJUOJAMŲ FUNKCIONALŲ MINIMUMAS

Tegu X yra Banacho erdvė, $M \subset \mathrm{X}$ – netuščia aibė, $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ – netiesinis funkcionalas. Nagrinėsime uždavinį: rasti elementą $u \in M$ tokį, kad

$$f(u) = \inf_{v \in M} f(v). \tag{8.6}$$

A p i b r ė ž i m a s. Sakysime, aibė $M \subset \mathrm{X}$ yra silpnai kompaktinė, jeigu iš bet kokios jos elementų sekos $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ galima išskirti posekį $\{u_{n_k}\}$, silpnai konverguojantį į kurį nors aibės M elementą.

8.2 teorema. (pagrindinė var. sk. teorema) *Tegu X yra Banacho erdvė, $M \subset \mathrm{X}$ – silpnai kompaktinė aibė, $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ – silpnai pustolydis iš apačios funkcionalas. Tada egzistuoja (8.6) uždavinio sprendinys.*

$\lhd$ Tegu $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$ yra *minimizuojanti seka*, t.y.

$$\lim_{n \to \infty} f(u_n) = \inf_{v \in M} f(v). \tag{8.7}$$

Kadangi aibė M yra silpnai kompaktinė, tai egzistuoja toks posekis $\{u_{n_k}\}$ ir toks elementas $u \in M$, kad $u_{n_k} \rightharpoonup u$. Iš (8.3) ir (8.7) gauname

$$f(u) \leq \varliminf_{k \to \infty} f(u_{n_k}) = \lim_{k \to \infty} f(u_{n_k}) = \inf_{v \in M} f(v). \tag{8.8}$$

Pagal tikslaus apatinio rėžio apibrėžimą

$$f(u) \geq \inf_{v \in M} f(v). \tag{8.9}$$

Iš (8.8) ir (8.9) išplaukia (8.6). Teorema įrodyta. $\rhd$

7 išvada *Tarkime, erdvė X yra refleksyvi. Tada teorema išlieka teisinga, jeigu aibė M yra tik aprėžta ir silpnai uždara.*

8.3 teorema. *Tegu X yra refleksyvioji Banacho erdvė, $M \subset \mathrm{X}$ – silpnai uždara, neaprėžta aibė, $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ – silpnai pustolydis iš apačios funkcionalas. Be to, tegu*

$$f(u) \to +\infty, \tag{8.10}$$

kai $\|u\|_{\mathrm{X}} \to \infty$. Tada egzistuoja (8.6) uždavinio sprendinys.

$\lhd$ Kadangi $f(u) \to +\infty$, kai $\|u\|_{\mathrm{X}} \to \infty$, tai funkcionalas f yra aprėžtas iš apačios. Tegu $d > \inf_{v \in M} f(v)$. Parinkime tokį skaičių $R > 0$, kad $f(v) \geq d$, kai $\|v\|_{\mathrm{X}} \geq R$. Tokiems R aibė $M_R = \{v \in M : \|v\|_{\mathrm{X}} \leq R\}$ yra aprėžta ir silpnai uždara. Todėl egzistuoja toks elementas $u_R \in M_R$, kad

$$f(u_R) = \inf_{v \in M_R} f(v).$$

Akivaizdu, kad $f(u_{R+1}) \leq f(u_R)$. Todėl seka $\{\|u_R\|\}$ yra aprėžta, t.y. egzistuoja toks skaičus R_0, kad $\|u_R\|_{\mathrm{X}} \leq R_0$. Pagal 8.2 teoremos išvadą egzistuoja toks elementas $u \in M_{R_0}$, kad

$$f(u) = \inf_{v \in M_{R_0}} f(v) = \inf_{v \in M} f(v).$$

Teorema įrodyta. ▹

Kiekvienas tolydus ir iškilas funkcionalas yra silpnai pustolydis iš apačios (žr. 5 išvadą). Todėl iš 8.2 ir 8.3 teoremų išplaukia tokios išvados:

8 išvada *Tegu* X *yra refleksyvioji Banacho erdvė,* $M \subset \mathrm{X}$ *– uždara, aprėžta aibė,* $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ *– iškilas tolydus funkcionalas. Tada egzistuoja* (8.6) *uždavinio sprendinys.*

9 išvada *Tegu* X *yra refleksyvioji Banacho erdvė,* $M \subset \mathrm{X}$ *– uždara, neaprėžta aibė,* $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ *– iškilas, tolydus funkcionalas. Be to, tegu* $f(u) \to +\infty$, *kai* $\|u\|_{\mathrm{X}} \to \infty$. *Tada egzistuoja* (8.6) *uždavinio sprendinys.*

8.5 lema. *Tarkime, funkcionalas* $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ *yra griežtai iškilas. Tada* (8.6) *uždavinys negali turėti dviejų skirtingų sprendinių*.

◃Tarkime priešingai, egzistuoja du skirtingi (8.6) uždavinio sprendiniai $u_1, u_2 \in M$, t.y.

$$f(u_1) = \inf_{v \in M} f(v), \quad f(u_2) = \inf_{v \in M} f(v)$$

ir $u_1 \neq u_2$. Kadangi aibė M yra iškila, tai elementas

$$u = \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2 \in M.$$

Be to,

$$f(u) < \frac{1}{2}f(u_1) + \frac{1}{2}f(u_2) = \inf_{v \in M} f(v).$$

Tačiau ši nelygybė prieštarauja tikslaus apatinio rėžio apibrėžimui. Todėl padaryta prielaida yra neteisinga ir bet kokie du (8.6) uždavinio sprendiniai sutampa. ▹

8.3. NETIESINIŲ FUNKCIONALŲ DIFERENCIJAVIMAS

Tegu X yra Banacho erdvė, $f : X \to \mathbb{R}$ – netiesinis funkcionalas, u – fiksuotas taškas erdvėje X.

A p i b r ė ž i m a s. Jeigu su kiekvienu $v \in$ X egzistuoja riba

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(u+tv)-f(u)}{t},$$

tai šią ribą vadinsime funkcionalo f *pirmąja variacija* taške u ir žymėsime simboliu $\delta f(u, v)$.

Pagal apibrėžimą pirmoji variacija

$$\delta f(u,v) = \frac{d}{dt} f(u+tv)\Big|_{t=0}, \tag{8.11}$$

jeigu tik ši išvestinė egzistuoja. Ši formulė dažnai naudojama praktiškai skaičiuojant pirmąją funkcionalo variaciją.

Fiksuokime elementą u. Tada (bendru atveju) pirmoji variacija $\delta f(u, v)$ yra netiesinis funkcionalas $v \in$ X atžvilgiu. Nesunku įrodyti, kad $\delta f(u, v)$ yra homogeninė v atžvilgiu funkcija, t.y. teisinga formulė

$$\delta f(u, \lambda v) = \lambda \delta f(u, v), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Bet ji ne visuomet yra adityvi. Yra žinomi atvejai (žr. 1 pavyzdį), kai

$$\delta f(u, v_1 + v_2) \neq \delta f(u, v_1) + \delta f(u, v_2).$$

P a s t a b a . Funkcionalo pirmosios variacijos sąvoka susijusi su kryptinės išvestinės sąvoka. Funkcionalo f *kryptine išvestine* taške u pagal kryptį $v \in$ X, $\|v\|_{\mathrm{X}} = 1$ vadinsime ribą

$$\lim_{t\to +0} \frac{f(u+tv)-f(u)}{t}.$$

Nuo variacijos kryptinė išvestinė skiriasi tuo, kad elementas $v \in$ X yra fiksuotas vienetinis vektorius ir pagal t imama riba iš dešinės.

Fiksavus $u \in$ X, į funkcionalo pirmąją variaciją $\delta f(u, \cdot)$ galima žiūrėti kaip į funkcionalą, apibrėžtą erdvėje X. Bendru atveju toks funkcionalas gali būti netiesinis ir neaprėžtas.

A p i b r ė ž i m a s. Tegu $\delta f(u, \cdot)$ yra tiesinis funkcionalas. Tada reiškinį $\delta f(u, v)$ vadinsime funkcionalo f *Gato diferencialu*. Jeigu funkcionalas $\delta f(u, \cdot)$ dar yra tolydus, tai jį vadinsime *Gato išvestine* ir žymėsime $f'(u)$.

Taigi jeigu funkcionalas f taške $u \in$ X turi Gato išvestinę $f'(u)$, tai ji yra erdvės X* elementas ir

$$\delta f(u, v) = \langle f'(u), v\rangle, \quad \forall v \in \mathrm{X}.$$

Į netiesinio funkcionalo f Gato išvesinę galima žiūrėti kaip į atvaizdį (arba operatorių), kuris kiekvienam elementui $u \in$ X priskiria elementą $f'(u) \in$ X*.

8.4 teorema. (baigtinių pokyčių formulė) *Tarkime, taško u aplinkoje U funkcionalas $f : \mathrm{X} \to \mathbb{R}$ turi Gato išvestinę. Tada su kiekvienu $h \in \mathrm{X} : u + h \in U$ egzistuoja toks $\theta \in (0,1)$, kad*

$$f(u+h) - f(u) = \langle f'(u+\theta h),\, h\rangle\,. \tag{8.12}$$

◁ Tegu $\varphi(t) = f(u+th)$ yra kintamojo $t \in \mathbb{R}$ funkcija. Jos išvestinė

$$\varphi'(t) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(u+th+\varepsilon h) - f(u+th)}{\varepsilon} = \langle f'(u+th),\, h\rangle\,, \quad \forall t \in (0,1).$$

Pagal baigtinių pokyčių formulę vieno kintamojo funkcijoms egzistuoja toks $\theta \in (0,1)$, kad

$$\varphi(1) - \varphi(0) = 1 \cdot \varphi'(\theta).$$

Iš čia išplaukia (8.12). ▷

A p i b r ė ž i m a s. Tegu $df(u,\cdot) : \mathrm{X} \to \mathbb{R}$ yra tiesinis funkcionalas. Reiškinį $df(u,v)$ vadinsime funkcionalo f *Frešė diferencialu* taške $u \in \mathrm{X}$, jeigu

$$f(u+v) - f(u) = df(u,v) + o(\|v\|_{\mathrm{X}}). \tag{8.13}$$

Jeigu funkcionalas $df(u,\cdot)$ dar yra ir tolydus, tai jį vadinsime funkcionalo f *Frešė išvestine* ir žymėsime $f'(u)$.

Tegu funkcionalas $f : \mathrm{X} \to \mathbb{R}$ yra diferencijuojamas pagal Frešė taške $u \in \mathrm{X}$, t.y. $f'(u) \in \mathrm{X}^*$. Tada

$$df(u,v) = \langle f'(u),\, v\rangle\,, \quad \forall v \in \mathrm{X}.$$

Be to, jis yra tolydus taške u. Iš tikrųjų jeigu $v \to 0$, tai iš (8.13) išplaukia, kad $f(u+v) \to f(u)$.

8.5 teorema. *Tegu funkcionalas f yra diferencijuojamas taške u pagal Frešė. Tada jis yra diferencijuojamas taške u pagal Gato ir jų išvestinės sutampa.*

◁ Imkime (8.13) formulėje $v = th$ ir perrašykime ją taip:

$$\frac{f(u+th) - f(u)}{t} = \langle f'(u),\, h\rangle + \frac{o(t)}{t}\|h\|_{\mathrm{X}}.$$

Reiškinys dešiniojoje šios lygybės pusėje turi rbą, kai $t \to 0$, ir ji lygi $\langle f'(u),\, h\rangle$; čia $f'(u)$ – Frešė išvestinė. Todėl reiškinys kairiojoje lygybės pusėje taip pat turi ribą, kai $t \to 0$, ir $\delta f(u,h) = \langle f'(u),\, h\rangle$. Iš čia išplaukia, kad egzistuoja funkcionalo f Gato išvestinė ir ji sutampa su Frešė išvestine. ▷

P a v y z d ž i a i:

1. Apibrėžkime funkciją $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ formule

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{kai } y = x^2,\ x \neq 0, \\ 0 & \text{kituose erdvės } \mathbb{R}^2 \text{ taškuose.} \end{cases}$$

Ši funkcija yra trūki taške $(0,0)$. Todėl ji nėra diferencijuojama pagal Frešė šiame taške. Kita vertus, $f(tx,ty) = 0$ pakankamai mažiems $t > 0$. Todėl

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(tx,ty) - f(0,0)}{t} = 0.$$

Taigi funkcija f taške $(0,0)$ turi Gato išvestinę ir ji lygi nuliui.

2. Parodysime, kad iš variacijos egzistavimo nebūtinai išplaukia išvestinės pagal Gato egzistavimas. Apibrėžkime funkciją $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ formule

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & \text{kai } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{kai } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Nesunku įsitikinti (patikrinkite!), kad taške $(0,0)$ pirmoji variacija egzistuoja ir

$$\delta f((0,0),(x,y)) = f(x,y).$$

Kadangi funkcija f yra netiesinė, tai Gato išvestinė taške $(0,0)$ neegzistuoja.

3. Tegu funkcija $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ turi tolydžias išvestines pagal visus tris kintamuosius iki antrosios eilės imtinai. Apibrėžkime integralinį funkcionalą $I : \mathrm{C}^1[a,b] \to \mathbb{R}$ formule

$$I(u) = \int_a^b f(x,u,u')\,dx.$$

Funkcionalo I pokytis

$$I(u+h) - I(u) = \int_a^b [f(x,u+h,u'+h') - f(x,u,u')]\,dx =$$

$$= \int_a^b [f_u(x,u,u')h + f_{u'}(x,u,u')h']\,dx + o(\|h\|_{\mathrm{C}^1[a,b]}) =$$

$$= \int_a^b \Big(f_u - \frac{d}{dx}f_{u'}\Big)h\,dx + f_{u'}h\Big|_a^b + o(\|h\|_{\mathrm{C}^1[a,b]}).$$

Todėl funkcionalo I Frešė diferencialas

$$dI(u,h) = \int_a^b \Big(f_u - \frac{d}{dx}f_{u'}\Big)h\,dx + f_{u'}h\Big|_a^b.$$

4. Tegu $a(\cdot,\cdot) : H \times H \to \mathbb{R}$ yra bitiesinė, simetrinė ir aprėžta Hilberto erdvėje H forma, $v \in H$ – fiksuotas elementas. Apibrėžkime funkcionalą $f : H \to \mathbb{R}$ formule

$$f(u) = \frac{1}{2}a(u,u) - (v,u).$$

Funkcionalo f pokytis

$$f(u+h) - f(u) = \frac{1}{2}a(u+h, u+h) - (v, u+h) - \frac{1}{2}a(u,u) + (v,u) =$$

$$= \frac{1}{2}a(u,h) + \frac{1}{2}a(h,u) + \frac{1}{2}a(h,h) - (v,h) = a(u,h) - (v,h) + \frac{1}{2}a(h,h).$$

Kadangi forma $a(\cdot,\cdot)$ yra aprėžta, tai

$$|a(u,h)| \leq M\|u\|_H\|h\|_H, \quad \forall u, h \in H;$$

čia M – teigiama konstanta. Kartu yra teisinga nelygybė

$$|a(h,h)| \leq M\|h\|_H^2 = o(\|h\|_H).$$

Todėl funkcionalo f Frešė diferencialas

$$df(u,h) = a(u,h) - (v,h).$$

Tarkime, taško u aplinkoje U egzistuoja funkcionalo f pirmoji variacija $\delta f(u,v)$. Fiksuokime elementą $v = v_1$. Tada $\delta f(\cdot, v_1) : U \to \mathbb{R}$ yra funkcionalas (bendru atveju netiesinis) ir galime apibrėžti jo variaciją. Šią variaciją vadinsime funkcionalo f *antrąja variacija* ir žymėsime $\delta^2 f(u, v_1, v_2)$. Taigi funkcionalo f antroji variacija, jeigu ji egzistuoja, yra riba

$$\delta^2 f(u, v_1, v_2) = \lim_{t\to 0} \frac{\delta f(u + tv_2, v_1) - \delta f(u, v_1)}{t}.$$

Kai $v_1 = v_2 = v$, antrąją variaciją žymėsime $\delta^2 f(u,v)$, t.y.

$$\delta^2 f(u,v) = \delta^2 f(u,v,v).$$

Matematinės indukcijos metodu apibrėžkime n-ąją variaciją.

A p i b r ė ž i m a s. Tegu $\delta^{n-1} f(u, v_1, \ldots, v_{n-1})$ – $(n-1)$-oji funkcionalo f variacija, apibrėžta taško u aplinkoje U. Funkcionalo f *n-ąja variacija* taške u vadinsime ribą (jeigu ji egzistuoja)

$$\lim_{t\to 0} \frac{\delta^{n-1} f(u + tv_n, v_1, \ldots, v_{n-1}) - \delta^{n-1} f(u, v_1, \ldots, v_{n-1})}{t}$$

ir žymėsime $\delta^n f(u, v_1, \ldots, v_n)$. Kai $v_1 = \ldots = v_n = v$, n-ąją variaciją žymėsime $\delta^n f(u,v)$. Taigi funkcionalo f n-oji variacija

$$\delta^n f(u,v) = \frac{d^n}{dt^n} f(u+tv)\Big|_{t=0}.$$

Tegu $\mathrm{X} \times \ldots \times \mathrm{X}$ yra Banacho erdvių Dekarto sandauga, kurioje yra n daugiklių. Atvaizdį $B : \mathrm{X} \times \ldots \times \mathrm{X} \to \mathbb{R}$ vadinsime *n-tiesiu*, jeigu jis yra tiesinis pagal kiekvieną atskirą argumentą, kai likusieji argumentai yra fiksuoti. Kai $n = 2$, toks atvaizdis B

vadinamas *bitiesiniu*. Jeigu $B(u,v) = B(v,u)$, $\forall u, v \in \mathrm{X}$, tai bitiesinis atvaizdis B vadinamas *simetriniu*.

Tegu B yra n-tiesis atvaizdis. Sakysime, kad jis *aprėžtas*, jeigu egzistuoja tokia teigiama konstanta M, kad

$$|B(v_1,\dots,v_n)| \le M\|v_1\|_{\mathrm{X}} \cdot \ldots \cdot \|v_n\|_{\mathrm{X}}, \quad \forall v_1,\dots,v_n \in \mathrm{X}.$$

Atvaizdžio B norma apibrėžiama taip:

$$\|B\| = \sup_{\|v_1\|_{\mathrm{X}}=\ldots=\|v_n\|_{\mathrm{X}}=1} |B(v_1,\dots,v_n)|.$$

Todėl

$$|B(v_1,\dots,v_n)| \le \|B\|\|v_1\|_{\mathrm{X}} \cdot \ldots \cdot \|v_n\|_{\mathrm{X}}, \quad \forall v_1,\dots,v_n \in \mathrm{X}.$$

A p i b r ė ž i m a s. Tegu taške u egzistuoja funkcionalo f n-oji variacija

$$\delta^n f(u, v_1, \dots, v_n).$$

Jeigu atvaizdis

$$\delta^n f(u,\cdot,\dots,\cdot) : \mathrm{X} \times \ldots \times \mathrm{X} \to \mathbb{R}$$

yra n-tiesis, tai reiškinį $\delta^n f(u, v_1, \dots, v_n)$ vadinsime funkcionalo f n-oju Gato diferencialu. Jeigu atvaizdis $\delta^n f(u,\cdot,\dots,\cdot)$ dar yra ir tolydus, tai jį vadinsime funkcionalo f *n-ąja Gato išvestine* taške u ir žymėsime $f^{(n)}(u)$. Jo reikšmę taške $(v_1,\dots,v_n)$ žymėsime $f^{(n)}(u)v_1\dots v_n$. Kai $v_1 = \ldots = v_n$, šią reikšmę žymėsime $f^{(n)}(u)v^n$.

Dabar apibrėšime n-ąjį Frešė diferencialą ir n-ąją Frešė išvestinę.

A p i b r ė ž i m a s. Tegu taško u aplinkoje U egzistuoja $(n-1)$-oji Frešė išvestinė $f^{(n-1)}(u)$ ir $f^{(n-1)}(u)v_1\dots v_{n-1}$ yra tos išvestinės reikšmė taške $(v_1,\dots,v_{n-1})$. Jeigu egzistuoja n-tiesis toks atvaizdis

$$d^n f(u,\cdot,\dots,\cdot) : \mathrm{X} \times \ldots \times \mathrm{X} \to \mathbb{R},$$

kad

$$f^{(n-1)}(u+v_n)v_1\dots v_{n-1} - f^{(n-1)}(u)v_1\dots v_{n-1} = d^n f(u, v_1,\dots,v_n) +$$

$$+o(\|v_n\|_{\mathrm{X}})B(v_1\dots,v_{n-1}), \quad \forall v_1,\dots v_{n-1} \in \mathrm{X}, \quad u+v_n \in U,$$

tai reiškinį $d^n f(u, v_1,\dots,v_n)$ vadinsime funkcionalo f n-oju Frešė diferencialu. Jeigu atvaizdis $d^n f(u,\cdot,\dots,\cdot)$ dar yra aprėžtas, tai jį vadinsime funkcionalo f n-ąja Frešė išvestine ir žymėsime $f^n(u)$. Čia $B : \mathrm{X}\times\ldots\times\mathrm{X} \to \mathbb{R}$ yra koks nors aprėžtas atvaizdis.

Funkcionalo $f^n(u)$ reikšmę taške $(v_1,\dots,v_n)$ žymėsime $f^{(n)}(u)v_1\dots v_n$. Kai $v_1 = \ldots = v_n = v$, šią reikšmę žymėsime $f^{(n)}(u)v^n$.

8.6 teorema. (Teiloro formulė) *Tegu funkcionalas $f : \mathrm{X} \to \mathbb{R}^1$ yra n kartų diferencijuojamas pagal Frešė taško u aplinkoje ir n-oji išvestinė $f^{(n)}$ yra tolydi taške u. Tada pakankamai mažiems h teisinga formulė*

$$f(u+h) = f(u) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(u)h^k + o(\|h\|^n_{\mathrm{X}}). \tag{8.14}$$

$\triangleleft$ Tegu $\varphi(t) = f(u + th)$, $t \in \mathbb{R}$. Tada

$$\varphi^{(k)}(0) = f^{(k)}(u)h^k, \quad \varphi^{(k)}(t) = f^{(k)}(u + th)h^k, \quad \forall n = 1, \dots, n.$$

Pagal klasikinę Teiloro formulę

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{t^k}{k!}\varphi^{(k)}(0) + R_n;$$

čia

$$R_n = \frac{t^n}{n!}(\varphi^{(n)}(\theta t) - \varphi^{(n)}(0)), \quad 0 < \theta < 1.$$

Kai $t = 1$, liekamojo nario modulis

$$|R_n| = \frac{1}{n!}|f^{(n)}(u + \theta h)h^n - f^{(n)}(u)h^n| \le \frac{1}{n!}\|f^{(n)}(u + \theta h) - f^{(n)}(u)\|\|h\|^n_{\mathrm{X}}.$$

Kadangi $f^{(n)}$ yra tolydi taške u ir $0 < \theta < 1$, tai $R_n = o(\|h\|^n_{\mathrm{X}})$. Iš čia išplaukia (8.14). $\triangleright$

8.6 lema. *Tegu* $u, h \in \mathrm{X}$ *yra fiksuoti elemenatai ir* $f : \mathrm{X} \to \mathbb{R}^1$ *– dukart diferencijuojamas pagal Gato taškuose* $u + th$, $t \in [0, 1]$*, funkcionalas. Tada egzistuoja toks* $\theta \in (0, 1)$*, kad*

$$f(u + h) = f(u) + f'(u)h + \frac{1}{2}f''(u + \theta h)h^2. \tag{8.15}$$

$\triangleleft$ Tegu $\varphi(t) = f(u + th)$. Pagal klasikinę Teiloro formulę egzistuoja toks $\theta \in (0, 1)$, kad

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{1}{2}\varphi''(\theta).$$

Kadangi $\varphi'(0) = f'(u)h$, $\varphi''(\theta) = f''(u + \theta h)h^2$, tai iš čia išplaukia (8.15). $\triangleright$

8.4. DIFERENCIJUOJAMŲ FUNKCIONALŲ IŠKILUMO KRITERIJAI

Į funkcionalo $f : \mathrm{X} \to \mathbb{R}^1$ Gato išvestinę f' galima žiūrėti kaip į operatorių, veikiantį iš Banacho erdvės X į jungtinę erdvę X^* ir kiekvienam elementui $u \in \mathrm{X}$ priskiriantį Gato išvestinę $f'(u) \in \mathrm{X}^*$. Priminsime, kad funkcionalo $f'(u) \in \mathrm{X}^*$ reikšmę taške $v \in \mathrm{X}$ žymėsime $\langle f'(u),\, v\rangle$ arba $f'(u)v$.

8.7 teorema. *Tegu funkcionalas $f : \mathrm{X} \to \mathbb{R}^1$ yra diferencijuojamas pagal Gato erdvėje X. Tada ekvivalentūs tokie teiginiai:*

1. *f yra iškilasis funkcionalas.*
2. *$f' : \mathrm{X} \to \mathrm{X}^*$ yra monotoninis operatorius, t.y.*
$$\langle f'(u) - f'(v),\, u - v\rangle \geq 0, \quad \forall u, v \in \mathrm{X}. \tag{8.16}$$
3. *Su visais $u, v \in \mathrm{X}$ yra teisinga nelygybė*
$$f(v) \geq f(u) + \langle f'(u),\, v - u\rangle\,, \quad \forall u, v \in \mathrm{X}. \tag{8.17}$$

◁Tarkime, f yra iškilasis funkcionalas. Apibrėžkime funkciją

$$\varphi(t) = f((1-t)u + tv) = f(u + t(v-u)), \quad t \in \mathbb{R}^1.$$

Įrodysime, kad funkcija φ yra iškila. Su visais $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^1$ ir $\alpha \in [0,1]$ reiškinys

$$\alpha\varphi(t_1) + (1-\alpha)\varphi(t_2) - \varphi(\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2) =$$
$$= \alpha f(u + t_1(v-u)) + (1-\alpha) f(u + t_2(v-u)) -$$
$$- f(u + [\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2](v-u)) \geq 0.$$

Čia pasinaudojome tuo, kad funkcionalas f yra iškilasis ir

$$u + [\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2](v-u) = \alpha[u + t_1(v-u)] + (1-\alpha)[u + t_2(v-u)].$$

Funkcijos φ išvestinė

$$\varphi'(t) = \langle f'(u + t(v-u)),\, v - u\rangle\,. \tag{8.18}$$

Iš matematinės analizės kurso žinome, kad iškilos funkcijos φ išvestinė φ' yra nemažėjanti funkcija. Todėl $\varphi'(1) \geq \varphi'(0)$. Remiantis (8.18), pastarąją nelygybę galima perrašyti taip:

$$\langle f'(v),\, v - u\rangle \geq \langle f'(u),\, v - u\rangle\,.$$

Iš čia išplaukia, kad f' yra monotoninis operatorius.

Tegu f' yra monotoninis operatorius, t.y. teisinga (8.16) nelygybė. Įrodysime, kad φ' – nemažėjanti funkcija. Tegu $t_1 > t_2$. Iš (8.16) gauname

$$\langle f'(u + t_1(v-u)) - f'(u + t_2(v-u)),\, (t_1 - t_2)(v-u)\rangle \geq 0.$$

Todėl teisinga nelygybė

$$\langle f'(u+t_1(v-u)),\, v-u\rangle \geq \langle f'(u+t_2(v-u)),\, v-u\rangle\,,$$

kurią galima perrašyti

$$\varphi'(t_1) \geq \varphi'(t_2).$$

Taigi funkcija φ' yra nemažėjanti. Pasinaudoję šia funkcijos φ savybe ir Lagranžo pokyčių formule, gausime

$$f(v)-f(u)=\varphi(1)-\varphi(0)=\varphi'(\xi)\geq\varphi'(0)=\langle f'(u),\, v-u\rangle\,,\quad \xi\in(0,1).$$

Iš čia išplaukia, kad teisinga (8.17) nelygybė.

Tarkime, (8.17) nelygybė teisinga. Tada reiškinys

$$\alpha f(u)+(1-\alpha)f(v)-f(\alpha u+(1-\alpha)v)=$$

$$=\alpha[f(u)-f(\alpha u+(1-\alpha)v)]+(1-\alpha)[f(v)-f(\alpha u+(1-\alpha)v)]\geq$$

$$\geq\alpha\,\langle f'(\alpha u+(1-\alpha)v),\,(1-\alpha)(u-v)\rangle+$$

$$+(1-\alpha)\,\langle f'(\alpha u+(1-\alpha)v),\,\alpha(v-u)\rangle=0.$$

Iš čia išplaukia, kad f iškila. Teorema įrodyta. ▷

P a s t a b a. Teorema išlieka teisinga, jeigu joje pirmą, antrą ir trečią teiginius pakeisime atitinkamai tokiais:

1. f yra griežtai iškilas funkcionalas.

2. $f':\mathrm{X}\to\mathrm{X}^*$ yra griežtai monotoninis operatorius, t.y.

$$\langle f'(u)-f'(v),\, u-v\rangle>0,\quad \forall u,v\in\mathrm{X},\quad u\neq v.$$

3. Su visais $u,v\in\mathrm{X}$, $u\neq v$ teisinga nelygybė

$$f(v)>f(u)+\langle f'(u),\, v-u\rangle\,,\quad \forall u,v\in\mathrm{X},\quad u\neq v.$$

8.7 lema. *Tegu $f:\mathrm{X}\to\mathbb{R}^1$ yra iškilas ir diferencijuojamas taške u funkcionalas. Tada šiame taške jis yra silpnai pustolydis iš apačios.*

◁ Tegu $u_n\rightharpoonup u$, kai $n\to\infty$. Remdamiesi (8.17) nelygybe, gauname

$$f(u)\leq f(u_n)+\langle f'(u),\, u-u_n\rangle\,.$$

Reiškinys $\langle f'(u),\, u-u_n\rangle\to 0$, kai $n\to\infty$. Todėl

$$f(u)\leq\varliminf_{n\to\infty} f(u_n).$$

Pagal apibrėžimą tai reiškia, kad funkcionalas f yra silpnai pustolydis iš apačios. ▷

8.8 teorema. *Tarkime, funkcionalas $f:\mathrm{X}\to\mathbb{R}^1$ yra dukart diferencijuojamas pagal Gato erdvėje X. Tada ekvivalentūs tokie teiginiai:*

1. *f yra iškilas funkcionalas.*

2. *Su visais $u, h \in \mathrm{X}$ teisinga nelygybė*

$$f''(u)h^2 \geq 0. \tag{8.19}$$

$\triangleleft$ Tegu f yra iškilas funkcionalas. Remiantis 8.7 teorema, f' yra monotoninis operatorius. Todėl teisinga nelygybė

$$\langle f'(u+h) - f'(u),\, h\rangle \geq 0, \quad \forall h \in \mathrm{X}.$$

Čia h pakeiskime εh ir padalinkime iš ε^2. Tada gautą nelygybę galima perrašyti taip:

$$\left\langle \frac{f'(u+\varepsilon h) - f'(u)}{\varepsilon},\, h\right\rangle \geq 0, \quad \forall h \in \mathrm{X}.$$

Perėję prie ribos, kai $\varepsilon \to 0$, gausime (8.19) nelygybę.

Tarkime, yra (8.19) nelygybė teisinga. Pagal (8.6) lemą egzistuoja toks $\theta \in (0,1)$, kad

$$f(v) = f(u) + \langle f'(u),\, v-u\rangle + \frac{1}{2} f''(u+\theta(v-u))(v-u)^2.$$

Paskutinis šios formulės narys yra neneigiamas. Atmetę jį, gausime nelygybę

$$f(v) \geq f(u) + \langle f'(u),\, v-u\rangle\,, \quad \forall u, v \in \mathrm{X}.$$

Pagal 8.7 teoremą (žr. 3-ą jos teiginį) funkcionalas f yra iškilas. $\triangleright$

P a s t a b a. Iš teoremos įrodymo išplaukia, kad funkcionalas f yra griežtai iškilas tada ir tik tada, kai teisinga nelygybė

$$f''(u)h^2 > 0, \quad \forall u, h \in \mathrm{X}, \quad h \neq 0. \tag{8.20}$$

P a v y z d y s. Tegu bitiesinė forma $a(\cdot,\cdot) : H \times H \to \mathbb{R}$ yra simetrinė ir aprėžta Hilberto erdvėje H, $f \in H$ – fiksuotas elementas. Be to, tegu bitiesinė forma $a(\cdot,\cdot)$ yra *koercityvi*, t.y. egzistuoja toks teigiamas skaičius α, kad

$$a(v,v) \geq \alpha \|v\|_H^2, \quad \forall v \in H.$$

Apibrėžkime funkcionalą

$$f(u) = \frac{1}{2} a(u,u) - \langle f,\, u\rangle\,. \tag{8.21}$$

Jo pirmoji ir antroji Gato išvestinės yra lygios

$$f'(u) = a(u,\cdot) - \langle f,\, h\rangle\,, \quad f''(u) = a(\cdot,\cdot).$$

Todėl

$$f''(u)v^2 = a(v,v) \geq \alpha \|v\|_H^2, \quad u, v \in H,$$

ir funkcionalas f yra griežtai iškilas.

8.9 teorema. (Oilerio) *Tegu* X *yra Banacho erdvė,* $f, g : \mathrm{X} \to \mathbb{R}$ *– funkcionalai (bendru atveju netiesiniai),* $\mathfrak{M}_a = \{v \in \mathrm{X} : g(v) = a\}$, u *– funkcionalo* f *minimumo taškas aibėje* $\mathfrak{M}_a$*. Be to, tegu taške* u *egzistuoja Frešė išvestinės* $g'(u) \neq 0$ *ir* $f'(u)$*. Tada egzistuoja toks skaičius* λ*, kad*

$$f'(u) = \lambda g'(u).$$

Šios teoremos įrodymas iš esmės nieko nesiskiria nuo analogiškos teoremos įrodymo integralinių funkcionalų atveju (žr., pavyzdžiui, [1]). Bendru atveju teoremos įrodymą galima rasti [42], [57] knygose.

P a s t a b a. Oilerio teorema išlieka teisinga, jeigu joje vietoje funkcionalo g imsime bet kokį baigtinį skaičių funkcionalų g_i, $i = 1, \dots, N$, ir aibę $\mathfrak{M}_a$ pakeisime aibe $v \in \mathrm{X} : g_i(v) = a_i, i = 1, \dots, N$. Šiuo atveju Oilerio teorema tvirtina, kad egzistuoja tokie skaičiai $\lambda_1, \dots, \lambda_N$, kad

$$f'(u) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i g_i'(u).$$

8.5. DIFERENCIJUOJAMŲ FUNKCIONALŲ MINIMUMAS

Tegu $f : \mathrm{X} \to \mathbb{R}^1$ yra netiesinis funkcionalas, X – Banacho erdvė.

A p i b r ė ž i m a s. Sakysime, taškas $u \in \mathrm{X}$ yra funkcionalo f *lokalaus minimumo (maksimumo) taškas*, jeigu egzistuoja tokia šio taško aplinka U, kad

$$f(v) \geq f(u), \quad (\, f(v) \leq f(u)\,), \quad \forall v \in U. \tag{8.22}$$

Lokalaus minimumo ir lokalaus maksimumo taškai yra vadinami funkcionalo f *lokaliojo ekstremumo taškais*. Jeigu (8.22) nelygybė yra griežta, kai $v \neq u$, tai taškas $u \in \mathrm{X}$ yra vadinamas funkcionalo f *griežtojo lokaliojo ekstremumo tašku*.

8.10 teorema. (apie būtinas ekstr. egz. sąlygas) *Tarkime, taškas $u \in \mathrm{X}$ yra funkcionalo $f : \mathrm{X} \to \mathbb{R}$ lokalaus minimumo (maksimumo) taškas. Tada:*

1. *Jeigu taške u egzistuoja funkcionalo f pirmoji variacija, tai*

$$\delta f(u, v) = 0, \quad \forall v \in \mathrm{X}. \tag{8.23}$$

2. *Jeigu taške u egzistuoja funkcionalo f antroji variacija, tai*

$$\delta^2 f(u, v) \geq 0, \quad (\, \delta^2 f(u, v) \leq 0\,), \quad \forall v \in \mathrm{X}. \tag{8.24}$$

$\triangleleft$ Fiksuokime kokį nors elementą $v \in \mathrm{X}$ ir apibrėžkime realaus kintamojo funkciją $\varphi(t) = f(u + tv)$. Taškas $t = 0$ yra funkcijos φ lokalaus minimumo (maksimumo) taškas. Todėl

$$\varphi'(0) = \delta f(u, v) = 0,$$

jeigu yra patenkinta pirmoji teoremos sąlyga, ir

$$\varphi''(0) = \delta^2 f(u, v) \geq 0 \quad (\leq 0),$$

jeigu patenkinta antroji teoremos sąlyga. $\triangleright$

Į (8.23) sąlygą galima žiūrėti kaip į lygtį elemento $u \in \mathrm{X}$ atžvilgiu. Ši lygtis vadinama apibendrintąja Oilerio lygtimi. Tegu funkcija u tenkina (8.23) lygtį ir yra teisinga (8.24) nelygybė. Tada sakoma, kad taške u patenkinta *Ležandro sąlyga*. Šios abi sąlygos yra būtinos, tačiau nepakankamos lokalaus ekstremumo egzistavimo sąlygos. Pavyzdžiai yra gerai žinomi iš matematinės analizės kurso (žr. [14], [17]).

8.11 teorema. (apie pak. ekstr. egz. sąlygas) *Tegu $n \geq 2$ yra lyginis skaičius, $u \in \mathrm{X}$ ir taško u aplinkoje U egzistuoja funkcionalo $f : \mathrm{X} \to \mathbb{R}^1$ variacijos $\delta^k f(\cdot, \cdot)$ iki n-osios eilės imtinai. Taškas u yra funkcionalo f lokaliojo minimumo (maksimumo) taškas, jeigu patenkintos tokios trys sąlygos:*

1. $\delta^k f(u, v) = 0, \quad \forall v \in \mathrm{X}, \quad i = 1, \ldots, n - 1.$
2. $\delta^n f(u, v) \geq c\|v\|^n_{\mathrm{X}} \quad (\delta^n f(u, v) \leq -c\|v\|^n_{\mathrm{X}}),\ \forall v \in \mathrm{X},\ c > 0.$

3. *Su kiekvienu* $\varepsilon > 0$ *egzistuoja toks* $\rho = \rho(\varepsilon)$*, kad*

$$|\delta^n f(u+h,v) - \delta^n f(u,v)| \leq \varepsilon \|v\|^n_{\mathrm{X}}, \quad \forall v, h \in \mathrm{X},\ \|h\|_{\mathrm{X}} < \rho.$$

$\triangleleft$ Išnagrinėsime lokalaus minimumo atvejį. Tegu $v \in \mathrm{X}$ toks, kad $u + tv \in U$ ir $\varphi(t) = f(u+tv)$. Tada $\varphi^{(k)}(t) = \delta^k f(u+tv, v)$, kai $k = 1, \dots, n$, $t \in [0,\, 1]$. Remiantis klasikine Teiloro formule (imame $t = 1$),

$$f(u+v) - f(u) = \varphi(1) - \varphi(0) = \frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(\theta), \quad 0 < \theta < 1.$$

Iš čia gauname, kad

$$n!(f(u+v) - f(u)) = \delta^n f(u+\theta v, v) \geq$$

$$\geq \delta^n f(u,v) - \varepsilon\|v\|^n_{\mathrm{X}} \geq (c-\varepsilon)\|v\|^n_{\mathrm{X}},$$

kai $\|v\|_{\mathrm{X}} \leq \rho(\varepsilon)$ ir $u + v \in U$. Imkime čia $\varepsilon = c/2$. Tada tokiems v teisinga nelygybė $f(u+v) \geq f(u)$. Taigi u yra lokalaus minimumo taškas. Lokalaus maksimumo atvejis nagrinėjamas analogiškai. $\triangleright$

P a s t a b a. Jeigu taške u egzistuoja funkcionalo f Gato arba Frešė išvestinės, tai teorema išlieka teisinga, pakeitus joje funkcionalo f variaciją atitinkama išvestine. Taikymo uždaviniuose variacijos egzistavimas įrodomas lengviau negu Gato ar Frešė išvestinės egzistavimas.

8.12 teorema. *Tegu* $f : \mathrm{X} \to \mathbb{R}^1$ *yra iškilasis ir diferencijuojamas pagal Gato taške* u *funkcionalas,* $g : \mathrm{X} \to \mathbb{R}^1$ *– tiesinis tolydus funkcionalas, t.y.* $g \in \mathrm{X}^*$ *ir* $\Phi(v) = f(v) - \langle g, v\rangle$ *. Tada ekvivalentūs tokie teiginiai:*

1. *Taškas* u *yra funkcionalo* Φ *globalaus minimumo taškas, t.y.*

$$\Phi(u) = \inf_{v\in\mathrm{X}} \Phi(v). \tag{8.25}$$

2. *Funkcionalo* f *Gato išvestinė taške* u *lygi* g*, t.y.*

$$f'(u) = g. \tag{8.26}$$

$\triangleleft$ Aišku, kad $\Phi'(u) = f'(u) - g$. Tegu u yra funkcionalo Φ globalaus minimumo taškas. Tada pagal 8.10 teoremą $f'(u) - g = 0$, t.y. u tenkina (8.26) lygtį. Įrodysime atvirkštinį teiginį. Tegu u yra (8.26) lygties sprendinys. Tada remdamiesi 8.7 teoremos trečiuoju teiginiu, gauname

$$\Phi(v) - \Phi(u) = f(v) - \langle g,\, v\rangle - (f(u) - \langle g,\, u\rangle) = f(v) - f(u) - \langle g,\, v-u\rangle \geq$$

$$\geq \langle f'(u),\, v-u\rangle - \langle g,\, v-u\rangle = \langle f'(u) - g,\, v-u\rangle = 0, \quad \forall v \in \mathrm{X}.$$

Todėl u yra funkcionalo Φ globalaus minimumo taškas. $\triangleright$

8.6. SUBGRADIENTAS IR SUBDIFERENCIALAS

Šiame skyrelyje apibendrinsime Gato išvestinės ir diferencialo sąvokas, įvesdami subgradiento ir subdiferencialo sąvokas. Jos yra naudojamos nediferencijuojamų funkcionalų atveju.

A p i b r ė ž i m a s. Tegu $f : \mathrm{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ yra netiesinis funkcionalas, X – realioji Banacho erdvė, X^* – jungtinė erdvė. Elementą $u^* \in \mathrm{X}^*$ vadinsime funkcionalo f *subgradientu* taške $u \in \mathrm{X}$, jeigu

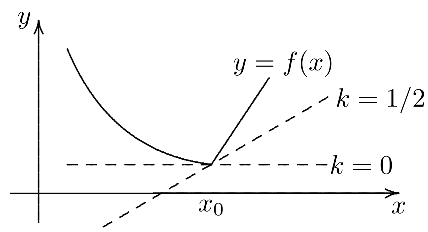
$$f(v) \geq f(u) + \langle u^*, v - u \rangle, \qquad \forall v \in \mathrm{X}, \tag{8.27}$$

ir $f(u) \neq \pm\infty$. Funkcionalo f visų subgradientų u^* aibė taške u yra vadinama *subdiferencialu* ir žymima $\partial f(u)$. Jeigu taške u subgradientų aibė yra tuščia, tai rašysime $\partial f(u) = \emptyset$.

P a s t a b a. Elementai $u^* \in \partial f(u)$ dar kartais vadinami funkcionalo f atraminėmis funkcijomis (arba atraminiais funkcionalais) taške u.

P a v y z d ž i a i:

1. Tegu $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ yra vieno kintamojo funkcija. Tada $\partial f(x_0)$ yra visų tiesių $y = k(x - x_0) + f(x_0)$, einančių per tašką $(x_0, f(x_0))$ ir esančių žemiau funkcijos $y = f(x)$ grafiko, krypčių koeficientų k aibė (žr. 7.6 pav.)



7.6 pav.

2. Tegu $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}^1$. Tada

$$\partial f(x) = \begin{cases} \{-1\}, & \text{kai } x < 0, \\ [-1, 1], & \text{kai } x = 0, \\ \{1\}, & \text{kai } x > 0. \end{cases}$$

3. Tegu $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$, $x^0 \in \mathbb{R}^n$. Tada $\partial f(x^0) \subset \mathbb{R}^n$ yra hiperplokštumų $x_{n+1} = k_1(x_1 - x_1^0) + \ldots + k_n(x_n - x_n^0) + f(x^0)$, einančių per tašką $(x^0, f(x^0))$ ir esančių žemiau funkcijos $y = f(x)$ grafiko, visų koeficientų $k_1, \ldots, k_n$ aibė. Tokios hiperplokštumos vadinamos atraminėmis funkcijai f taške $(x^0, f(x^0))$.

Tegu $f : \mathrm{X} \to \mathbb{R}^1$ yra nediferencijuojamas funkcionalas. Nagrinėsime uždavinį: rasti tokį $u \in \mathrm{X}$, kad

$$f(u) = \inf_{v \in \mathrm{X}} f(v). \tag{8.28}$$

8.13 teorema. *Tegu* $f : \mathrm{X} \to (-\infty, \infty]$ *yra iškilasis funkcionalas,* $f \not\equiv +\infty$. *Taškas* $u \in \mathrm{X}$ *yra (8.28) uždavinio sprendinys tada ir tik tada, kai*

$$0 \in \partial f(u). \tag{8.29}$$

◁ Įrodymas išplaukia iš nelygybės (8.27), įstačius joje $u^* = 0$. ▷

Į (8.29) sąlygą galima žiūrėti kaip į lygtį $u \in \mathrm{X}$ atžvilgiu. Todėl ši sąlyga kartais vadinama apibendrintąja Oilerio lygtimi. Norint rasti (8.28) uždavinio sprendinį, reikia išspręsti (8.29) lygtį su daugiareikšmiu operatoriumi $\partial f(u) : \mathrm{X} \to 2^{\mathrm{X}^*}$. Čia 2^{X^*} – aibė visų aibės X^* poaibių.

8.14 teorema. *Tegu* $f : \mathrm{X} \to \mathbb{R}^1$ *yra iškilasis funkcionalas ir taške* $u \in \mathrm{X}$ *egzistuoja Gato išvestinė* $f'(u)$. *Tada* $\partial f(u) = \{f'(u)\}$*, t.y.* $f'(u)$ *yra vienintelis subdiferencialo* $\partial f(u)$ *elementas.*

◁ Pagal 8.7 teoremą teisinga nelygybė

$$f(v) - f(u) \geq \langle f'(u), v - u \rangle, \quad \forall v \in \mathrm{X}.$$

Todėl $f'(u) \in \partial f(u)$.

Įrodysime, kad $\partial f(u) \subset \{f'(u)\}$. Tegu $u^* \in \partial f(u)$. Pagal subdiferencialo apibrėžimą

$$f(v) - f(u) \geq \langle u^*, v - u \rangle, \quad \forall v \in \mathrm{X}.$$

Imkime šioje nelygybėje $v = u + th$, $t > 0$, $h \in \mathrm{X}$, ir padalykime iš t. Tada pastarąją nelygybę galima perrašyti taip:

$$\frac{f(u + th) - f(u)}{t} \geq \langle u^*, h \rangle.$$

Artindami čia $t \to +0$, gausime $\langle f'(u), h \rangle \geq \langle u^*, h \rangle$. Kartu yra teisinga nelygybė $\langle f'(u) - u^*, h \rangle \geq 0$, $\forall\, h \in \mathrm{X}$. Iš čia išplaukia, kad $f'(u) - u^* = 0$. Todėl $\partial f(u) \subset \{f'(u)\}$. ▷

8.15 teorema. (Minčio) *Tegu* X *yra realioji Banacho erdvė ir funkcionalas* $f : \mathrm{X} \to (-\infty, \infty]$ *yra iškilas. Tada:*

1. *Su kiekvienu* $u \in \mathrm{X}$ *aibė* $\partial f(u)$ *yra iškiloji ir silpnai uždara (gali būti, kad* $\partial f(u) = \emptyset$*).*

2. *Jeigu* $f(u) < +\infty$ *ir* f *yra tolydus taške* u *funkcionalas, tai* $\partial f(u) \neq \emptyset$ *ir* $\partial f(u)$ *– silpnai kompaktiška aibė.*

8.16 teorema. (Moro–Rokafelaro) *Tegu* X *yra realioji Banacho erdvė,* $f_k : \mathrm{X} \to (-\infty, \infty]$ *– iškilieji funkcionalai,* $k = 1, \ldots, n$. *Be to, egzistuoja toks taškas* $\tilde{u} \in X$*, kad* $f_k(\tilde{u}) < +\infty$, $\forall k = 1, \ldots, n$, *ir funkcionalai* $f_1, \ldots, f_n$ *yra tolydūs taške* $\tilde{u}$. *Tada* $\forall u \in X$ *teisinga formulė*

$$\partial(f_1 + \ldots + f_n)(u) = \partial f_1(u) + \ldots + \partial f_n(u). \tag{8.30}$$

Šių teoremų įrodymą galima rasti [16], [57] knygose.

8.7. MINIMIZUOJANČIOS SEKOS

Tegu X yra realioji Banacho erdvė, $f : \mathrm{X} \to (-\infty, \infty]$ – netiesinis funkcionalas, $M \subset \mathrm{X}$ – erdvės X poaibis.

A p i b r ė ž i m a s. Sakysime, seka $\{u_n\} \subset M$ yra *minimizuojanti* aibėje M, jeigu

$$\lim_{n\to\infty} f(u_n) = \inf_{v\in M} f(v). \tag{8.31}$$

Ištirsime iškiliųjų funkcionalų minimizuojančių sekų konvergavimo į globalaus minimumo tašką klausimą. Ne kiekvienas iškilasis funkcionalas turi globalaus minimumo tašką. Pavyzdžiui, funkcija $\varphi(t) = e^t$ visoje tiesėje yra iškila, bet globalaus minimumo taško neturi. Be to, ne kiekviena minimizuojanti seka konverguoja į minimumo tašką, netgi tuo atveju, kai funkcionalas yra iškilas (arba net griežtai iškilas).

P a v y z d y s. Tegu H yra realioji Hilberto erdvė ir $\{e_n\} \subset H$ – pilna ortonormuota sistema. Edvėje H funkcionalas

$$f(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(u,\, e_k)^2}{k^2}$$

yra griežtai iškilas (įrodykite !). Taškas $u = 0$ yra šio funkcionalo globalaus minimumo taškas, nes $f(0) = 0$ ir $f(u) > 0$, kai $u \neq 0$. Seka $u_n = \sqrt{n}e_n$, $n = 1, 2, \ldots,$ yra šio funkcionalo minimizuojanti seka, nes $f(u_n) = 1/n \to 0$, kai $n \to \infty$. Tačiau $\|u_n\| = \sqrt{n} \to \infty$, kai $n \to \infty$.

Iš šio pavyzdžio matome, kad minimizuojančios sekos gali būti neaprėžtos. Todėl svarbu žinoti, kokias sąlygas turi tenkinti funkcionalas f, kad minimizuojanti seka būtų aprėžta. Išskirsime vieną iš tokių sąlygų.

8.17 teorema. *Tegu* X *yra realioji Banacho erdvė,* $M \subset \mathrm{X}$ *– erdvės* X *poaibis ir su kiekvienu* $a \in \mathbb{R}^1$ *aibė* $M(a) = \{v : v \in M, f(v) \leq a\}$ *yra aprėžta. Tada kiekviena minimizuojanti seka iš aibės* M *yra aprėžta.*

◁ Tegu $\{u_n\} \subset M$ yra minimizuojanti seka ir

$$d = \inf_{v\in M} f(v) < \infty.$$

Imkime skaičių $a > d$. Seka $\{u_n\}$ minimizuojanti, todėl $f(u_n) \to d$ ir galima nurodyti tokį skaičių $N \in \mathbb{N}$, kad $f(u_n) < a$, kai $n \geq N$. Todėl tokiems n elementai $u_n \in M(a)$ ir seka $\{u_n\}$ yra aprėžta. ▷

10 išvada *Tegu* X *yra refleksyvioji Banacho erdvė,* $f : \mathrm{X} \to \mathbb{R}^1$ *ir egzistuoja toks elementas* $u \in M$, *kad*

$$d = \inf_{v\in M} f(v) = f(u).$$

Be to, tegu su kiekvienu $a \in \mathbb{R}^1$ *aibė* $M(a)$ *aprėžta. Tada iš kiekvienos minimizuojančios sekos* $\{u_n\} \subset M$ *galima išskirti silpnai konverguojantį į* u *posekį.*

P a s t a b a. Atkreipsime dėmesį į tai, kad aibė $M(a)$ yra aprėžta su kiekvienu $a \in \mathbb{R}^1$, jeigu $f(u) \to +\infty$, kai $\|u\|_X \to \infty$.

Apibrėšime minimizavimo uždavinio korektiškumo sąvoką pagal A. N. Tichonovą.

A p i b r ė ž i m a s. Sakysime, funkcionalo f minimizavimo uždavinys aibėje $M \subset X$ *suformuluotas korektiškai*, jeigu patenkintos tokios trys sąlygos:

1. Egzistuoja toks elementas $u \in M$, kad
$$f(u) = \inf_{v \in M} f(v).$$
2. Jeigu $u_1, u_2 \in M$ ir
$$f(u_1) = f(u_2) = \inf_{v \in M} f(v),$$
tai $u_1 = u_2$.
3. Jeigu seka $\{u_n\}$ yra minimizuojanti ir
$$f(u_n) \to f(u_0) = \inf_{v \in M} f(v),$$
tai $u_n \to u$ erdvėje X, kai $n \to \infty$.

8.8. DIRICHLĖ PRINCIPAS

Tegu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ yra aprėžta sritis, $S = \partial\Omega$, $f \in \mathrm{L}_2(\Omega)$ ir

$$J(v) = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega v_x^2\,dx - \int\limits_\Omega fv\,dx, \quad v \in \mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega), \tag{8.32}$$

integralinis funkcionalas. Nagrinėsime uždavinį: rasti tokią funkciją $u \in \mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)$, kad

$$J(u) = \inf_{v\in\mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)} F(v). \tag{8.33}$$

Funkcionalo J pirmoji variacija

$$\delta J(u,\eta) = \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n u_{x_i}\eta_{x_i}\,dx - \int\limits_\Omega f\eta\,dx = 0, \quad \forall\, v \in \mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega),$$

tada ir tik tada, kai u yra apibendrintas Dirichlė uždavinio

$$-\,\Delta u = f(x), \quad x \in \Omega, \tag{8.34}$$
$$u|_S = 0, \quad x \in S, \tag{8.35}$$

sprendinys (žr. 4.1 skyrelį).

Priminsime, kad funkcija $u \in \mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)$ yra apibendrintas Dirichlė uždavinio sprendinys, jeigu teisinga integralinė tapatybė

$$\int\limits_\Omega \Big(\sum_{i=1}^n u_{x_i}v_{x_i} - fv\Big)\,dx = 0, \quad \forall v \in \mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)\,. \tag{8.36}$$

Dirichlė principas teigia, kad (8.34), (8.35) uždavinio sprendimas gali būti suvestas į (8.33) minimizavimo uždavinio sprendimą. Šį principą XIX amžiaus viduryje savo paskaitose suformulavo P. Dirichlė. Beveik visą šimtmetį jis buvo žymių matematikų – K. Vejerštraso, D. Hilberto, A. Puankare, R. Kuranto, S. L. Sobolevo – dėmesio centre. K. Vejerštrasas parodė, kad glodžių funkcijų klasėje šie uždaviniai nėra ekvivalentūs. Tik S. L. Sobolevas, įvedęs apibendrintųjų funkcijų erdves, vadinamas jo vardu, įrodė, kad (8.34), (8.35) ir (8.33) uždaviniai yra ekvivalentūs erdvėje $\mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)$. Remiantis šiuo principu, konstruojant (8.32) funkcionalui minimizuojančias sekas galima apytiksliai spręsti minėtą uždavinį. Vienas iš tokių metodų yra Rico metodas.

8.18 teorema. *Integralinis funkcionalas $J : \mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega) \to \mathbb{R}^1$ yra griežtai iškilas, silpnai pustolydis iš apačios ir $J(x) \to +\infty$, kai $\|x\|_{\mathrm{X}} \to \infty$.*

$\triangleleft$ Iš pradžių įrodysime iškilumą. Apibrėžkime funkciją

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= J(tu + (1-t)v) = J(v + t(u-v)) = \\ &= \frac{1}{2}\int\limits_\Omega [v_x + t(u_x - v_x)]^2\,dx - \int\limits_\Omega f(v + t(u-v))\,dx =\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}t^2 \int\limits_\Omega (u_x - v_x)^2\,dx + t\int\limits_\Omega [v_x(u_x - v_x) - f(u-v)]\,dx + \\
&+ \frac{1}{2}\int\limits_\Omega (v_x^2 - 2fv)\,dx.
\end{aligned}
$$

Pagal t ši funkcija yra griežtai iškila. Todėl teisinga nelygybė

$$\varphi(t) = \varphi(t\cdot 1 + (1-t)\cdot 0) < t\varphi(1) + (1-t)\varphi(0), \quad \forall t \in (0,1).$$

Kadangi $\varphi(1) = J(u)$, $\varphi(0) = J(v)$, tai

$$J(tu + (1-t)v) < tJ(u) + (1-t)J(v), \quad \forall t \in (0,1).$$

Taigi funkcionalas J yra griežtai iškilas.

Funkcionalo J pirmoji variacija

$$\delta J(u,v) = \frac{d}{dt}J(u+tv)|_{t=0} =$$

$$= \frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}\int\limits_\Omega (u+tv)_x^2\,dx - \int\limits_\Omega f(u+tv)\,dx\Big)\Big|_{t=0} = \int\limits_\Omega (u_x v_x - fv)\,dx$$

yra tiesinis ir tolydus funkcionalas erdvėje $\mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)$ (žr. 4 skyrių). Todėl egzistuoja funkcionalo J Gato išvestinė ir $J'(u) = \delta J(u,\cdot)$, t.y.

$$\big\langle J'(u),\, v\big\rangle = \delta J(u,v) = \int\limits_\Omega (u_x v_x - fv)\,dx, \quad \forall v \in \mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)\,. \tag{8.37}$$

Remiantis 8.7, lema funkcionalas J yra silpnai pustolydis iš apačios.

Priminsime, kad

$$\|v\|_{\mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)} = \|v_x\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)} + \|v\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)}.$$

Pagal Fridrichso nelygybę egzistuoja tokios teigiamos konstantos c_1, c_2, kad

$$c_1\|v\|_{\mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)} \le \|v_x\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)} \le c_2\|v\|_{\mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)}, \quad \forall v \in \mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)\,.$$

Todėl

$$\|v_x\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} \ge c_1^2\|v\|^2_{\mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)}, \quad \forall v \in \mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)\,. \tag{8.38}$$

Be to,

$$\Big|\int\limits_\Omega fv\,dx\Big| \le \|f\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)}\|v\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)}.$$

Iš šių nelygybių gauname, kad

$$J(v) = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega v_x^2\,dx - \int\limits_\Omega fv\,dx \ge c_1^2\|v\|^2_{\mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)} -$$

$$-\|f\|_{L_2(\Omega)}\|v\|_{L_2(\Omega)} \geq c_1^2\|v\|^2_{\mathring{W}_2^1(\Omega)} - \|f\|_{L_2(\Omega)}\|v\|_{\mathring{W}_2^1(\Omega)} \to \infty,$$

kai $\|v\|_{\mathring{W}_2^1(\Omega)} \to \infty$. ▷

11 išvada *Erdvėje $\mathring{W}_2^1(\Omega)$ (8.34), (8.35) ir (8.33) uždaviniai yra ekvivalentūs, t.y., jeigu $u \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$ tenkina (8.36) integralinę tapatybę, tai u yra (8.33) uždavinio apibendrintasis sprendinys, ir atvirkščiai, jeigu $u \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$ yra (8.33) uždavinio apibendrintasis sprendinys, tai u tenkina (8.36) integralinę tapatybę.*

◁ Funkcionalo J Oilerio lygtis $\langle J'(u), v\rangle = 0$ yra ekvivalenti (8.36) integralinei tapatybei. Todėl belieka tik pasinaudoti 8.12 teorema. ▷

12 išvada *Egzistuoja vienintelis (8.34), (8.35) ir (8.33) uždavinių sprendinys $u \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$.*

◁ Įrodymas išplaukia iš 8.18, 8.3 teoremų ir 11 išvados. ▷

Vietoje (8.34), (8.35) galima nagrinėti bendresnį Dirichlė uždavinį:

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \frac{d}{dx_i}(a_{ij}u_{x_j}) + au = f(x), \quad x \in \Omega; \tag{8.39}$$

$$u|_S = 0, \qquad x \in S. \tag{8.40}$$

Čia $a_{ij} = a_{ji}$ ir a yra aprėžtos mačiosios srityje Ω funkcijos, $f \in L_2(\Omega)$ ir egzistuoja tokia teigiama konstanta ν, kad

$$\sum_{i,j}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \nu\xi^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Tegu

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega \Big(\sum_{i,j}^{n} a_{ij}v_{x_i}v_{x_j} + av^2\Big)\,dx - \int_\Omega fv\,dx. \tag{8.41}$$

Tada (8.39), (8.40) Dirichlė uždavinį atitinka minimizavimo uždavinys: rasti tokią funkciją $u \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$, kad

$$J(u) = \inf_{v \in \mathring{W}_2^1(\Omega)} J(v). \tag{8.42}$$

Priminsime, kad funkcija $u \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$ yra (8.39), (8.40) uždavinio apibendrintas sprendinys, kai teisinga integralinė tapatybė

$$\int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_{x_i}v_{x_j} + auv\Big)\,dx = \int_\Omega fv\,dx, \quad \forall\, v \in \mathring{W}_2^1(\Omega).$$

Analogiškai galima įrodyti (8.39), (8.40) ir (8.42) uždavinių ekvivalentumą, sprendinio egzistavimą ir vienatį erdvėje $\mathring{W}_2^1(\Omega)$.

8.9. NOIMANO UŽDAVINYS

Tegu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ yra aprėžta sritis, $S = \partial\Omega$ – dalimis glodus paviršius, $f \in \mathrm{L}_2(\Omega)$ ir

$$J(u) = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega u_x^2\,dx - \int\limits_\Omega fu\,dx, \quad u \in \mathrm{W}_2^1(\Omega),$$

– integralinis funkcionalas. Jo pirmoji variacija

$$\delta J(u,v) = \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n u_{x_i} v_{x_i}\,dx - \int\limits_\Omega fv\,dx = 0, \quad \forall\, v \in \mathrm{W}_2^1(\Omega), \tag{8.43}$$

tada ir tik tada, kai u yra apibendrintas Noimano uždavinio

$$-\Delta u(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \tag{8.44}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\Big|_S = 0, \quad x \in S, \tag{8.45}$$

sprendinys (žr. 4 skyrių). Įstatę (8.43) į tapatybę $v \equiv 1$, gausime būtiną (8.44), (8.45) Noimano uždavinio apibendrinto sprendinio egzistavimo sąlygą

$$\int\limits_\Omega f(x)\,dx = 0. \tag{8.46}$$

Toliau manysime, kad ši sąlyga yra patenkinta.

Pastebėsime, kad (8.44), (8.45) uždavinio apibendrintas sprendinys nėra vienintelis. Pridėjus prie jo konstantą, vėl gausime apibendrintą sprendinį. Be to, $J(u) = J(u+c)$. Konstantą c visada galima parinkti taip, kad integralas

$$\int\limits_\Omega u\,dx = 0.$$

Todėl Noimano uždavinį patogu nagrinėti erdvės $\mathrm{W}_2^1(\Omega)$ poerdvyje

$$\widehat{\mathrm{W}}_2^1(\Omega) = \Big\{u \in \mathrm{W}_2^1(\Omega) : \int\limits_\Omega u\,dx = 0\Big\}.$$

Noimano uždavinį atitinka minimizavimo uždavinys: reikia rasti tokią funkciją $u \in \widehat{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)$, kad

$$J(u) = \inf_{v \in \widehat{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)} J(v). \tag{8.47}$$

Remiantis 3.5 skyrelio rezultatais, teisinga nelygybė

$$\int\limits_\Omega u^2 dx \le C\Big\{\int\limits_\Omega u_x^2\,dx + \Big(\int\limits_\Omega u\,dx\Big)^2\Big\}, \quad \forall\, u \in \mathrm{W}_2^1(\Omega)\,.$$

Iš čia gauname

$$\int\limits_{\Omega} u^2\,dx \leq C\int\limits_{\Omega} u_x^2\,dx, \quad \forall\, u \in \widehat{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)\,.$$

Kaip ir Dirichlė uždavinio atveju, galima įrodyti, kad erdvėje $\widehat{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)$ funkcionalas J yra griežtai iškilas, silpnai pustolydis iš apačios ir $J(u) \to +\infty$, kai $\|u\|_{\mathrm{W}_2^1(\Omega)} \to \infty$. Kartu galime tvirtinti, kad teisingas toks teiginys.

13 išvada *Tegu funkcija f tenkina (8.46) sąlygą. Tada (8.44), (8.45) ir (8.47) uždaviniai yra ekvivalentūs erdvėje $\widehat{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)$, t.y., jeigu $u \in \widehat{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)$ yra (8.44), (8.45) uždavinio apibendrintasis sprendinys, tai u yra (8.47) uždavinio sprendinys, ir atvirkščiai, jeigu $u \in \widehat{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)$ yra (8.47) uždavinio sprendinys, tai u yra (8.44), (8.45) uždavinio apibendrintasis sprendinys. Be to, toks sprendinys egzistuoja ir yra vienintelis.*

8.10. KVADRATINIO FUNKCIONALO MINIMUMAS

Tegu $J = J(u,v)$ yra bitiesinis simetrinis funkcionalas, apibrėžtas Hilberto erdvėje H. Priminsime, kad funkcionalas J yra simetrinis, jeigu

$$J(u,v) = J(v,u), \quad \forall u, v \in \mathrm{H}\,.$$

Paprasčiausias bitiesinis funkcionalas erdvėje H yra skaliarinė sandauga, apibrėžta šioje erdvėje. bitiesinis simetrinis funkcionalas vadinamas *homogeniniu kvadratiniu funkcionalu.* Jeigu $u = v$, tai reiškinį $J(u,u)$ žymėsime $J(u)$. Tiesiogiai galima įsitikinti, kad simetriniamas funkcionalams teisinga formulė

$$J(u+v) = J(u) + 2J(u,v) + J(v).$$

Tegu J yra homogeninis kvadratinis funkcionalas, ℓ – tiesinis funkcionalas. Tada funkcionalas $J + \ell : \mathrm{H} \to \mathbb{R}$ vadinamas *kvadratiniu funkcionalu.*

P a v y z d y s. Tegu $f \in \mathrm{L}_2(a,b)$. Tada

$$J(u) = \int_a^b (u_x^2 + u^2)\,dx - 2\int_a^b fu\,dx$$

yra kvadratinis funkcionalas erdvėje $\mathrm{W}_2^1(a,b)$.

Tegu Ω yra aprėžta erdvėje $\mathbb{R}^n sritis$, $f \in \mathrm{L}_2(\Omega)$, $a_{ij} = a_{ji}$, $a \in \mathrm{L}_\infty(\Omega)$, $\forall i, j = 1, \dots, n$, ir egzistuoja toks skaičius $\nu > 0$, kad

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \nu\xi^2, \quad \forall \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n,\ x \in \Omega.$$

Be to, b.v. $x \in \Omega$ $a(x) \geq 0$, Tada bitiesinis funkcionalas

$$[u,v] = \int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i}v_{x_j} + auv\Big)\,dx, \quad \forall u, v \in \mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega),$$

tenkina skaliarinės sandaugos apibrėžimo sąlygas. Šią skaliarinę sandaugą atitinka norma

$$\| u \| = \sqrt{[u,u]}.$$

Aibė $\mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)$ su taip apibrėžta norma yra Hilberto erdvė. Ją žymėsime raide H . Taikant Fridrichso nelygybę, galima įrodyti, kad erdvėje $\mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)$ norma $\| \cdot \|$ yra ekvivalenti normai $\|\cdot\|_{\mathrm{W}_2^1(\Omega)}$. Todėl erdvės H ir $\mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)$ sutampa.

Tegu

$$\ell(u) = -2\int_\Omega fu\,dx.$$

Tada formulė

$$J(u) = [u,u] + \ell(u)$$

apibrėžia kvadratinį funkcionalą $J : \mathrm{H} \to \mathbb{R}$.

8.19 teorema. *Funkcionalas $J : \mathrm{H} \to \mathbb{R}$ yra silpnai pustolydis iš apačios ir tenkina sąlygą*

$$J(u) \to +\infty,$$

kai $\|u\|_{\mathrm{H}} \to \infty$.

◁ Iš pradžių įrodysime, kad $J(u) \to \infty$, kai $\|u\|_{\mathrm{H}} \to \infty$. Pasinaudoję Helderio bei Fridrichso nelygybėmis, įvertinsime funkcionalo $\ell(u)$ modulį

$$|\ell(u)| \leq 2\|f\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)}\|u\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)} \leq$$

$$\leq 2(\operatorname{diam}\Omega)\|f\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)}\|u_x\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)} \leq 2\nu^{-1/2}(\operatorname{diam}\Omega)\|u\|.$$

Iš šio įverčio išplaukia, kad funkcionalas $\ell(u)$ aprėžtas. Todėl

$$J(u) = \|u\|^2 + \ell(u) \to \infty,$$

kai $\|u\| \to \infty$.

Funkcionalo J pokytis

$$J(u+\eta) - J(u) = \|u+\eta\|^2 + \ell(u+\eta) - \|u\|^2 - \ell(u) =$$

$$= 2[u,\eta] + \ell(\eta) + \|\eta\|^2 = \delta J(u,\eta) + \|\eta\|^2.$$

Todėl jo antroji variacija

$$\delta^2 J(u,\eta) = 2\|\eta\|^2 \geq 0, \quad \forall \eta \in \mathrm{H},$$

ir funkcionalas J yra iškilas. Remiantis 8.7 lema, galime tvirtinti, kad J yra silpnai pustolydis iš apačios funkcionalas. ▷

14 išvada *Egzistuoja toks elementas $u \in \mathrm{H}$, kad*

$$J(u) = \min_{v \in \mathrm{H}} J(v).$$

Be to, jis yra vienintelis.

◁ Iš tikrųjų

$$J(u+\eta) - J(u) = \|\eta\|^2 \geq 0, \quad \forall \eta \in \mathrm{H},$$

ir lygybė galima tik tuo atveju, kai $\eta = 0$. ▷

Tarkime, funkcija $u \in \mathrm{H}$ suteikia funkcionalui J minimumą. Tada

$$\delta J(u,\eta) = 0, \quad \forall \eta \in \mathrm{H}\,.$$

Šią sąlygą galima perrašyti taip:

$$\int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} \eta_{x_j} + a u \eta \Big)\, dx = \int_\Omega f \eta \, dx, \quad \forall \eta \in \mathrm{H}\,.$$

Pagal apibendrinto sprendinio apibrėžimą (žr. 4.1 skyrelį) u yra Dirichlė uždavinio

$$A\,u = f(x), \quad x \in \Omega; \quad u|_S = 0 \tag{8.48}$$

apibendrintas sprendinys erdvėje $\mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)$. Čia

$$A\,u = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}u_{x_j}) + au.$$

Tarkime, u yra (8.48) Dirichlė uždavinio apibendrintas sprendinys. Tada funkcionalo J pokytis

$$J(u+\eta) - J(u) = \delta J(u,\eta) + \|\eta\|^2 = \|\eta\|^2 \geq 0, \quad \forall \eta \in \mathrm{H},$$

ir pagal apibrėžimą u yra funkcionalo J minimumo taškas. Be to, toks taškas yra vienintelis. Todėl galime tvirtinti, kad (8.48) Dirichlė uždavinys turi vienintelį apibendrintą sprendinį erdvėje $\mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)$.

Tegu $\varphi \in \mathrm{H}$. Pažymėkime

$$U_\varphi = \{u \in \mathrm{W}_2^1(\Omega) : u - \varphi \in \mathrm{H}\}.$$

Remiantis bendra teorija (žr. 8.2 skyrelį), egzistuoja toks elementas $u \in U_\varphi$, kad

$$J(u) = \min_{v \in U_\varphi} J(v).$$

Kartu galime tvirtinti, kad Dirichlė uždavinys

$$A\,u = f(x), \quad x \in \Omega; \quad u\big|_S = \varphi$$

aibėje U_φ turi apibendrintą sprendinį, kuris yra vienintelis.

8.11. ELIPSINIŲ OPERATORIŲ TIKRINĖS REIKŠMĖS IR TIKRINĖS FUNKCIJOS

Tarkime, operatoriaus A koeficientai tenkina 8.10 skyrelyje nurodytas sąlygas. Nagrinėsime Šturmo–Liuvilio uždavinį: reikia rasti tas parametro λ reikšmes, kurioms egzistuoja netrivialus Dirichlė uždavinio

$$A\,u = \lambda u, \quad x \in \Omega; \quad u|_S = 0 \tag{8.49}$$

sprendinys.

Tegu

$$J(u) = [u,u] = \int\limits_{\Omega} \Big(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} + a u^2 \Big)\, dx, \quad \ell(u) = \|u\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)}.$$

Iš 8.19 teoremos įrodymo išplaukia, kad funkcionalas J yra silpnai pustolydis iš apačios ir $J(u) \to +\infty$, kai $\|u\| \to \infty$. Įrodysime, kad funkcionalas ℓ yra silpnai tolydus.

Tegu $u_k \rightharpoonup u$ erdvėje $\mathring{\mathrm{W}}{}^1_2(\Omega)$. Tada $u_k \to u$ erdvėje $\mathrm{L}_2(\Omega)$ (žr. 3.3 skyrelį). Kartu galime tvirtinti, kad

$$\ell(u_k) \to \ell(u),$$

kai $n \to \infty$.

Tegu

$$\mathfrak{M}_1 = \{u \in \mathring{\mathrm{W}}{}^1_2(\Omega) : \ell(u) = 1\}.$$

Tada egzistuoja toks elementas $u_1 \in \mathfrak{M}_1$, kad

$$J(u_1) = \inf_{u \in \mathfrak{M}_1} J(u).$$

Įrodysime, kad u_1 nėra funkcionalo ℓ stacionarusis taškas. Tarkime priešingai, kad

$$\delta\ell(u_1,\eta) = 0, \quad \forall \eta \in \mathring{\mathrm{W}}{}^1_2(\Omega)\,.$$

Remiantis funkcionalo ℓ apibrėžimu, pastarąją sąlygą galima perrašyti taip:

$$(u_1,\eta) = 0, \quad \forall \eta \in \mathring{\mathrm{W}}{}^1_2(\Omega)\,.$$

Taigi u_1 yra ortogonalus kiekvienam erdvės $\mathring{\mathrm{W}}{}^1_2(\Omega)$ elementui. Tačiau aibė $\mathring{\mathrm{W}}{}^1_2(\Omega)$ yra tiršta erdvėje $\mathrm{L}_2(\Omega)$. Todėl $u_1 = 0$. Gauta prieštara įrodo, kad padaryta prielaida yra neteisinga ir u_1 nėra funkcionalo ℓ stacionarusis taškas.

Funkcionalai J ir ℓ tenkina Oilerio teoremos sąlygas (žr. 8.4 skyrelį). Todėl egzistuoja toks skaičius λ_1, kad u_1 yra stacionarusis funkcionalo $J - \lambda_1 \ell$ taškas, t.y.

$$\delta J(u_1,\eta) - \lambda_1 \delta\ell(u_1,\eta) = 0, \quad \forall \eta \in \mathring{\mathrm{W}}{}^1_2(\Omega)\,.$$

Šią sąlygą galima perrašyti taip:

$$[u_1,\eta] - \lambda_1 (u_1,\eta) = 0, \quad \forall \eta \in \mathring{\mathrm{W}}{}^1_2(\Omega)\,. \tag{8.50}$$

Kartu galime tvirtinti, kad λ_1 yra (8.49) Šturmo–Liuvilio uždavinio tikrinė reikšmė, o u_1 – ją atitinkanti tikrinė funkcija.

Imkime (8.50) tapatybėje $\eta = u_1$. Kadangi $(u_1, u_1) = 1$, tai

$$J(u_1) = \| u_1 \|^2 = \lambda_1,$$

t.y. mažiausia funkcionalo J reikšmė aibėje $\mathfrak{M}_1$ lygi λ_1.

Tegu

$$\mathfrak{M}_2 = \{u \in \mathring{W}_2^1(\Omega) : \ell(u) = 1,\ \ell_1(u) = 0\}, \quad \ell_1(u) = (u, u_1).$$

Funkcionalas ℓ_1 yra silpnai tolydus erdvėje $\mathring{W}_2^1(\Omega)$ (patikrinkite). Todėl egzistuoja toks elementas $u_2 \in \mathfrak{M}_2$, kad

$$J(u_2) = \inf_{u \in \mathfrak{M}_2} J(u).$$

Be to, u_2 nėra funkcionalų ℓ ir ℓ_1 stacionarusis taškas. Pagal Oilerio teoremą (žr. 8.4 skyrelį) egzistuoja tokie skaičiai λ_2 ir μ_2, kad u_2 yra stacionarusis funkcionalo $J - \lambda_2 \ell - \mu_2 \ell_1$ taškas, t.y.

$$\delta J(u_2, \eta) - \lambda_1 \delta \ell(u_2, \eta) - \mu_2 \delta \ell_1(u_2, \eta) = 0, \quad \forall \eta \in \mathring{W}_2^1(\Omega)\,.$$

Šią sąlygą galima perrašyti taip:

$$[u_2, \eta] - \lambda_2 (u_2, \eta) - \mu_2 (u_1, \eta) = 0, \quad \forall \eta \in \mathring{W}_2^1(\Omega)\,. \tag{8.51}$$

Imkime čia $\eta = u_1$. Pagal aibės $\mathfrak{M}_2$ apibrėžimą $(u_2, u_1) = 0$. Be to,

$$[u_2, u_1] = \lambda_1 (u_2, u_1) = 0.$$

Todėl $\mu_2 = 0$ ir (8.51) sąlygą galima perrašyti taip:

$$[u_2, \eta] - \lambda_2 (u_2, \eta) = 0, \quad \forall \eta \in \mathring{W}_2^1(\Omega)\,.$$

Taigi λ_2 yra (8.49) Šturmo–Liuvilio uždavinio tikrinė reikšmė, o u_2 – ją atitinkanti tikrinė funkcija.

Imkime šioje tapatybėje $\eta = u_2$. Tada

$$J(u_2) = \| u \|^2 = \lambda_2;$$

t.y. mažiausia funkcionalo J reikšmė aibėje $\mathfrak{M}_2$ lygi λ_2.

Taip samprotaudami toliau, gausime, kad egzistuoja toks elementas

$$u_k \in \mathfrak{M}_k = \{u \in \mathring{W}_2^1(\Omega) : \ell(u) = 1,\ \ell_i(u) = 0,\ \forall i = 1, \ldots, k-1\},$$

$$\ell_{k-1}(u) = (u, u_{k-1}),$$

ir skaičius λ_k, kad

$$J(u_k) = \inf_{u \in \mathfrak{M}_k} J(u),$$

$$[u_k, \eta] - \lambda_k (u_k, \eta) = 0, \quad \forall \eta \in \mathring{W}_2^1(\Omega)\,.$$

Kartu galime tvirtinti, kad λ_k yra (8.49) Šturmo–Liuvilio uždavinio tikrinė reikšmė, o u_k – ją atitinkanti tikrinė funkcija. Be to, $J(u_k) = \lambda_k$, t.y. mažiausia funkcionalo J reikšmė aibėje $\mathfrak{M}_k$ lygi λ_k.

8.20 teorema. *Tegu* $\{\lambda_k\}$ *yra* (8.49) *Šturmo–Liuvilio uždavinio tikrinės reikšmės ir* $\{u_k\}$ *yra jas atitinkančios tikrinės funkcijos. Tada:*

1. *Tikrinės reikšmės* $\{\lambda_k\}$ *yra artėjančių į* $+\infty$ *realių skaičių seka.*
2. *Tikrinės funkcijos* $\{u_k\}$ *yra pilna erdvėse* $\mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)$ *ir* $\mathrm{L}_2(\Omega)$ *funkcijų sistema.*

◁ Iš pradžių pastebėsime, kad

$$J(u_k) = \|u_k\|^2 = \lambda_k \geq 0.$$

Įrodysime, kad $\lambda_k \to \infty$, kai $k \to \infty$. Tarkime priešingai, kad egzistuoja tokia konstanta C, kad

$$\lambda_k \leq C, \quad \forall k = 1, 2, \ldots$$

Tada seka $\{u_k\}$ yra aprėžta erdvėje $\mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)$. Todėl iš jos galima išskirti posekį

$$u_{n_k} \rightharpoonup u \in \mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega).$$

Be to, $(u_{n_k}, u) = 0, \forall k = 1, 2, \ldots$ Tačiau $(u_{n_k}, u) \to (u, u) = 1$, kai $k \to \infty$. Gauta prieštara įrodo, kad $\lambda_k \to \infty$, kai $k \to \infty$.

Aibė

$$\mathrm{H}_\infty = \{u \in \mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega) : (u, u_k) = 0, \ \forall k = 1, 2, \ldots\}$$

yra erdvės $\mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)$ poerdvis. Reikia įrodyti, kad $\mathrm{H}_\infty = \{0\}$. Tarkime priešingai. Tada egzistuoja toks skaičius λ_∞, kad

$$\inf_{u \in \mathfrak{M}_\infty} J(u) = \lambda_\infty, \quad \mathfrak{M}_\infty = \{u \in \mathrm{H}_\infty : \ell(u) = 1\}.$$

Pagal aibės $\mathfrak{M}_\infty$ apibrėžimą $\lambda_\infty \geq \lambda_k, \forall k = 1, 2, \ldots$ Tačiau $\lambda_k \to \infty$, kai $k \to \infty$. Gauta prieštara įrodo, kad $\mathrm{H}_\infty = \{0\}$. Taigi tikrinės funkcijos $\{u_k\}$ yra tiršta aibė erdvėje $\mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)$.

Erdvė $\mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)$ yra tiršta aibė erdvėje $\mathrm{L}_2(\Omega)$. Todėl $\{u_k\}$ yra pilna funkcijų sistema ir erdvėje $\mathrm{L}_2(\Omega)$. ▷

P a s t a b a. Šioje konstrukcijoje tikrinės funkcijos $u_1, \ldots, u_k$ randamos nuosekliai. Tačiau tikrinę funkciją u_k galima rasti iš anksto nežinant tikrinių funkcijų $u_1, \ldots, u_{k-1}$. Šiuo atveju reikia pasinaudoti Kuranto teorema (žr. [25]). Pastarojoje tvirtinama, kad

$$\sup \lambda(\varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1}) = \lambda_k;$$

čia supremumas imamas pagal visus galimų funkcijų $\varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1} \in \mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)$ rinkinius,

$$\lambda(\varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1}) = \inf_{u \in \mathfrak{M}_k} J(u),$$

$$\mathfrak{M}_k = \{u \in \mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega) : \|u\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} = 1, \ (u, \varphi_i) = 0, \ \forall i = 1, \ldots, k-1\}.$$

Tokio minimaksimalaus uždavinio sprendinys ir yra tikrinė funkcija u_k.

9 SKYRIUS

Topologiniai metodai

9.1. BANACHO TEOREMA APIE NEJUDAMĄJĮ TAŠKĄ

Tegu X yra pilna metrinė erdvė, $d(\cdot,\cdot)$ – atstumas erdvėje ir atvaizdis T veikia iš X į X. Daugelis algebrinių, diferencialinių ir integralinių lygčių gali būti suvestos į operatorinę lygtį

$$u = Tu. \tag{9.1}$$

A p i b r ė ž i m a s. Atvaizdį $T : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ vadinsime *sutraukiančiuoju*, jeigu egzistuoja toks teigiamas skaičius $\lambda \in (0,1)$, kad

$$d(Tu, Tv) \le \lambda d(u,v), \quad \forall u, v \in \mathrm{X}. \tag{9.2}$$

9.1 teorema. (Banacho apie nejudamąjį tašką) *Tegu* X *yra pilna metrinė erdvė ir* $T : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ *– sutraukiantysis atvaizdis. Tada:*

1. *Egzistuoja vienintelis* (9.1) *lygties sprendinys.*
2. *Seka* $\{u_n\}$*, apibrėžiama formulėmis*

$$u_{n+1} = Tu_n, \quad n = 0, 1, 2. \dots, \quad u_0 \in \mathrm{X}, \tag{9.3}$$

artėja į lygties (9.1) *sprendinį* u *ir yra teisingas įvertis*

$$d(u_n, u) \le \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(u_0, u_1). \tag{9.4}$$

◁ Iš įverčių

$$d(u_n, u_{n+1}) = d(Tu_{n-1}, Tu_n) \le \lambda d(u_{n-1}, u_n) \le$$
$$\le \lambda^2 d(u_{n-2}, u_{n-1}) \le \ldots \le \lambda^n d(u_0, u_1),$$

$$d(u_n, u_{n+m}) \le \sum_{r=0}^{m-1} d(u_{n+r}, u_{n+r+1}) \le$$
$$\le \sum_{r=0}^{m-1} \lambda^{n+r} d(u_0, u_1) \le \lambda^n (1-\lambda)^{-1} d(u_0, u_1) \tag{9.5}$$

išplaukia, kad seka $\{u_n\}$ yra fundamentali. Kadangi erdvė X yra pilna, tai seka $\{u_n\}$ konverguoja. Tegu u yra šios sekos riba. Iš (9.2) išplaukia, kad T yra tolydusis atvaizdis. Todėl

$$u = \lim_{n\to\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to\infty} Tu_n = T\Big(\lim_{n\to\infty} u_n\Big) = Tu.$$

Taigi u yra (9.1) lygties sprendinys. Įrodysime sprendinio vienatį. Tegu u ir v yra (9.1) lygties sprendiniai. Tada atstumas tarp jų

$$d(u,v) = d(Tu,Tv) \le \lambda d(u,v).$$

Kadangi $\lambda \in (0,1)$, tai $d(u,v) = 0$ ir $u = v$.

Fiksuokime (9.5) nelygybėje kokį nors n ir m artinkime į ∞. Tada gausime, kad seka $\{u_n\}$ artėja į u ir teisinga (9.4) nelygybė. ▹

Tegu X yra Banacho erdvė. Kiekvienas uždaras erdvės X poaibis yra pilna metrinė erdvė. Todėl Banacho teoremą apie nejudamą tašką galima performuluoti taip:

9.2 teorema. *Tegu* X *yra Banacho erdvė,* $\|\cdot\|$ *– norma erdvėje* X*,* M *– netuščia uždara aibė erdvėje* X *ir* $T : M \to M$ *– sutraukiantysis atvaizdis. Tada:*

1. *Egzistuoja vienintelis* (9.1) *lygties sprendinys* $u \in M$*.*
2. *Seka* $\{u_n\}$*, apibrėžiama formulėmis*

$$u_{n+1} = Tu_n, \quad n = 0,1,2\ldots, \quad u_0 \in M,$$

artėja į lygties (9.1) *sprendinį* $u \in M$ *ir teisingas įvertis*

$$\|u_n - u\| \le \frac{\lambda^n}{1-\lambda}\|u_0 - u_1\|.$$

Tegu X yra pilna metrinė erdvė ir $T : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$. Atvaizdžio T n-ąjį laipsnį apibrėkime formule

$$T^n u = T(T^{n-1}u).$$

9.1 lema. *Jeigu su kokiu nors* $n \in \mathbb{N}$ *atvaizdis* T^n *yra sutraukiantysis, tai* (9.1) *lygtis erdvėje* X *turi vienintelį sprendinį.*

◃ Tegu $S = T^n$ yra sutraukiantysis atvaizdis. Remiantis 9.1 teorema, egzistuoja vienintelis lygties $Su = u$ sprendinys. Todėl

$$S^k u = u, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Kartu galime tvirtinti, kad

$$Tu = T(S^k u) = S^k(Tu), \qquad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{9.6}$$

Įrodysime, kad

$$S^k(v) \to u, \quad \forall v \in \mathrm{X}, \tag{9.7}$$

kai $k \to \infty$. Laisvai pasirenkame elementą $v \in \mathrm{X}$. Tada

$$\begin{aligned} d(S^k v, u) &= d(S^k v, S^k u) \le \\ &\le \lambda\, d(S^{k-1}v, S^{k-1}(u)) \le \\ &\le \lambda^2\, d(S^{k-2}v, S^{k-2}u) \le \\ &\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\le \lambda^k\, d(v,u) \to 0, \end{aligned}$$

kai $k \to \infty$. Todėl $Tu = S^k(Tu) \to u$, kai $k \to \infty$, ir $T(u) = u$. $\triangleright$

Pateiksime keletą Banacho teoremos taikymo pavyzdžių. Tegu $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tolydi funkcija. Tada Koši uždavinio

$$y'(x) = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{9.8}$$

sprendimas tolygiai diferencijuojamų funkcijų klasėje yra ekvivalentus integralinės lygties

$$y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(s, y(s))\, ds \tag{9.9}$$

sprendimui tolydžių funkcijų klasėje.

Apibrėžkime integralinį operatorių T formule

$$Ty(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(s, y(s))\, ds.$$

Tada (9.9) lygtį galima perrašyti

$$y = Ty. \tag{9.10}$$

Tegu

$$Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| \le a,\ |y - y_0| \le b\}.$$

Be to, tegu stačiakampyje Q funkcija f yra aprėžta ir kintamojo y atžvilgiu tenkina Lipšico sąlygą, t.y.

$$|f(x, y)| \le K, \quad \forall (x, y) \in Q,$$

ir

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le L|y_1 - y_2|, \quad \forall (x, y_1), (x, y_2) \in Q;$$

čia a, b, K, L – teigiamos konstantos.

9.3 teorema. (Pikaro–Lindeliofo) *Tegu* $\mathrm{X} = \mathrm{C}[x_0 - c, x_0 + c]$ *ir*

$$M = \{y \in \mathrm{X} : \|y - y_0\|_{\mathrm{X}} \le b\};$$

čia skaičius c *tenkina nelygybes:*

$$0 < c < a, \quad cK < b, \quad cL < 1.$$

Tada:

1. *Aibėje* M *egzistuoja vienintelis* (9.9) *lygties sprendinys* $y = y(x)$. *Be to, šis sprendinys yra tolygiai diferencijuojamas segmente* $[x_0 - c, x_0 + c]$ *ir tenkina* (9.8) *lygtį bei pradinę sąlygą.*

2. *Nuoseklieji artiniai*

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(s, y_n(s))\, ds, \quad y_0(x) = y_0, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

segmente $[x_0 - c, x_0 + c]$ *tolygiai konverguoja į sprendinį* y.

◁ Pakanka patikrinti, kad operatorius T tenkina 9.2 teoremos sąlygas. Pagal prielaidą $\|y(x) - y_0\|_{\mathrm{X}} \leq b$. Todėl

$$\|Ty - y_0\|_{\mathrm{X}} \leq \max_{|x-x_0|<c} \Big| \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\, ds \Big| \leq cK \leq b.$$

Taigi $T : M \to M$.

Tegu $y_1, y_2 \in M$. Tada

$$\|Ty_1 - Ty_2\|_{\mathrm{X}} \leq \max_{|x-x_0|<c} \Big| \int_{x_0}^{x} L|y_1(s) - y_2(s)|\, ds \Big| \leq$$

$$\leq \lambda \|y_1 - y_2\|_{\mathrm{X}}, \quad \lambda = cL < 1.$$

Taigi operatorius T yra sutraukiantysis. ▷

Tegu $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b,\ a < y < b\}$, $K \in \mathrm{L}_2(Q)$, $f \in \mathrm{L}_2(a, b)$ ir $\mu \in \mathbb{R}$. Tada yra teisinga tokia teorema.

9.4 teorema. *Integralinė lygtis*

$$u(x) = f(x) + \mu \int_a^b K(x, y) u(y)\, dy \tag{9.11}$$

turi vienintelį sprendinį erdvėje $\mathrm{L}_2(a, b)$, *kai* $|\mu|$ *yra pakankamai mažas.*

◁ Apibrėžkime operatorių T formule

$$Tv(x) = f(x) + \mu \int_a^b K(x, y) v(y)\, dy.$$

Įrodysime, kad operatorius $T : \mathrm{L}_2(a, b) \to \mathrm{L}_2(a, b)$ tenkina 9.1 teoremos sąlygas. Tegu

$$\psi(x) = \int_a^b K(x, y) v(y)\, dy, \quad v \in \mathrm{L}_2(a, b)\,.$$

Pagal Helderio nelygybę

$$|\psi(x)|^2 = \Big(\int_a^b K(x, y) v(y)\, dy \Big)^2 \leq \Big(\int_a^b |K(x, y)|^2 dy \Big) \Big(\int_a^b |v(y)|^2 dy \Big).$$

Integruodami šią nelygybę pagal x nuo a iki b, gausime

$$\int_a^b |\psi(x)|^2\, dx \leq \Big(\int_a^b |v(y)|^2\, dy \Big) \int_a^b \Big(\int_a^b |K(x, y)|^2 dy \Big) dx < \infty.$$

Todėl $\psi \in \mathrm{L}_2(a,b)$ ir galime tvirtinti, kad $T : \mathrm{L}_2(a,b) \to \mathrm{L}_2(a,b)$. Parodysime, kad pakankamai mažiems $|\mu|$. operatorius T yra sutraukiantysis. Tegu $v,\ w \in \mathrm{L}_2(a,b)$. Tada

$$\|Tv - Tw\|_{\mathrm{X}} = \Big\|\mu \int\limits_a^b K(x,y)[v(y) - w(y)]\,dy\Big\|_{\mathrm{L}_2(a,b)} \leq$$

$$\leq |\mu|\|K\|_{\mathrm{L}_2(Q)}\|v - w\|_{\mathrm{L}_2(a,b)} = \lambda\|v - w\|_{\mathrm{L}_2(a,b)};$$

čia $\lambda = \mu|\|K\|_{\mathrm{L}_2(Q)}$. Akivaizdu, kad $\lambda < 1$, kai $|\mu| < 1/\|K(x,y)\|_{\mathrm{L}_2(Q)}$. Todėl tokiems μ operatorius T yra sutraukiantysis. Pagal 9.1 teoremą egzistuoja vienintelis (9.11) integralinės lygties sprendinys $u \in \mathrm{L}_2(Q)$. $\triangleright$

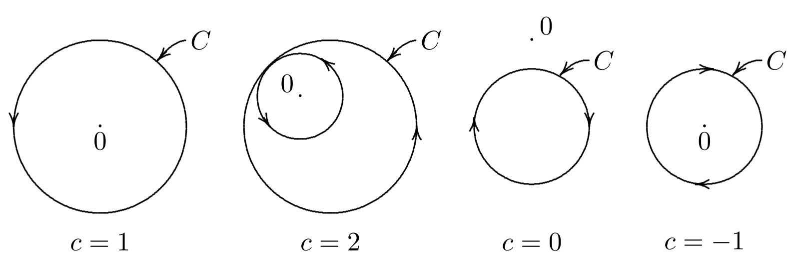
9.2. ATVAIZDŽIO LAIPSNIS IR BRAUERIO TEOREMA

Tegu $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}$. Šiame skyrelyje panagrinėsime Brauerio teoremą, tvirtinančią, kad *tolydusis atvaizdis* $\overline{B}_r \to \overline{B}_r$ *turi bent vieną nejudamą tašką.* Brauerio teorema bei jos išvadomis remiasi daugelis šio skyriaus teiginių. Yra žinoma keletas Brauerio teoremos įrodymų. Tačiau visi jie yra gana sudėtingi. Be to, Brauerio teoremoje kalbama tik apie baigtinio matavimo erdves. Šiame skyrelyje pasirinksime netiesioginį Brauerio teoremos įrodymo būdą. Iš pradžių apibrėšime atvaizdžio laipsnio sąvoką. Po to, remdamiesi šios sąvokos savybėmis, įrodysime Brauerio teoremą. Atkreipsime dėmesį į tai, kad atvaizdžio laipsnio sąvoka gali būti apibendrinta atvaizdžiams Banacho erdvėse (t.y. begaliniamatėse erdvėse) ir pritaikyta netiesinių operatorinių lygčių tyrimams. Norėdami pailiustruoti atvaizdžio laipsnį, iš pradžių pateiksime pavyzdį.

P a v y z d y s. Tegu $B_r = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < r\}$ ir $f : \overline{B}_r \to \mathbb{R}^2$ – tolydusis atvaizdis. Kai taškas x apeina skritulio B_r kraštą (apskritimą) teigiama kryptimi, atvaizdžio f reikšmės $f(x)$ plokštumoje $\mathbb{R}^2$ nubrėžia orientuotą kreivę l. Tegu $0 \notin l$. Tada taškas $f(x)$ koordinačių pradžios tašką apeis teigiama kryptimi c_+ kartų ir neigiama kryptimi c_- kartų. Atvaizdžio f laipsniu skritulio B_r ir taško 0 atžvilgiu vadinsime skaičių

$$c = d[f; B_r, 0] = c_+ - c_-.$$

Atvejai $c_+ = 1, c_- = 0$; $c_+ = 2, c_- = 0$; $c_+ = c_- = 0$ ir $c_+ = 0, c_- = 1$ pavaizduoti 9.1 pav.



9.1 pav.

Iš šio intuityvaus apibrėžimo galima tvirtinti, kad teisingi tokie du svarbūs teiginiai:

1. Kronekerio egzistavimo principas:
   jeigu $c \neq 0$, tai egzistuoja toks taškas $x_0 \in B_r$, kad $f(x_0) = 0$.

2. Invariantiškumas homotopijos atžvilgiu:
   atvaizdį f tolydžiai keičiant taip, kad kreivės l nekirstų koordinačių pradžios taško 0, atvaizdžio f laipsnis nesikečia.

Atvaizdžio laipsnį galima apibrėžti įvairiai – taikant algebrinės topologijos arba analizės metodus (žr., pavyzdžiui, [55], [40]). Tačiau taikymams yra svarbus ne apibrėžimas, o tik jo pagrindinės savybės. Todėl jas čia ir suformuluosime.

9.5 teorema. *Tegu* $f : \overline{B}_r \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *yra tolydusis atvaizdis, tenkinantis sąlygą*

$$f(x) \neq 0, \quad \forall x \in S_r, \quad S_r = \partial B_r.$$

Tada atvaizdžiui f *galima priskirti jo skaitinę charakteristiką* $d[f; B_r, 0]$, *vadinamą atvaizdžio* f *laipsniu rutulio* B_r *ir taško* 0 *atžvilgiu, turinčią tokias savybes:*

1. $d[E; B_r, 0] = 1$; *čia* E *– tapatus atvaizdis.*
2. *Jeigu* $d[f; B_r, 0] \neq 0$, *tai egzistuoja toks taškas* $x_0 \in B_r$*, kad*
$$f(x_0) = 0.$$
3. *Tegu* $h : \overline{B}_r \times [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ *yra toks tolydusis atvaizdis, kad* $h(x, t) \neq 0$, $\forall t \in [0, 1]$ *ir* $\forall x \in S_r$. *Tada*
$$d[h(\cdot, 0); B_r, 0] = d[h(\cdot, 1); B_r, 0].$$
4. *Jeigu atvaizdis* f *nelyginis (t.y.* $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in \overline{B}_r$*), tai skaičius* $d[f; B_r), 0]$ *yra nelyginis (ir todėl nelygus nuliui).*

P a s t a b a . Trečioji savybė vadinama atvaizdžio laipsnio invariantiškumu homotopijos atžvilgiu. Du atvaizdžiai f_0 ir f_1 vadinami homotopiniais, jeigu egzistuoja toks tolydusis atvaizdis $h : \overline{B}_r \times [0, 1] \to \mathbb{R}^n$, kad

$$h(x, 0) = f_0(x), \quad h(x, 1) = f_1(x), \quad \forall x \in S_r,$$

ir $h(x, t) \neq 0$, $\forall t \in [0, 1]$, $\forall x \in S_r$. Atvaizdį h, turintį šias savybes, vadinsime atvaizdžių f_0 ir f_1 homotopija.

Atvaizdžio laipsnio savybės gali būti panaudotas lygties

$$f(x) = 0, \quad x \in \overline{B}_r, \tag{9.12}$$

išsprendžiamumo tyrimui. Jeigu (9.12) lygtis turi sprendinį sferoje S_r, tai tolesnio tyrimo nebereikia. Tuo atveju, kai $f(x) \neq 0, \forall x \in S_r$, galime apibrėžti atvaizdžio f laipsnį $d[f; B_r, 0]$. Jeigu $d[f; B_r, 0] \neq 0$, tai pagal antrąją savybę (9.12) lygtis turi sprendinį rutulio B_r viduje. Todėl reikia patikrinti, kada atvaizdžio f laipsnis $d[f; B_r, 0]$ yra nelygus nuliui. Tai galima padaryti įvairiai. Pavyzdžiui, nustatyti, kad atvaizdžio f laipsnis yra homotopinis žinomam atvaizdžiui, kurio laipsnis nelygus nuliui, arba patikrinti, kad atvaizdis f yra homotopinis nelyginiam atvaizdžiui.

9.5 teorema yra vienas iš svarbiausių algebrinės topologijos teiginių. Yra žinomi keli šios teoremos įrodymai (žr., pavyzdžiui, [55]). Čia pateiksime tik atvaizdžio laipsnio apibrėžimo schemą, kuri remiasi matematine analize.

Atvaizdžio laipsnio apibrėžimą konstruosime trimis etapais.

I. Tegu $f = (f_1 \ldots, f_n)$. Iš pradžių tarkime, kad atvaizdis f tenkina dvi papildomas sąlygas:

1) rutulyje $\overline{B}_r$ dalinės išvestinės $\partial f_i / \partial x_j$, $i, j = 1, \ldots, n$, yra tolydžios.

2) lygtis $f(x)=0, x\in\overline{B}_r$, turi baigtinį skaičių sprendinių $\xi^{(1)},\dots,\xi^{(m)}$ ir šiuose taškuose jakobianas

$$\mathrm{J}_f(x)=\det\Big\{\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}\Big\}$$

nelygus nuliui.

Tada atvaizdžio f laipsnį rutulio B_r ir taško 0 atžvilgiu apibrėšime formule

$$d[f;B_r,0]=\sum_{i=1}^{m}\operatorname{sign}\mathrm{J_f}(\xi^{(\mathrm{i})})=\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{m}}\frac{\mathrm{J_f}(\xi^{(\mathrm{i})})}{|\mathrm{J_f}(\xi^{(\mathrm{i})})|}.$$

II. Tarkime, atvaizdis f yra tik diferncijuojamas (atsisakėme antrosios sąlygos). Pagal Sardo teoremą (žr. [55]) egzistuoja tokia tolygiai rutulyje $\overline{B}_r$ konverguojanti į atvaizdį f seka $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$,, kurios nariai f_n tenkina pirmojo etapo sąlygas. Kiekvienam sekos $\{f_n\}$ nariui apibrėžtas jo laipsnis $d[f_n;B_r,0]$. Taigi seką $\{f_n\}$ atitinka skaitinė seka $\{d[f_n;B_r,0]\}$. Galima įrodyti, kad ši seka turi ribą ir nepriklauso nuo konfrečios sekos $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ pasirinkimo. Todėl atvaizdžio f laipsnį rutulio B_r ir taško 0 atžvilgiu galima apibrėžti taip:

$$d[f;B_r,o)=\lim_{n\to\infty}d[f_n;B_r,0].$$

III. Tarkime, atvaizdis f tenkina tik 9.5 teoremos sąlygą (atsisakėme ir diferencijuojamumo sąlygos). Pagal Vejerštraso teoremą[1] galima rasti diferencijuojamų atvaizdžių seką $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, kurios elementai tenkina 9.5 teoremos sąlygą ir tolygiai rutulyje $\overline{B}_r$ konverguoja į atvaizdį f. Kiekvienas sekos narys f_n tenkina antrojo etapo sąlygas. Todėl apibrėžtas jo laipsnis $d[f_n;B_r,0]$. Kartu seką $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ atitinka skaitinė seka $\{d[f_n;B_r,0]\}_{n=1}^{\infty}$. Galima įrodyti, kad ši seka turi ribą, nepriklausančią nuo konkrečios sekos $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ pasirinkimo. Todėl atvaizdžio f laipsnį rutulio B_r ir taško 0 atžvilgiu galima apibrėžti taip:

$$d[f;B_r,0)=\lim_{n\to\infty}d[f_n;B_r,0].$$

Taip sukonstruotas atvaizdžio f laipsnis $d[f;B_r,0]$ yra sveikasis skaičius. Galima parodyti, kad jis turi visas 9.1 teoremoje suformuluotas savybes.

Iš pateiktos atvaizdžio laipsnio konstrukcijos matome, kad naudojantis vien apibrėžimu apskaičiuoti atvaizdžio f laipsnio $d[f;B_r,0]$ beveik neįmanoma. Taikymuose atvaizdžio laipsnio dažniausiai ieškoma remiantis jo savybėmis. Svarbiausios iš jų yra trečioji ir ketvirtoji.

9.6 teorema. (Brauerio) *Tegu $B_r=\{x\in\mathbb{R}^n:|x|<r\}$ ir $f:\overline{B}_r\to\overline{B}_r$ – tolydusis atvaizdis. Tada egzistuoja toks taškas $x_0\in\overline{B}_r$, kad $f(x_0)=x_0$.*

$\lhd$ Jeigu egzistuoja taškas $x_0\in S_r$ toks, kad $f(x_0)=x_0$, tai įrodinėti nieko nebereikia. Todėl galime tarti, kad $x-f(x)\neq 0$, $\forall x\in S_r$. Šiuo atveju galime apibrėžti atvaizdžio $E-f$ laipsnį $d[E-f;B_r,0]$.

[1] Teorema apie tolydžiųjų funkcijų aproksimavimą polinomais

Apibrėžkime homotopiją h formule $h(x,t) = x - tf(x)$, kai $x \in \overline{B}_r$ ir $t \in [0,1]$. Aibėje $\overline{B}_r \times [0,1]$ atvaizdis h yra tolydusis. Parodysime, kad

$$h(x,t) \neq 0, \quad \forall x \in S_r, \quad \forall t \in [0,1]. \tag{9.13}$$

Tarkime priešingai, kad egzistuoja tokie $x \in \partial B_r$ ir $t \in [0,1]$, kad $x - tf(x) = 0$. Tada $|f(x)| \leq r$, $|x| = r$ ir

$$0 = |x - tf(x)| \geq |x| - t|f(x)| \geq (1-t)r \geq 0.$$

Iš čia gauname, kad $t = 1$. Bet tai prieštarauja prielaidai, kad $x - f(x) \neq 0, \forall x \in S_r$. Todėl teisinga (9.13) nelygybė. Remiantis pirma ir trečia atvaizdžio laipsnio savybėmis,

$$1 = d[E; B_r, 0] = d[E - f, B_r, 0].$$

Pagal antrą atvaizdžio laipsnio savybę egzistuoja toks taškas $x_0 \in \overline{B}_r$, kad $x_0 - f(x_0) = 0$. $\triangleright$

9.7 teorema. *Tegu $f : \overline{B}_r \to \mathbb{R}^n$ yra tolydusis atvaizdis, tenkinantis nelygybę*

$$(f(x), x) \leq 0, \quad \forall x \in S_r.$$

Tada egzistuoja toks taškas $x_0 \in \overline{B}_r$, kad $f(x_0) = x_0$.

$\triangleleft$ Pagal teoremos sąlygą $f(x) \neq x, \forall x \in S_r$. Todėl galima apibrėžti atvaizdžio f laipsnį ir pasinaudoti 9.6 teoremos įrodymu. $\triangleright$

P a s t a b a. Šioje teremoje nelygybę $(f(x), x) \leq 0$ galima pakeisti priešinga $(f(x), x) \geq 0$. Pakanka pastebėti, kad funkcija $-f$ taip pat yra tolydi, ir pastarąją nelygybę perrašyti taip: $(-f(x), x) \leq 0$.

15 išvada *Tegu $f : \overline{B}_r \to \mathbb{R}^n$ yra tolydusis atvaizdis, tenkinantis nelygybę*

$$(f(x), x) \leq (x, x), \quad \forall x \in S_r.$$

Tada egzistuoja toks taškas $x_0 \in \overline{B}_r$, kad $f(x_0) = 0$.

9.8 teorema. (apibendrintoji Brauerio) *Tegu $M \subset \mathbb{R}^n$ yra aprėžta, uždara ir iškila aibė, $f : M \to M$ – tolydusis atvaizdis. Tada egzistuoja toks taškas $x_0 \in M$, kad $f(x_0) = x_0$.*

Šią teoremą įrodysime 10 skyriuje, išnagrinėję projekcijos į iškiląją aibę savybes.

9.3. ŠAUDERIO TEOREMA APIE NEJUDAMĄJĮ TAŠKĄ

Šiame skyrelyje apibendrinsime Brauerio teoremą apie nejudamą tašką begaliniamačių erdvių atveju. Iš pradžių išnagrinėsime vieną pavyzdį. Tegu

$$\mathrm{X} = \ell_2 = \big\{x = (x_1, x_2, \ldots),\ \|x\| =< \infty\big\},$$

$$\|x\| = \Big(\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2\Big)^{1/2}, \quad B_1 = \{x \in \ell_2 : \|x\| < 1\}$$

ir

$$f(x) = (\sqrt{1 - \|x\|^2}, x_1, x_2, \ldots), \quad x \in \overline{B}_1.$$

Atvaizdis $f : \overline{B}_1 \to \overline{B}_1$ ir yra tolydus (patikrinkite). Jeigu taškas $x \in B_1$ yra atvaizdžio f nejudamas taškas, t.y. $f(x) = x$, tai norma $\|f(x)\| = 1$ ir iš lygybės

$$x = (\sqrt{1 - \|x\|^2}, x_1, x_2, \ldots)$$

išplaukia $x_1 = 0$, $x_2 = x_1$, $x_3 = x_2$ ir t.t. Todėl $x = (0, 0, \ldots)$. Tačiau tai prieštarauja tam, kad $\|x\| = \|f(x)\| = 1$.

Iš pateikto pavyzdžio matome, kad begaliniamačių erdvių atveju vien tik tolydumo nepakanka, kad operatorius f turėtų nejudamą tašką. Šiuo atveju operatoriaus f tolydumo sąlygą pakeisime stipresne visiško tolydumo sąlyga. Priminsime visiškai tolydaus operatoriaus apibrėžimo sąvoką.

A p i b r ė ž i m a s. Tegu M yra Banacho erdvės X poaibis. Sakysime netiesinis operatorius $T : M \to \mathrm{X}$ yra visiškai tolydus aibėje M, jeigu:

1. Jis yra tolydus aibėje M.

2. Kiekvieno aprėžto aibės M poaibio vaizdas yra sąlyginis kompaktas erdvėje X.

P a s t a b a. Jeigu operatorius T yra tiesinis, tai šiame apibrėžime operatoriaus T tolydumo sąlygą galima atmesti. Šiuo atveju tolydumas tiesiog išplaukia iš antrosios sąlygos.

Tiesinis operatorius yra visiškai tolydus tada ir tik tada, kai jį galima aproksimuoti tiesiniais aprėžtaisiais baigtiniamačiais operatoriais (žr. [50]). Priminsime, kad operatorius yra baigtiniamatis, jeigu jo reikšmių aibė yra baigtiniamatėje erdvėje. Apibendrinsime šį teiginį netiesinių operatorių atveju.

9.9 teorema. *Tegu* M *yra netuščia, aprėžta aibė Banacho erdvėje* X. *Operatorius* $T : M \to \mathrm{X}$ *yra visiškai tolydus tada ir tik tada, kai:*

1) su kiekvienu $\varepsilon > 0$ *egzistuoja toks visiškai tolydus operatorius* $T_\varepsilon : M \to \mathrm{X}$*, kad*

$$\sup_{v \in M} \|Tv - T_\varepsilon v\|_{\mathrm{X}} < \varepsilon; \tag{9.14}$$

2) aibės $T_\varepsilon(M)$ *tiesinis apvalkas* $\mathrm{Lin}\, T_\varepsilon(M)$ *yra baigtiniamatėje erdvėje.*

◁ Tegu operatorius T yra visiškai tolydus. Tada aibė $\overline{T(M)}$ yra sąlyginis kompaktas. Pagal Hausdorfo teoremą $\forall\varepsilon > 0$ egzistuoja aibės $\overline{T(M)}$ baigtinis ε tinklas

$$M_\varepsilon = \{v_i \in \mathrm{X} : v_i \in \overline{T}(M),\ i = 1, \dots, m\}.$$

Šauderio projektoriumi vadinsime operatorių $T_\varepsilon : M \to \mathrm{X}$, apibrėžtą formule

$$T_\varepsilon v = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} \mu_i(v) v_i}{\sum\limits_{i=1}^{m} \mu_i(v)}; \tag{9.15}$$

čia

$$\mu_i(v) = \begin{cases} \varepsilon - \|Tv - v_i\|_{\mathrm{X}}, & \text{kai } \|Tv - v_i\|_{\mathrm{X}} \le \varepsilon, \\ 0, & \text{kai } \|Tv - v_i\|_{\mathrm{X}} > \varepsilon. \end{cases}$$

Kadangi M_ε yra baigtinis aibės M ε tinklas, tai (9.15) formulės vardiklis nelygus nuliui $\forall v \in M$. Todėl

$$Tv - T_\varepsilon v = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} \mu_i(v) Tv}{\sum\limits_{i=1}^{m} \mu_i(v)} - \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} \mu_i(v) v_i}{\sum\limits_{i=1}^{m} \mu_i(v)} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} \mu_i(v)(Tv - v_i)}{\sum\limits_{i=1}^{m} \mu_i(v)}$$

ir teisingas įvertis

$$\|Tv - T_\varepsilon v\|_{\mathrm{X}} \le \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} \mu_i(v) \|Tv - v_i\|_{\mathrm{X}}}{\sum\limits_{i=1}^{m} \mu_i(v)} \le \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} \mu_i(v)\varepsilon}{\sum\limits_{i=1}^{m} \mu_i(v)} = \varepsilon.$$

Iš aibės $T(M)$ aprėžtumo išplaukia aibės $T_\varepsilon(M)$ aprėžtumas. Kadangi $T_\varepsilon(M)$ yra baigtiniamačiame poerdvyje, tai $T_\varepsilon(M)$ yra sąlyginis kompaktas. Todėl operatoriai T_ε yra visiškai tolydūs.

Tarkime, pirma ir antra teoremos sąlygos patenkintos. Tada operatorius T, kaip tolygiai konverguojančių tolydžių operatorių riba, yra tolydus:

$$\|Tu - Tv\|_{\mathrm{X}} \le \|Tu - T_{\varepsilon/3}u\|_{\mathrm{X}} + \|T_{\varepsilon/3}u - T_{\varepsilon/3}v\|_{\mathrm{X}} +$$

$$+ \|T_{\varepsilon/3}v - Tv\|_{\mathrm{X}} \le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

kai $\|u - v\|_{\mathrm{X}} < \delta(\varepsilon)$. Be to, aibė $T(M)$ yra sąlyginis kompaktas, nes ji turi baigtinį ε tinklą. ▷

16 išvada *Tegu $M \subset \mathrm{X}$ yra aprėžta aibė, $T : M \to \mathrm{X}$ – visiškai tolydus operatorius. Tada egzistuoja tolygių aibėje M, baigtiniamačių ir konverguojančių į T operatorių seka $\{T_\varepsilon\}$, kai $\varepsilon \to 0$.*

17 išvada *Šauderio projektoriaus T_ε reikšmių aibė $T_\varepsilon(M)$ yra aibės M_ε iškilojo apvalko $\mathrm{Co}M_\varepsilon$ poaibis.*

◁ Įrodymas išplaukia iš Šauderio projektoriaus apibrėžimo (žr. (9.15) formulę). ▷

9.10 teorema. (Šauderio) *Tegu* X *yra Banacho erdvė,* $M \subset \mathrm{X}$ *– netuščia, uždara, iškila, aprėžta aibė ir* $T: M \to M$ *– visiškai tolydus operatorius. Tada egzistuoja bent vienas toks elementas* $u \in M$*, kad* $Tu = u$*.*

◁ Tegu X_n, $n \in \mathbb{N}$, yra aibės $T(M)$ ir bent vieno elemento iš M tiesinis apvalkas. Tiesinė erdvė X_n yra baigtiniamatė Banacho erdvė su ta pačia, kaip ir X, norma. Pažymėkime $M_n = M \cap \mathrm{X}_n$. Aišku, kad M_n yra netuščia, uždara, iškila ir aprėžta aibė. Be to, $T_{1/n}(M_n) \subset M_n$. Pagal Brauerio teoremą kiekvienam $n \in \mathbb{N}$ egzistuoja toks elementas $u_n \in M_n \subset M$, kad $T_{1/n}u_n = u_n$. Be to, iš (9.14) išplaukia, kad

$$\|Tu_n - u_n\|_{\mathrm{X}} = \|Tu_n - T_{1/n}u_n\|_{\mathrm{X}} < 1/n.$$

Todėl

$$\lim_{n\to\infty} \|Tu_n - u_n\|_{\mathrm{X}} = 0. \tag{9.16}$$

Kadangi $Tu_n \in \overline{T(M)}$ ir aibė $\overline{T(M)}$ yra kompaktas, tai iš sekos $\{Tu_n\}$ galima išskirti konverguojantį posekį. Tiksliau, egzistuoja toks elementas $u \in T(M)$, kad

$$\lim_{k\to\infty} Tu_{n_k} = u. \tag{9.17}$$

Be to,

$$\|u_{n_k} - u\|_{\mathrm{X}} \le \|u_{n_k} - Tu_{n_k}\|_{\mathrm{X}} + \|Tu_{n_k} - u\|_{\mathrm{X}} \to 0,$$

kai $k \to \infty$. Todėl seka $u_{n_k} \to u$ erdvėje X. Kadangi opetatorius T yra tolydus, tai

$$\lim_{k\to\infty} Tu_{n_k} = Tu. \tag{9.18}$$

Iš (9.17) ir (9.18) išplaukia, kad $Tu = u$. ▷

P a s t a b a . Šauderio teorema negarantuoja nejudamo taško vienaties. Pavyzdžiui, jei erdvė X yra baigtinio matavimo, tai tapatingas atvaizdis yra visiškai tolydus ir visi aibės M taškai yra šio atvaizdžio nejudami taškai.

9.11 teorema. *Tegu* X *yra Banacho erdvė,* $M \subset \mathrm{X}$ *– kompaktinė, iškila aibė ir* $T: M \to M$ *– tolydus operatorius. Tada egzistuoja bent vienas toks elementas* $u \in M$*, kad* $Tu = u$*.*

◁ Laisvai pasirinkime skaičių $n \in \mathbb{N}$. Kadangi aibė M yra kompaktinė, tai egzistuoja baigtinis skaičius tokių elementų $v_1, v_2, \ldots, v_m \in M$, $m = m(n)$, kad rutuliai $B_{1/n}(v_i), i = 1, ..., m$, uždengia aibę M. Tegu M_n yra iškilasis aibės $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ apvalkas ir $T_{1/n}$ – Šauderio projektorius (žr. (9.15) formulę). Operatorius $T_{1/n}: M_n \to M_n$ ir yra tolydus. Be to,

$$\|Tv - T_{1/n}v\|_{\mathrm{X}} < 1/n, \qquad \forall v \in M. \tag{9.19}$$

Pagal apibendrintą Brauerio teoremą šis atvaizdis turi nejudamą tašką $u_n \in M_n \subset M$. Kadangi aibė M yra kompaktinė, tai egzistuoja toks posekis $\{u_{n_k}\}$, kad $u_{n_k} \to u \in$

M. Įrodysime, kad elementas u ir yra operatoriaus T nejudamas taškas. Iš tikrųjų remdamiesi (9.19), gauname

$$\|u_{n_k} - Tu_{n_k}\|_X = \|T_{1/n_k}u_{n_k} - Tu_{n_k}\|_X \le 1/n_k \to 0,$$

kai $k \to \infty$. Todėl

$$\lim_{k\to\infty} Tu_{n_k} = u.$$

Kadangi operatorius T yra tolydus, tai

$$\lim_{k\to\infty} Tu_{n_k} = T\Big(\lim_{k\to\infty} u_{n_k}\Big) = Tu.$$

Iš čia išplaukia, kad $Tu = u$. $\triangleright$

P a v y z d y s. Nagrinėsime Koši uždavinį:

$$y'(x) = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0. \tag{9.20}$$

Jeigu funkcija f yra tolydi, tai šio uždavinio sprendimas tolygiai diferencijuojamų funkcijų klasėje yra ekvivalentus integralinės lygties

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\, ds \tag{9.21}$$

sprendimui tolydžių funkcijų klasėje. Apibrėžkime operatorių T formule

$$Ty(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\, ds.$$

Tada pastarąją integralinę lygtį galima perrašyti

$$y = Ty. \tag{9.22}$$

Tarkime, funkcija f yra tolydi stačiakampyje

$$Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| \le a,\ |y - y_0| \le b\}.$$

Tada šiame stačiakampyje ji aprėžta, t.y. egzistuoja tokia teigiama konstanta K, kad

$$|f(x,y)| \le K, \quad \forall (x,y) \in Q.$$

Be to, tegu c yra toks teigiamas skaičius, kad

$$0 < c \le a, \quad cK \le b.$$

Segmentas $[x_0 - c, x_0 + c]$ vadinamas Peano atkarpa.

9.12 teorema. (Peano) *Peano atkarpoje egzistuoja* (9.20) *Koši uždavinio tolydžiai diferencijuojamas sprendinys.*

$\triangleleft$ Tegu $\mathrm{X} = C[x_0 - c, x_0 + c]$. Banacho erdvėje X aibė

$$M = \{y \in \mathrm{X} : \|y(x) - y_0\|_{\mathrm{X}} \le b\}$$

yra aprėžta, uždara ir iškila. Operatorius $T : M \to M$ (žr. 9.3 teoremos įrodymą). Be to, jis yra tolydus. Iš tikrųjų tegu $y_n \to y$ erdvėje X, t.y.

$$y_n(x) \rightrightarrows y(x), \quad x \in [x_0 - c, x_0 + c],$$

kai $n \to \infty$. Tada

$$\|Ty_n - Ty\|_{\mathrm{X}} \le \max_{|x-x_0|<c} \Big| \int\limits_{x_0}^{x} (f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))\, ds \Big| \le$$

$$\le \max_{|s-x_0|<c} c|(f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))| \to 0,$$

kai $n \to \infty$. Čia pasinaudojome tuo, kad funkcija f stačiakampyje Q yra tolygiai tolydi. Įrodysime, kad aibė $T(M)$ yra sąlyginis kompaktas erdvėje X. Tegu $y \in M$. Tada

$$\|Ty\|_{\mathrm{X}} = \max_{|x-x_0|<c} \Big| \int\limits_{x_0}^{x} f(s, y_n(s) ds \Big| + |y_0| \le Kc + |y_0|,$$

$$|Ty(x) - Ty(\tilde{x})| \le \Big| \int\limits_{\tilde{x}}^{x} f(s, y(s))\, ds \Big| \le K|x - \tilde{x}|.$$

Iš šių įverčių išplaukia, kad aibė $T(M)$ yra tolygiai aprėžta ir vienodai tolydi. Pagal ArcelΔa–Askolio teoremą ji yra sąlyginis kompaktas. Taigi operatorius $T : M \to M$ yra visiškai tolydus. Remiantis Šauderio teorema, (9.22) lygtis turi sprendinį. Kartu (9.21) integralinė lygtis Peano atkarpoje turi tolydų sprendinį. Akivaizdu, kad šis sprendinys yra tolygiai diferencijuojamas (9.20) Koši uždavinio sprendinys. $\triangleright$

9.4. PRATĘSIMO PAGAL PARAMETRĄ METODAS

Sprendžiant operatorinę lygtį
$$A\,u = 0, \tag{9.23}$$
kartais naudinga ją įtraukti į parametrinę operatorinių lygčių šeimą
$$H(u,t) = 0, \quad 0 \le t \le 1. \tag{9.24}$$
Parametras t parenkamas taip, kad (9.24) lygtis turi sprendinį, kai $t = 0$, ir sutampa su (9.23) lygtimi, kai $t = 1$. Jeigu (9.24) lygties išsprendžiamumą pavyksta pratęsti nuo $t = 0$ iki $t = 1$, tai kartu įrodomas ir (9.23) lygties išsprendžiamumas.

Iš pradžių nagrinėsime tiesinių operatorių atvejį. Tegu X, Y yra Banacho erdvės, $A_i : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ – tiesiniai operatoriai, $i = 1, 2$. Nagrinėsime operatorinių lygčių šeimą
$$A_t\,u \equiv t\,A_1\,u + (1-t)\,A_0\,u = f, \quad t \in [0,1], \quad f \in \mathrm{Y}. \tag{9.25}$$

9.13 teorema. *Tarkime,* (9.25) *lygties sprendiniams teisingas apriorinis įvertis*
$$\|u\|_{\mathrm{X}} \le C\|f\|_{Y}, \qquad t \in [0,1]; \tag{9.26}$$
čia C – nuo t ir f nepriklausanti teigiama konstanta. Be to, tegu (9.25) *lygtis su kiekvienu $f \in \mathrm{Y}$ turi vienintelį sprendinį, kai $t = 0$. Tada su kiekvienu $f \in \mathrm{Y}$ ši lygtis turi vienintelį sprendinį ir kai $t = 1$.*

$\triangleleft$ Tegu σ yra aibė parametro t reikšmių, kurioms (9.25) lygtis turi vienintelį spendinį $\forall f \in \mathrm{Y}$. Pagal teoremos prielaidą $0 \in \sigma$. Todėl egzistuoja atvirkštinis operatorius $A_0^{-1} : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$. Be to, jis yra aprėžtas
$$\|\,A_0^{-1}\,f\|_{\mathrm{X}} = \|u\|_{\mathrm{X}} \le C\|f\|_{\mathrm{Y}}.$$
Perrašykime (9.25) lygtį
$$u + t\,A_0^{-1}(A_1 - A_0)u = A_0^{-1}\,f. \tag{9.27}$$
Patikrinsime, ar operatorius $A_0^{-1}(A_1 - A_0) : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ aprėžtas:
$$\|\,A_0^{-1}(A_1 - A_0)u\|_{\mathrm{X}} \le C\|(A_1 - A_0)u\|_{\mathrm{Y}} \le 2CM\|u\|_{\mathrm{X}};$$
čia $M = \max\{\|\,A_0\,\|, \|\,A_1\,\|\}$. Taigi $\|\,A_0^{-1}(A_1 - A_0)\| \le 2CM$.

Tegu $t^* = \|\,A_0^{-1}(A_1 - A_0)\|^{-1}$. Perrašykime (9.27) lygtį taip:
$$u = A_0^{-1}\,f - t\,A_0^{-1}(A_1 - A_0)u \equiv L_0\,u.$$
Kai $t \in (0, t^*)$, operatorius $L_0 : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ yra sutraukiantysis. Iš tikrųjų
$$\|\,L_0\,u - L_0\,v\|_{\mathrm{X}} \le 2tCM\|u - v\|_{\mathrm{X}} < \|u - v\|_{\mathrm{X}}.$$
Pagal Banacho teoremą (9.25) lygtis turi vienintelį sprendinį $\forall t \in [0, t^*)$, t.y. intervalas $[0, t^*) \subset \sigma$. Todėl, kai $t \in [0, t^*)$, egzistuoja atvirkštinis operatorius $A_t^{-1} : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$. Tegu $\tau \in (0, t^*)$. Tada (9.25) lygtį galima perrašyti
$$u + (t - \tau)\,A_\tau^{-1}(A_1 - A_0)u = A_\tau^{-1}\,f.$$

Kadangi

$$\| A_\tau^{-1}(A_1 - A_0)u\|_{\mathrm{X}} \leq C\|(A_1 - A_0)u\|_{\mathrm{Y}} \leq 2CM\|u\|_{\mathrm{X}},$$

tai operatorius $A_\tau^{-1}(A_1 - A_0) : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ aprėžtas ir $\| A_\tau^{-1}(A_1 - A_0)\| \leq 2CM$. Perrašykime šią lygtį taip:

$$u = A_\tau^{-1} f - (t-\tau)\, A_\tau^{-1}(A_1 - A_0)u \equiv L_\tau\, u.$$

Kai $0 \leq t - \tau \leq \| A_\tau^{-1}(A_1 - A_0)\|^{-1}$, operatorius $L_\tau : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ yra sutraukiantysis. Pagal Banacho teoremą (9.25) lygtis tokioms t reikšmėms turi vienintelį sprendinį. Taip samprotaudami ir toliau, gausime, kad kiekvienu žingsniu (9.25) lygties išsprendžiamumas pasistumia

$$\| A_\tau^{-1}(A_1 - A_0)\|^{-1} \geq 1/CM.$$

Atlikę baigtinį skaičių tokių žingsnių, pasieksime tašką $t = 1$. ▷

Kaip šios teoremos taikymo pavyzdį panagrinėkime Dirichlė uždavinį

$$A\, u = f, \quad x \in \Omega; \tag{9.28}$$

$$u|_S = \varphi(x), \quad x \in S; \tag{9.29}$$

čia Ω – aprėžta erdvėje $\mathbb{R}^2$ sritis, $S = \partial\Omega$, o

$$A\, u = \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{2} a_i(x) u_{x_i} + a(x) u$$

griežtai elipsinis operatorius, t.y.

$$\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \nu \sum_{i=1}^{2} \xi_i^2, \quad \nu = \mathrm{const} > 0.$$

9.14 teorema. (Šauderio) *Tarkime,* $a_{ij}, a_i, a, f \in \mathrm{C}^\alpha(\overline{\Omega})$, $\varphi \in \mathrm{C}^{2+\alpha}(S)$, $S \in \mathrm{C}^{2+\alpha}$, $0 < \alpha < 1$*, ir*

$$a(x) \leq 0, \quad \forall x \in \overline{\Omega}. \tag{9.30}$$

Tada egzistuoja vienintelis (9.28), (9.29) *Dirichlė uždavinio sprendinys* $u \in \mathrm{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$.

Šios teoremos įrodymas remiasi (9.28), (9.29) Dirichlė uždavinio sprendinių aprioriniais įverčiais:

$$\|u\|_{\mathrm{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C(\|f\|_{\mathrm{C}^\alpha(\overline{\Omega})} + \|\varphi\|_{\mathrm{C}^{2+\alpha}(S)}); \tag{9.31}$$

čia kostanta C priklauso tik nuo ν ir operatoriaus A koeficientų normų erdvėje $\mathrm{C}^\alpha(\overline{\Omega})$ (žr. 4.12 skyrelį).

Dirichlė uždavinys su nehomogenine kraštine sąlyga įprastu budu susiveda į Dirichlė uždavinį su homogenine kraštine sąlyga. Todėl iš karto galime tarti, kad $\varphi = 0$. Tada (9.28), (9.29) Dirichlė uždavinį galima įtraukti į Dirichlė uždavinių šeimą

$$A_t \equiv t\, A\, u + (1-t)\Delta u = f(x), \quad x \in \Omega;$$

$$u|_S = 0, \quad x \in S.$$

Tegu $\mathrm{X} = \{u \in \mathrm{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega}) : u|_S = 0,\ \mathrm{Y} = \mathrm{C}^{\alpha}(\overline{\Omega})$. Kai $t = 0$, šis uždavinys turi vienintelį sprendinį $u \in \mathrm{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ su kiekviena funkcija $f \in \mathrm{C}^{\alpha}(\overline{\Omega})$ (žr. [28], [13]). Be to, operatorius A_t yra griežtai elipsinis su elipsiškumo konstanta $\nu_t \geq t\nu + (1 - t) \cdot 1 \geq \min\{\nu, 1\}$. Todėl šio uždavinio sprendiniams yra teisingi (9.31) aprioriniai įverčiai. Kartu patenkintos visos 9.13 teoremos sąlygos ir galime tvirtinti, kad (9.28), (9.29) Dirichlė uždavinys turi vienintelį sprendinį $u \in \mathrm{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$.

Toliau nagrinėsime netiesinių operatorių atvejį.

9.15 teorema. (Lerė–Šauderio) *Tegu* X *yra Banacho erdvė,* $T : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ *– netiesinis visiškai tolydus operatorius ir lygčių*

$$u = tTu, \quad t \in (0, 1), \tag{9.32}$$

sprendiniams teisingas apriorinis įvertis

$$\|u\|_{\mathrm{X}} \leq C;$$

čia C *– nuo* u *ir* t *nepriklausanti konstanta. Tada lygtis* $u = Tu$ *turi bent vieną sprendinį.*

◁ Tegu $M = \{v \in \mathrm{X} : \|v\|_{\mathrm{X}} \leq 2C\}$. Apibrėžkime operatorių

$$Sv = \begin{cases} Tv, & \text{kai } \|Tv\|_{\mathrm{X}} \leq 2C, \\ 2C\dfrac{Tv}{\|v\|_{\mathrm{X}}}, & \text{kai } \|Tv\|_{\mathrm{X}} > 2C. \end{cases}$$

Operatorius S aibėje M yra visiškai tolydus (patikrinkite). Pagal Šauderio teoremą (žr. 9.3 skyrelį) egzistuoja toks $u \in M$, kad $Su = u$. Galimi du atvejai. Jeigu $\|Tu\|_{\mathrm{X}} \leq 2C$, tai $Tu = Su = u$ ir teorema įrodyta. Tarkime, $\|Tu\|_{\mathrm{X}} \geq 2C$. Tada $u = Su = t_0 Tu, 0 < t_0 = 2C/\|Tu\|_{\mathrm{X}} < 1$. Tačiau pagal teoremos sąlygą kiekvienam lygties $u = t_0 Tu$ sprendiniui teisingas apriorinis įvertis $\|u\|_{\mathrm{X}} \leq C$. Tačiau remiantis operatoriaus S apibrėžimu $\|u\|_{\mathrm{X}} = 2C$. Gauta prieštara įrodo, kad antras atvejis negalimas. ▷

Pateiksime Lerė–Šauderio teoremos taikymo pavyzdį. Tegu

$$A\,u = \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x, u, u_x) u_{x_i x_j}.$$

Nagrinėsime Dirichlė uždavinį

$$A\,u = 0, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2; \quad u|_S = 0, \quad x \in S = \partial\Omega. \tag{9.33}$$

Tarkime, operatorius A yra griežtai elipsinis[2], t.y. egzistuoja tokia teigiama konstanta

[2] Pakanka reikalauti, kad operatorius A būtų tik elipsinis, t.y.

$$\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x, t, p)\xi_i \xi_j > 0, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^2 : |\xi| = 1.$$

Be to, ši nelygybė būtų teisinga, kai $x \in \overline{\Omega}$, $|t| \leq M_1$, $|p| \leq M_2$; čia $M_1 = \max\limits_{x \in S} |\varphi(x)|$, o konstanta M_2 priklauso tik nuo φ ir S.

ν, kad

$$\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x,t,p)\xi_i\xi_j \geq \nu \sum_{i}^{2} \xi_i^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^2, \quad \forall (x,t,p) \in \Omega \times \mathbb{R}^3.$$

Tada yra teisinga teorema.

9.16 teorema. *Tegu operatoriaus A koeficientai $a_{ij} \in \mathrm{C}^{2+\alpha}(\overline{G})$, $G = \Omega \times \mathbb{R}^3$, Ω – aprėžta, griežtai iškila sritis, $0 < \alpha < 1$, $\varphi \in \mathrm{C}^{2+\alpha}S$, $S \in \mathrm{C}^{2+\alpha}$. Tada (9.33) uždavinys turi bent vieną sprendinį erdvėje $u \in \mathrm{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$.*

◁ Įtraukime (9.33) uždavinį į Dirichlė uždavinių šeimą.

$$A\,u = 0, \quad x \in \Omega; \quad u|_S = t\varphi(x), \quad x \in S,\, t \in [0,1]. \tag{9.34}$$

Tegu $\beta \in (0,1)$, $\mathrm{X} = \mathrm{C}^{1+\beta}(\overline{\Omega})$ ir $v \in \mathrm{X}$. Tada koeficientai $a_{ij}(x,v,v_x)$ yra funkcijos iš $\mathrm{C}^{\alpha\beta}(\overline{\Omega})$. Todėl pagal Šauderio teoremą $\forall v \in \mathrm{X}$ ir $t \in [0,1]$ egzistuoja vienintelis Dirichlė uždavinio

$$\sum_{i,j}^{2} a_{ij}(x,v,v_x)u_{x_ix_j} = 0, \quad x \in \Omega; \quad u|_S = t\varphi(x), \quad x \in S, \tag{9.35}$$

sprendinys $u \in \mathrm{C}^{2+\alpha\beta}(\overline{\Omega})$. Raide T pažymėkime operatorių, kuris $\forall t \in [0,1]$ ir $\forall v \in \mathrm{C}^{1+\beta}(\overline{\Omega})$ priskiria elementą $u \in \mathrm{C}^{2+\alpha\beta}(\overline{\Omega})$. Tada šią atitiktį galime užrašyti kaip operatorinę lygtį

$$u = T(t,v).$$

Kadangi parametras t į kraštinę sąlygą įeina tiesiškai, tai pastarąją galima perrašyti taip:

$$u = tTv.$$

Akivaizdu, kad operatoriaus tT nejudami taškai yra (9.34) Dirichlė uždavinio sprendiniai, ir atvirkščiai. Patikrinsime, ar operatorius T tenkina Lerė–Šauderio teoremos sąlygas. Visiems (9.35) Dirichlė uždavinio sprendiniams (žr. 4.12 skyrelį) teisingas apriorinis įvertis

$$\|u\|_{\mathrm{C}^{2+\alpha\beta}(\overline{\Omega})} \leq C;$$

čia konstanta C nepriklauso nei nuo u, nei nuo v, nei nuo t. Kiekviena aprėžta erdvėje $\mathrm{C}^{2+\alpha\beta}(\overline{\Omega})$ aibė yra kompaktas erdvėje $\mathrm{C}^{1+\beta}(\overline{\Omega})$. Todėl operatorius T aprėžtą aibę erdvėje X perveda į kompaktinę aibę erdvėje X. Be to, galima įrodyti (patikrinkite), kad operatorius T yra tolydus. Taigi patenkintos visos Lerė–Šauderio teoremos sąlygos ir galime tvirtinti, kad lygtis $u = Tu$ turi bent vieną nejudamą tašką $u \in \mathrm{X}$. Pagal Šauderio teoremą $u \in \mathrm{C}^{2+\alpha\beta}(\overline{\Omega})$. Jeigu (9.35) lygtyje vietoje v įstatysime rastą sprendinį u, tai šios lygties koeficientai bus erdvės $\mathrm{C}^{\alpha}(\overline{\Omega})$ elementai. Todėl rastas sprendinys $u \in \mathrm{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ ir yra ieškomasis (9.33) Dirichlė uždavinio sprendinys.

9.5. MONOTONINIAI OPERATORIAI

Tegu X yra Banacho erdvė, X^* – jungtinė erdvė, $\|\cdot\|$ – norma erdvėje X. Šiame skyrelyje nagrinėsime monotoninių, veikiančių iš X į X^* operatorių savybes.

A p i b r ė ž i m a s. Tegu $A : \mathrm{X} \to \mathrm{X}^*$, X – Banacho erdvė. Tada:

1. Operatorių A vadinsime *monotoniniu*, jeigu

$$\langle A\,u - A\,v,\, u - v\rangle \geq 0, \quad \forall u, v \in \mathrm{X}. \tag{9.36}$$

2. Operatorių A vadinsime *griežtai monotoniniu*, jeigu

$$\langle A\,u - A\,v,\, u - v\rangle > 0, \quad \forall u, v \in \mathrm{X},\ u \neq v. \tag{9.37}$$

3. Operatorių A vadinsime *tolygiai monotoniniu*, jeigu

$$\langle A\,u - A\,v,\, u - v\rangle \geq a(\|u - v\|)\|u - v\|, \quad \forall u, v \in \mathrm{X}; \tag{9.38}$$

   čia $a : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ tokia griežtai didėjanti tolydi funkcija, kad $a(0) = 0$, $a(t) \to +\infty$, kai $t \to +\infty$.

4. Operatorių A vadinsime *stipriai monotoniniu*, jeigu

$$\langle A\,u - A\,v,\, u - v\rangle \geq c\|u - v\|^2, \quad \forall u, v \in \mathrm{X},\ c = \mathrm{const} > 0. \tag{9.39}$$

5. Operatorių A vadinsime *koercityviu*, jeigu

$$\frac{\langle A\,u,\, u\rangle}{\|u\|} \to \infty, \tag{9.40}$$

   kai $\|u\| \to \infty$.

Šių operatoriaus A savybių ryšį nusako tokia teorema.

9.17 teorema. *Teisingos implikacijos: 4. ⇒ 3. ⇒ 2. ⇒ 1. ir 3. ⇒ 5.*

◁ Implikacijos: ⇒ 2. ⇒ 1. yra akivaizdžios. Norint patikrinti implikaciją 4. ⇒ 3., pakanka paimti $a(t) = ct$. Implikacija 3. ⇒ 5. išplaukia iš nelygybių

$$\langle A\,u,\, u\rangle = \langle A\,u - A(0),\, u - 0\rangle + \langle A(0),\, u\rangle \geq$$

$$\geq a(\|u\|)\|u\| - \|\,A(0)\|_{\mathrm{X}^*}\|u\|. \quad \triangleright$$

P a v y z d ž i a i:

1. Tegu $\mathrm{X} = \mathbb{R}$ yra realiųjų skaičių aibė ir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – reali funkcija (šiuo atveju $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}$). Tada:

   1.1. f – (griežtai) monotoninis ⇔ f – (griežtai) monotoniniškai didėjanti.

1.2. f – stipriai monotoninis $\Leftrightarrow (f(x) - f(y))/(x - y) \geq c > 0$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$.

1.3. f – koercityvus $\Leftrightarrow f(x) \to \pm\infty$, kai $x \to \pm\infty$.

Norint patikrinti šiuos sąryšius, pakanka pastebėti, kad

$$\langle f(x) - f(y),\, x - y\rangle = (f(x) - f(y))(x - y).$$

2. Apibrėžkime operatorių $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taip: $f(x) = |x|^{p-2}x$, kai $x \neq 0$, ir $f(x) = 0$, kai $x = 0$. Tada:

2.1. Jeigu $p > 1$, tai f yra griežtai monotoninis.

2.2. Jeigu $p = 2$, tai f yra stipriai monotoninis.

2.3. Jeigu $p > 2$, tai f yra tolygiai monotoninis ir koercityvus.

Pirmas ir antras teiginiai yra akivaizdūs. Patikrinsime trečiąjį. Tegu $p > 2$ ir $x, y \in \mathbb{R}$. Jeigu $0 \leq x \leq y$, tai

$$y^{p-1} - x^{p-1} = \int_0^{y-x} (p-1)(t+x)^{p-2}\,dt \geq \int_0^{y-x} (p-1)t^{p-2}\,dt = (y-x)^{p-1}.$$

Todėl tokiems x ir y teisinga nelygybė

$$(|y|^{p-2}y - |x|^{p-2}x)(y - x) \geq |y - x|^p.$$

Jeigu $x \leq 0 \leq y$, tai teisinga nelygybė

$$y^{p-1} + |x|^{p-1} > c(y + |x|)^{p-1};$$

čia c – teigiama, priklausanti tik nuo p, konstanta. Todėl tokiems x ir y teisinga nelygybė

$$(|y|^{p-2}y - |x|^{p-2}x)(y - x) \geq c|y - x|^p.$$

Abiem atvejais operatorius f yra stipriai monotoninis ir koercityvus. Kiti atvejai lengvai susiveda į jau išnagrinėtus.

A p i b r ė ž i m a s. Tegu $A : \mathrm{X} \to \mathrm{X}^*$, X – Banacho erdvė. Operatorių A vadinsime:

1) *aprėžtuoju*, jeigu jis aprėžtą aibę atvaizduoja į aprėžtą aibę;

2) *demitolydžiuoju*, jeigu

$$u_n \to u \quad \Rightarrow \quad A\,u_n \rightharpoonup A\,u, \quad \text{kai} \quad n \to \infty.$$

3) *hemitolydžiuoju*, jeigu $\forall u, v, w \in \mathrm{X}$ atvaizdis $t \to \langle A(u + tv),\, w\rangle$ yra tolydus segmente $[0, 1]$.

4) *radialiai tolydžiuoju*, jeigu $\forall u, v \in \mathrm{X}$ atvaizdis $t \to \langle A(u+tv),\, v\rangle$ yra tolydus segmente $[0,1]$.

5) *pseudomonotoniniu*, jeigu jis yra aprėžtas ir iš $u_n \rightharpoonup u$, kai $n \to \infty$, ir

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \langle A\,u_n,\, u_n - u\rangle \le 0 \;\Rightarrow$$

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\, \langle A\,u_n,\, u_n - v\rangle \ge \langle A\,u,\, u - v\rangle\,,\; \forall v \in \mathrm{X};$$

6) *turinčiu savybę (M)*, jeigu iš $u_n \rightharpoonup u$, $A\,u_n \rightharpoonup f$, kai $n \to \infty$, ir

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \langle A\,u_n,\, u_n\rangle \le \langle f,\, u\rangle \;\Rightarrow\; A\,u = f;$$

7) *turinčiu savybę (S)*, jeigu iš $u_n \rightharpoonup u$, kai $n \to \infty$, ir

$$\lim_{n\to\infty} \langle A\,u_n - A\,u,\, u_n - u\rangle = 0 \quad\Rightarrow\quad u_n \to u.$$

Tegu X yra Banacho erdvė, $A : \mathrm{X} \to \mathrm{X}^*$. Nagrinėsime lygtį

$$A\,u = f, \quad f \in \mathrm{X}^*. \tag{9.41}$$

9.18 teorema. *Tegu* X *yra refleksyvioji, separabilioji Banacho erdvė,* $T : \mathrm{X} \to \mathrm{X}^*$ *– koercityvus, demitolydus, aprėžtas ir turintis savybę (M) operatorius. Tada* $T(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^*$ *ir atvirkštinis operatorius* T^{-1} *yra aprėžtas (gali būti daugiareikšmis).*

◁ Tegu $f \in \mathrm{X}^*$. Reikia įrodyti, kad (9.41) lygtis su kiekvienu tokiu f turi sprendinį. Pagal teoremos sąlygą erdvė X yra separabilioji. Todėl iš jos galima išskirti suskaičiuojamą visur tirštą aibę. Pažymėkime ją $\{w_k\}$. Sprendinio ieškosime Galiorkino metodu. Tegu X_n yra tiesinis, užtemptas ant elementų $w_1, \ldots, w_n$ poerdvis. Ieškosime tokio u_n, kad

$$\langle A\,u_n,\, v\rangle = \langle f,\, v\rangle\,, \quad \forall v \in \mathrm{X}_n. \tag{9.42}$$

Tegu $w_j^* \in \mathrm{X}^*$ tokie, kad $\langle w_i^*,\, w_j\rangle = \delta_{ij}$. Jeigu $w \in \mathrm{X}_n$ ir $w = \sum_{i=1}^n x_i w_i$, tai formulė

$$\Big\langle A\Big(\sum_{i=1}^n x_i w_i\Big), v\Big\rangle = \Big\langle \sum_{i=1}^n y_i w_i^*, v\Big\rangle, \quad \forall v \in \mathrm{X}_n,$$

apibrėžia operatorių $A_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Iš operatoriaus A koercityvumo išplaukia operatoriaus A_n koercityvumas, t.y.

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{\langle A_n\,x,\, x\rangle}{|x|} = \infty. \tag{9.43}$$

Be to, operatorius A_n yra tolydus. Tegu $y \in \mathbb{R}^n$ toks, kad $\langle f,\, w\rangle = \langle y,\, w\rangle\,, \forall w \in \mathrm{X}_n$. Fiksuokime n ir apibrėžkime operatorių B formule

$$Bx = x - \varepsilon(A_n\,x - y), \quad \varepsilon > 0.$$

Iš (9.43) išplaukia, kad egzistuoja tokie skaičiai $R > 0$ ir $\varepsilon > 0$, kad $|Bx| \le R$, jeigu tik $R/2 \le |x| \le R$. Iš tikrųjų

$$(Bx, Bx) = |x|^2 + \varepsilon^2 |\, A_n\, x - y|^2 - 2\varepsilon(x, A_n\, x) + 2\varepsilon(x, y) \le$$

$$\le |x|^2 + \varepsilon^2 |\, A_n\, x - y|^2 - 2\varepsilon c(|x|)|x| + 2\varepsilon c_1 |x||y|;$$

čia $c(s) \to \infty$, kai $s \to \infty$. Todėl, kai R pakankamai didelis ir $R/2 \le |x| \le R$, reiškinys $c(|x|)|x| - c_1|x||y| > 0$. Fiksuokime tokį R. Tada galima nurodyti tokį skaičių ε_0, kad

$$\varepsilon^2 |\, A_n\, x - y|^2 - 2\varepsilon c(|x|)|x| + 2\varepsilon c_1 |x||y| \le 0, \quad \forall \varepsilon \le \varepsilon_0.$$

Iš šių dviejų nelygybių išplaukia, kad

$$(Bx, Bx) \le |x|^2 \le R^2,$$

kai $R/2 \le |x| \le R$. Tegu $|x| \le R/2$. Tada pakankamai mažiems ε reiškinys

$$\varepsilon^2 |\, A_n\, x - y|^2 - 2\varepsilon c(|x|)|x| + 2\varepsilon c_1 |x||y| \le R^2/2.$$

Todėl su tokiais ε teisinga nelygybė

$$(Bx, Bx) \le |x|^2 + R^2/2 < R^2/4 + R^2/2 < R^2.$$

Kartu teisinga nelygybė

$$|Bx| \le R, \quad \forall x : |x| \le R.$$

Pagal Brauerio teoremą egzistuoja toks taškas x, kad $Bx = x$. Todėl su kiekvienu n egzistuoja (9.42) lygties sprendinys u_n. Imkime šioje lygtyje $v = u_n$ ir perrašykime ją taip:

$$\frac{\langle A\, u_n,\, u_n \rangle}{\|u_n\|} = \frac{\langle f,\, u_n \rangle}{\|u_n\|}.$$

Iš šios lygybės ir operatoriaus A koercityvumo išplaukia, kad seka $\{u_n\}$ aprėžta. Todėl iš jos galima išskirti silpnai konverguojantį posekį. Tegu $u_{n_k} \rightharpoonup u$, kai $k \to \infty$. Tada

$$\langle A\, u_{n_k},\, u_{n_k} \rangle = \langle f,\, u_{n_k} \rangle \to \langle f,\, u \rangle\,,$$

kai $k \to \infty$. Kartu galime tvirtinti, kad

$$\lim_{k \to \infty} \langle A\, u_{n_k},\, u_{n_k} \rangle = \langle f,\, u \rangle\,.$$

Iš (M) savybės išplaukia, kad (9.41) lygtis $\forall f \in \mathrm{X}^*$ turi sprendinį. Todėl operatorius A turi atvirkštinį. Jo aprėžtumas išplaukia iš operatoriaus A koercityvumo. $\triangleright$

9.2 lema. *Kiekvienas pseudomonotoninis operatorius yra demitolydus.*

◁Tarkime priešingai: egzistuoja seka $u_n \to u$ ir $A\,u_n \rightharpoonup f \neq A\,u$. Tada

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\langle A\,u_n,\, u_n - u\rangle = 0.$$

Iš čia ir pseudomonotoniškumo gauname

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\,\langle A\,u_n,\, u_n - v\rangle = \langle f,\, u - v\rangle \geq \langle A\,u,\, u - v\rangle\,.$$

Todėl $A\,u = f$. Gauta prieštara įrodo lemos teiginį. ▷

9.3 lema. *Kiekvienas pseudomonotoninis operatorius turi (M) savybę.*

◁Tegu $u_n \rightharpoonup u$, $A\,u_n \rightharpoonup f$, kai $n \to \infty$, ir $\overline{\lim}_{n\to\infty}\,\langle A\,u_n,\, u_n\rangle \leq \langle f,\, u\rangle$. Tada

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\langle A\,u_n,\, u_n - u\rangle \leq \langle f,\, u\rangle - \langle f,\, u\rangle = 0$$

ir teisingos nelygybės

$$\langle u,\, u - v\rangle \geq \overline{\lim_{n\to\infty}}\,\langle A\,u_n,\, u_n - v\rangle \geq \underline{\lim}_{n\to\infty}\,\langle A\,u_n,\, u_n - v\rangle \geq \langle A\,u,\, u - v\rangle\,.$$

Iš čia gauname, kad $A\,u = f$. ▷

9.4 lema. *Kiekvienas hemitolydus, monotoninis operatorius turi (M) savybę.*

◁Tegu $u_n \to u$, $A\,u_n \to f$, kai $n \to \infty$, ir $\overline{\lim}_{n\to\infty}\,\langle A\,u_n,\, u_n\rangle \leq \langle f,\, u\rangle$. Tada

$$\langle f,\, u - v\rangle \geq \overline{\lim_{n\to\infty}}\,\langle A\,u_n - A\,v,\, u_n - v\rangle + \langle A\,v,\, u - v\rangle \geq \langle A\,v,\, u - v\rangle\,.$$

Šioje nelygybėje įstatykime $v = u - \lambda w$, $\lambda > 0$, ir gautą nelygybę perrašykime taip: $\langle A(u - \lambda w),\, w\rangle \leq \langle f,\, w\rangle$. Artindami λ į nulį, gausime $\langle A\,u,\, w\rangle \leq \langle f,\, w\rangle$. Todėl $A\,u = f$. ▷

A p i b r ė ž i m a s. Sakysime, operatorius $A : \mathrm{X} \to \mathrm{X}^*$ turi *savybę* S_+, jeigu iš $u_n \rightharpoonup u$, kai $n \to \infty$, ir iš

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\,\langle A\,u_n - A\,u,\, u_n - u\rangle \leq 0$$

išplaukia, kad $u_n \to u$, kai $n \to \infty$.

9.5 lema. *Tegu* X *yra refleksyvioji Banacho erdvė ir* $A : \mathrm{X} \to \mathrm{X}^*$ *– aprėžtas, demitolydus ir turintis* (S_+) *savybę operatorius. Tada operatorius* A *yra pseudomonotoninis.*

◁Tegu $u_n \rightharpoonup u$ ir $\underline{\lim}_{n\to\infty}\,\langle A\,u_n,\, u_n - u\rangle \leq 0$. Tada $u_n \to u$, kai $n \to \infty$, ir

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\,\langle A\,u_n,\, u_n - v\rangle = \langle A\,u,\, u - v\rangle\,. \quad ▷$$

9.19 teorema. *Tegu* X *yra refleksyvioji, separabilioji Banacho erdvė,* $A : \mathrm{X} \to \mathrm{X}^*$ *– koercityvus, demitolydus, aprėžtas ir turintis savybę* (S_+) *operatorius. Tada* $A(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^*$ *ir atvirkštinis operatorius* A^{-1} *yra aprėžtas.*

◁ Iš pradžių (žr. 9.18 teoremą) Galiorkino metodu konstruojame lygties

$$\langle A\, u_n,\, v\rangle = \langle f,\, v\rangle\,, \quad v \in \mathrm{X}_n,$$

sprendinį u_n ir įrodome, kad seka $\{u_n\}$ silpnai konverguoja į elementą $u \in \mathrm{X}$. Po to pasirenkame tokius $v_n \in \mathrm{X}_n$, kad $v_n \to u$, kai $n \to \infty$. Tada

$$\lim_{n\to\infty} \langle A\, u_n,\, u_n - u\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle A\, u_n,\, u_n - v_n\rangle = \langle f,\, u_n - v_n\rangle = 0.$$

Todėl $u_n \to u$. ▷

P a v y z d y s. Tegu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ yra aprėžta sritis, $S = \partial\Omega$. Nagrinėsime Dirichlė uždavinį:

$$-\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\big(\big|u_{x_i}\big|^{p-2}u_{x_i}\big) + g(u(x)) = f(x),\ x \in \Omega, \quad u|_S = 0,\ x \in S; \tag{9.44}$$

čia $2 \le p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$, $f \in \mathrm{L_q}(\Omega)$. Šio uždavinio *apibendrintuoju sprendiniu* vadinsime funkciją $u \in \mathrm{X} = \mathring{\mathrm{W}}{}^1_{\mathrm{p}}(\Omega)$, tenkinančią tapatybę

$$\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}|^{p-2}u_{x_i}v_{x_i}\,dx + \int\limits_\Omega g(u)v\,dx = \int\limits_\Omega fv\,dx, \quad \forall v \in \mathrm{X}. \tag{9.45}$$

Pastaroji formaliai gaunama dauginant (9.44) lygtį iš $v \in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$ ir integruojant dalimis. Pažymėkime

$$a_1(u,v) = \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}|^{p-2}u_{x_i}v_{x_i}\,dx,$$

$$a_2(u,v) = \int\limits_\Omega g(u)v\,dx, \quad b(v) = \int\limits_\Omega fv\,dx, \quad \forall u,v \in \mathrm{X}.$$

9.6 lema. *Tegu funkcija* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *yra tolydi ir tenkina tokias sąlygas:*

$$g(x)x \ge 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |g(x)| \le \alpha|x|^{p/q} + \beta, \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

čia α *ir* β *– teigiamos konstantos. Tada:*

1) *egzistuoja tokie operatoriai* $A_i : \mathrm{X} \to \mathrm{X}^*$, $i = 1, 2$, *kad*

$$\langle A_i\, u,\, v\rangle = a_i(u,v), \quad u,v \in \mathrm{X};$$

2) A_1 *yra tolygiai monotoninis, tolydus ir aprėžtas;*

3) A_2 *yra stipriai monotoninis, tolydus ir aprėžtas;*

4) *$A_1 + A_2$ yra koercityvus, tolydus, pseudomonotoninis, aprėžtas ir turi savybę S_+;*

5) *jeigu $f \in \mathrm{L_q}(\Omega)$, tai $b \in \mathrm{X}^*$ ir (9.45) integralinė tapatybė ekvivalenti operatorinei lygčiai*

$$A_1 u + A_2 u = b. \tag{9.46}$$

Šios lemos įrodymą galima rasti [56] knygoje.

18 išvada *Pagal 9.19 teoremą (9.46) lygtis turi sprendinį $\forall b \in \mathrm{X}^*$. Todėl (9.44) Dirichlė uždavinys turi apibendrintą sprendinį $u \in \overset{\circ}{\mathrm{W}}{}^1_{\mathrm{p}}(\Omega), \forall f \in \mathrm{L_q}(\Omega)$.*

10 SKYRIUS

Variacinės nelygybės

10.1. VARIACINIŲ NELYGYBIŲ PAVYZDŽIAI

Šiame skyrelyje nagrinėsime paprasčiausius variacinių nelygybių pavyzdžius. Tai padės geriau suprasti, kaip atsiranda variacinės nelygybės, ir apibūdins šio skyriaus nagrinėjamus uždavinius.

1 pavydys. Tegu $f : [a, b] \to \mathbb{R}^1$ yra glodi reali funkcija. Reikia rasti tokį tašką $x_0 \in [a, b]$, kad

$$f(x_0) = \min_{x \in [a,b]} f(x). \tag{10.1}$$

Tegu x_0 – šio uždavino sprendinys. Tada galimi trys atvejai:

1.1. Jeigu $a < x_0 < b$, tai $f'(x_0) = 0$.

1.2. Jeigu $x_0 = a$, tai $f'(x_0) \geq 0$.

1.3. Jeigu $x_0 = b$, tai $f'(x_0) \leq 0$.

Visas šias sąlygas galima sujungti į vieną:

$$f'(x_0)(x - x_0) \geq 0, \quad \forall x \in [a, b]. \tag{10.2}$$

Gauta nelygybė vadinama *variacine nelygybe*. Ji yra būtina (10.1) uždavinio sprendinio egzistavimo sąlyga. Vėliau įrodysime, kad iškilosios funkcijos f atveju ši sąlyga ir pakankama, t.y. uždaviniai (10.1) ir (10.2) yra ekvivalentūs.

2 pavydys. Tegu $K \subset \mathbb{R}^n$ yra iškila ir uždara aibė, $u : K \to \mathbb{R}^1$ – glodi funkcija ir taškas $x_0 \in K$ toks, kad

$$u(x_0) = \min_{x \in K} u(x).$$

Apibrėžkime funkciją $\varphi(t) = u(x_0 + t(x - x_0))$, kai $t \in [0, 1]$. Kadangi aibė K iškila, tai su kievienu $x \in K$ taškas

$$x_0 + t(x - x_0) = (1 - t)x_0 + tx \in K, \quad \text{kai} \quad t \in [0, 1].$$

Funkcija φ taške $t = 0$ įgyja minimumą. Todėl, kaip ir 1 pavyzdyje, gauname:

$$\varphi'(0) = (u_x(x_0), x - x_0) \geq 0, \quad \forall x \in K.$$

Taigi minimumo taškas $x_0 \in K$ tenkina variacinę nelygybę

$$(u_x(x_0), x - x_0) \geq 0, \quad \forall x \in K.$$

Jeigu K yra aprėžta aibė, tai minimumo taško $x_0 \in K$ egzistavimas išplaukia iš Vejerštraso teoremos. Neaprėžtos aibės K atveju pakankama egzistavimo sąlyga yra tokia: $u(x) \to \infty$, kai $|x| \to \infty$.

3 p a v y d y s . Tegu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ yra aprėžta sritis, $S = \partial\Omega$ ir ψ – apibrėžta uždaroje srityje $\overline{\Omega}$ funkcija, tenkinanti sąlygas:

$$\max_{x\in\overline{\Omega}} \psi(x) \geq 0, \quad \psi(x) \leq 0, \quad \forall x \in S.$$

Apibrėžkime iškiląją aibę

$$K = \{v \in \mathrm{C}^1(\overline{\Omega}) : v(x) \geq \psi(x), \text{ kai } x \in \Omega, \text{ ir } v(x) = 0, \text{ kai } x \in S\}.$$

Tarkime, ši aibė yra netuščia. Nagrinėsime uždavinį: rasti tokią funkciją $u \in K$, kad

$$\int_\Omega |u_x|^2\,dx = \min_{v\in K} \int_\Omega |v_x|^2\,dx.$$

Jeigu tokia funkcija u egzistuoja, tai mes samprotaujame panašiai kaip ir 2 pavyzdyje. Iš aibės K iškilumo išplaukia, kad su kiekvienu $v \in K$ atkarpa $\{u + t(v - u) : 0 \leq t \leq 1\}$ priklauso K. Funkcija

$$\varphi(t) = \int_\Omega |u_x + t(v_x - u_x)|^2\,dx, \quad t \in [0, 1],$$

įgyja minimumą taške $t = 0$. Todėl $\varphi'(0) \geq 0$ ir gauname variacinę nelygybę

$$\int_\Omega (u_x, v_x - u_x)\,dx \geq 0, \quad \forall v \in K.$$

4 p a v y z d y s . Tegu sritis Ω ir iškiloji aibė K yra iš 3 pavyzdžio. Nagrinėsime uždavinį: rasti aibėje K funkciją, kurios grafikas turi minimalų plotą, t.y. rasti tokią $u \in K$, kad

$$\int_\Omega \sqrt{1 + |u_x|^2}\,dx = \min_{v\in K} \int_\Omega \sqrt{1 + |v_x|^2}\,dx.$$

Kaip ir ankstesniuose pavyzdžiuose, galima įrodyti, kad šio uždavinio sprendinys tenkina variacinę nelygybę

$$\int_\Omega \frac{(u_x, v_x - u_x)}{\sqrt{1 + |u_x|^2}}\,dx \geq 0, \quad \forall v \in K.$$

Pažymėsime, kad sprendinio egzistavimo klausimas šiame pavyzdyje yra kur kas sudėtingesnis negu ankstesniuosiuose.

10.2. PROJEKCIJA Į IŠKILĄJĄ AIBĘ

Tegu H yra realioji Hilberto erdvė su norma $\|\cdot\|$ ir skaliarine sandauga $(\cdot,\cdot)$, K – iškiloji uždaroji aibė erdėje H, $\psi \in H$ – fiksuotas elementas. Apibrėžkime fukcionalą $f : H \to \mathbb{R}$ formule $f(v) = \|v-\psi\|^2$. Nagrinėsime minimizavimo uždavinį: rasti tokią funkciją $u \in K$, kad

$$f(u) = \min_{v\in K} f(v). \tag{10.3}$$

10.1 lema. *Su kiekvienu elementu $\psi \in H$ egzistuoja vienintelis (10.3) uždavinio sprendinys.*

◁ Tegu $d = \inf\limits_{v\in K} F(v)$ ir $\{u_n\} \subset K$ yra minimizuojanti seka:

$$\|u_n-\psi\|^2 \le d^2 + \frac{1}{n}, \quad n = 1,2,\dots$$

Pagal lygiagretainio taisyklę

$$\|u_n-u_m\|^2 = \|(u_n-\psi)-(u_m-\psi)\|^2 =$$

$$= 2(\|u_n-\psi\|^2 + \|u_m-\psi\|^2) - 4\big\|(u_n+u_m)/2-\psi\big\|^2 \le$$

$$\le 2\big(2d^2+1/n+1/m\big) - 4\big\|(u_n+u_m)/2-\psi\big\|^2.$$

Taškas $(u_n+u_m)/2$ priklauso aibei K. Pagal tikslaus apatinio rėžio apibrėžimą $\|(u_n+u_m)/2-\psi\| \ge d$. Todėl

$$\|u_n-u_m\| \le \frac{2}{n}+\frac{2}{m} \to 0,$$

kai $n,m\to\infty$, ir seka $\{u_n\}$ yra fundamentali. Kadangi Hilberto erdvė yra pilna, tai seka $\{u_n\}$ konverguoja. Tegu $u \in H$ yra šios sekos riba. Iš aibės K uždarumo išplaukia, kad $u \in K$. Be to,

$$\|u-\psi\| = \lim_{n\to\infty} \|u_n-\psi\| = d.$$

Todėl u yra (10.3) uždavinio sprendinys. ▷

10.2 lema. *Elementas $u \in K$ yra (10.3) uždavinio sprendinys tada ir tik tada, kai jis tenkina variacinę nelygybę*

$$(u, v-u) \ge (\psi, v-u), \quad \forall v \in K. \tag{10.4}$$

Be to, toks u yra vienintelis.

◁ Tegu $u \in K$ yra (10.3) uždavinio sprendinys. Tada su kiekvienu fiksuotu $v \in K$ funkcija $\varphi(t) = f(tu+(1-t)v)$ įgyja minimumą, kai $t = 1$. Todėl $\varphi'(1) \le 0$. Funkcijos φ išvestinė

$$\varphi'(t) = 2(u-v, tu+(1-t)v-\psi).$$

Todėl funkcija u tenkina (10.4) variacinę nelygybę.

Tegu $u \in K$ yra (10.4) variacinės nelygybės sprendinys. Tada su kiekvienu $v \in K$

$$f(v) - f(u) = f(u + (v - u)) - f(u) = \|v - u\|^2 + 2(v - u, u - \psi) \geq 0.$$

Todėl taškas u funkcionalo f minimo taškas aibėje K.

Įrodysime sprendinio vienatį. Tegu u_1, u_2 yra du (10.4) nelygybės sprendiniai. Tada

$$(u_1, u_2 - u_1) \geq (\psi, u_2 - u_1), \quad (u_2, u_1 - u_2) \geq (\psi, u_1 - u_2).$$

Sudėję šias nelygybes, gausime $\|u_1 - u_2\|^2 \leq 0$. Todėl $u_1 = u_2$. ▷

A p i b r ė ž i m a s. Tegu $u \in K$ yra (10.3) uždavinio sprendinys. Tada jį vadinsime *taško* ψ *projekcija į iškiląją aibę* K ir žymėsime $u = P_K\psi$.

P a s t a b a. Kiekvieno elemento $v \in K$ projekcija į aibę K sutampa su v, t.y. $P_K v = v, \forall v \in K$.

19 išvada *Tegu K yra iškiloji uždaroji Hilberto erdvės H aibė. Tada operatorius P_K nėra ištempio operatorius, t.y.*

$$\|P_K\psi_1 - P_K\psi_2\| \leq \|\psi_1 - \psi_2\|, \quad \forall \psi_1, \psi_2 \in H. \tag{10.5}$$

Be to, P_K yra tolydusis operatorius.

◁ *Tegu $\psi_1, \psi_2 \in H$ ir $u_1 = P_K\psi_1$, $u_2 = P_K\psi_2$. Tada*

$$\langle u_1,\, v - u_1\rangle \geq \langle \psi_1,\, v - u_1\rangle\,, \quad \forall v \in K,$$
$$\langle u_2,\, v - u_2\rangle \geq \langle \psi_2,\, v - u_2\rangle\,, \quad \forall v \in K.$$

Pirmojoje nelygybėje imkime $v = u_2$, antrojoje – $v = u_1$ ir gautas nelygybes sudėkime. Tada gausime nelygybę

$$\|u_1 - u_2\|^2 = (u_1 - u_2, u_1 - u_2) \leq (\psi_1 - \psi_2, u_1 - u_2) \leq \|\psi_1 - \psi_2\|\|u_1 - u_2\|.$$

Kartu teisinga nelygybė $\|u_1 - u_2\| \leq \|\psi_1 - \psi_2\|$. Operatoriaus P_K tolydumas ir projekcijos vienatis išplaukia iš (10.5). ▷

Naudodamiesi projekcijos P_K savybėmis, įrodysime Brauerio teoremą apie nejudamą tašką iškiloms kompaktiškoms aibėms iš $\mathbb{R}^n$.

10.1 teorema. (Brauerio apibendrinta) *Tegu $K \subset \mathbb{R}^n$ yra iškiloji, uždaroji, aprėžtoji aibė ir $f : K \to K$ – tolydusis atvaizdis. Tada egzistuoja toks taškas $x \in K$, kad*

$$fx = x.$$

◁ *Imkime tokį uždarąjį rutulį $B \subset \mathbb{R}^n$, kad $K \subset B$. Projekcija P_K yra tolydusis atvaizdis. Todėl atvaizdis*

$$f \circ P_K : B \to K \subset B$$

yra tolydusis ir atvaizduoja rutulį B į save. Pagal Brauerio teoremą egzistuoja nejudamas taškas, t.y. toks taškas $x \in B$, kad $f \circ P_K x = x$. Kadangi $x \in K$, tai $P_K x = x$ ir $fx = x$. ▷

Projekcijos operatorių P_K panaudosime kitame skyrelyje, įrodydami variacinių nelygybių sprendinių egzistavimą.

10.3. VARIACINĖS NELYGYBĖS HILBERTO ERDVĖJE

Tegu H yra realioji Hilberto erdvė su norma $\|\cdot\|$ ir skaliarine sandauga $(\cdot,\cdot)$, H^* – jungtinė erdvė, K – iškiloji uždaroji erdėje H aibė, $a(\cdot,\cdot)$ – aprėžta, griežtai teigiama bitiesinė erdvėje $H\times H$ forma. Priminsime, kad bitiesinė forma a yra aprėžta, jeigu

$$|a(u,v)|\le c\|u\|\|v\|,\quad \forall u,v\in H,\quad c=\text{const}>0, \tag{10.6}$$

ir koercityvi, jeigu

$$|a(u,u)|\ge \alpha\|u\|^2,\quad \forall u\in H,\quad \alpha=\text{const}>0. \tag{10.7}$$

Tegu $f\in H^*$ yra tiesinis tolydus funkcionalas. Ieškosime funkcijos $u\in K$, tenkinančios variacinę nelygybę

$$a(u,v-u)\ge f(v-u),\quad \forall v\in K. \tag{10.8}$$

10.2 teorema. (Lionso–Stampakijos) *Tarkime, bitiesinė forma $a(\cdot,\cdot)$ yra aprėžta ir koercityvi. Tada su kiekvienu $f\in H^*$ egzistuoja vienintelis (10.8) variacinės nelygybės sprendinys.*

◃ Pagal Ryso teoremą egzistuoja vienintelis toks elementas $\psi\in H$, kad

$$f(v)=(\psi,v),\quad \forall v\in H,$$

ir vienintelis toks elementas $A\,u\in H$, kad

$$a(u,v)=(A\,u,v),\quad \forall v\in H.$$

Be to, pastaroji formulė apibrėžia tiesinį aprėžtą operatorių $A:H\to H$, $\|A\|\le c$ (žr. (10.6) nelygybę). Todėl (10.8) variacinę nelygybę galima perrašyti

$$(A\,u-\psi,v-u)\ge 0,\quad \forall v\in K,$$

arba

$$(u+\rho\,A\,u-\rho\psi-u,v-u)\ge 0,\quad \forall v\in K,\ \rho=\text{const}>0. \tag{10.9}$$

Tegu $v\in K$ ir $\varphi=-\rho\,A\,v-\rho\psi+v$. Pagal 10.1 lemą egzistuoja vienintelis toks elementas $u\in K$, kad $u=P_K\varphi=P_K(v-\rho(Av-\psi))$. Todėl (10.9), tuo pačiu ir (10.8), variacinės nelygybės sprendimas yra ekvivalentus operatorinės lygties

$$u=P_K(u-\rho(Au-\psi)):=Q_\rho u,\quad u\in K,$$

sprendimui.

Įrodysime, kad pakankamai mažiems $\rho>0$ operatorius Q_ρ yra sutraukiantysis. Naudodamiesi (10.5), gauname

$$\|Q_\rho u-Q_\rho v\|^2\le\|v-\rho(A\,v-\psi)-u+\rho(A\,u-\psi)\|^2=$$

$$= \|(v-u) - \rho\, A(v-u)\|^2 = \|v-u\|^2 + \rho^2 \|\, A(v-u)\|^2 -$$
$$-2\rho a(v-u, v-u) \le (1 - 2\rho\alpha + \rho^2 c^2)\|v-u\|^2.$$

Todėl, kai $0 < \rho < 2\alpha/c^2$, *teisinga nelygybė*

$$\|Q_\rho u - Q_\rho v\| \le q\|v-u\|, \quad \forall v, u \in K, \quad q < 1,$$

t.y. operatorius Q_ρ *yra sutraukiantysis. Pagal Banacho teoremą (žr. 9.1 skyrelį)* $u = Q_\rho u$ *turi vienintelį sprendinį* $u \in K$. *Kartu jis yra ir (10.8) variacinės nelygybės sprendinys.* ▹

1. Membramos išlinkimo uždavinys. Tegu $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *yra aprėžta sritis,* $l = \partial\Omega$. *Nagrinėsime tamprios membranos, įtvirtintos kontūro* l *taškuose, išlinkimo uždavinį. Jeigu skaliarinė funkcija* u *aprašo membranos išlinkimą, tai (žr. [1]) ji yra Dirichlė uždavinio*

$$-\sum_{i=1}^{2} \frac{d}{dx_i}\big(k(x)u_{x_i}\big) = f(x), \quad x \in \Omega; \quad u|_l = 0, \quad x \in l, \tag{10.10}$$

sprendinys. Čia funkcija k *charakterizuoja membranos fizikines savybes, o funkcija* f *– membraną veikiančias jėgas. Šį uždavinį atitinka energijos funkcionalas*

$$J(u) = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega k u_x^2\, dx - \int\limits_\Omega f u\, dx.$$

Tarkime, membramos išlinkimas u *apribotas dviem paviršiais, t.y.*

$$\varphi(x) \le u(x) \le \psi(x), \quad x \in \Omega; \tag{10.11}$$

čia φ *ir* ψ *– dvi žinomos tokios funkcijos, kad* $\varphi(x) \le 0 \le \psi(x)$, *kai* $x \in l$. *Tada membramos išlinkimo uždavinys susiveda į funkcionalo* J *minimizavimo uždavinį su (10.11) papildoma sąlyga.*

Suformuluosime šį uždavinį. Tegu $H = \overset{\circ}{\mathrm{W}}{}_2^1(\Omega),\ \varphi, \psi, k \in \mathrm{L}_\infty(\Omega),\ f \in \mathrm{L}_2(\Omega)$, $T(x) \ge \alpha > 0$, *b.v.* $x \in \Omega$ *ir*

$$K = \{u \in \overset{\circ}{\mathrm{W}}{}_2^1(\Omega) : \varphi(x) \le u(x) \le \psi(x),\ \text{b.v. } x \in \Omega.\}$$

Reikia rasti tokią funkciją $u \in K$, *kad*

$$J(u) = \min_{v \in K} J(v). \tag{10.12}$$

Panašiai kaip ir 10.1 lemoje, galima įrodyti, kad (10.12) minimizavimo uždavinio sprendimas yra ekvivalentus variacinės nelygybės

$$\int\limits_\Omega k u_x (v_x - u_x)\, dx \ge \int\limits_\Omega f(v-u)\, dx, \qquad \forall v \in K, \tag{10.13}$$

sprendimui aibėje K. Tegu

$$a(u,v)=\int\limits_{\Omega} k u_x v_x \, dx.$$

Taip apibrėžta bitiesinė forma yra aprėžta, koercityvi ir simetrinė. Be to, integralas

$$\ell(u)=\int\limits_{\Omega} f v \, dx$$

apibrėžia tiesinį tolydų funkcionalą erdvėje $\overset{\circ}{\mathrm{W}}{}^1_2(\Omega)$. Todėl patenkintos visos 10.2 teoremos sąlygos ir galime tvirtinti, kad (10.13) variacinė nelygybė (kartu ir 10.12 uždavinys) turi vienintelį sprendinį aibėje K. Tiksliau, teisinga tokia teorema.

10.3 teorema. *Tegu $k \in \mathrm{L}_\infty(\Omega)$, $k(x) \geq \alpha > 0$, b.v. $x \in \Omega$, $f \in \mathrm{L}_2(\Omega)$. Tada (10.12) minimizavimo uždavinys (arba (10.13) variacinė nelygybė) turi vienintelį sprendinį $u \in K$.*

P a s t a b a. Galima įrodyti, kad taškuose $x \in \Omega$, kuriuose yra teisinga griežta nelygybė $\varphi(x) < u(x) < \psi(x)$, sprendinys u tenkina (10.10) lygtį.

2. Modelinis Sinjorinio uždavinys. Tegu Ω yra aprėžta erdvėje $\mathbb{R}^n sritis$, $S = \partial\Omega$, $f \in \mathrm{L}_2(\Omega)$, $\varphi \in \mathrm{L}_\infty(S)$ ir

$$K=\{u \in \mathrm{W}^1_2(\Omega) : u(x) \geq \varphi(x), \text{ b.v. } x \in S\}.$$

Apibrėžkime funkcionalą J formule

$$J(u)=\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}(u_x^2+\lambda u^2)\, dx-\int\limits_{\Omega} f u \, dx;$$

čia λ – teigiama konstanta. Reikia rasti tokią funkciją $u \in K$, kad

$$J(u)=\min_{v\in K} J(v). \tag{10.14}$$

Šį uždavinį galima suvesti į tokį: rasti funkciją $u \in K$, tenkinančią variacinę nelygybę

$$\int\limits_{\Omega}[u_x(v_x-u_x)+\lambda u(v-u)]\, dx \geq \int\limits_{\Omega} f(v-u)\, dx, \quad \forall v \in K. \tag{10.15}$$

Tegu

$$a(u,v)=\int\limits_{\Omega}(u_x v_x+\lambda u v)\, dx.$$

Taip apibrėžta bitiesinė forma yra aprėžta, koercityvi ir simetrinė $\mathrm{W}^1_2(\Omega)$ erdvėje. Be to, integralas

$$\ell(u)=\int\limits_{\Omega} f v \, dx$$

apibrėžia tiesinį tolydą funkcionalą erdvėje $\mathrm{W}_2^1(\Omega)$, *o aibė* K *yra iškila ir uždara. Todėl patenkintos visos 10.2 teoremos sąlygos ir galime tvirtinti, kad (10.15) variacinė nelygybė ((10.14) uždavinys) turi vienintelį sprendinį aibėje* K. *Kartu galime tvirtinti, kad teisinga tokia teorema.*

10.4 teorema. *Tegu* $f \in \mathrm{L}_2(\Omega)$, $\varphi \in \mathrm{L}_\infty(S)$, $\lambda > 0$. *Tada* (10.15) *variacinė nelygybė turi vienintelį sprendinį* $u \in K$.

20 išvada *Funkcija* $u \in K$ *yra* (10.15) *variacinės nelygybės sprendinys tada ir tik tada, kai ji yra kraštinio uždavinio*

$$-\Delta u + \lambda u = f, \quad x \in \Omega; \tag{10.16}$$

$$(u-\varphi)|_S \geq 0, \quad \partial u/\partial \mathbf{n}|_S \geq 0, \quad \partial u/\partial \mathbf{n}(u-\varphi)|_S = 0 \tag{10.17}$$

apibendrintasis sprendinys. Čia $\partial u/\partial \mathbf{n}$ *– funkcijos* u *išvestinė išorinės normalės kryptimi.*

$\triangleleft$ *Tegu* $u \in K$ *yra (10.15) variacinės nelygybės sprendinys. Imkime šioje nelygybėje* $v = u+\eta$, $\eta \in \mathrm{C}^\infty(\overline{\Omega})$. *Tada gausime nelygybę* $a(u,\eta) \geq (f,\eta)$, *ekvivalenčią integralinei tapatybei*

$$a(u,\eta) = (f,\eta), \quad \forall \eta \in \mathrm{C}^\infty(\overline{\Omega})\,.$$

Tai reiškia, kad u *yra apibendrintasis (10.16) lygties sprendinys. Įrodysime, kad* u *tenkina (10.17) kraštines sąlygas. Įstatykime į (10.15) nelygybę* $v = u+\eta$, $\eta \in \mathrm{C}^\infty(\overline{\Omega})$, $\eta(x) \geq 0$, *kai* $x \in \overline{\Omega}$. *Tada pasinaudoję integravimo dalimis formule bei (10.16) lygtimi, gausime*

$$\int_S \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \eta \, ds \geq 0, \quad \forall \eta \in \mathrm{C}^\infty(\overline{\Omega}), \quad \eta(x) \geq 0.$$

Iš šios nelygybės išplaukia, kad $\partial u/\partial \mathbf{n}|_S \geq 0$. *Imdami (10.15) nelygybėje* $v = 2u - \varphi \in K$ *ir* $v = \varphi \in K$, *gausime integralinę tapatybę* $a(u, u-\varphi) = (f, u-\varphi)$. *Iš jos išplaukia*

$$\int_S \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} (u-\varphi)\, ds = 0.$$

Po integralo ženklu abu daugikliai yra neneigiami. Todėl $\partial u/\partial \mathbf{n}(u-\varphi)|_S = 0$. $\triangleright$

P a s t a b a . Dažnai (10.16), (10.17) uždavinys yra vadinamas Sinjorinio uždaviniu, o (10.17) kraštinės sąlygos – Sinjorinio kraštinėmis sąlygomis. Tamprumo mechanikos lygčių sistemai tokį uždavinį suformulavo A. Sinjorinis (A. Signorini) 1959 metais (žr. 3 pavyzdį).

3. Sinjorinio uždavinys. Tegu $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *yra elastingas kūnas su dalimis glodžiu paviršiumi* S, $f = (f_1, f_2, f_3)$ *– kūną veikiančių jėgų tankio funkcijos. Tada kūno pusiausvyros lygčių sistema yra*

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0, \quad i = 1,2,3, \quad x \in \Omega; \tag{10.18}$$

čia σ_{ij} – įtampų tenzoriaus komponentės. Tarkime, kūno deformacija yra pakankamai maža ir teisingos tiesinės tamprumo teorijos prielaidos:

$$\sigma_{ij} = \sum_{k,h=1}^{3} a_{ijkh}\varepsilon_{kh}(u); \quad \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big), \quad i,j = 1,2,3. \tag{10.19}$$

Čia: $u = (u_1, u_2, u_3)$ – poslinkio vektorius , $\varepsilon_{ij}(u)$ – deformacijų tenzoriaus komponentės, $a_{ijkh}(x)$ – koeficientai, tenkinantys sąlygas:

$$a_{ijkh}(x) = a_{jikh}(x) = a_{khij}(x), \quad \forall x \in \Omega, \tag{10.20}$$

$$\sum_{i,j,k,j=1}^{3} a_{ijkh}(x)\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kh} \geq \alpha \sum_{i,j=1}^{3} \varepsilon_{ij}^2, \quad \forall x \in \Omega. \tag{10.21}$$

Formuluojant konkretų uždavinį, prie (10.18) lygčių sistemos yra pridedamos kraštinės sąlygos. Klasikiniai tamprumo teorijos uždaviniai yra: Dirichlė uždavinys

$$u_i|_S = \varphi_i(x), \quad i = 1,2,3, \quad x \in S,$$

ir Noimano uždavinys

$$\sigma_i = \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}\cos(\mathbf{n}, x_j) \equiv \sum_{ij=1}^{3} \sigma_{ij} n_j = \psi_i(x), \quad i = 1,2,3, \ x \in S;$$

čia $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ – išorinis srities Ω atžvilgiu vienetinis paviršiaus S normalės vektorius.

Toliau nagrinėsime uždavinį su vienpusėmis kraštinėmis sąlygomis, kai kūno forma apribota standžiu paviršiumi ir nėra trinties. Tegu:

$\sigma_{\mathbf{n}} = \sum_{i,j=1}^{3} \sigma_{ij} n_i n_j$ *yra įtampa normalės kryptimi;*

$\delta\sigma_i = \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij} n_j - \sigma_{\mathbf{n}} n_i, \ i = 1,2,3,$ *– įtampos vektoriaus liečiamojoje plokštumoje komponentės;*

$u_{\mathbf{n}} = \sum_{i=1}^{3} u_i n_i$ *– poslinkis normalės kryptimi;*

$\delta u = u - u_{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{n}$ *– poslinkio vektorius liečiamojoje plokštumoje.*

Sinjorinio uždaviniu vadinama (10.18) lygčių sistema kartu su Sinjorinio kraštinėmis sąlygomis:

$$\delta\sigma = 0, \quad u_{\mathbf{n}} \leq 0, \quad \sigma_{\mathbf{n}} \leq 0, \quad \sigma_{\mathbf{n}} u_{\mathbf{n}} = 0, \quad x \in S. \tag{10.22}$$

Pirmoji iš šių sąlygų charakterizuoja tai, kad tarp elastingo kūno ir standaus paviršiaus nėra trinties. Antroji – kad standus paviršius S neleidžia kūnui pasislinkti išorinės *normalės kryptimi:* $u_{\mathbf{n}} \leq 0$. *Jeigu* $u_{\mathbf{n}} < 0$, *tai paviršius* S *pasislenka vidinės normalės kryptimi, tarp kūno ir stadaus paviršiaus nėra įtampos:* $\sigma_{\mathbf{n}} = 0$. *Jeigu taškas* $x \in S$ *neturi poslinkio normalės kryptimi, t.y.* $u_{\mathbf{n}} = 0$, *tai jis yra veikiamas standaus paviršiaus:* $\sigma_{\mathbf{n}} \leq 0$.

Tegu $S = S_1 \cup S_2$, $|S_i| \neq 0$, $i = 1, 2$. *Toliau nagrinėsime kraštinį uždavinį su Dirichlė sąlygomis paviršiuje* S_1 *ir Sinjorinio sąlygomis paviršiuje* S_2 *(papildoma Dirichlė sąlyga yra reikalinga tam, kad atitinkama bitiesinė forma būtų koercityvi). Tiksliau, ieškosime funkcijos* u, *tenkinančios (10.18) lygčių sistemą, paviršiaus* S_1 *taškuose Dirichlė sąlygą*

$$u_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad x \in S_1, \tag{10.23}$$

ir paviršiaus S_2 *taškuose Sinjorinio sąlygą*

$$\delta\sigma = 0, \quad u_{\mathbf{n}} \leq 0, \quad \sigma_{\mathbf{n}} \leq 0, \quad \sigma_{\mathbf{n}} u_{\mathbf{n}} = 0, \quad x \in S_2. \tag{10.24}$$

Tegu

$$(A\,u, v) = -\int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} v_i\,dx, \quad a(u, v) = \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{3} \sigma_{ij}(u)\varepsilon_{ij}(v)dx.$$

Naudojantis integravimo dalimis formule, įtampų tenzoriaus simetriškumu $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ *ir sąryšiu*

$$\sum_{i,j=1}^{3} \sigma_{ij} n_j v_i = \sum_{i=1}^{3} (\delta\sigma_i + \sigma_{\mathbf{n}} n_i) v_i = \delta\sigma\delta v + \sigma_{\mathbf{n}} v_{\mathbf{n}},$$

išvedame Gryno formulę

$$(A\,u, v) = a(u, v) - \int\limits_{S} (\delta\sigma(u)\delta v + \sigma_{\mathbf{n}}(u) v_{\mathbf{n}})\,dS. \tag{10.25}$$

Apibrėžkime Hilberto erdvę

$$H = \{u = (u_1, u_2, u_3) : \ u_i \in \mathrm{W}_2^1(\Omega), \ u_i|_{S_1} = 0\}$$

ir iškiląją uždarąją aibę

$$K = \{u \in H : u_{\mathbf{n}}|_{S_2} \leq 0\}.$$

Tada energijos integralą

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - (f, v) \equiv \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{3} \sigma_{ij}(v)\varepsilon_{ij}(v)\,dx - \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{3} f_i v_i\,dx$$

atitinka variacinė nelygybė

$$a(u, v - u) \geq (f, v - u), \quad \forall v \in K. \tag{10.26}$$

Naudojantis (10.25) Gryno formule, galima parodyti, kad (10.26) variacinės nelygybės sprendinys tenkina (10.18) lygčių sistema bei (10.23), (10.24) kraštines sąlygas.

10.5 teorema. *Tegu* $a_{ijhk} \in \mathrm{L}_\infty(\Omega),\ f_i \in \mathrm{L}_2(\Omega),\ \forall i,j,k,h = 1,2,3,$ *ir teisingos* (10.20), (10.21) *sąlygos. Tada* (10.26) *variacinė nelygybė turi vienintelį sprendinį.*

$\triangleleft$ *Kadangi* $a_{ijhk} \in \mathrm{L}_\infty(\Omega),$ *tai bitiesinė forma* $a(u,v)$ *aprėžta. Iš (10.21) gauname*

$$a(u,u) \geq \alpha \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \varepsilon_{ij}^2(u)\,dx, \quad \forall u \in H. \tag{10.27}$$

Pagal pirmąją Korno nelygybę (žr. [9])

$$\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \varepsilon_{ij}^2(u)\,dx \geq \alpha_0 \|u\|^2, \quad \forall u \in H, \quad \alpha_0 = \mathrm{const} > 0.$$

Iš šių nelygybių išplaukia, kad bitiesinė forma $a(\cdot,\cdot)$ *yra koercityvi. Be to, aibė* K *yra uždara ir iškila (patikrinkite). Taigi patenkintos visos 10.2 teoremos sąlygos. Remiantis šia teorema, galima tvirtinti, kad (10.26) variacinė nelygybė turi vienintelį sprendinį* $u \in K.$ $\triangleright$

10.4. APIBENDRINTOSIOS VARIACINĖS NELYGYBĖS

Tegu H *yra realioji Hilberto erdvė su norma* $\|\cdot\|$ *ir skaliarine sandauga* $(\cdot,\cdot)$, H^* *– jungtinė erdvė,* $a(\cdot,\cdot)$ *– aprėžta, koercityvi bitiesinė forma erdvėje* $H\times H$, $g\in H^*$ *ir* $f: H\to(-\infty,\infty]$, $f\not\equiv\infty$ *iškilas, silpnai pustolydis iš apačios funkcionalas. Nagrinėsime uždavinį: rasti tokią funkciją* $u\in H$*, kad*

$$a(u,v-u)+f(v)-f(u)\geq\langle g,\,v-u\rangle\,,\quad\forall v\in H. \tag{10.28}$$

Šią nelygybę vadinsime apibendrintąja variacine nelygybe. Praeitame skyrelyje išnagrinėtos variacinės nelygybės yra atskiras (10.28) nelygybės atvejis. Iš tiesų, jeigu f *yra aibės* K *indikatorinė funkcija, t.y.*

$$f(v)=\chi_K(v)=\begin{cases}0, & v\in K,\\ +\infty, & v\notin K\end{cases}$$

(ji yra iškiloji ir pustolydė iš apačios), tai uždavinys: rasti tokią funkciją $u\in H$*, kad*

$$a(u,v-u)+\chi_K(v)-\chi_K(u)\geq\langle g,\,v-u\rangle\,,\quad\forall v\in H,$$

yra ekvivalentus (10.8) variacinės nelygybės sprendimui aibėje K.

Iš pradžių nagrinėsime uždavinį: rasti tokią $u\in H$*, kad*

$$(u,v-u)+f(v)-f(u)\geq\langle g,\,v-u\rangle\,,\quad\forall v\in H. \tag{10.29}$$

Tegu

$$\Phi(v)=\frac{1}{2}\|v\|^2+f(v)-\langle g,\,v\rangle\,,\quad g\in H^*.$$

Tada (10.29) variacinė nelygybė yra ekvivalenti uždaviniui: rasti tokią funkciją $u\in H$*, kad*

$$\Phi(u)=\min_{v\in H}\Phi(v). \tag{10.30}$$

10.3 lema. *Tarkime, funkcionalas* f *tenkina skyrelio pradžioje nurodytas sąlygas ir* $g\in H^*$*. Tada* (10.29) *variacinė nelygybė (*$\Leftrightarrow$ (10.30) *uždavinys) turi vienintelį sprendinį* $u\in H$.

$\triangleleft$ *Funkcionalas*

$$\Phi_0(v)=\frac{1}{2}\|v\|^2-g(v)$$

yra iškilas ir tolydus. Todėl funkcionalas $\Phi=\Phi_0+f$ *yra iškilas ir silpnai pustolydis iš apačios. Kadangi funkcionalas* f *yra iškilas ir* $f\not\equiv\infty$*, tai egzistuoja funkcionalas* $l\in H^*$ *ir skaičius* $\alpha\in\mathbb{R}$ *tokie, kad*

$$f(v)\geq\langle l,\,v\rangle+\alpha,\quad\forall v\in H.$$

Kartu galime tvirtinti, kad

$$\Phi(v)\geq\frac{1}{2}\|v\|^2-\|l\|_{H^*}\|v\|-\|g\|_{H^*}\|v\|+\alpha\to+\infty,$$

kai $\|v\|\to\infty$*. Todėl patenkintos 8.3 teoremos sąlygos ir (10.30) uždavinys turi vienintelį sprendinį.* $\triangleright$

10.6 teorema. *Tegu $a(\cdot,\cdot)$ yra aprėžta, koercityvi bitiesinė forma, f – iškilas, silpnai pustolydis iš apačios fukcionalas, $f \not\equiv \infty$, $g \in H^*$. Tada* (10.28) *variacinė nelygybė turi vienintelį sprendinį.*

$\triangleleft$ Tegu $\rho = \mathrm{const} > 0$, $w \in H$ – fiksuotas elementas. Nagrinėsime pagalbinę nelygybę

$$(u, v-u) + \rho f(v) - \rho f(u) \geq (w, v-u) + \rho \langle g,\, v-u\rangle - \rho a(w, v-u), \quad \forall v \in H.$$

Pagal Ryso teoremą egzistuoja toks elementas $h \in H^*$, kad

$$\langle h,\, v\rangle = (w, v) + \rho \langle g,\, v\rangle - \rho a(w, v).$$

Todėl nelygybę galima perrašyti taip:

$$(u, v-u) + \rho f(v) - \rho f(u) \geq \langle h,\, v-u\rangle\,, \quad \forall v \in H. \tag{10.31}$$

Pagal 10.3 lemą kiekvienam $w \in H$ ir kiekvienam $\rho > 0$ egzistuoja vienintelis (10.31) nelygybės sprendinys $u = Q_\rho w$. Parodysime, kad pakankamai mažiems ρ operatorius $Q_\rho : H \to H$ yra sutraukiantysis. Tegu $u_1 = Q_\rho w_1$, $u_2 = Q_\rho w_2$. Tada

$$(u_1, u_2 - u_1) + \rho f(u_2) - \rho f(u_1) \geq$$

$$\geq (w_1, u_2 - u_1) + \rho \langle g,\, u_2 - u_1\rangle - \rho a(w_1, u_2 - u_1),$$

$$(u_2, u_1 - u_2) + \rho f(u_1) - \rho f(u_2) \geq$$

$$\geq (w_2, u_1 - u_2) + \rho \langle g,\, u_1 - u_2\rangle - \rho a(w_2, u_1 - u_2).$$

Sudėję šias nelygybes, gauname

$$\|u_1 - u_2\|^2 = \|Q_\rho w_1 - Q_\rho w_2\|^2 \leq (w_1 - w_2, u_1 - u_2) -$$

$$-\rho a(w_1 - w_2, u_1 - u_2) = \big((E - \rho\, A)(w_1 - w_2), u_1 - u_2\big);$$

čia: E – tapatusis operatorius, $A : H \to H$ – operatorius, apibrėžiamas formule $(A\,u, v) = a(u, v)$, $\forall u, v \in H$. Kadangi bitiesinė forma a yra aprėžta ir koercityvi (žr. 10.3 skyrelį), tai $\|\,A\,\| \leq c$ ir $\|E - \rho\,A\,\| \leq (1 - 2\rho\alpha + \rho^2 c^2)^{1/2} < 1$, kai $0 < \rho < 2\alpha/c^2$. Todėl tokiems ρ yra teisinga nelygybė

$$\|Q_\rho w_1 - Q_\rho w_2\| \leq \|E - \rho\,A\,\|\,\|w_1 - w_2\| < \|w_1 - w_2\|$$

ir opeatorius Q_ρ yra sutraukiantysis. Pagal Banacho teoremą operatorius Q_ρ turi vienintelį nejudamą tašką, t.y. egzistuoja vienintelis toks $u \in H$, kad $u = Q_\rho u$. Kartu jis yra ir (10.28) variacinės nelygybės sprendinys. $\triangleright$

P a v y z d ž i a i:

1. Temperatūros valdymo srityje uždavinys. Tegu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \leq 3$, yra šilumai laidi sritis, $S = \partial\Omega$. Tada stacionarų temperatūros srityje Ω pasiskirstymą aprašo lygtis

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\big(a_{ij}(x) u_{x_j}\big) = g(x), \quad x \in \Omega;$$

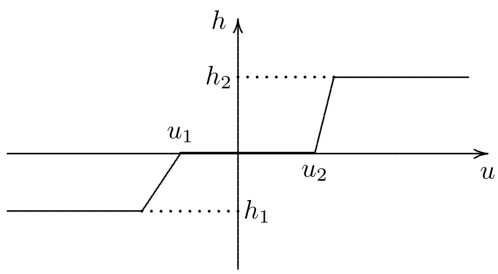
čia: g *– šilumos šaltinių tankis,* u *– kūno temperatūra,* a_{ij} *– žinomi koeficientai, charakterizuojantys srities savybes. Jeigu paviršiuje* S *yra palaikoma nulinė temperatūra, tai funkcija* u *dar turi tenkinti kraštinę sąlygą*

$$u|_S = 0, \quad x \in S.$$

Tegu u_1, u_2 *– apibrėžtos srityje* Ω *tokios funkcijos, kad* $u_1(x) \le u_2(x)$*, kai* $x \in \Omega$*. Įdėkime į sritį* Ω *šilumos šaltinį (žr. 10.1. pav.) su tankiu*

$$h(u) = \begin{cases} 0, & \textit{kai } u \in [u_1, u_2], \\ k_2(u - u_2), & \textit{kai } u > u_2 \textit{ ir } k_2(u-u_2) \le h_2, \\ h_2, & \textit{kai } u > u_2 \textit{ ir } k_2(u-u_2) > h_2, \\ k_1(u - u_1), & \textit{kai } u < u_1 \textit{ ir } k_1(u-u_1) \ge h_1, \\ h_1, & \textit{kai } u < u_1 \textit{ ir } k_1(u-u_1) < h_1; \end{cases}$$

čia: k_1, k_2 *– teigiamos konstantos,* $0 \in [h_1, h_2]$.



10.1 pav.

Taip apibrėžtas šilumos šaltinis lygus nuliui, jeigu $u \in [u_1, u_2]$*. Jeigu* $u \notin [u_1, u_2]$ *ir* $h(u) \in [h_1, h_2]$*, tai įvedamas (išvedamas) šilumos kiekis į sritį* Ω *yra proporcingas taško* u *atstumui iki intervalo* $[u_1, u_2]$*. Kitais atvejais yra palaikomas pastovus šilumos srautas* h_1 *arba* h_2*. Šiuo atveju stacionarų šilumos pasiskirstymą srityje* Ω *aprašo Dirichlė uždavinys:*

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\big(a_{ij} u_{x_j}\big) + h(u) = g(x), \quad x \in \Omega, \tag{10.32}$$

$$u|_S = 0, \quad x \in S. \tag{10.33}$$

Tegu $H = \mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)$ *. Apibrėžkime realaus kintamojo funkciją*

$$q(t) = \int\limits_0^t h(s)\, ds$$

ir ją atitinkantį funkcionalą

$$f(v) = \int\limits_\Omega q(v)\, dx, \quad v \in H.$$

Be to, tegu

$$a(u,v) = \int\limits_{\Omega} \sum_{ij=1}^{n} a_{ij} u_{x_j} v_{x_i}\, dx, \quad u, v \in H.$$

Sakysime, funkcija $u \in H$ yra (10.33), (10.33) Dirichlė uždavinio apibendrintas sprendinys, jeigu $\forall v \in H$ yra teisinga variacinė nelygybė

$$a(u, v-u) + f(v) - f(u) \geq \int\limits_{\Omega} g \cdot (v-u)\, dx. \tag{10.34}$$

10.7 teorema. *Tarkime, $a_{ij} \in \mathrm{L}_\infty(\Omega),\ i,j = 1,\dots,n,\ \ g \in \mathrm{L}_2(\Omega),\ h_i \in \mathrm{L}_1(\Omega),$ $h_i = \mathrm{const},\ k_i = const > 0,\ i = 1, 2,$ ir yra teisinga nelygybė*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \nu \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \quad \forall x \in \Omega, \quad \nu = \mathrm{const} > 0.$$

Tada (10.34) *variacinė nelygybė turi vienintelį sprendinį.*

$\triangleleft$ *Bitiesinė forma $a(\cdot,\cdot)$ aprėžta ir koercityvi. Be to, funkcionalas f yra iškilas ir silpnai pustolydis iš apačios (patikrinkite). Todėl (žr. 10.6 teoremą) (10.34) variacinė nelygybė turi vienintelį sprendinį.* $\triangleright$

2. Uždavinys su daugiareikšme kraštine sąlyga. Tegu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ yra aprėžta sritis, $S = \partial\Omega$ – dalimis glodus paviršius, $\lambda > 0$, $\varphi : S \times \mathbb{R} \to (-\infty, \infty]$, $\varphi \not\equiv +\infty$. Be to, tegu su kiekvienu fiksuotu $x \in S$ funkcija $\varphi(x,\cdot)$ iškila ir $\beta(x,\cdot) = \partial\varphi(x,\cdot)$ – jos subdiferencialas. Bendru atveju $\beta(x,\cdot) : \mathbb{R} \to [\varphi'_-(x,\cdot), \varphi'_+(x,\cdot)]$ yra daugiareikšmė ir monotoninė funkcija. Čia $\varphi'_-(x,\cdot), \varphi'_+(x,\cdot)$ yra funkcijos $\varphi(x,\cdot)$ išvestinės iš kairės ir dešinės.

Nagrinėsime uždavinį: rasti tokią funkciją u, kad

$$-\Delta u + \lambda u = g(x), \quad x \in \Omega, \tag{10.35}$$

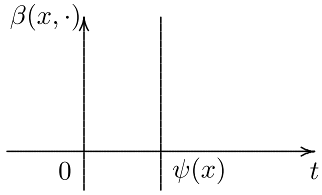
$$-\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \in \beta(x,u), \quad x \in S; \tag{10.36}$$

čia $\partial u/\partial \mathbf{n}$ – funkcijos u išvestinė išorinės normalės $\mathbf{n}$ kryptimi. Pabrėšime, kad (10.36) kraštinė sąlyga taip pat reikalauja, kad $u(x) \in \{t \in \mathbb{R} : \beta(x,t) \neq \emptyset\}$, t.y. $u(x)$ priklausytų funkcijos $\beta(x,\cdot)$ apibrėžimo sričiai. Atkreipsime dėmesį į tai, kad (10.36) kraštinė sąlyga yra gana bendra. Jos atskiri atvejai yra:

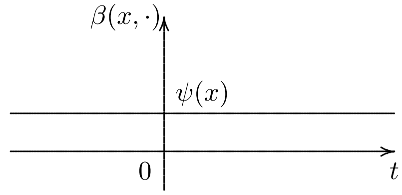
1. *Dirichlė sąlyga $u|_S = \psi(x)$, $x \in S$ (žr. 10.2 pav.), gaunama, kai*

$$\beta(x,t) = \begin{cases} \emptyset, & t \neq \psi(x), \\ (-\infty, +\infty), & t = \psi(x). \end{cases}$$

2. *Noimano sąlyga* $-\partial u/\partial \mathbf{n} = \psi(x), x \in S$ *(žr. 10.3 pav.), gaunama, kai* $\beta(x,\cdot) = \psi(x)$.



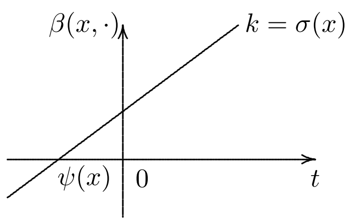
10.2 pav.



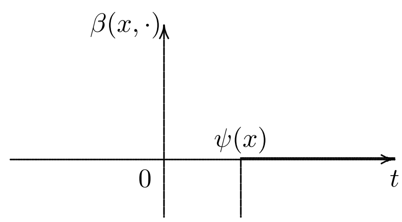
10.3 pav.

3. *Trečioji kraštinė sąlyga* $-\partial u/\partial \mathbf{n} = \sigma(x)u + \psi(x)$, $x \in S$, $\sigma(x) \geq 0$ *(žr. 10.4 pav.), gaunama, kai*
$$\beta(x,t) = \sigma(x)t + \psi(x).$$

4. *Sinjorinio sąlyga* $u(x) \geq \psi(x)$, $\partial u/\partial \mathbf{n} \geq 0$, $\partial u/\partial \mathbf{n}(u-\psi)|_S = 0$, $x \in S$ *(žr. 10.5 pav.), gaunama kai*
$$\beta(x,t) = \begin{cases} \emptyset, & t < \psi(x), \\ (-\infty, 0], & t = \psi(x), \\ 0, & t > \psi(x). \end{cases}$$



10.4 pav.



10.5 pav.

5. *Paviršiaus* S_1 *taškuose Dirichlė sąlyga, o paviršiaus* S_2 *taškuose – Sinjorinio sąlyga,* $S = S_1 \cup S_2$ *(žr. 10.2 pav. ir 10.5 pav.).*

Tegu
$$a(u,v) = \int\limits_\Omega (u_x v_x + \lambda uv)\,dx, \quad f(v) = \int\limits_S \varphi(x,v)\,dS.$$
Sakysime, funkcija $u \in \mathrm{W}_2^1(\Omega)$ *yra (10.35), (10.36) uždavino apibendrintas sprendinys, jeigu* $\forall v \in \mathrm{W}_2^1(\Omega)$ *yra teisinga variacinė nelygybė*
$$a(u, v-u) + f(v) - f(u) \geq \int\limits_\Omega g \cdot (v-u)\,dx. \tag{10.37}$$

Tegu
$$J(u) = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega (u_x^2 + \lambda u^2)\,dx - \int\limits_\Omega gu\,dx + \int\limits_S \varphi(x,u)\,dS.$$

Tada ši nelygybė yra ekvivalenti (patikrinkite) minimizavimo uždaviniui: rasti tokią funkciją $u \in \mathrm{W}_2^1(\Omega)$*, kad*

$$J(u) = \min_{v \in \mathrm{W}_2^1(\Omega)} J(v).$$

Bitiesinė forma $a(\cdot, \cdot)$ *yra aprėžta. Be to, ji yra koercityvi (nes* $\lambda > 0$*). Funkcionalas* $f : \mathrm{W}_2^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ *gana plačiai funkcijų* φ *klasei yra iškilas ir silpnai pustolydis iš apačios. Todėl tokioms funkcijoms* φ *patenkintos 10.6 teoremos sąlygos ir (10.37) variacinė nelygybė turi vienintelį sprendinį.*

10.5. NEKOERCITYVIOS VARIACINĖS NELYGYBĖS

Tegu H *yra realioji Hilberto erdvė su norma* $\|\cdot\|$ *ir skaliarine sandauga* $(\cdot,\cdot)$, H^* *– jungtinė erdvė,* $f \in H^*$, K *– iškiloji, uždaroji erdvėje* H *aibė ir* $a(\cdot,\cdot) : H \times H \to \mathbb{R}$ *– aprėžta bitiesinė forma. Šiame skyrelyje atsisakysime bitiesinės formos koercityvumo prielaidos. Vietoje jos reikalausime, kad bitiesinė forma* $a(\cdot,\cdot)$ *būtų tik neneigiama, t.y. tenkintų sąlygą*

$$a(u,u) \geq 0, \quad \forall u \in H. \tag{10.38}$$

Nagrinėsime uždavinį: rasti funkciją $u \in K$ *tokią, kad*

$$a(u, v-u) \geq \langle f,\, v-u\rangle\,, \quad \forall v \in K. \tag{10.39}$$

Be koercityvumo sąlygos toks uždavinys gali neturėti sprendinio. Pavyzdžiui, Sinjorinio modelinis uždavinys: rasti funkciją $u \in K$ *tokią, kad*

$$\int\limits_\Omega u_x(v_x - u_x)\,dx \geq \int\limits_\Omega f\cdot(v-u)\,dx, \quad \forall v \in K,$$

$K = \{v \in \mathrm{W}_2^1(\Omega) : v(x) \geq h(x),\ \text{b.}v.\ x \in S\}$, *neturi sprendinio su laisvai pasirinkta funkcija* $f \in \mathrm{L}_2(\Omega)$. *Iš tikrųjų, jeigu egzistuotų funkcija* $u \in K$, *tenkinanti šią variacinę nelygybę, tai paėmę* $v = u + c$, $c = \mathrm{const} > 0$, *gautume*

$$\int\limits_\Omega f(x)\,dx \leq 0. \tag{10.40}$$

Taigi ši sąlyga yra būtina išsprendžiamumo sąlyga. Jeigu ji nepatenkinta, tai variacinė nelygybė sprendinio neturi.

Grįžkime prie (10.39) variacinės nelygybės. Apsiribosime atveju, kai bitiesinė forma yra simetrinė, t.y.

$$a(u,v) = a(v,u), \quad \forall u, v \in H. \tag{10.41}$$

Šiuo atveju (10.39) variacinė nelygybė ekvivalenti uždaviniui: rasti tokią funkciją $u \in K$, *kad*

$$\Phi(u) = \min_{v\in K} \Phi(v), \quad \Phi(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - \langle f,\, v\rangle\,. \tag{10.42}$$

Iš 8 skyriaus rezultatų išplaukia, funkcionalas Φ *yra iškilasis ir silpnai pustolydis iš apačios.*

Tegu N_a *ir* N_f *yra kvadratinės formos* $a(\cdot,\cdot)$ *ir funkcionalo* $f \in H^*$ *branduoliai, t.y.*

$$N_a = \{u \in H : a(u,v) = 0, \forall v \in H\}, \quad N_f = \{u \in H : \langle f,\, u\rangle = 0\}.$$

10.8 teorema. *Tegu bitiesinė forma $a(\cdot,\cdot)$ yra aprėžta, neneigiama ir simetrinė. Be to, tegu egzistuoja* (10.39) *uždavinio sprendinys $u \in K$. Tada bet kuris kitas sprendinys $u' \in K$ išreiškiamas pavidalu:*

$$u' = u + \rho, \quad \rho \in N_a \cap N_f.$$

$\lhd$ *Tegu $u \in K$ yra (10.39) uždavinio sprendinys, $\rho \in N_a \cap N_f$ ir $u + \rho \in K$. Tada*

$$\Phi(u + \rho) = \Phi(u) = \min_{v \in K} \Phi(v),$$

t.y. $u' = u + \rho$ taip pat yra (10.39) uždavinio sprendinys. Tarkime, u, u' yra du (10.39) uždavinio sprendiniai. Tada teisingos nelygybės

$$a(u', u - u') \geq \langle f,\, u - u' \rangle\,, \quad a(u, u' - u) \geq \langle f,\, u' - u \rangle\,.$$

Sudėję jas, gauname $a(u - u', u - u') = 0$. Tai reiškia, kad $u' = u + \rho$, $\rho \in N_a$. Be to,

$$\Phi(u) = \Phi(u + \rho) = \Phi(u) - \langle f,\, \rho \rangle\,.$$

Todėl $f(\rho) = 0$ ir $\rho \in N_f$. $\rhd$

Tegu $N = N_a \cap N_f$, $N_a = N \oplus M$ (čia M – ortogonalus N papildymas iki N_a). Pažymėkime Q, Q_N ir Q_M ortogonalaus projektavimo operatorius atitinkamai į N_a, N ir M; $P = E - Q$, $P_N = E - Q_N$.

10.9 teorema. *Tegu $a(\cdot,\cdot)$ yra aprėžta, simetrinė bitiesinė forma, tenkinanti puskoercityvumo sąlygą:*

$$a(u, u) \geq \alpha \|Pu\|^2, \qquad \forall u \in H, \quad \alpha = \mathrm{const} > 0. \tag{10.43}$$

Be to, tegu aibė $Q(K)$ aprėžta. Tada egzistuoja (10.39) *variacinės nelygybės sprendinys.*

$\lhd$ *Funkcionalas Φ yra iškilas ir pustolydis iš apačios. Todėl pakanka įrodyti, kad iš minimizuojančios sekos galima išrinkti konverguojantį posekį. Tegu $u_n \in K$ yra minimizuojanti seka, t.y*

$$\lim_{n \to \infty} \Phi(u_n) = \inf_{v \in K} \Phi(v) := d < +\infty.$$

Iš projektavimo operatorių P ir Q savybių gauname

$$\|u_n\|^2 = \|Pu_n\|^2 + \|Qu_n\|^2.$$

Jeigu seka u_n nėra aprėžta, tai egzistuoja toks posekis u_n (jį vėl žymėsime u_n), kad $\|u_n\| \to \infty$, kai $n \to \infty$. Pagal teoremos sąlygą seka $\{Qu_n\}$ yra aprėžta. Todėl $\|Pu_n\| \to \infty$, kai $n \to \infty$. Kartu galime tvirtinti, kad

$$\Phi(u_n) = \frac{1}{2} a(u_n, u_n) - \langle f,\, Pu_n \rangle - \langle f,\, Qu_n \rangle \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} \alpha \|Pu_n\|^2 - \|f\|\, \|Pu_n\| - \|f\|\, \|Qu_n\| \to +\infty,$$

kai $n \to \infty$. Tačiau tai prieštarauja tam, kad seka $\{u_n\}$ yra minimizuojanti, t.y. $\Phi(u_n) \to d < +\infty$. Taigi kiekviena minimizuojanti seka yra aprėžta. Kadangi Hilberto erdvė yra refleksyvi, tai iš minimizuojančios sekos galima išrinkti posekį, konverguojantį į (10.39) variacinės nelygybės sprendinį. $\rhd$

10.6. VARIACINĖS NELYGYBĖS SU NETIESINIAIS MONOTONINIAIS OPERATORIAIS

Iš pradžių nagrinėsime variacinę nelygybę baigtiniamatėje erdvėje. Tiksliau, tegu H *– baigtiniamatė vektorinė erdvė su skaliarine sandauga* $(\cdot,\cdot)$, $K \subset H$ *– iškila, uždara ir aprėžta aibė,* $A : K \to H$ *– tolydus operatorius. Nagrinėsime uždavinį: rasti tokį elementą* $u \in K$*, kad*

$$(A\,u, v - u) \geq 0, \quad \forall v \in K. \tag{10.44}$$

10.4 lema. *Tegu* A *ir* K *tenkina anksčiau suformuluotas sąlygas. Tada* (10.44) *variacinė nelygybė turi sprendinį.*

$\triangleleft$ *Tegu* $w \in K$ *yra koks nors fiksuotas elementas. Pagal* 10.1 *lemą variacinė nelygybė*

$$(u, v - u) \geq (w - A\,w, v - u), \quad \forall v \in K,$$

turi vienintelį sprendinį $u = P_K(w - A\,w) \in K$. *Be to, operatorius* P_K *yra tolydus. Apibrėžkime operatorių* $T : K \to K$ *formule:*

$$Tw = P_K(w - A\,w), \quad \forall w \in K.$$

Operatorius T *yra tolydus. Remiantis* 10.1 *teorema, egzistuoja toks taškas* $u \in K$*, kad* $u = Tu$. *Nesunku matyti, kad* u *yra* (10.44) *nelygybės sprendinys.* $\triangleright$

10.5 lema. *Tegu* X *yra Banacho erdvė,* $A : \mathrm{X} \to \mathrm{X}^*$ *– radialiai tolydus monotoninis operatorius,* $f \in \mathrm{X}^*$, K *– iškila uždara aibė. Tada ekvivalentūs tokie uždaviniai:*

1. *Rasti tokią funkciją* $u \in K$*, kad*

$$\langle A\,u,\, v - u\rangle \geq \langle f,\, v - u\rangle\,, \quad \forall v \in K. \tag{10.45}$$

2. *Rasti tokią funkciją* $u \in K$*, kad*

$$\langle A\,v,\, v - u\rangle \geq \langle f,\, v - u\rangle\,, \quad \forall v \in K. \tag{10.46}$$

$\triangleleft$ *Tegu* u *yra* (10.45) *variacinės nelygybės sprendinys. Tada, remiantis operatoriaus* A *monotoniškumu,*

$$\langle A\,v,\, v - u\rangle = \langle A\,u,\, v - u\rangle + \langle A\,v - A\,u,\, v - u\rangle \geq$$
$$\geq \langle A\,u,\, v - u\rangle \geq \langle f,\, v - u\rangle\,, \quad \forall v \in K,$$

t.y. u *tenkina* (10.46) *variacinę nelygybę. Tarkime,* u *yra* (10.46) *sprendinys ir* $v = u + t(w - u)$, *kai* $w \in K$, $t \in (0, 1)$. *Taškas* $v \in K$. *Todėl*

$$\langle A(u + t(w - u)),\, w - u\rangle \geq \langle f,\, w - u\rangle\,, \quad \forall w \in K.$$

Kadangi operatoriaus A *radialiai tolydus, tai*

$$\lim_{t\to 0} A(u + t(w - u)) = A\,u$$

ir yra teisinga (10.45) *nelygybė.* $\triangleright$

10.10 teorema. *Tegu* X *yra refleksyvi Banacho erdvė,* $A : \mathrm{X} \to \mathrm{X}^*$ *– monotoninis, aprėžtas ir radialiai tolydus operatorius,* $K \subset \mathrm{X}$ *– aprėžta, iškila ir uždara aibė. Tada egzistuoja* (10.45) *variacinės nelygybės sprendinys* $u \in K$. *Be to, jeigu operatorius* A *yra griežtai monotoninis, tai sprendinys yra vienintelis.*

◁ *Tegu* K_m *yra didėjanti uždarųjų iškilųjų aibių tokia seka, kad*

$$K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_m \subset \ldots \subset K,$$

aibė $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} K_m$ *yra tiršta aibėje* K *ir* $K_m \subset \mathrm{X}_m \subset \mathrm{X}, \dim \mathrm{X}_m = m$. *Pagal* 10.4 *lemą su kiekvienu* m *egzistuoja variacinės nelygybės*

$$\langle A\, u_m,\, v - u_m \rangle \geq \langle f,\, v - u_m \rangle\,, \quad \forall v \in K_m, \tag{10.47}$$

sprendinys $u_m \in K_m$. *Kadangi aibė* K *aprėžta, tai seka* $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ *taip pat aprėžta ir iš jos galima išrinkti silpnai konverguojantį posekį. Šį posekį, kaip ir pačią seką, žymėsime* $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$. *Tegu* u *yra šio posekio ribinis elementas. Kiekviena uždaroji iškiloji aibė yra silpnai uždara. Todėl* $u \in K$. *Iš* 10.5 *lemos gauname, kad*

$$\langle A\, v,\, v - u_m \rangle \geq \langle f,\, v - u_m \rangle\,, \quad \forall v \in K_m.$$

Be to, $K_m \subset K_{m+1}, \forall m$. *Todėl*

$$\langle A\, v,\, v - u_m \rangle \geq \langle f,\, v - u_m \rangle\,, \quad \forall v \in K_k, \quad k \leq m. \tag{10.48}$$

Fiksuokime (10.48) nelygybėje k *ir pereikime prie ribos, kai* $m \to \infty$. *Tada gausime nelygybę*

$$\langle A\, v,\, v - u \rangle \geq \langle f,\, v - u \rangle\,, \quad \forall v \in K_k. \tag{10.49}$$

Kadangi (10.49) nelygybė teisinga su kiekvienu k, *tai*

$$\langle A\, v,\, v - u \rangle \geq \langle f,\, v - u \rangle\,, \quad \forall v \in \bigcup_{k=1}^{\infty} K_k. \tag{10.50}$$

Aibė $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} K_k$ *yra tiršta aibėje* K. *Be to, operatorius* A *yra demitolydus* ($u_m \to u$ *erdvėje* X, $\Rightarrow A\, u_m \rightharpoonup A\, u$ *erdvėje* X^*). *Todėl iš (10.50) gauname, kad*

$$\langle A\, v,\, v - u \rangle \geq \langle f,\, v - u \rangle\,, \quad \forall v \in K. \tag{10.51}$$

Iš 10.5 *lemos išplaukia, kad* u *tenkina (10.45) nelygybę. Spendinio vienatį paliekame įrodyti skaitytojui.* ▷

Tarkime, K *yra neaprėžtoji, iškiloji aibė. Parinkime tokį skaičių* $R > 0$, *kad aibė*

$$K_R = K \cap \{u \in \mathrm{X} : \|u\| \leq R\} \neq \emptyset.$$

Su kiekvienu tokiu R *variacinė nelygybė*

$$\langle A\, u_R,\, v - u_R \rangle \geq \langle f,\, v - u_R \rangle\,, \quad \forall v \in K_R, \tag{10.52}$$

turi sprendinį $u_R \in K_R$, *jeigu tik operatorius* A *tenkina visas* 10.10 *teoremos sąlygas. Be to,* $\|u_R\| \leq R$.

10.6 lema. *Tegu operatorius A tenkina 10.10 teoremos sąlygas, K – iškila, uždara aibė. Tada būtina ir pakankama (10.45) variacinės nelygybės sprendinio egzistavimo sąlyga yra tokia: egzistuoja toks skaičius $R > 0$, kad bent vienas (10.52) variacinės nelygybės sprendinys $u_R \in K_R$ tenkina nelygybę $\|u_R\| < R$.*

$\triangleleft$ *Tegu $u \in K$ yra (10.45) variacinės nelygybės sprendinys. Tada imdami $R > \|u\|$ gausime, kad u tenkina (10.52) variacinę nelygybę.*

Tarkime, (10.52) variacinė nelygybė turi sprendinį $u_R \in K_R$ ir $\|u_R\| < R$. Tada su kiekvienu $\eta \in K$ egzistuoja tokie $w \in K_R$ ir $\varepsilon > 0$, kad $w - u_R = \varepsilon(\eta - u_R)$. Imkime (10.52) nelygybėje $v = w$ ir perrašykime taip:

$$\langle A\,u_R,\, w - u_R\rangle = \varepsilon\,\langle A\,u_R,\, \eta - u_R\rangle \geq \varepsilon\,\langle f,\, \eta - u_R\rangle\,, \quad \forall \eta \in K.$$

Todėl u_R tenkina (10.45). $\triangleright$

10.11 teorema. *Tegu X yra refleksyvioji Banacho erdvė, $K \subset \mathrm{X}$ – iškila uždara aibė, $A : \mathrm{X} \to \mathrm{X}^*$ – monotoninis, aprėžtas ir radialiai tolydus operatorius. Be to, egzistuoja tokie $u_0 \in K$ ir $R > \|u_0\|$, kad*

$$\langle A\,v,\, u_0 - v\rangle < \langle f,\, u_0 - v\rangle\,, \quad \forall v \in K : \|v\| = R. \tag{10.53}$$

Tada egzistuoja (10.45) variacinės nelygybės sprendinys $u \in K$.

$\triangleleft$ *Tegu u_R yra (10.52) sprendinys. Jeigu $\|u_R\| = R$, tai*

$$\langle A\,u_R,\, u_0 - u_R\rangle \geq \langle f,\, u_0 - u_R\rangle$$

ir gauname prieštarą. Todėl $\|u_R\| < R$ ir patenkintos visos 10.6 lemos sąlygos. $\triangleright$

A p i b r ė ž i m a s . Sakysime, operatorius $A : \mathrm{X} \to \mathrm{X}^*$ yra koercityvus aibėje K, jeigu egzistuoja toks elementas $u_0 \in K$, kad

$$\frac{\langle A\,u,\, u - u_0\rangle}{\|u\|} \to \infty, \tag{10.54}$$

kai $\|u\| \to \infty$.

10.12 teorema. *Tegu X yra refleksyvioji Banacho erdvė, $K \subset \mathrm{X}$ – iškila uždara aibė, $A : \mathrm{X} \to \mathrm{X}^*$ – monotoninis, aprėžtas, radialiai tolydus ir koercityvus aibėje K operatorius. Tada egzistuoja (10.45) variacinės nelygybės sprendinys $u \in K$.*

$\triangleleft$ *Fiksuokime skaičių $\alpha > \|f\|_{\mathrm{X}^*}$. Kadangi operatorius A yra koercityvus, tai egzistuoja toks skaičius $R > \|u_0\|$, kad*

$$\langle A\,u,\, u - u_0\rangle \geq \alpha\|u - u_0\|,$$

kai $\|u\| \geq R$. Todėl

$$\langle A\,u,\, u - u_0\rangle + \langle f,\, u_0 - u\rangle \geq \alpha\|u - u_0\| - \|f\|_{\mathrm{X}^*}\|u - u_0\| \geq$$

$$\geq (\alpha - \|f\|_{\mathrm{X}^*})(\|u\| - \|u_0\|) > 0,$$

kai $\|u\| = R$. *Kartu teisinga nelygybė*

$$\langle A\, u,\, u_0 - u\rangle < \langle f,\, u_0 - u\rangle\,,$$

kai $\|u\| = R$. *Remiantis 10.12 teorema, egzistuoja (10.45) variacinės nelygybės sprendinys* $u \in K$. ▷

LITERATŪRA

[1] *Ambrazevičius A. Matematinės fizikos lygtys. D. 1. Vilnius: ,,Aldorija", 1996. 380 p.*

[2] *Antosikas P., Mikusinskis J., Sikorskis R. Apibendrintųjų funkcijų teorija. Maskva: Mir, 1976. 311 p. (Rus.)*

[3] *Axiezeris N. I. Variacinio skaičiavimo paskaitos. - Maskva: 1954. 248 p.*

[4] *Besovas O. V., Iljinas V. P., Nikolskis S. M. Funkcijų integralinės išraiškos ir įdėjimo teoremos. Maskva: 1975. 480 p. (Rus.)*

[5] *Browder F. E. Griežtai elipsinės diferencialinių lygčių sistemos (Strongly elliptic systems of differential equations) Ann. Math. Studies. Prinstonas, 1954. 33, p. 15–51.*

[6] *Cea J. Optimizacija. Teorija ir algoritmai. Maskva: Mir, 1973. (Rus.)*

[7] *Chardis G. G., Litlvudas D. E., Polia G. Nelygybės. Maskva: 1948. 456 p. (Rus.)*

[8] *Fadeevas D. K., Vulichas B. Z., Uralceva N. N. Rinktiniai analizės ir aukštosios algebros skyriai. Leningradas: LVU, 1981. 200 p. (Rus.)*

[9] *Fichera G. Egzistavimo teoremos elastiškumo teorijoje. Maskva: Mir, 1974. 159 p. (Rus.)*

[10] *Fridmanas A. Parabolinės lygtys dalinėmis išvestinėmis. Maskva: Mir, 1968. 428 p. (Rus.)*

[11] *Fučikas S., Nečas J., Součekas V. Įvadas į variacinį skaičiavimą (Einfürung in die Variationsrechnung). Leipcigas: 1977. 176 p. (Vok.)*

[12] *Gilbargas D., Trudingeris H.. Elipsinės antros eilės dalinių išvestinių lygtys. Maskva: Nauka, 1989. 464 p. (Rus.)*

[13] *Giunteris N. M. Potencialų teorija ir jos taikymai pagrindiniams matematinės fizikos uždaviniams. Maskva: 1953. 416 p. (Rus.)*

[14] *Iljinas V., Pozniakas E. Matematinės analizės pagrindai D. 1. Vilnius: Mokslas, 1981. 520 p.*

[15] *Iljinas V., Pozniakas E. Matematinės analizės pagrindai D. 2. Vilnius: Mokslas, 1981. 402 p.*

[16] *Jofe A. D., Tichomirovas V. M. Ekstremumo uždavinių teorija. Maskva: 1974. 479 p. (Rus.)*

[17] *V. Kabaila Matematinė analizė D. 1. Vilnius: Mokslas, 1983. 408 p.*

[18] *V. Kabaila Matematinė analizė D. 2. Vilnius: Mokslas, 1986. 482 p.*

[19] *Kantarovičius L. V., Akilovas G. P. Funkcinė analizė. Maskva: Nauka, 1977. 744 p. (Rus.)*

[20] *Karlemanas T. Dalinių išvestinių lygčių tikrinių reikšmių asimptotika. Berlynas: 1936.*

[21] *Kecsas W., Teodorescu P. Įvadas į apibendrintųjų funkcijų teoriją su taikymais technikoje. Maskva: Mir, 1978. 518 p. (Rus.)*

[22] *Kubilius J. Realaus kintamojo funkcijų teorija. Vilnius: Mintis, 1970. 283 p.*

[23] *Kufneris A., Fučikas S. Netiesinės diferencialinės lygtys. Maskva: Nauka, 1988. 304 p. (Rus.)*

[24] *Kurantas R. Lygtys dalinėmis išvestinėmis. Maskva: Mir, 1964. 830 p. (Rus.)*

[25] *Kurantas R., Hilbertas D. Matematinės fizikos metodai. Maskva: Mir, 1964. (Rus.)*

[26] *Ladiženskaja O. A. Mišrusis uždavinys hiperbolinei lygčiai. Maskva: 1953. 280 p. (Rus.)*

[27] *Ladiženskaja O. A. Matematinės fizikos kraštiniai uždaviniai. Maskva: 1973. 408 p. (Rus.)*

[28] *Ladiženskaja O. A., Uralceva N. N.. Tiesinės ir kvazitiesinės elipsinės lygtys. Maskva: 1973. 576 p. (Rus.)*

[29] *Ladiženskaja O. A., Uralceva N. N., Solonikovas V. A.. Tiesinės ir kvazitiesinės parabolinės lygtys. Maskva: 1967. 736 p. (Rus.)*

[30] *Lionsas J. L. Kai kurie netiesinių kraštinių uždavinių sprendimo metodai. Maskva: Mir, 1972. 587 p. (Rus.)*

[31] *Lionsas J. L., Magenes E. Nehomogeniniai kraštiniai uždaviniai ir jų taikymas. Maskva: Mir, 1971. 372 p. (Rus.)*

[32] *Lionsas J. L., Stampacchia G. Variacinės nelygybės (Variational inequalities). Comm. Pure Appl. Math. 1967. XX., p. 493–517.*

[33] *Liusternikas L. A., Sobolevas V. I.. Funkcinės analizės elementai. Maskva: 1965. 520 p. (Rus.)*

[34] *Liusternikas L. A., Sobolevas V. I. Trumpas funkcinės analizės kursas. Maskva: 1982. 270 p. (Rus.)*

[35] *Lizorkinas P. I. Diferencialinių ir integralinių lygčių kursas su papildomais analizės skyriais. Maskva: Nauka, 1981. 384 p. (Rus.)*

[36] *Mazja V. G.. Sobolevo erdvės. Leningradas: LVU, 1985. 416 p. (Rus.)*

[37] *Michailovas V. P. Diferencialinės lygtys dalinėmis išvestinėmis. Maskva: 1976. 392 p. (Rus.)*

[38] *Michlinas S. G. Tiesinės dalinių išvestinių lygtys. Maskva: 1977. 431 p. (Rus.)*

[39] *Miranda K. Elipsinės dalinių išvestinių lygtys, Maskva: 1957. 256 p. (Rus.)*

[40] *Nirenbergas L. Netiesinės funkcinės analizės paskaitos. Maskva: Mir, 1977. 232 p. (Rus.)*

[41] *Švartcas L. Apibendrintų funkcijų teorija (Theorie des distributios), I. Paryžius, 1950.*

[42] *Skripnikas I. V. Netiesinių elipsinių kraštinių uždavinių tyrimo metodai. Maskva: 1990. 448 p. (Rus.)*

[43] *Smirnovas M. M. Aukštosios matematikos kursas. Maskva: Nauka, 1981. T. 4. D. 1–2. 552 p. (Rus.)*

[44] *Smirnovas M. M. Aukštosios matematikos kursas. Maskva: Nauka, 1957. T. 5. 655 p. (Rus.)*

[45] *Sobolevas S. L. Kai kurie funkcinės analizės taikymai matematinėje fizikoje. Leningradas.: 1950. 255 p. (Rus.)*

[46] *Spivakas M. Matematinė analizė daugdarose. Maskva: Mir, 1968. 164 p. (Rus.)*

[47] *Steinas I. Singuliarieji integralai ir diferencialinės funkcijų savybės. Maskva: 1973. 342 p. (Rus.)*

[48] *Steklovas V. A. Pagrindiniai matematinės fizikos uždaviniai. Maskva: Nauka, 1983. 432 p. (Rus.)*

[49] *Šilovas G. E. Matematinė analizė. Antras specialusis kursas. Maskva: MGU, 1984. 207 p. (Rus.)*

[50] *Trenoginas V. A. Funkcinė analizė. Maskva: Nauka, 1980. 495 p. (Rus.)*

[51] *Vladimirovas V. S. Matematinės fizikos lytys. Maskva: Nauka, 1981. 512 p. (Rus.)*

[52] *Vladimirovas V. S. Apibendrintosios funkcijos matematinėje fizikoje. Maskva: Nauka, 1979. 318 p. (Rus.)*

[53] *Vladimirovas V. S. Matematinės fizikos lygčių uždavinių rinkinys. Maskva: Nauka, 1982. 256 p. (Rus.)*

[54] *Vulichas B. Z. Trumpas realaus kintamojo funkcijų teorijos kursas. Maskva: 1973. 352 p. (Rus.)*

[55] *Zeidleris E. Netiesinė funkcinė analizė 1. Teoremos apie nejudamus taškus (Vorlesungen uber nichtlineare Funktionalanalysis I. Fixpunktsatze). Leipzigas: 1976. 236 p.*

[56] *Zeidleris E. Netiesinė funkcinė analizė 2. Monotoniniai operatoriai (Vorlesungen uber nichtlineare Funktionalanalysis II. Monotone Operatoren). Leipcigas: 1977. 256 p.*

[57] *Zeidleris E. Netiesinė funkcinė analizė 3. Variacinis skaičiavimas ir optimizavimas (Vorlesungen uber nichtlineare Funktionalanalysis III. Variationsmethoden und Optimierung). Leipcigas: 1977. 239 p.*

DALYKINĖ RODYKLĖ