MECHANIKA

VLADAS SKAKAUSKAS

2012 m. sausio 23 d.

Turinys

Taško kinematika **4**

1. Taško judėjimo apibrėžimas. 4
2. Taško greitis ir pagreitis ir jų Dekarto komponentės. 4
3. Taško greičio ir pagreičio natūraliosios komponentės. 5
4. Taško greičio ir pagreičio cilindrinės komponentės. 6
5. Taško greičio ir pagreičio kreivinės komponentės. 8
6. Uždaviniai 10

Standžiojo kūno kinematika **10**

1. Kūno slinkimas 10
2. Kūno sukimasis apie pastoviąją ašį 10
3. Plokščiasis standžiojo kūno judėjimas 11
4. Standžiojo kūno judėjimas apie vieną nejudantį tašką 13
5. Laisvasis standžiojo kūno judėjimas 15
6. Sudėtinis taško judėjimas 15
7. Uždaviniai 16

Materialiojo taško dinamika **19**

Laisvasis taško judėjimas 19

1. Niutono aksiomos, judėjimo lygtys ir du dinamikos uždaviniai . . 19
2. Pagrindiniai dinaminiai matai ir pagrindinės teoremos 23
3. Tiesiaeigio judėjimo integruojamieji atvejai 26
4. Uždaviniai 28
5. Plokščiasis taško judėjimas besipriešinančioje aplinkoje 28
6. Taško judėjimas apie Žemę 31

Suvaržytasis taško judėjimas **33**

1. Ryšių aksioma, pagrindinės teoremos ir judėjimo lygtys 33
2. Taško judėjimas kreive 34
3. Matematinė svyruoklė. 36
4. Lanksčiuoju netąsiuoju siūlu pakabinto taško plokščiasis judėjimas. 38
5. Taško judėjimas paviršiumi. 39
6. Svariojo taško judėjimas vertikaliuoju sukimosi paviršiumi. . . . 40
7. Svariojo taško judėjimas šiurkščiąja nuožulniąja plokštuma. . . . 40

Reliatyvusis taško judėjimas **44**

1. Reliatyviojo judėjimo ir reliatyviosios rimties lygtys 44
2. Reliatyvusis taško judėjimas besisukančios Žemės atžvilgiu . . . 44

Taškų sistemos dinamika **48**
1. Pagrindiniai absoliučiojo judėjimo dėsniai 48
2. Kenigo ašys ir pagrindinės reiatyviojo judėjimo teoremos 51

Standžiojo kūno dinamika **53**
1. Pagrindiniai absoliučiojo judėjimo dėsniai 53
2. Pagrindinių judėjimo dėsnių reliatyvioji forma ir inercijos momentai 56
3. Standžiojo kūno sukimasis apie pastoviąją ašį 60
4. Turinčio vieną nejudantį tašką kūno judėjimas 61

Analizinė mechanika **66**
1. Pagrindinės sąvokos 66
2. Lagranžo pirmosios rūšies lygtys 68
3. Lagranžo antrosios rūšies lygtys 69
4. Rauto neholonominių sistemų lygtys 71
5. Madži (Maggi) lygtys. 72
6. Apelio (Appell) lygtys 72
7. Hamiltono kanoninės lygtys 74
8. Jakobio metodas Hamiltono lygtims spręsti 75

Taško kinematika

1. Taško judėjimo apibrėžimas.

Sakome, kad taško judėjimas yra apibrėžtas, jeigu kiekvienu laiko momentu $t \in I = [t_0, t_1]$ žinoma jo padėtis duotosios atskaitos sistemos atžvilgiu. Žinomi trys pagrindiniai taško judėjimo apibrėžimo būdai: vektorinis, koordinatinis ir natūralusis.

Kai žinomas taško M radiusas vektorius $r = \overrightarrow{r} = \overrightarrow{OM}$, $t \in I$, turintis antrąją tolydžią išvestinę, sakome, jog taško M judėjimas apibrėžtas vektoriškai. 0 yra atskaitos sistemos pradžios taškas. Lygybė $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t)$, vadinama baigtine (vektorine) taško judėjimo lygtimi, arba baigtiniu (vektoriniu) judėjimo dėsniu.

Kai duotosios atskaitos sistemos atžvilgiu (pavyzdžiui, stačiakampės Dekarto) yra žinomos taško M koordinatės $x = x_k(t), k = 1, 2, 3, t \in I$, turinčios tolydžias antrąsias išvestines, sakome, kad M judėjimas apibrėžtas koordinatiniu būdu. Lygybės $x = x_k(t), k = 1, 2, 3$, vadinamos koordinatinėmis taško judėjimo lygtimis, arba koordinatiniu judėjimo dėsniu. Judėdamas taškas M brėžia kreivę, kurią vadiname trajektorija. Kai ji yra tiesė, turime tiesiaeigį taško judėjimą. Kitais atvejais taško judėjimas yra kreivaeigis. Kai trajektorija yra plokščia kreivė, turime plokščiąjį taško judėjimą.

Tarkime, kad taško M trajektorija apibrėžta lygtimi $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(s)$, kurioje s yra natūralusis kreivės parametras (trajektorijos lanko ilgis), o funkcija $\overrightarrow{r}(s)$ turi tolydžią antrąją išvestinę. Jeigu dar žinoma du kartus tolydžiai diferencijuojama funkcija $s = s(t), t \in I$, tai turime natūralųjį taško M judėjimo apibrėžimo būdą.

Lygybė $s = s(t)$ vadinama natūraliąja taško M judėjimo lygtimi, arba natūraliuoju judėjimo dėsniu. Pastebėsime, kad vektorinė ir koordinatinė judėjimo lygtys apibrėžia taško M trajektoriją.

Eliminavę iš lygybių $x_k = x_k(t), k = 1, 2, 3$, laiką t, galime gauti vieną iš trijų sistemų: $f_1(x_1, x_2) = 0, f_2(x_1, x_3) = 0; f_1(x_1, x_2) = 0, f_3(x_2, x_3) = 0; f_2(x_1, x_3) = 0, f_3(x_2, x_3) = 0$. Kiekviena iš jų apibrėžia taško M trajektoriją dviejų cilindrų sankirta. Kartais, eliminuojant t, galima gauti trajektoriją, apibrėžtą dviejų paviršių $U_k(x_1, x_2, x_3) = 0, k = 1, 2$, sankirta.

2. Taško greitis ir pagreitis ir jų Dekarto komponentės.

Tarkime, taško M judėjimas apibrėžtas vektoriškai, t.y. lygtimi $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t), t \in I$. Vektorius $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{r}'$, $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{v}' = \overrightarrow{r}''$ vadinsime atitinkamai taško M linijiniu greičiu ir linijiniu pagreičiu. Jų matmenys yra $[\overrightarrow{v}] = L/T$, $[\overrightarrow{w}] =$

L/T^2; čia L - ilgio, o T - laiko matmuo. SI sistemoje L yra metras, o T - sekundė.

Užrašysime vektorių $\overrightarrow{v}$ ir $\overrightarrow{w}$ koordinatiniu būdu:

$$\overrightarrow{v} = \sum_{k=1}^{3} v_{x_k} \overrightarrow{x}_k^{\circ} = \sum_k x_k' \overrightarrow{x}_k^{\circ},$$

$$\overrightarrow{w} = \sum_{k=1}^{3} w_{x_k} \overrightarrow{x}_k^{\circ} = \sum_k v_{x_k}' \overrightarrow{x}_k^{\circ} = \sum_k x_k'' \overrightarrow{x}_k^{\circ} \tag{1}$$

čia v_{x_k} ir w_{x_k} yra vektorių $\overrightarrow{v}$ ir $\overrightarrow{w}$ koordinatės (komponentės) ortonormuotos bazės $\overrightarrow{x}_k^{\circ}$ atžvilgiu. Iš (1) formulės išvedame lygybes

$$v_{x_k} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{x}_k^{\circ} = x_k', w_{x_k} = \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{x}_k^{0} = v_{x_k}' = x_k'',$$

$$|\overrightarrow{v}|^2 = \sum_k v_{x_k}^2 = \sum_k x_k'^2, |\overrightarrow{w}|^2 = \sum_k w_{x_k}^2 = \sum_k v_{x_k}'^2 = \sum_k x_k''^2, \tag{2}$$

$$\cos(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{x}_k^{\circ}) = x_k'/|\overrightarrow{v}|, \cos(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{x}_k^{\circ}) = x_k''/|\overrightarrow{w}|,$$

apibrėžiančias vektorių $\overrightarrow{v}$ ir $\overrightarrow{w}$ koordinates bazės $\overrightarrow{x}_k^{\circ}$ atžvilgiu, jų modulius ir krypties kampus.

Kreivę, kurią nubrėžia vektoriaus $\overrightarrow{v}$ galas, vadinsime *greičio hodografu.*

3. Taško greičio ir pagreičio natūraliosios komponentės.

Tarkime, taško M judėjimas apibrėžtas natūraliuoju būdu, t.y. lygybėmis $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(s), s = s(t), t \in I$. Trajektorijos liestinės, pagrindinės normalės ir binormalės ortai $\overrightarrow{\tau}^{\circ}, \overrightarrow{\nu}^{\circ}, \overrightarrow{\beta}^{\circ}$ apibrėžiami lygtimis

$$\overrightarrow{\tau}^{\circ} = d\overrightarrow{r}/ds, \; k\overrightarrow{\nu}^{\circ} = d\overrightarrow{\tau}^{\circ}/ds, \; \overrightarrow{\beta}^{\circ} = \overrightarrow{\tau}^{\circ} \times \overrightarrow{\nu}^{\circ}; \tag{3}$$

čia ir toliau " $\times$" reiškia vektorinės sandaugos simbolį. Vektoriai $\overrightarrow{\tau}^{\circ}, \overrightarrow{\nu}^{0}, \overrightarrow{\beta}^{0}$ kiekviename trajektorijos taške apibrėžia statmenas kryptis, vadinamas natūraliosiomis kryptimis. Dydis k vadinamas trajektorijos kreiviu, o $\rho = k^{-1}$ - kreivumo spinduliu. Iš $d\overrightarrow{\tau}^{0}/ds$ apibrėžimo galima pastebėti, jog $\overrightarrow{\nu}^{0}$ nukreiptas į trajektorijos įgaubimo pusę. Remdamiesi v ir w apibrėžimu, gauname formules

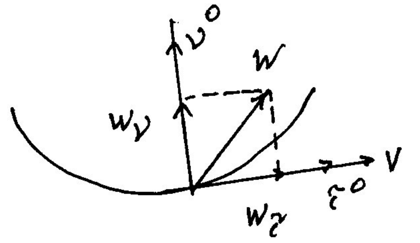
$$\overrightarrow{v} = s'\overrightarrow{\tau}^{\circ}, \; \overrightarrow{w} = s''\overrightarrow{\tau}^{\circ} + \rho^{-1}s'^2\overrightarrow{\nu}^{\circ}. \tag{4}$$

Jos rodo, jog $\overrightarrow{v}$ yra liečiamasis vektorius trajektorijai, o $\overrightarrow{w}$ priklauso trajektorijos glaustinei (einančiai per $\overrightarrow{\tau}^{\circ}, \overrightarrow{\nu}^{\circ}$) plokštumai. Iš (4) išvedame lygybes

$$v_\tau = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\tau}^{\circ} = s', \; w_\tau = s'', \; w_\nu = \rho^{-1}s'^2,$$

$$|\overrightarrow{v}| = |s'|, \; |\overrightarrow{w}| = (s''^2 + s'^4\rho^{-2})^{1/2} \tag{5}$$

Kai $s' > 0$, tai $\overrightarrow{\tau}^\circ = \overrightarrow{v}^\circ$, o kai $s' < 0$, jie yra priešingi. Vektoriai $\overrightarrow{w}_\tau = w_\tau \overrightarrow{\tau}^\circ$ ir $\overrightarrow{w}_\nu = w_\nu \overrightarrow{\nu}^\circ$ vadinami atitinkamai *liečiamuoju (tangentiniu) ir normaliniu pagreičiais* (1 pav.).



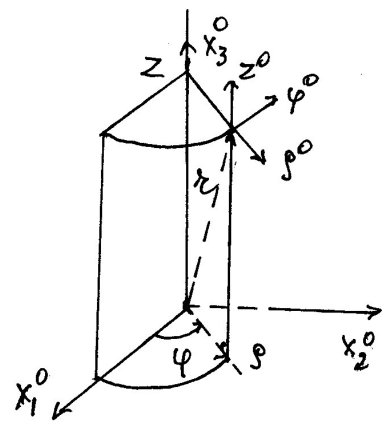
1 pav.

Kadangi $w_\nu \geq 0$, tai $\overrightarrow{w}$ nukreiptas į trajektorijos įgaubimo pusę. Kai $|\overrightarrow{v}(t)| = const\,(w_\tau = 0), \forall t \in I$, taško judėjimas vadinamas tolygiuoju. Tada $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{w}_\nu$. Kai $|\overrightarrow{v}|$ didėja $(|\overrightarrow{v}|' > 0)$ arba mažėja $(|\overrightarrow{v}|' < 0)$, sakome, kad judėjimas yra greitėjantis arba lėtėjantis. Kadangi $(\overrightarrow{v}_\tau^2)' = (|\overrightarrow{v}|^2)' = 2|\overrightarrow{v}||\overrightarrow{v}|' = 2v_\tau v_\tau' = 2s's'' = 2\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}_\tau = 2\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = 2|\overrightarrow{v}||\overrightarrow{w}|\cos(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$, tai judėjimas bus greitėjantis, jeigu $\overrightarrow{v}$ ir $\overrightarrow{w_\tau}$ turi tą pačią kryptį, $\measuredangle(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) < \frac{\pi}{2}$, arba $s's'' > 0$, ir lėtėjantis, jeigu $\overrightarrow{v}^\circ$ yra priešingas vektoriui $\overrightarrow{w_\tau^\circ}$, $\measuredangle(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) > \frac{\pi}{2}$, $s's'' < 0$. 1 brėžinys atitinka greitėjantį judėjimą. Jeigu tam tikru momentu $t\, w_\nu = 0$, tai turime trajektorijos ištiesinimo $(\rho = \infty)$ arba rimties $(|v| = 0)$ tašką. Jeigu $w_\nu = 0$, $|\overrightarrow{v}| \neq 0\, \forall t \in I$, tai šiame intervale taškas M juda tiesiaeigiai.

4. Taško greičio ir pagreičio cilindrinės komponentės.

Tarkime, $r = \overrightarrow{\rho} + x_3 x_3^\circ$, $x_1 = \rho \cos\varphi$, $x_2 = \rho \sin\varphi$, $x_3 = z$, $\rho = |\rho| \geq 0$, $z \in (-\infty, +\infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$. Kintamuosius ρ, φ, z vadinsime cilindrinėmis taško M (2 pav.) koordinatėmis. Akivaizdu, kad $\rho = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$, $z = x_3$,

$$\varphi = \begin{cases} \varphi_1 = \arctan \frac{x_1}{x_2}, & x_2 > 0; \\ \pi + \varphi_1, & x_2 < 0; \\ 0, & x_2 = 0,\, x_1 > 0; \\ \pi, & x_2 = 0,\, x_1 < 0. \end{cases} \tag{6}$$



2 pav.

Kai $x_1 = x_2 = 0$, turime x_3 ašį, kurioje $\rho = 0$, o φ yra neapibrėžtas. Naudodamiesi lygybėmis $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{\rho} + z\overrightarrow{z}^\circ$, $\overrightarrow{\rho}^\circ = x_1^\circ \cos\varphi + x_2^\circ \sin\varphi$, $\overrightarrow{\varphi}^\circ = \partial\overrightarrow{\rho}^\circ/\partial\varphi = -\sin\varphi\,\overrightarrow{x}_1^\circ + \cos\varphi\,\overrightarrow{x}_2^\circ$, $\overrightarrow{\rho} = \rho\overrightarrow{\rho}^\circ$, $\overrightarrow{\rho}^{\circ'} = \varphi'\overrightarrow{\varphi}^\circ$, $\overrightarrow{\varphi}^{\circ'} = -\varphi'\overrightarrow{\rho}^\circ$, gauname formules

$$\overrightarrow{v} = \rho'\overrightarrow{\rho}^\circ + \rho\varphi'\overrightarrow{\varphi}^\circ + z'\overrightarrow{z}^\circ \tag{7}$$

$$\overrightarrow{w} = (\rho'' - \rho\varphi'^2)\overrightarrow{\rho}^\circ + (2\rho'\varphi' + \rho\varphi'')\varphi^\circ + z''\overrightarrow{z}^\circ \tag{8}$$

išreiškiančias vektorius $\overrightarrow{v}$ ir $\overrightarrow{w}$ cilindrinėmis koordinatėmis. Dydžiai

$$v_\rho,\ v_\varphi = \rho\varphi',\ w_\rho = \rho'' - \rho\varphi'^2,\ w_\varphi = 2\rho'\varphi' + \rho\varphi'',\ w_z = z'' \tag{9}$$

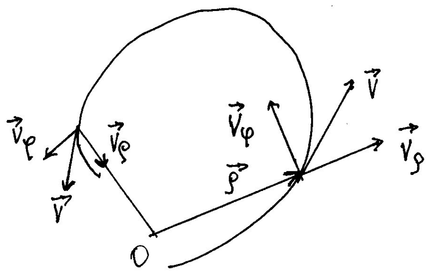
yra cilindrinės atitinkamai greičio ir pagreičio komponentės. Kadangi vektoriai $\overrightarrow{\rho}^\circ$, $\overrightarrow{\varphi}^\circ$, $\overrightarrow{z}^\circ$ ortonormuoti, tai $|\overrightarrow{v}|^2 = v_\rho^2 + v_\varphi^2 + v_z^2$, $|\overrightarrow{w}|^2 = w_\rho^2 + w_\varphi^2 + w_z^2$. Iš (7) bei (8), kai $z = const$, išvedame formules, išreiškiančias vektorius $\overrightarrow{v}$ ir $\overrightarrow{w}$ polinėmis koordinatėmis:

$$\overrightarrow{v} = \rho'\overrightarrow{\rho}^\circ + \rho\varphi'\overrightarrow{\varphi}^\circ,\ \overrightarrow{w} = (\rho'' - \rho\varphi'^2)\overrightarrow{\rho}^\circ + (2\rho'\varphi' + \rho\varphi'')\overrightarrow{\varphi}^\circ. \tag{10}$$

Dydžiai $v_\rho = \rho', v_\varphi = \rho\varphi'$, $w_\rho = (\rho'' - \rho\varphi'^2)$, $w_\varphi = 2\rho'\varphi' + \rho\varphi''$, yra polinės greičio ir pagreičio komponentės.

Vektoriai $\overrightarrow{v}_\rho = v_\rho\overrightarrow{\rho}^\circ$, $\overrightarrow{v}_\varphi = v_\varphi\overrightarrow{\varphi}^\circ$, $\overrightarrow{w}_\rho = w_\rho\overrightarrow{\rho}^\circ$, $\overrightarrow{w}_\varphi = w_\varphi\overrightarrow{\varphi}^\circ$, vadinami atitinkamai radialiniu ir skersiniu (transversaliniu) greičiu (3 pav.) ir pagreičiu. Kai $\rho' > 0$, tai $\overrightarrow{v}_\rho$ turi $\overrightarrow{\rho}^\circ$ kryptį, o kai $\rho' < 0$, tai $\overrightarrow{v}_\rho$ priešingas vektoriui $\overrightarrow{\rho}^\circ$. Pirmuoju atveju taškas M tolsta nuo poliaus O, antruoju - artėja prie O. Kai trajektorija yra spindulio ρ apskritimas, kurio centras yra taške O, (10) formulės yra tokios:

$$\overrightarrow{v} = \rho\varphi'\overrightarrow{\varphi}^\circ,\ \overrightarrow{w} = -\rho\varphi'^2\overrightarrow{\rho}^\circ + \rho\varphi''\overrightarrow{\varphi}^\circ. \tag{11}$$



3 pav.

Kadangi $\overrightarrow{\varphi}^\circ = \overrightarrow{\tau}^\circ$, $\overrightarrow{\rho}^\circ = \overrightarrow{-\nu}^\circ$, tai $v_\tau = \rho\varphi''$, $w_\nu = -\rho\varphi'^2$. Kai trajektorija yra tiesė $\varphi = const$, tai

$$\overrightarrow{v} = \rho'\overrightarrow{\rho}^\circ, \ \overrightarrow{w} = \rho''\overrightarrow{\rho}^\circ. \tag{12}$$

Vektorių $\overrightarrow{w}_c = 2\rho'\varphi'\overrightarrow{\varphi}^\circ$ vadiname Korjolio (G. Coriolis) pagreičiu. Pastebėsime, kad $\overrightarrow{w}_c = 0$ judant apskritimu ir tiese.

Remdamiesi judėjimu tiese ir apskritimu bendruoju atveju galime teigti, kad: 1) taško M greitis yra greičio judant tiese ir greičio judant apskritimu suma; 2) taško M pagreitis yra pagreičio judant tiese, pagreičio judant apskritimu ir Korjolio pagreičio suma.

5. Taško greičio ir pagreičio kreivinės komponentės.

Tarkime, kad taško M koordinatės stačiakampės Dekarto koordinačių sistemos atžvilgiu yra x_1, x_2, x_3, o funkcijos $x_k = f_k(q_1, q_2, q_3), k = 1, 2, 3$, yra vienareikšmės, du kartus tolydžiai diferencijuojamos pagal visus kintamuosius ir nepriklausomos, o Jakobianas $D(f_1, f_2, f_3)/D(q_1, q_2, q_3) \neq 0$ kintamųjų q_1, q_2, q_3 kitimo srityje. Tada egzistuoja vienareikšmės, du kartus tolydžiai diferencijuojamos funkcijos $q_k = u_k(x_1, x_2, x_3), k = 1, 2, 3$, o vektoriai $\overrightarrow{l}_k = \partial\overrightarrow{r}/\partial q_k$ yra tiesiškai nepriklausomi. Kintamieji q_1, q_2, q_3 fiksuoja vektorių $\overrightarrow{r}$, o vektorius $\overrightarrow{r}$ - kintamuosius q_1, q_2, q_3. Kintamuosius q_1, q_2, q_3 vadinsime *kreivinėmis* taško M *koordinatėmis.*

Fiksuokime kintamųjų q_k reikšmes, pvz. $q_k = \tilde{q}_k$. Lygtis $\tilde{q}_k = u_k(x_1, x_2, x_3)$ reiškia paviršių. Viso yra trys einantys per tašką M nesutampntys paviršiai, kurie po du kertasi kreivėmis. o pastarosios kertasi taške $M(x_1, x_2, x_3)$. Gauti paviršiai vadinami koordinatiniais paviršiais, o gautos kreivės - koordinatinėmis kreivėmis. Koordinatinės kreivės parametras yra viena iš kreivinių koordinačių, pvz., koordinatinės kreivės $\tilde{q}_k = u_k(x_1, x_2, x_3)$, $k = 1, 2$ parametras yra q_3. Ši koordinatinė kreivė vadinama q_3 kreive.Kai vektoriaus $\overrightarrow{r}$

galas brėžia k-ają koordinatinę kreivę, jo argumentas yra q_k. Todėl išvestas per tašką M vektorius $\overrightarrow{l}_k$ yra liečiamasis q_k-ajai kreivei. Kadangi vektoriai $\overrightarrow{l}_k$ yra tiesiškai nepriklausomi, tai bet kokį apibrėžtą taške M vektorių $\overrightarrow{A}$ galima užrašyti vektorių $\overrightarrow{l}_k$ tiesiniu dariniu $\overrightarrow{A} = \sum\limits_{k=1}^{3} A^k \overrightarrow{l}_k$. Čia A^k yra vektoriaus $\overrightarrow{A}$ komponentės bazės $\overrightarrow{l}_k$ atžvilgiu. Toliau nagrinėsime tik ortoganaliųjų kreivinių koordinačių atvejį t.y., kai $\overrightarrow{l}_k \cdot \overrightarrow{l}_s = 0$, $k \neq s$.

Kai taškas M juda, jo koordinatės x_k yra laiko t funkcijos. Tuo pačiu kinta ir koordinatės q_k. Todėl

$$\overrightarrow{r}' = \sum_{k=1}^{3} q_k' \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial q_k},$$

o

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}(q_1, q_2, q_3, q_1', q_2', q_3') = \sum_{k=1}^{3} \overrightarrow{l}_k q_k' \tag{13}$$

Tada

$$l_k = \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial q_k'} \tag{14}$$

ir

$$l_k' = \left(\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial q_k}\right)' = \sum_s \frac{\partial^2 \overrightarrow{r}}{\partial q_s \partial q_k} q_s',$$

$$\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial q_k} = \sum_s \frac{\partial \overrightarrow{l}_s}{\partial q_k} q_s' = \sum_s \frac{\partial^2 \overrightarrow{r}}{\partial q_k \partial q_s} q_s' = \frac{\partial}{\partial q_k} \sum_s \overrightarrow{l}_s q_s'$$

Todėl

$$l_k' = \frac{\partial}{\partial q_k} \overrightarrow{v}, \tag{15}$$

o

$$\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{l}_k = \overrightarrow{v}' \cdot \overrightarrow{l}_k = (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{l}_k)' - \overrightarrow{v} \cdot l_k' \tag{16}$$

Iš (14)–(16) lygybių išvedame formulę

$$\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{l}_k = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial q_k'} \frac{1}{2} |\overrightarrow{v}|^2 - \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{1}{2} |\overrightarrow{v}|^2. \tag{17}$$

Apibrežę ortonormuotus vektorius

$$\overrightarrow{l}_k^{\circ} = H_k^{-1} \overrightarrow{l}_k, \; H_k = |\overrightarrow{l}_k| = \Big(\sum_s \Big(\frac{\partial x_s}{\partial q_k}\Big)^2\Big)^{1/2}$$

gauname

$$w_{q_k} = \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{l}_k^{\circ} = (\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{l}_k) H_k^{-1}.$$

Tada pagal (17) gauname

$$w_{q_k} = H_k^{-1} \Big\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial q_k'} \frac{1}{2} |\overrightarrow{v}|^2 - \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{1}{2} |\overrightarrow{v}|^2 \Big\}, \; \overrightarrow{w} = \sum_k w_{q_k} \overrightarrow{l}_k^{\circ}, \tag{18}$$

o pagal (13)

$$v_{q_k} = q_k^{'} H_k, \ \overrightarrow{v} = \sum_k v_{q_k} \overrightarrow{l}_k^{\circ}, \ |\overrightarrow{v}|^2 = \sum_k (H_k q_k^{'})^2. \tag{19}$$

(19) bei (18) formulės išreiškia $\overrightarrow{v}$ ir $\overrightarrow{w}$ ortogonaliosios kreivinės koordinčių sistemos bazės vektorių $\overrightarrow{l}_k^{\circ}$ tiesiniu dariniu.

6. Uždaviniai

1. Taškas juda plokščiąja kreive taip, kad $v_\rho = a$, $w_\rho = -b^2\rho^{-3}$; čia a ir b yra teigiami pastovūs dydžiai. Rasti judėjimo dėsnį ir trajektoriją, jeigu $\rho(0) = \rho_0$, $\varphi(0) = \varphi_0, \varphi^{'}(0) > 0$.

2. Taškas juda plokščiąja kreive taip, kad $|\overrightarrow{v}| = a$, $\varphi^{'} = b$; čia a ir b yra teigiami pastovūs dydžiai. Rasti judėjimo dėsnį ir trajektroiją, jeigu $\rho(0) = \rho_0$, $\varphi(0) = \varphi_0, \rho^{'}(0) > 0$.

3. Taškas juda plokščiąja kreive taip, kad $\measuredangle(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \alpha = const \in [o, \pi]$. Rasti hodografą, jeigu $\psi(0) = \psi_0$, $|\overrightarrow{v}(0)| = v_0 > 0$; čia $\psi = \measuredangle(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{x}_1^{\circ})$.

4. Taškas juda plokščiąja kreive taip, kad $v_{x_1} = a = const$. Parodyti, kad teisinga lygybė $|\overrightarrow{w}| = |\overrightarrow{v}|^3 \frac{1}{|a|\rho}$; čia ρ - kreivumo spindulys.

Standžiojo kūno kinematika

Materialųjų taškų sistema atstumai tarp kurios taškų nepriklauso nuo laiko vadinama standžiąja. Standžiuoju kūnu vadinama standžioji taškų sistema ištisai užpildanti Euklido erdvės dalį. Pažymėkime ją τ. Šiame skyriuje nagrinėsime standžiojo kūno taškų greičių ir pagreičių pasiskirstymą.

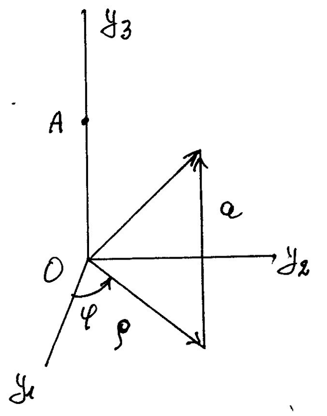
1. Kūno slinkimas

Jei bet kuri tiesė standžiai susieta su judančiu kūnu lieka lygiagreti savo pradinei padėčiai, tai sakome, kad kūnas slenka. Tarkime, r_A ir r_M yra bet kurie kūno taškai. Tada $r_M = r_A + \rho$, $\rho = const$. Todėl $v_M = v_A$ ir $w_M = w_A$.

Kai tik tam tikru momentu galioja lygybė $v_M = v_A$, tai sakome, kad kūnas slenka duotu momentu. Toliau vektoriai bus rašomi be rodyklių.

2. Kūno sukimasis apie pastoviąją ašį

Kai kūnui judant du jo taškai nejuda sakome, kad kūnas sukasi apie pastovią ašį, einančią per nejudančius taškus. Tarkime taškai O ir A nejuda, o M bet kuris kitas kūno taškas (4 pav.). Tada $r = \rho + a$, kur pastovus vektorius a yra statmenas y_1Oy_2 plokštumai. Iš čia gauname



4 pav.

$$v_M = \rho' = |\rho|\varphi' p^\circ,\ p^\circ \cdot \rho^\circ = 0,\ |\rho| = const.$$

Pastebėję, kad $p^\circ = y_3^\circ \times \rho^\circ$, ir apibrėžę kampinio greičio vektorių ω lygybe $\omega = \varphi' y_3^0$, $\varphi' > 0$, gauname

$$v_M = \omega \times \rho = \omega \times r. \tag{2.1}$$

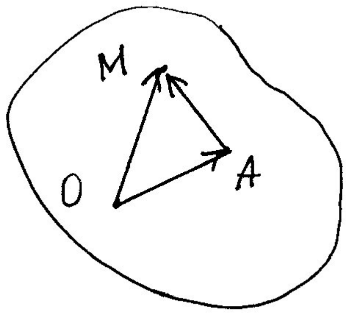
Žiūrėdami iš ω galo matome kūno sukimąsi vykstant prieš laikrodžio rodyklę. Iš (2.1) gauname

$$w_M = \varepsilon \times r + \omega \times (\omega \times r) = \varepsilon \times r - |\omega|^2 \rho,\ \varepsilon = \omega' = \varphi'' y_3^\circ. \tag{2.2}$$

ε vadinamas kampinio pagreičio vektoriumi kūnui sukantis apie pastoviąją ašį. Kai $\varphi'' > 0$, tai ω ir ε yra nukreipti į tą pačią pusę ir sukimasis greitėja. Priešingu atveju sukimasis lėtėja.

3. Plokščiasis standžiojo kūno judėjimas

Kai kūnui judant visi jo taškai juda plokštumose lygiagrečiose nejudančiai plokštumai sakome, kad kūnas juda plokščiai. Tegul M yra bet kuris kūno taškas. Išveskime tiesę, standžiai susietą su kūnu ir einančią per M statmenai nejudančiai plokštumai. Jų sankirtos tašką pažymėkime A. Tuomet iš lygybės $r_M = r_A + a$, $a = \overrightarrow{AM}$, gauname $v_M = v_A$, $w_M = w_A$, kur $|a| = const$. Vadinasi, minėtoji tiesė slenka ir jos judėjimas yra apibrėžiamas taško A judėjimu. Išvedę per likusius kūno taškus statmenis į nejudančią plokštumą, gausime, kad jų sankirtos su nejudančia plokštuma taškai sudaro plokščią figūrą, kurios judėjimas nejudančioje plokštumoje apibrėš kūno plokščiąjį judėjimą. Toliau nagrinėsime plokščios figūros judėjimą nejudančioje plokštumoje. Rasime formules aprašančias figūros tašką greičių ir pagreičių pasisikirstymą. Tegul A ir M bet kurie figūros taškai (5 brėž). Tuomet



5 pav.

$$r_M = r_A + \rho,\ \rho = \overrightarrow{AM}, |\rho| = const,$$

Iš čia

$$v_M = v_A + \rho' = v_A + |\rho|\rho^{\circ\prime} = v_A + \varphi'|\rho|p^\circ,$$

$$p^\circ = -\sin\varphi y_1^\circ + \cos\varphi y_2^\circ = y_3^\circ \times \rho^\circ.$$

Vadinasi $v_M = v_A + \omega \times \rho,$ (3.1)

kur $\omega = \varphi' y_3^\circ$, $\varphi' > 0$, yra kampinio greičio vektorius.
Tada

$$w_M = w_A + \varepsilon \times \rho - |\omega|^2\rho, \tag{3.2}$$

kur $\varepsilon = w' = \varphi'' y_3^\circ$ yra kampinio pagreičio vektorius.
Iš (3.1) ir (3.2) gauname

$$v_A \cdot \rho^\circ = v_M \cdot \rho^\circ,\ w_M = w_A \cdot \rho^\circ - \omega^2|\rho|.$$

(3.1) ir (3.2) formulės rodo, kad kūnui judant plokščiai jo taško M greitis v_M yra greičio figūrai slenkant ir taško M greičio figūrai sukantis apie ašį, einančią per tašką A statmenai nejudančiai plokštumai, suma. Analogiškas teiginys galioja ir taško M pagreičiui.

Apibrėšime momentinius greičių ir pagreičių centrus. Tašką B, kurio greitis duotu momentu lygus nuliui vadiname momentiniu greičių (sukimosi) centru. Kitą tašką C, kurio pagreitis duotu momentu lygus nuliui, vadiname momentiniu pagreičių centru. Rasime jų radiusus vektorius. Turime

$$0 = v_A + \omega \times \rho,\ \rho = \overrightarrow{AB}.$$

Padauginę šią lygybę vektoriškai iš ω gauname

$$0 = \omega \times v_A + \omega \times (\omega \times \rho) = \omega \times \omega_A - |\omega|^2 \rho \Rightarrow$$

$$\rho = \frac{\omega \times v_A}{|\omega|^2}. \tag{3.3}$$

Analogiškai gauname lygybę

$$0 = w_A + \varepsilon \times \rho - |\omega|^2 \rho, \; \rho = \overrightarrow{AC},$$

kurią, padauginę iš ε, užrašome taip

$$0 = \varepsilon \times w_A + \varepsilon \times (\varepsilon \times \rho) - |\omega|^2 \varepsilon \times \rho = \varepsilon \times w_A + |\varepsilon|^2 \rho - |\omega|^2 \varepsilon \times \rho.$$

Eliminavę iš pastarųjų lygybių $\varepsilon \times \rho$ randame

$$\rho = (|\varepsilon|^2 + |\omega|^4)^{-1} (\varepsilon \times w_A + |\omega|^2 w_A). \tag{3.4}$$

Formulės (3.3) ir (3.4) apibrėžia momentinius greičių ir pagreičių centrus.

4. Standžiojo kūno judėjimas apie vieną nejudantį tašką

Šio skyrelio tikslas gauti Oilerio (Euler L) ir Rivalso (Rivals) formules, aprašančias greičių ir pagreičių pasiskirstymus. Tegul $0y_1y_2y_3$ ir $0x_1x_2x_3$ yra nejudančios ir standžiai su kūnu susietos Dekarto sistemos. Tegul r_A yra kūno taško M radiusas vektorius. Tada

$$r_M = \sum_{i=1}^{3} x_i x_i^\circ = \sum_{i=1}^{3} y_i y_i^\circ,$$

$$v_M = \sum_{i=1}^{3} x_i x_i^{\circ'} = \sum_{i=1}^{3} x_i^\circ v_{M_i},$$

ir

$$v_{M_j} = \sum_{i=1}^{3} x_i x_j^\circ \cdot x_i^{\circ'} = \sum_{i=1, i \neq j}^{3} x_i x_j^\circ \cdot x_i^{\circ'}.$$

Iš čia turime

$$v_{M_1} = x_2 x_1^\circ \cdot x_2^{\circ'} + x_3 x_1^\circ \cdot x_3^{\circ'},$$

$$v_{M_2} = x_1 x_2^\circ \cdot x_1^{\circ'} + x_3 x_2^\circ \cdot x_3^{\circ'},$$

$$v_{M_3} = x_1 x_3^\circ \cdot x_1^{\circ'} + x_2 x_3^\circ \cdot x_2^{\circ'}.$$

Bet $x_2^\circ \cdot x_1^{\circ'} = -x_1^\circ \cdot x_2^{\circ'}$, $x_2^\circ \cdot x_3^{\circ'} = -x_3^\circ \cdot x_2^{\circ'}$, $x_3^\circ \cdot x_1^{\circ'} = -x_1^\circ \cdot x_3^{\circ'}$.

Pažymėję, $-x_1^\circ \cdot x_2^{\circ'} = \omega_3$, $-x_1^\circ \cdot x_3^{\circ'} = \omega_2$, $x_2^\circ \cdot x_3^{\circ'} = -\omega_1$, gauname

$$v_{M_1} = \omega_2 x_2 - \omega_3 x_2,$$

$$v_{M_2} = \omega_3 x_1 - \omega_1 x_3,$$

$$v_{M_3} = \omega_1 x_2 - \omega_2 x_1$$

arba

$$v_M = \omega \times r. \tag{4.1}$$

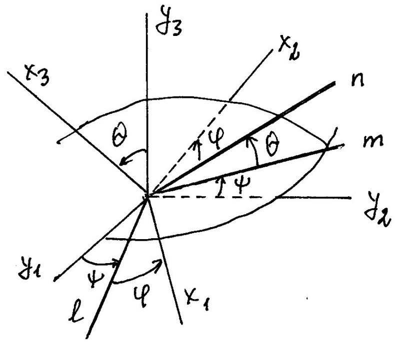
Ši formulė vadinama Oilerio formule.

Vektorių $\omega = \sum_{i=1}^{3} \omega_i x_i^\circ$ vadinsime kampinio greičio vektoriumi kūnui judant apie vieną jo nejudantį tašką.

Iš (4.1) išvedame formulę

$$w_M = \varepsilon \times r + \omega \times (\omega \times r) = \varepsilon \times r - |\omega|^2 h,\ \varepsilon = \omega'; \tag{4.2}$$

čia h yra statmenas vektoriui ω ir nukreiptas į tašką M, o ε kampinis pagreitis. Pastaroji formulė yra Rivalso formulė. Susiesime ω su Oilerio kampais (6 pav.)



6 pav.

Turime

$$y_j = \sum_{i=1}^{3} x_i x_i^\circ \cdot y_j^\circ,$$

$$x_1^\circ \cdot y_1^\circ = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\cos\theta\sin\psi,$$

$$x_1^\circ \cdot y_2^\circ = \cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\theta\cos\psi,$$

$$x_1^\circ \cdot y_3^\circ = \sin\varphi\sin\theta,$$

$$x_2^\circ \cdot y_1^\circ = -\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\cos\theta\sin\psi,$$

$$x_2^\circ \cdot y_2^\circ = -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\theta\cos\psi,$$

$$x_2^\circ \cdot y_3^\circ = \cos\varphi\sin\theta,$$

$$x_3^\circ \cdot y_1^\circ = \sin\theta\sin\psi,$$

$x_3^\circ \cdot y_2^\circ = -\sin\theta\cos\psi,$

$x_3^\circ \cdot y_3^\circ = \cos\theta.$

Tegul momentu t_0 ašys $x_1(t_0), x_2(t_0), x_3(t_0)$ sutapo su y_1, y_2, y_3. Pasukę kampu ψ ašis $x_1(t_0), x_2(t_0)$ apie ašį y_3 gausime statmenas ašis l, m, y_3. Pasukę kampu θ ašis m, $x_3(t_0)$ apie ašį l gausime statmenas ašis l, n, x_3. Pagaliau pasukę ašis l, n kampu φ apie ašį x_3 gausime statmenas ašis x_1, x_2, x_3. Vadinasi, trimis posūkiais pervedėme kūną iš pradinės padėties į padėtį, kurios orientaciją apibrėžia ašys x_1, x_2, x_3. Kampai θ, φ, ψ vadinami Oilerio kampais: ψ - precesijos, θ - nutacijos, o φ - savojo posūkio kampu. Ašis l yra mazgų ašis.
Gavome, kad r_M yra kintamųjų x_1, x_2, x_3 ir θ, φ, ψ funkcija. Iš čia turime

$v_M = \frac{\partial r}{\partial \varphi}\varphi' + \frac{\partial r}{\partial \psi}\psi' + \frac{\partial r}{\partial \theta}\theta'.$

Pasinaudoję kūno sukimusi apie pastoviąją ašį, gauname

$\frac{\partial r}{\partial \varphi}\varphi' = \varphi' x_3^\circ \times r,\ \frac{\partial r}{\partial \psi}\psi' = \psi' y_3^\circ \times r,\ \frac{\partial r}{\partial \theta}\theta' = \theta' l^\circ \times r.$

Apibrėžę $\omega = \varphi' x_3^\circ + \psi' y_3^\circ + \theta' l^\circ$ kaip kampinio greičio vektorių turėsime

$$v_M = \omega \times r. \tag{4.3}$$

Iš čia

$$w_M = \varepsilon \times r + \omega \times (\omega \times r),\ \varepsilon = \omega'. \tag{4.4}$$

Pabrėšime, kad ε keičia savo kryptį.

5. Laisvasis standžiojo kūno judėjimas

Tarkime, kūnas τ juda laisvai. Tegul A ir M yra jo bet kokie taškai. Tada $r_M = r_A + \rho$, $\rho = \overrightarrow{AM}$, $|\rho| = const$. Todėl

$v_M = v_A + \rho'.$

Kadangi $|\rho| = const$, tai į ρ' galima žiūrėti kaip į kūno τ taško M greitį, kai kūnas juda apie tašką A kaip nejudantį. Remdamiesi 4 skyreliu turime

$$v_M = v_A + \omega \times \rho,\ \omega = \varphi' x_3^\circ + \psi' y_3^\circ + \theta' l^\circ, \tag{5.1}$$

$$w_M = w_A + \varepsilon \times \rho + \omega \times (\omega \times \rho),\ \varepsilon = \omega'. \tag{5.2}$$

6. Sudėtinis taško judėjimas

Tarkime $0y_1y_2y_3$ yra nejudanti, o $Ax_1x_2x_3$ judanti koordinačių sistemos. Tegul taškas M juda nepriklausomai nuo judančios sistemos. Taško M greitį ir pagreitį atžvilgiu nejudančios sistemos vadinsime absoliučiais ir žymėsime v_{abs} ir w_{abs}.

Taško M greitį ir pagreitį atžvilgiu judančios sistemos vadinsime reliatyviais ir žymėsime v_{rel} ir w_{rel}. Su judančia koordinačių sistema susiekime erdvę, kurią manysime esančia standžiu kūnu. Taškas M kiekvienu momentu sutaps su šio standaus kūno atitinkamu tašku M_v. Taško M_v greitį ir pagreitį atžvilgiu nejudančios sistemos vadinsime taško M keliamaisiais greičiu ir pagreičiu ir žymėsime v_{kel} ir w_{kel}. Šio skyrelio tikslas yra gauti formules, siejančias $v_{kel}, v_{rel}, v_{abs}$ bei w_{kel}, w_{rel} ir w_{abs}

Nagrinėkime vektoriaus $a(t)$ išvestinę

$$a' = \sum_{i=1}^{3}(a_i x_i^\circ)' = \sum_{i=1}^{3} a_i' x_i^\circ + \sum_{i=1}^{3} a_i x_i^{\circ\prime}.$$

Kadangi x_i° normuotas, tai $x_i^{\circ\prime}$ galima traktuoti kaip judančio apie vieną pastovų tašką kūno taško greitį. Todėl $x_i^{\circ\prime} = \omega \times x_i^\circ$. Čia ω yra judančios koordinačių sistemos kampinis greitis. Vadinasi

$$a' = \frac{\widetilde{da}}{dt} + \omega \times a, \tag{6.1}$$

kur $\frac{\widetilde{da}}{dt} = \sum\limits_{i=1}^{3} a_i' x_i^\circ$. $\frac{\widetilde{da}}{dt}$ vadinama reliatyviąja išvestine.

Tegul $\overrightarrow{OM} = r_M$, $\overrightarrow{OA} = r_A$, $\overrightarrow{AM} = \rho$. Išdiferencijavę lygybę $r_M = r_A + \rho$ ir pasinaudoję (6.1) formule gauname $v_{abs} = v_A + \omega \times \rho + v_{rel}$.

Bet $v_A + \omega \times \rho + v_{rel} = v_{MV} = v_{Kel}$. Todėl

$$v_{abs} = v_{Kel} + v_{rel}. \tag{6.2}$$

Iš čia išplaukia lygybė

$w_{abs} = w_A + w' \times \rho + \omega \times \rho' + v_{rel}' = w_A + \varepsilon \times \rho + \omega \times (v_{rel} + \omega \times \rho) + \frac{\widetilde{dV_{rel}}}{dt} + \omega \times v_{rel} = w_A + \varepsilon \times \rho + \omega \times (\omega \times \rho) + w_{rel} + 2\omega \times v_{rel}$.

Bet $w_A + \varepsilon \times \rho + \omega \times (\omega \times \rho) = w_{M_v} = v_{kel}$. Todėl

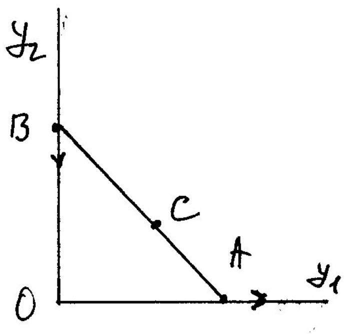
$$w_{abs} = w_{kel} + w_{rel} + w_c,\ w_c = 2\omega \times v_{rel}. \tag{6.3}$$

Vektorius w_c vadinamas Korjolio pagreičiu.

Pastebėsime, kad $w_c = 0$, kai judanti sistema slenka, kai ω kolinearus $v_{rel} = 0$ ir kai $v_{rel} = 0$.

7. Uždaviniai

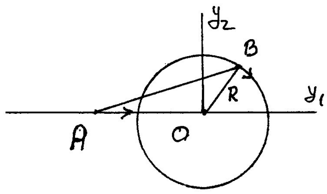
1. Ilgio a standžioji atkarpa juda plokštuma $0y_1y_2$ taip, kad jos galas A juda y_1 ašies teigiama kryptimi, o galas B – y_2 ašies neigiama kryptimi (7 pav.). Tuo momentu, kai $\measuredangle(y_2, \overrightarrow{AB}) = \alpha$ taško A greitis ir pagreitis yra v_A w_A.



7 pav.

Rasti v_c w_c, jei $|\overrightarrow{AC}| = b \in (0, a)$.

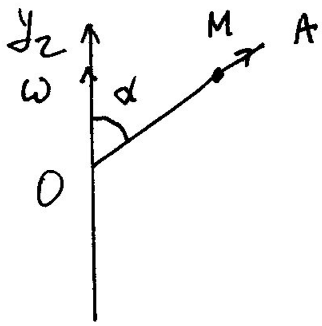
2. Ilgio a standi atkarpa juda plokštuma $0y_1y_2$ taip, kad jos galas A juda y_1 ašies teigiama kryptimi, o galas B – spindulio $R < a$ apskritimu (8 pav.), kurio centras yra taške 0. Tuo momentu, kai $\measuredangle(\overrightarrow{AB}, y_1^\circ) = \alpha$ taškas A turėjo greitį v_A ir pagreitį w_A.



8 pav

Rasti tuo momentu v_B ir w_B.

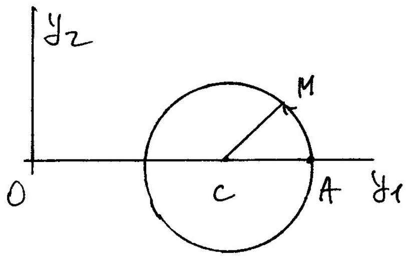
3. Taškas M juda OA ašimi, kuri sukdamasi apie y_2 ašį sudaro su ja pastovų kampą α (9 pav.). Be to, duotoji funkcija $|\overrightarrow{OM}| = s(t)$ turi antrą tolydžią išvestinę, o ašies OA sukimosi apie y_2 kampinis greitis ω turi tolydžią išvestinę.



9 pav.

Rasti $v_{M\,abs}$ ir $w_{M\,abs}$.

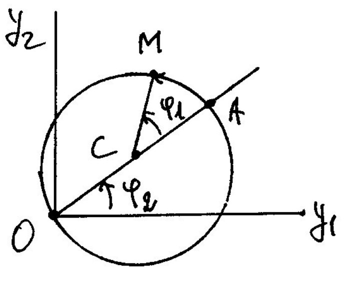
4. Plokštuma $0y_1y_2$ juda spindulio R apskritimas visą laiką remdamasi skersmeniu į y_1 ašį (10 pav.). Apskritimu juda taškas M, taip, kad lanko AM ilgis $s(t)$ turi tolydžią išvestinę.



10 pav.

Rasti $v_{M\,abs}$ ir $w_{M\,abs}$, jei taško A greitis yra pastovus ir lygus v_A.

5. Spindulio R apskritimas sukasi apie jam statmeną ašį, einančią per jo tašką O. Apskritimu juda taškas M (11 pav.) taip, kad kampai $\measuredangle(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CM}) = \varphi_1$ ir $\measuredangle(\overrightarrow{OA}, y_1) = \varphi_2$ yra žinomos du kartus tolydžiai diferencijuojamos funkcijos.



11 pav.

Rasti $v_{M\,abs}, w_{M\,abs}$.

Materialiojo taško dinamika

Laisvasis taško judėjimas

1. Niutono aksiomos, judėjimo lygtys ir du dinamikos uždaviniai

Aksiomos. Kai taško judėjimo nevaržo jokie apribojimai, sakome, jog taškas juda laisvai. Judėdamas taškas su jį supančiais kūnais arba taškais gali sąveikauti arba ne. Mechanine taško ir kūno arba kito taško sąveika laikoma tokia jų sąveika, kurios metu kinta sąveikaujančių objektų judėjimas. Taško mechaninės sąveikos matais laikome jėgą, jos momentą ir galią. Kai taškas nesąveikauja su apllinkiniais objektais, sakome, kad jis yra izoliuotas.

Teorinėje mechanikoje postuluojama, jog taškas juda homogeninėje izotropinėje euklidinėje erdvėje. Taško judėjimas tokioje erdvėje apibrėžiamas kurio nors erdvėje esančio kūno, su kuriuo standžiai susiejama atskaitos sistema, atžvilgiu. Standžiai su šiuo kūnu susietas stebėtojas pastebės savo paties judėjimą tik kito erdvėje esančio kūno atžvilgiu arba kito kūno judėjimą savęs atžvilgiu. Tas pats stebėtojas, būdamas susietas su skirtingai judančiomis atskaitos sistemomis, matys skirtingai judantį tą patį tašką. Todėl duotojo taško judėjimo skirtingai judančių atskaitos sistemų atžvilgiu palyginimui reikalingas tam tikras duotojo taško etaloninis judėjimas, t.y. taško judėjimas etaloninės atskaitos sistemos atžvilgiu. Vieną iš tokių atskaitos sistemų pasiūlė Niutonas (I. Newton). Apibendrindamas stebėjimų duomenis, jis taip pat pastulavo siejančią pagrindines mechanikos sąvokas (masę, pagreitį ir jėgą) lygtį bei sąveikos dėsnį.

1 aksioma (inercijos aksioma). Egzistuoja atskaitos sistemos, kurių atžvilgiu izoliuotas taškas nejuda arba juda tiesiaeigiai ir tolygiai. Tokias sistemas vadinsime inercinėmis. Izoliuoto taško judėjimas inercinės atskaitos sistemos atžvilgiu vadinamas inerciniu. Kadangi izoliuotasis taškas inercinės atskaitos sistemos atžvilgiu juda tiesiaeigiai ir tolygiai, tai jo greitis jos atžvilgiu yra pastovus. Todėl šios sistemos atžvilgiu taškas juda be pagreičio. Kai taškas nėra izoliuotas, t.y. kai jį veikia sąveikos jėgos, jo judėjimas nėra tiesiaeigis ir tolygus. Vadinasi, jis juda su pagreičiu. Todėl pagreičio inercinės sistemos atžvilgiu atsiradimo priežastis yra sąveika ir atvirkščiai: jei taškas inercinės sistemos atskaitos sistemos atžvilgiu juda su pagreičiu, tai jis nėra izoliuotas. Tačiau ne visi taškai, veikiant tai pačiai jėgai, įgyja vienodus pagreičius. Pagreitis tuo mažesnis, kuo didesnė taško inercija, kurios matais laikome masę, inercijos bei statinį momentus .

2 aksioma (pagrindinis judėjimo dėsnis). Kai materialiojo taško masė yra pastovi, tai jos ir taško pagreičio w inercinės atskaitos sistemos atžvilgiu sandauga yra lygi tašką veikiančiai jėgai F, t.y.

$$mw = F. \tag{1.1}$$

Jėgos matmuo yra $[F] = MLT^{-2}$; čia M - masės matmuo. SI sistemoje masė matuojama kilogramais, o jėga - niutonais, t.y. $N = s^{-2}mkg$; čia m - metras.

3 aksioma (sąveikos aksioma). Jeigu taškas M_1 veikia tašką M_2 jėga F_{21}, o taškas M_2 veikia tašką M_1 jėga F_{12}, tai sąveikos jėgos yra vienoje tiesėje ir $F_{21} = -F_{12}$.

4 aksioma (nepriklausomo jėgų veikimo aksioma). Kai tašką veikia jėgų sistema F_s, $s = 1, ..., n$, tai kiekviena jėga veikia nepriklausomai. Jeigu F_s suteikia m masės taškui inercinės sistemos atžvilgiu pagreitį w_s, tai jėgų sistema suteikia pagreitį $w = \sum\limits_{s=1}^{n} w_s$.

Iš čia gauname lygtį $mw = \sum\limits_s mw_s = \sum\limits_s F_s$, nes $mw_s = F_s$. Todėl jėgų sistemos atveju teisinga antroji aksioma, kurioje $F = \sum\limits_s F_s$. Ši aksioma pakeičia jėgų sistemos poveikį vienos jėgos poveikiu.

Pastebėsime, kad trečioji aksioma nesusieta su konkrečia atskaitos sistema. Bendruoju atveju duoto vektoriaus F argumentais gali būti t, r, v. Jo priklausomybė nuo w prieštarauja ketvirtajai aksiomai. Parodysime tai. Tarkime, kad greičiu v judančiam taškui priklausanti nuo pagreičio jėga F_s suteikia pagreitį w_s. Tada $mw_s = F_s(t, r, v, w_s)$. Iš čia turime $m\sum\limits_s w_s = \sum\limits_s F_s(t, r, v, w_s)$. Pagal ketvirtąją aksiomą veikiamas jėgų sistemos taškas juda pagal dėsnį $m\sum\limits_s w_s = F(t,r,v,\sum\limits_s w_s)$. Gautos lygtys, kai F_s nėra specialiai parinkta, viena kitai neprieštarauja. Be to, lygtis $mw_s = F_s(t,r,v,w_s)$ bendruoju atveju gali nevienareikšmiškai apibrėžti pagreitį w_s, ko Niutono mechanikoje negali būti.

Tais atvejais, kai jėga yra iš anksto nepilnai apibrėžta, vektorius F gali priklausyti nuo w. Suvaržyto judėjimo atveju reakcijos jėga priklauso nuo pagreičio.

Klausimas ar duotoji atskaitos sistema yra inercinė, sprendžiamas empiriškai. Heliocentrinė atskaitos sistema (pradžia yra Saulės centre, o ašys nukreiptos į tokias tris tolimas žvaigždes, kurios pakankamai ilgu laikotarpiu Saulės atžvilgiu yra nejudančios ir kurios yra fiksuojamos tik kaip materialieji taškai) apytiksliai yra inercinė. Sprendžiant daugelį technikos uždavinių apytikslės inercinės atskaitos sistemos yra geocentrinė (pradžia yra Žemės centre, o ašys nukreiptos į pakankamai ilgu laikotarpiu Žemės atžvilgiu nejudančias žvaigždes) arba standžiai su Žeme susieta.

Įvairios judėjimo lygčių formos. Remdamiesi w apibrėžimu bei kinematikos formulėmis užrašysime antrąją aksiomą koordinatiniu būdu:

$$mx_k^{''} = F_{x_k},\ k = 1,2,3; \tag{1.2}$$

$$ms^{''} = F_\tau,\ m\rho^{-1}s^{'2} = F_\nu,\ 0 = F_\beta; \tag{1.3}$$

$$m(\rho^{''} - \rho\varphi^{'2}) = F_\rho,\ m(2\rho^{'}\varphi^{'} + \rho\varphi^{''}) = F_\varphi,\ mz^{''} = F_z; \tag{1.4}$$

$$mH_k^{-1}\{\tfrac{d}{dt}\tfrac{\partial}{\partial q_{k'}}\tfrac{1}{2}|v|^2 - \tfrac{\partial}{\partial q_k}\tfrac{1}{2}|v|^2\} = F_{q_k},\ k = 1,2,3. \tag{1.5}$$

Formulės (1.2)-(1.5) yra atitinkamai stačiakampėmis Dekarto, natūraliosiomis, cilindrinėmis ir ortogonaliosiomis kreivinėmis koordinatėmis išreikštos judėjimo lygtys.

Sprendžiant konkrečius uždavinius pasirenkama ta lygčių forma, kuri matematiniu požiūriu yra paprasčiausia. Dažnai vartojama (1) lygties diferencialinė forma:

$$mr^{''} = F(t,r,r^{'}). \tag{1.6}$$

Kai $F^\circ(t) = const = v^\circ(t)$, tai trajektorija yra tiesė. Iš tikrųjų nukreipę x_1° vektoriaus F kryptimi, iš (2) gauname judėjimo lygtis $mx_1^{''} = F\cdot x_1^0, x_k^{''} = 0$, $k = 2,3$, o pradinės sąlygos yra tokios: $x_1^{'}(t_0) = v(t_0)\cdot x_1^0$, $x_k(t_0) = 0$, $k = 2,3$. Todėl $x_2, x_3 = const$. Vadinasi, trajektorija yra tiesė.

Kai $F_{x_3} = 0$, $v(t_0)\cdot x_3^0 = 0$, tai trajektorija priklauso plokštumai, lygiagrečiai $0x_1x_2$, nes $x_3^{''} = 0$, $x_3^{'}(t_0)$, t.y. $x_3 = const$.

Taško rimtis. Kai inercinės atskaitos sistemos atžvilgiu $v = 0$, $t \in [t_0, t_1]$, sakome, jog taškas yra parimęs arba yra pusiausvyros būsenoje. Įrodysime teiginį: taškas yra parimęs tada ir tik tada, kai $v_0 = 0$, $F = 0, \forall t \in [t_0, t_1]$. Tarkime, $v_0 = 0$, $F = 0$, $t \in [t_0, t_1]$. Tada iš antrosios aksiomos gauname lygtį $r^{'} = 0$. Todėl $v = const = v_0 = 0$, $t \in [t_0, t_1]$. Vadinasi, taškas yra parimęs. Įrodysime atvirkštinį teiginį. Tarkime, taškas yra parimęs. Tada $v = 0$, $t \in [t_0, t_1]$. Vadinasi, $v_0 = 0, w = v^{'}$. Iš (1) gauname lygybę $F = 0$, $\forall t \in [t_0, t_1]$.

Lygtį (1) galima užrašyti taip: $F - mw = 0$. Vektorių $-mw$. vadinsime inercijos jėga. Iš čia gauname Dalambero (d'Alambert J.) principą: taškas juda taip, kad jį veikiančios jėgos ir inercijos jėgos suma lygi nuliui.

Du dinamikos uždaviniai. Niutonas suformulavo du uždavinius: 1. Duotas judėjimo dėsnis ir taško masė. Rasti veikiančią jėgą. 2. Duota jėga F ir masė m. Rasti taško judėjimą.

Pirmasis uždavinys sprendžiamas remiantis (1.6) lygtimi. Todėl $F = mr^{''}$. Antrojo uždavinio sprendimas susietas su diferencialinių lygčių sprendimu. Todėl, norint rasti reikalingą sprendinį, būtina suformuluoti sprendinio atrankos sąlygas. Reikalausime, kad F būtų tolydi ir turėtų tolydžią išvestinę pagal kintamuosius r, v. Kai duoti $r(t_0) = r_0, v(t_0) = v_0$, (1.6) lygčiai formuluojame pradinį uždavinį, kuris turi vienintelį sprendinį. Vadinasi, kai duoti pradiniai r_0, v_0 ir tolydžiai diferencijuojama jėga F, taško judėjimas yra apibrėžtas. Šis teiginys vadinamas Niutono-Laplaso (Laplace P.) deterministiniu principu.

Kai duoti $r(t_0) = r_0, r(t_1) = r_1$, $t \in (t_0, t_1)$, (1.6) lygčiai formuluojamas kraštinis uždavinys.

Analogiškai formuluojami uždaviniai (1.2)-(1.5) sistemoms. Dažnai pradinis uždavinys sprendžiamas pirmųjų integralų metodu. Trumpumo dėlei pirmuosius integralus dažnai vadinsime integralais. Surandame du nepriklausomus trimačius vektorinius integralus $f_k(t, r, v) = c_k$, $k = 1, 2$. Panaudoję pradines sąlygas randame $c_k = f_k(t_0, r_0, v_0)$. Kadangi pirmieji integralai nepriklausomi, tai egzistuoja vienareikšmė atvirkštinė funkcija r, v. Vadinasi, $r = A(t, r_0, v_0, t_0)$, $v = B(t, r_0, v_0, t_0)$ yra pradinio uždavinio sprendinys.

Keplerio dėsniai. Išnagrinėsime pirmojo dinamikos uždavinio pavyzdį. Remdamasis astronomo Brahės (T. Brahe, 1546-1601) stebėjimais, astronomas Kepleris (J. Kepler, 1571-1630) suformulavo tris planetų bei kometų, vaizduojamų materialiaisiais taškais, judėjimo dėsnius:

1. Visos planetos (kometos) skrieja apie Saulę plokščiomis orbitomis (trajektorijomis) pagal dėsnį $\rho^2\varphi^{'} = const = c$; čia ρ, φ yra polinės planetą (kometą) vaizduojančio taško koordinatės.

2. Šios orbitos yra antrosios eilės kreivės, kurių viename židinyje yra Saulė.

3. Judančių elipsėmis planetų apskriejimo apie Saulę periodų kvadratai proporcingi didžiųjų pusašių kubams, t.y. $T^2/a^3 = const$; čia T - periodas, a - pusašio ilgis.

Remdamasis šiais dėsniais, Niutonas surado planetas veikiančios jėgos išraišką. Rasime ją. Židininė (polius yra židinyje, o polinė ašis nukreipta į artimiausią viršūnę) elipsės lygtis yra tokia:

$\rho = \frac{p}{1+e\cos\varphi}$, $p = \frac{b^2}{a}$, $e = a^{-1}\sqrt{a^2-b^2}$;

čia a ir b yra elipsės pusašiai, e - ekscentricitetas. Tarkime, kad orbita yra plokštumoje $z = 0$. Tada iš (1.4) ir lygybės $\rho^2\varphi' = c$ randame

$F_\rho = m(\rho'' - \rho\varphi'^2) = -m\frac{c^2}{\rho^2}(\frac{d^2}{d\varphi^2}\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho}) = -\frac{mc^2}{p\rho^2}$.

Pažymėję $\frac{c^2}{p} = \mu$, randame $F = -\frac{m\mu}{\rho^2}\rho^\circ$. Iš lygybės $dt = \rho^2\frac{d\varphi}{c}$ gauname $T = \frac{1}{c}\int\limits_0^{2\pi}\rho^2(\varphi)d\varphi = \frac{2\pi ab}{c}$, nes integralas $\int\limits_0^{2\pi}\rho^2(\varphi)d\varphi$ reiškia dvigubą elipsės ribojamos figūros plotą, kuris lygus $2\pi ab$. Tada

$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2a^2b^2}{c^2a^3} = \frac{4\pi^2b^2}{p\mu a} = 4\frac{\pi^2}{\mu}$, $\mu = 4\frac{\pi^2a^3}{T^2}$.

Vadinasi, visoms planetoms μ yra tas pats. Dydis μ vadinamas Gauso (Gauss C. F.) konstanta.

Išvesime visuotinės gravitacijos dėsnį. Kūnų, judančių Žemės ir Saulės traukos jėgų laukuose, Gauso konstantas pažymėkime μ_1, μ_2, o Žemės ir Saulės mases - m_1 ir m_2. Žemė traukia Saulę jėga $|F_{21}| = \mu_1 m_2\rho^{-2}$, o Saulė traukia Žemę jėga $|F_{12}| = \mu_2 m_1\rho^{-2}$. Tačiau pagal trečiąją aksiomą $|F_{21}| = |F_{12}|$. Todėl $\mu_1/m_1 = \mu_2/m_2$. Šį pastovų dydį pažymėkime f ir vadinsime visuotinės gravitacijos konstanta. Todėl

$\mu_1 = fm_1, \mu_2 = fm_2$, $|F_{21}| = |F_{12}| = f\frac{m_1m_2}{\rho^2}$.

Šią jėgą vadinsime visuotinės gravitacijos jėga. Konstantos f matmuo $[f] = L^3/MT^2$; čia M - masės matmuo. SI sistemoje $f = 6,673\cdot10^{-11}\frac{m^3}{s^2kg}$; čia m metras, s - sekundė.

2. Pagrindiniai dinaminiai matai ir pagrindinės teoremos

Pagrindinės teoremos. Pagrindiniais taško dinaminiais matais laikysime judėjimo kiekio vektorių (impulsą) $Q = mw$, kinetinį momentą (judėjimo kiekio momentą O taško atžvilgiu) $G_0 = r\times mv$ ir kinetinę energiją $E = \frac{1}{2}m|v|^2$; čia m – taško masė, v – absoliutusis greitis, r – radiusas vektorius, kurio pradžia yra taške O. Išvesime lygtis, išreiškiančias šių matų kitimo greičius. Masę m laikysime pastovia. Remdamiesi (1.6) lygtimi, gauname

$\frac{dQ}{dt} = mw = F$, $\frac{d}{dt}G_0 = v \times mv + r \times mw = r \times F$,

$\frac{dE}{dt} = mv \cdot w = v \cdot mw = v \cdot F$,

arba

$$\frac{dQ}{dt} = F,\ \frac{dG_0}{dt} = r \times F,\ \frac{dE}{dt} = v \cdot F. \qquad (2.1)$$

Šios lygtys vadinamos judėjimo kiekio vektoriaus, kinetinio momento ir kinetinės energijos kitimo dėsniais (teoremomis).

Kadangi $vdt = dr$, tai

$$dE = F \cdot dr. \qquad (2.2)$$

Integruoami (2.1) lygybes, gauname

$$\begin{cases} Q(t) - Q(t_0) = \int\limits_{t_0}^{t} Fdt,\ G_0(t) - G_0(t_0) = \int\limits_{t_0}^{t} r \times Fdt, \\ E(t) - E(t_0) = \int\limits_{t_0}^{t} v \cdot Fdt = \int\limits_{\mathcal{P}_0}^{\mathcal{P}} F \cdot dr. \end{cases} \qquad (2.3).$$

Dydžiai $M_0 = r \times F$, $\mathcal{N} = v \cdot F$, $d'A = F \cdot dr$,

$$\int\limits_{t_0}^{t} Fdt,\ \int\limits_{t_0}^{t} r \times Fdt,\ \int\limits_{\mathcal{P}_0}^{\mathcal{P}} F \cdot dr$$

vadinami atitinkamai jėgos F momentu taško O atžvilgiu, jėgos F galia, jėgos F elementariuoju darbu, jėgos F impulsu laikotarpiu $t - t_0$, jėgos F momentu laikotarpiu $t - t_0$, jėgos F atliktu darbu, judant trajektorijos lanku tarp taškų $\mathcal{P}_0$ ir $\mathcal{P}$. Pastebėsime, kad $d'A$ ne visada yra pilnasis diferencialas. Atitinkamų dydžių matmenys yra tokie:

$[Q] = MLT^{-1}$, $[G_0] = ML^2T^{-1}$, $[E] = ML^2T^{-2}$, $[M_0] = L^2MT^{-2}$,

$[\mathcal{N}] = ML^2T^{-3}$, $[A] = ML^2T^{-2}$

SI sistemoje $[\mathcal{N}] = 1$ vatas, $[A] = 1$ džaulis.

Pirmieji integralai. Kai $F^\circ = const$, iš (2.1) gauname du integralus

$$Q \cdot P = const,\ G_0 \cdot F^\circ = const; \qquad (2.4)$$

čia $P \cdot F = 0$, $P = const$.

Kai $F = F(t)$, iš (1.1) randame

$$v = c_1 + m^{-1} \int\limits_{t_0}^{t_1} F(t)dt,$$

$$r = c_2 + c_1 t + m^{-1} \int\limits_{t_0}^{t_1} (t - r)F(\tau)d\tau;$$

čia c_1, c_2 – pastovūs vektoriai.

Kai $F = mf(t, r, v)r^\circ$ (f – skaliarinis dydis), iš (2.1) randame integralą

$$r \times v = c = const, \tag{2.5}$$

kuris parodo, kad $c \cdot r = 0$. Ši lygtis reiškia plokštumą, einančią per tašką O statmenai vektoriui c. Todėl trajektorija yra plokčšia kreivė. Jėgos mfr° vadinamos centrinėmis. Kai $f > 0$, turime stūmimo (centras O stumia tašką) jėgą, o kai $f < 0$ – traukos jėgą.

Kai judėjimo plokštuma yra $z = 0$, iš (1.1),(1.6) ir (2.5) gauname integralą

$$\rho^2 \varphi' = c = const. \tag{2.6}$$

Kai visoje srityje, kurioje gali judėti taškas, žinomas jėgos vektorius $F(t, r)$, sakome, jog šioje srityje apibrėžtas jėgos laukas. Jeigu jėga nepriklauso nuo t, laukas vadinamas stacionariuoju. Kai $F = gradU(t, r)$, jėgą vadiname potencine, o skaliarinę funkciją U - jos potencialu. Iš apibrėžimo matyti, kad potencialas apibrėžiamas adityviosios laiko funkcijos tikslumu. Potencinių jėgų atveju $d'A = F \cdot dr = dU - \frac{\partial U}{\partial t} dt$. Kai jėga stacionari, tai $d'A = dU$, o iš (2.3) lygties gauname integralą

$$E - U = const. \tag{2.7}$$

Darbą, kurį gali atlikti jėga, priversdama tašką judėti iš duotos padėties į padėtį, kurioje potencialas $U = 0$, vadinsime potencine energija ir žymėsime Π. Tarę, kad $U(\mathcal{P}_1) = 0$, randame $\Pi = \int\limits_{\mathcal{P}}^{\mathcal{P}} F \cdot dr$. Vadinasi (2.7) integralas išreiškia mechaninės energijos $E + \Pi$ tvermės dėsnį:

$$E + \Pi = const = c. \tag{2.8}$$

Lygybė (2.8) dažnai vadinama energijos integralu. Jėgos, kurioms veikiant egzistuoja energijos tvermės dėsnis, vadinamos konservatyviomis. $(E + \Pi)$ vadinama mechanine energija. Kadangi $E \geq 0$, tai nelygybė $c - \Pi(r) \geq 0$ apibrėžia judėjimo sritį.

Potencinių jėgų pavyzdžiais gali būti: pastovioji sunkio jėga $P = -m\overrightarrow{g}$, Žemės gravitacijos jėga $F = -m\mu|r|^{-2}r^\circ$, spyruooklės tamprumo (standumo) jėga $F = -\kappa^2(|r| - l)r^\circ$; čia ir toliau $\overrightarrow{g}$ – laisvojo kritimo pagreitis Žemės lygyje, $\mu > 0$ – Gauso konstanta, $\kappa^2 = const > 0$ – spyruoklės standumo koeficentas, l – nedeformuotos spyruoklės ilgis. Šių jėgų potencialai atitinkamai lygūs $U = -mg \cdot r$, $U = \frac{m\mu}{|r|}$, $U = -\frac{\kappa^2}{2}(|r| - l)^2$. Vektoriaus $\overrightarrow{g}$ modulį žymėsime g. Standartinė g reikšmė lygi $9,80665 \frac{m}{s^2}$.

Centrinė jėga $F = mf(|r|)r^\circ$ turi potencialą

$$U = \int F \cdot dr = m \int f(|r|) d|r|. \tag{2.9}$$

Kadangi centrinės jėgos atveju trajektorija yra plokščia kreivė, tai, sutapatinę judėjimo plokštumą su plokštuma $z = 0$, energijos integralą užrašysime taip:

$$\rho^{'2} + \rho^2 + \varphi^{'2} - U(\rho) = h = const,\ U(\rho) = 2\int f(\rho)d\rho,\ \rho = |r|. \tag{2.10}$$

Aplinkos poveikio jėgos. Praktikoje dažni atvejai, kai taškas juda ne vakuume, o materialioje aplinkoje. Judėjimo metu taškas patiria aplinkos poveikio jėgas. Vienos iš jų stabdo judėjimą ir vadinamos pasipriešinimo jėgomis, kitos veikia statmena greičiui kryptimi ir vadinamos keliamosiomis jėgomis. Pasipriešinimo jėgos F_p ir keliamosios jėgos F_k nustatomos empiriškai ir paprastai išreiškiamos formulėmis:

$$\begin{cases} F_p = -mgf(|v|)v^\circ,\ f(|v|) \geq 0,\ f(0) = 0; \\ F_p = mg\kappa(|v|)x^\circ,\ x^\circ \cdot v^\circ = 0,\ \kappa(0) = 0. \end{cases} \tag{2.11}$$

čia f ir κ - glodžios neaprėžtos monotoniškai didėjančios funkcijos. Pagal (2.1) turime dėsnį

$$dE = F \cdot dr - mgf(|v|)|v|dt.$$

Kai $|v| \neq 0$, neigiamas antrasis dėmuo mažina energiją E.

3. Tiesiaeigio judėjimo integruojamieji atvejai

Trys integruojamieji atvejai. Tarkime, kad taškas M juda x_1 ašimi. Pažymėję $x_1 = x$, $m^{-1}F_{x_1} = f$, gausime tokią judėjimo lygtį:

$$x^{''} = f(t, x, x^{'}). \tag{3.1}$$

Tegul pradinės sąlygos yra $x(t_0) = x_0$, $x'(t_0) = v_0$. Tirsime kai kuriuos funkcijos f atvejus.

Kai $f = f(t)$, gauname

$$x = x_0 + v_0(t - t_0) + \int_{t_0}^{t}(t - \tau)f(\tau)d\tau.$$

Kai $f = f(x^{'})$ ir $f(v_0) = 0$, gauname $x^{'} = v_0 \Rightarrow x = v_0 t + x_0$.

Kai $f(v_0) \neq 0$, tai

$$dt = \frac{dx^{'}}{f(x^{'})},\ dx = x^{'}dt = \frac{x^{'}dx^{'}}{f(x^{'})}.$$

Vadinasi

$$t = t_0 + \int_{v_0}^{x^{'}} \frac{ds}{f(s)},\ x = x_0 + \int_{v_0}^{x^{'}} \frac{sds}{f(s)}.$$

Gavome parametrinę sprendinio formą, kurios parametras yra $x^{'}$.

Kai $f = f(x)$, padauginę (3.1) iš $2dx$, gauname $2x^{'}dx^{'} = 2f(x)dx$. Vadinasi,

$$x^{'2} = v_0^2 + 2\int\limits_{x_0}^{x} f(s)ds = \tau(x).$$

Todėl $x^{'} = \pm\sqrt{\tau(x)}$, $t = t_0 \pm \int\limits_{x_0}^{x} \tau^{-1/2}(s)ds$; čia x yra funkcijos $t = t(x)$ argumentas. Kai $v_0 > 0$, ženklas yra teigiamas, o kai $v_0 < 0$, - neigiamas. Kai $v_0 = 0$, $f(x_0) \neq 0$, funkcijos $= x'$ ženklą taško x_0 aplinkoje apibrėžia $sign\, f(x_0)$. Kai $v_0 = 0$, $f(x_0) = 0$, tai $x = x_0$ su visais $t \geq 0$.

Kokybinis judėjimo tyrimas. Lygtis $x^{'2} = \tau(x)$ sutinkama daugelyje dinamikos uždavinių. Todėl svarbu žinoti kokybinį judėjimo pobūdį, kai funkcija $\tau(x)$ įgyja nulines reikšmes tam tikruose taškuose.

Tarkime, jog $\tau(x) = (a - x)\psi(x)$, $x_0 < a, \psi(x) > 0 \forall x \leq a$. Tada integralas $I_1 = \int\limits_{x_0}^{a} \tau^{-1/2}(x)dx$ konverguoja. Todėl, kai $v_0 > 0$, per laikotarpį I_1 taškas nueis atstumą $a - x_0$. Be to, $x^{'}\mid_{x=a}= 0$, $x^{''}\mid_{x=a}= f(a) = -\frac{1}{2}\psi(a) < 0$. Todėl, pasiekęs padėtį $\max\limits_{t>t_0} x = a$, taškas judės atgal. Vadinasi,

$$t = t_0 + I_1 + \int\limits_{x}^{a} \tau^{-1/2}(s)ds,\ x \leq a.$$

Kai $v_0 < 0$, funkcija $x(t)$ yra mažėjanti, o $\tau(x) > 0\, \forall t > t_0$.

Tarkime, kad $\tau(x) = (a - x)^2\psi(x)$, $a > x_0$, $\psi(x) > 0\, \forall x \in (-\infty, \infty)$. Kai $v_0 > 0$, tai

$$t = t_0 + \int\limits_{x_0}^{x} \tau^{-1/2}(s)ds \underset{x \to a}{\longrightarrow} \infty.$$

$t = t(x)$ yra monotoniška, tai atvirkštinė funkcija taip pat monotoniška. Vadinasi, $x = x(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} a$. Šiuo atveju taškas M asimptotiškai artėja prie a, be to $x^{'} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$. Kai $v_0 < 0$, tai x mažėja $\forall t > t_0$.

Tarkime, kad $v_0 > 0$, o $\tau(x) = (a - x)(x - c)\psi(x)$, $\psi(x) > 0\, \forall x \in [c, a]$, o $c < x_0 < a$.

Kadangi $I_1 = \int\limits_{x_0}^{a} \tau^{-1/2}(x)dx$ konverguoja, o $x^{'}\mid_{x=a}= 0$, $x^{''}\mid_{x=a}= -\frac{1}{2}(a - c)\psi(a) < 0$, tai per laikotarpį I_1, pasiekęs padėtį $\max\limits_{t>t_0} x = a$, taškas M judės atgal ir per laikotarpį $I_2 = \int\limits_{c}^{a} \tau^{-1/2}(x)dx$ pasieks tašką $x = c$. Be to, $x^{'}\mid_{x=c}= 0$, $x^{''}\mid_{x=c}= -\frac{1}{2}(a - c)\psi(c) > 0$. Vadinasi, pasiekęs padėtį $\min\limits_{t>t_0} x = c$, taškas M judės atgal ir per laikotarpį $I_3 = \int\limits_c^{x_0} \tau^{-1/2}(x)dx$ pasieks padėtį x_0. Šių trijų laikotarpių suma $T = 2\int\limits_c^{a} \tau^{-1/2}(x)dx$ nepriklauso nuo x_0. Todėl taško M judėjimas yra periodinis su periodu T.

Analogiškai tiriamas taško judėjimas, kai $\tau(x)$ turi tris arba daugiau šaknų, tarp kurių gali būti ir kartotinės. Kai $x = a$ yra kartotinė funkcijos $\tau(x)$ šaknis, o $x(t_0) = a$, $x^{'}(t_0) = 0$, tai $x(t) = a, t \geq t_0$, nes uždavinys $x^{''} = \frac{1}{2}\tau_x^{'} = f(x)$, $x(t_0) = a$, $x^{'}(t_0) = 0$ turi vienintelį sprendinį $x(t) = a$, $t \geq t_0$.

4. Uždaviniai

1. Ištirti taško judėjimą veikiant stūmimo jėgai $F = a^2 x x^{\circ}$, $a = const$.

2. Ištirti prieš pastovią sunkio jėgą $P = -mgy_1^{\circ}$, $g = 9,81\frac{m}{s^2}$, startavusio taško judėjimą, kai jį veikia aplinkos pasipriešinimo jėga $F_p = -mgf(|v|)y_1^{\circ}$.

3. Ištirti pastovios sunkio jėgos kryptimi startavusio taško judėjimą, kai jį veikia aplinkos paispriešinimo jėga $F_p = -mgf(|v|)y_1^{\circ}$.

4. Ištirti taško tiesiaeigį judėjimą, kai jį veikia spyruoklės tamprumo jėga $F_{sp} = -mk^2 y_1 y_1^{\circ}$.

5. Ištirti m masės taško tiesiaeigį judėjimą, kai jį veikia spyruoklės tamprumo $F_{sp} = -mk^2(x_1 - l)x_1^0$ ir aplinkos pasipriešinimo $F_p = -m\kappa x_1^{'} x_1^{\circ}$, $\kappa = const > 0$, jėgos.

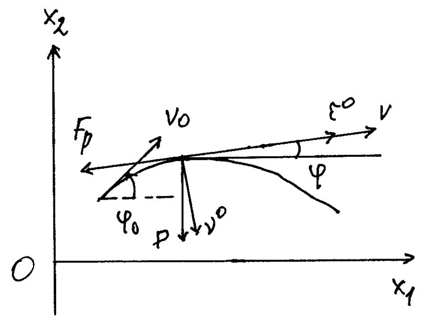
6. Ištirti taško priverstinius virpesius.

5. Plokščiasis taško judėjimas besipriešinančioje aplinkoje

Nagrinėsime plokščiąjį taško M judėjimą pastovios sunkio jėgos lauke veikiant aplinkos pasipriešinimui (12 pav.). Nukreipę y_2 ašį prieš sunkio jėgą turėsime

$$v^{'} = -g(y_2^{\circ} + f(|v|)v^{\circ}), \tag{5.1}$$

$$v(0) = |v(0)|(y_1^{\circ}\cos\varphi + y_2^{\circ}\sin\varphi_0),\ 0 < \varphi_0 < \tfrac{\pi}{2},\ r(0) = r_0.$$



12 pav.

Kadangi jėgų P ir F_p suma $P+F_p = mw$ yra žemiau liestinės ir nukreipta į trajektorijos įgaubimo pusę, tai $\varphi = \measuredangle(v_1^\circ, y_1^\circ)$ yra mažėjanti laiko funkcija. Lygybė $\frac{d\tau^\circ}{ds} = \frac{1}{\rho}\nu^\circ$ parodo, kad

$$\frac{1}{\rho} = \left|\frac{d\tau^\circ}{ds}\right| = \frac{|d(\cos\varphi y_1^\circ + \sin\varphi y_2^\circ)|}{dt|v|} = \frac{|d\varphi|}{|dt|}\frac{1}{|v|}. \tag{5.2}$$

Iš čia $-\frac{d\varphi}{dt} = \frac{|v|}{\rho}$. Užrašę (5.1) natūraliosiomis koordinatėmis gauname

$$|v|' = -g(\sin\varphi + f(|v|)),\ |v(0)| = |v_0|, \tag{5.3}$$

$$\frac{|v|^2}{\rho} = g\cos\varphi. \tag{5.4}$$

Iš (5.2) ir (5.4) gauname lygtį

$$|v|\frac{d\varphi}{dt} = -g\cos\varphi,\ \varphi(0) = \varphi_0. \tag{5.5}$$

Eliminavę dt iš (5.3) ir (5.5) gauname trajektorijos diferencialinę lygtį

$$\frac{1}{|v|}\frac{d|v|}{d\varphi} = \tan\varphi + \frac{f(|v|)}{\cos\varphi},\ |v(0)| = |v_0|. \tag{5.6}$$

(5.5) ir (5.6) lygtys rodo, kad $|v|$ yra mažėjanti φ funkcija, kai φ kinta nuo φ_0 iki nulio. Pažymėję (5.6) uždavinio sprendinį $|v| = u(\varphi)$ iš (5.5) gauname

$$t = \frac{1}{g}\int_{\varphi}^{\varphi_0} \frac{u(\alpha)}{\cos\alpha} d\alpha. \tag{5.7}$$

Kadangi $dy_1 = |v|\cos\varphi dt$, $dy_2 = |v|\sin\varphi dt$, tai

$$y_1 = y_{1\,0} + \frac{1}{g}\int_{\varphi}^{\varphi_0} u^2(\alpha) d\alpha, \tag{5.8}$$

$$y_2 = y_{2\,0} + \frac{1}{g}\int_{\varphi}^{\varphi_0} u^2(\alpha)\tan\alpha d\alpha. \tag{5.9}$$

Tai rodo, kad t ir y_1 didėja, kai φ mažėja, o y_2 didėja kampui φ mažėjant nuo φ_0 iki nulio ir mažėja, kai φ mažėja nuo nulio ik $\frac{-\pi}{2}$. Tegul $\max\limits_{\frac{-\pi}{2}<\varphi<\varphi_0} y_2(\varphi) = h$.

Kadangi y_2 yra monotoniška intervaluose $[0,\varphi_0]$, $[-\frac{\pi}{2},0]$, tai šiuose intervaluose egzistuoja monotoniška atvirkštinė funkcija $\varphi = \varphi(y_2)$. Vadinasi, $|v| = u(\varphi(y_2))$. Iš (5.3) gauname

$$|v|^2 = |v_0|^2 - 2g(y_2 - y_{20}) - 2g\int\limits_0^t |v|f(|v|)dt, \text{ kai } y_2 \geq y_{20}. \tag{5.10}$$

Iš čia matome, kad $|v| < |v_0|$, kai $y_2 \geq y_{2\,0}$. Vadinasi kiekvienam $y_{2\,0} > 0$ atstume $h - y_{2\,0}$ krisdamas taškas įgyja mažesnį greitį už turėtą pradinį kylant. (5.10) rodo, kad vakuumo atveju minėti greičiai yra vienodi. Be to, iš (5.9) matome, kad

$$u^{-2}(\varphi(y_2))dy_2 = \frac{1}{g}\tan\varphi d\varphi.$$

Vadinasi, taškui kylant,

$$\int\limits_{y_{2\,0}}^{h} u^{-2}(\varphi(y_2))dy_2 = -\frac{1}{g}\int\limits_{\varphi_0}^{0}\tan\varphi d\varphi = -\frac{1}{g}\ln\cos\varphi_0 > 0$$

ir krintant

$$\int\limits_{h}^{y_{2\,0}} u^{-2}(\varphi(y_2))dy_2 = -\frac{1}{g}\int\limits_{0}^{\varphi_\star}\tan\varphi d\varphi = -\frac{1}{g}\ln\cos\varphi_\star < 0,$$

čia $\varphi_\star = \varphi(x_{20})$ krintant. Kadangi $u(x_2)$ kylant yra didesnis už $u(x_2)$ krintant, tai $-\ln\cos\varphi_0 < -\ln\cos\varphi_\star$ Iš čia $|\varphi_\star| > \varphi_0$ Vadinasi trajektorija yra statesnė krintant negu kylant . Vakuume $\varphi_\star = -\varphi_0$.

Ištirsime atvejį, kai $f(|v|) = a|v|^n$, a ir n yra pastovūs teigiami dydžiai. (5.6) lygtis yra tokia

$$\frac{d}{dt}|v|^{-n} = -n(\frac{a}{\cos\varphi} + |v|^{-n}\tan\varphi),\ |v(0)| = |v_0|.$$

Jos integruojamasis daugiklis yra $\cos^{-n}(\varphi)$. Todėl

$$(|v|\cos\varphi)^{-n} = (|v_0|\cos\varphi)^{-n} + an\int\limits_{\varphi}^{\varphi_0}(\cos\alpha)^{-n-1}d\alpha$$

Kadangi taško $\varphi = \frac{-\pi}{2}$ aplinkoje $\cos\alpha = (\frac{\pi}{2}+\alpha)\psi(\alpha)$, $\psi(\alpha) > 0$, tai $\int\limits_{-\pi/2}^{\varphi_0}(\cos\alpha)^{-n-1}d\alpha$ diverguoja. Be to

$$\begin{aligned}\lim_{\varphi\to\frac{-\pi}{2}}\cos^n\varphi\int\limits_{\varphi}^{\varphi_0}(\cos\alpha)^{-n-1}d\alpha &= \lim_{\varphi\to\frac{-\pi}{2}}\cos^{-n}\varphi\int\limits_{\varphi}^{\varphi_0}(\cos\alpha)^{-n-1}d\alpha \\ = \lim_{\varphi\to\frac{-\pi}{2}}\frac{-(\cos\varphi)^{-n-1}}{n(\cos\varphi)^{-n-1}\sin\varphi} &= \frac{1}{n}.\end{aligned}$$

Vadinasi

$$|v|^{-n} = \cos^n\varphi(|v_0|\cos\varphi_0)^{-n} + an\cos^n\varphi\int\limits_{\varphi}^{\varphi_0}(\cos\alpha)^{-n-1}d\alpha \underset{\varphi\to-\frac{\pi}{2}}{\longrightarrow} a$$

Tai rodo, kad $\lim\limits_{\varphi\to-\pi/2}|v| = \frac{1}{a^{1/n}}$ yra lygties $f(|v|) = 1$ šaknis. Toks pat rezultatas yra teisingas ir tiesiaeigiu atveju.
Kadangi $\lim\limits_{\varphi\to-\frac{\pi}{2}}|v|$ yra aprėžta, tai (5.8) integralas konverguoja. Kadangi integralas $\int\limits_{\frac{-\pi}{2}}^{\varphi_0}\frac{d\alpha}{\cos\alpha}$ diverguoja, tai diverguoja integralai (5.7) ir (5.9). Vadinasi, $t\to\infty$, $y_2\to-\infty$, o $y_1\to y_{1\,0}+\frac{1}{\rho}\int\limits_{-\pi/2}^{\varphi_0}u^2(\alpha)d\alpha$, kai $\varphi\to-\frac{\pi}{2}$.

Uždavinys. Ištirti plokščiąjį taško judėjimą, kai $f(|v|) = |v|$.

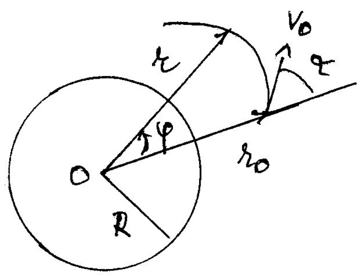
6. Taško judėjimas apie Žemę

Tarkime, kad m masės taškas juda vakuume veikiamas Žemės traukos jėgos $F = -\frac{m\mu}{|r|^2}r^\circ$. Čia μ yra Gauso konstanta. Kadangi $|F||_{|r|=R} = mg$, tai $\mu = gR^2$. Čia $R = 6378$ km yra Žemės rutulio spindulys. Kadangi jėga F yra centrinė, tai trajektorija yra plokščioji kreivė. Taško judėjimą aprašo uždavinys

$r'' = -\frac{\mu}{|r|^2}r^\circ$, $v(0) = r'(0) = v_0$, $r(0) = r_0$.

Tegul v_0 sudaro kampą $\alpha\in[0,\pi]\cup[-\pi,0]$, su pradiniu spinduliu. Tuomet (13 pav.)

$|r_0|\varphi'(0) = |v_0|\sin\alpha$,
$|r|' = |v_0|\cos\alpha$, kai $t = 0$, ir
$|r(0)| = |r_0|$, $\varphi(0) = 0$,



13 pav.

Pasinaudoję pagreičio išraiška polinėmis koordinatėmis gauname sistemą

$$|r|'' - |r|\varphi'^2 = -\frac{\mu}{|r|^2}, \tag{6.1}$$
$$2|r|'\varphi' + |r|\varphi'' = 0. \tag{6.2}$$

Iš (6.2) gauname $|r|^2\varphi' = c$. Pradinės sąlygos apibrėžia $c = |r_0||v_0|\sin\alpha$. Ištirkime atvejus $c = 0$ ir $c \neq 0$.

Pirmuoju atveju gauname, kad taškas juda tiese $\varphi = 0$. Kai $\alpha = 0$, taškas tolsta nuo Žemės, o kai $\alpha = \pm\pi$ jis grįžta į Žemę. Suintegravę iš (6.1) gautą lygtį $|r|'' = -\frac{\mu}{|r|^2}$, gauname

$$|r|'^2 = |v_0|^2 + 2\mu(\tfrac{1}{|r|} - \tfrac{1}{|r_0|}) \geq 0.$$

Kai $|v_0|^2 - \frac{2\mu}{|r_0|} \geq 0$ t.y. kai $|v_0| \geq \frac{R}{|r_0|}\sqrt{2g|r_0|}$, tai $|r|$ gali būti neaprėžtas. Todėl

$$t = \int\limits_{|r_0|}^{r} \frac{dx}{\sqrt{|v_0|^2 - \frac{2\mu}{|r_0|} + \frac{2\mu}{x}}} \underset{|r|\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

Šis integralas diverguoja, nes $(|v_0|^2 - \frac{2\mu}{|r_0|} + \frac{2\mu}{x})^{-1}$ neartėja prie nulio, kai $x \to \infty$ Vadinasi, startuodamas pradiniu greičiu $|v_0| > \frac{R}{|r|}\sqrt{2g|r_0|}$, taškas gali palikti Žemę, jei $\alpha = 0$. Kai $|r_0| = R$, tai $|v_0| > \sqrt{2gR} \approx 11,2\frac{km}{s}$. Tai yra antrojo kosminio greičio reikšmė. Kai $|v_0|^2 - \frac{2\mu}{|r_0|} < 0$ tai $|r| \leq \frac{2\mu}{\frac{2\mu}{|r_0|} - v_0^2} > 0$. Šiuo atveju startavęs kampu $\alpha = 0$, taškas pasieks tolimiausią padėtį $\frac{2\mu}{(\frac{2\mu}{|r_0|} - v_0^2)}$. Po to jis pradės judėti atgal be pradinio greičio, nes tolimiausioje padėtyje $|r|'' < 0$.

Ištirsime atvejį, kai $c \neq 0\,(\alpha \neq k\pi, k = 0, \pm 1)$.
Kadangi

$$|r|' = \frac{d|r|}{d\varphi}\varphi' = \frac{c}{|r|^2}\frac{d|r|}{d\varphi} = -c\frac{d}{d\varphi}\frac{1}{|r|},$$

$$|r|'' = \frac{c}{|r|^2}\frac{d|r|'}{d\varphi} = -\frac{c^2}{|r|^2}\frac{d^2}{d\varphi^2}\frac{1}{|r|},$$

tai (6.1) lygtis tampa tokia

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\frac{1}{|r|} + \frac{1}{|r|} = +\frac{\mu}{c^2}.$$

Šios lygties bendrasis sprendinys yra

$$\frac{1}{|r|} = \frac{\mu}{c^2}(1 + e\cos(\varphi - \varepsilon)), \tag{6.3}$$

kur ekscentritetas e ir fazė ε yra laisvos konstantos.
(6.3) lygtis yra antrosios eilės kreivių židininė lygtis. Polius yra viename iš židinių, o polinė ašis nukreipta į artimiausią viršūnę (jei jos dvi). Pažymėkime $p = \frac{c^2}{\mu}$ Tuomet $-\frac{\cot\alpha}{|r_0|} = e\sin\varepsilon$. Pasinaudoję pradinėmis sąlygomis iš (6.3) gauname

$$e\cos\varepsilon = \frac{p}{|r_0|} - 1,$$

$$e\sin\varepsilon = p\frac{\cot\alpha}{|r_0|}.$$

Iš čia

$e^2 = (\frac{p}{|r_0|} - 1)^2 + (\frac{p}{|r_0|}\cot\alpha)^2,$
$\tan\varepsilon = \frac{p\cot\alpha}{p-|r_0|}$, jei $p \neq |r_0|$, $\tan\varepsilon = \pm\frac{\pi}{2}$, jei $p = |r_0|$.

Kai $e = 0$, tai trajektorija yra apskritimas,
Kai $0 < e < 1$, tai trajektorija yra elipsė,
Kai $e = 1$, tai trajektorija yra parabolė,
Kai $e > 1$, tai trajektorija yra hiperbolė.

Apskritimo atveju $p = |r_0|$ ir $\alpha = \pm\frac{\pi}{2}$. Iš čia $|r_0| = \frac{c^2}{\mu} = \frac{|r_0|^2|v_0|^2}{gR^2}$. Todėl $|v_0| = \frac{R}{|r_0|}\sqrt{g|r_0|}$. Kai $|r_0| = R$, tai $|v_0| = \sqrt{gR} = 7,9\frac{km}{s}$. Tai yra pirmasis kosminis greitis.

Elipsės, parabolės ir hiperbolės atvejais gauname

$0 < e^2 \lesseqqgtr 1 \Rightarrow 0 < (\frac{p}{|r_0|} - 1)^2 + (\frac{p}{|r_0|})^2\cot^2\alpha \lesseqqgtr 1$

$\Rightarrow \frac{p}{|r_0|}\frac{1}{\sin^2\alpha} \lesseqqgtr 2 \Rightarrow |v_0| \lesseqqgtr \frac{R}{|r_0|}\sqrt{2g|r_0|}.$

Kampui α nėra jokių apribojimų.

Kai $|\alpha| \neq \frac{\pi}{2}$ ir $|v_0| < \frac{R}{|r_0|}\sqrt{2g|r_0|}$, tai trajektorija yra elipsė. Kai α yra bet koks ir $|v_0| = \frac{R}{|r_0|}\sqrt{2g|r_0|}$, turime parabolę. Pagaliau, kai α bet koks ir $|v_0| > \frac{R}{|r_0|}\sqrt{2g|r_0|}$, trajektorija yra hiperbolė.

Iš lygybės $|r|^2\varphi' = c$ randame

$$t = \frac{p^2}{c}\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{(1+e\cos(\varphi-\varepsilon))^2}.$$

Šį integralą galime išreikšti elementariomis funkcijomis.

Suvaržytasis taško judėjimas

1. Ryšių aksioma, pagrindinės teoremos ir judėjimo lygtys

Kai judantis taškas negali užimti bet kurios padėties erdvėje, tai sakome jog jo judėjimas yra suvaržytas. Sąlygos, varžančios taško judėjimą, vadinamos ryšiais. Praktikoje ryšiai dažnai realizuojami glodžiaisiais paviršiais arba kreivėmis. Kai taškas juda duotu paviršiumi, jo judėjimą varžo vienas ryšys (paviršiaus lygtis). Duota kreive judantį tašką varžo du ryšiai (kreivės lygtys). Kai ryšiai nepriklauso nuo laiko, jie vadinami stacionariaisiais. Suformuluosime *ryšių aksiomą:* suvaržytąjį taško judėjimą galima pakeisti laisvuoju judėjimu, ryšių poveikį pakeitus nežinoma jėga. Šią jėgą vadinsime ryšio reakcijos jėga arba ryšio reakcija, o duotąją jėga F – aktyviąja jėga. Laisvai judančiam taškui užrašome ketvirtąją Niutono aksiomą:

$$mw = F + R. \tag{1.1}$$

čia R – ryšio jėga. Nagrinėjamu atveju galioja (3.1.2)–(3.1.5) lygtys, kuriose vektoriaus F komponentes reikia pakeisti jėgos $F+R$ komponentėmis. Prijungę prie šių lygčių ryšių lygtis, gauname sistemą, kurioje nežinomųjų skaičius yra didesnis už lygčių skaičių. Trūkstamas lygtis užrašome atsižvelgę į ryšiais reiškiamų kreivių arba paviršių fizikines savybes.

Kaip ir laisvojo judėjimo atveju, kai $m = const$, užrašome pagrindines teoremas:

$$\frac{dQ}{dt} = F + R,\ \frac{d}{dt}G_0 = r \times (F+R),\ \frac{dE}{dt} = v \cdot (F+R),$$
$$dE = (F+R)\cdot dr. \tag{1.2}$$

Kai $F = \mathrm{grad}U(r)$, $R \cdot v = 0$, iš energijos kitimo dėsnio gauname energijos tvermės dėsnį:

$$E - U = const. \tag{1.3}$$

Kai $F^{\circ} = const$, o R – lygiagretus vektorių r ir F° sudarytai plokštumai (F°, r, R komplanarūs), tai skaliariškai padauginę (1.2) sistemos antrąją lygtį iš F°, gausime integralą

$$F^{\circ} \cdot (r \times v) = const. \tag{1.4}$$

2. Taško judėjimas kreive

Tarkime, kad kreivė apibrėžta dviejų paviršių sankirta

$$f_k(t, r) = 0,\ k = 1, 2. \tag{1.5}$$

Reikalausime, kad f_k būtų du kartus tolydžiai diferencijuojama funkcija pagal vektoriaus r koordinates ir t. Vektoriai $l_k = \mathrm{grad}f_k$, $k = 1, 2$, $l_3 = l_1 \times l_2$ yra nekomplanarūs. Todėl galioja lygybė

$$R = \sum_{k=1}^{3} \lambda_k l_k. \tag{1.6}$$

Įrašę (1.6) į (1.1) ir prijungę (1.5), gauname sistemą

$$\begin{cases} mr'' = F + \sum\limits_{k=1}^{2} \lambda_k \mathrm{grad} f_k + \tilde{\lambda}_3 l_3^{\circ}, \\ f_k(t, r) = 0,\ k = 1, 2, \end{cases} \tag{1.7}$$

kurioje ieškomos funkcijos yra $r, \lambda_1, \lambda_2, \tilde{\lambda}_3$. Vektorius l_3 yra liečiamasis kreivei ir todėl kolinearus vektoriui τ°. Tarkime, kad kreivės taško M_ν, su kuriuo duotu momentu sutampa materialusis taškas M, absoliutusis greitis yra v_{M_ν}. Taško M reliatyvusis greitis $v - v_{M_\nu} = v_{rel}$ yra kolinearus vektoriui τ°. Todėl l_3° galima pakeisti vektoriumi v_{rel}°. Kadangi trinties jėga taip pat kolineari vektoriui v°_{rel} tai vektorius $R_\tau = \lambda^\star_3 v^\circ_{rel} = \tilde{\lambda}_3 l^\circ_3$ yra trinties jėga, veikianti judantį tašką M. Vektorių $R_n = \sum\limits_{k=1}^{2} \lambda_k \nabla f_k$ vadinsime normaline reakcija.

Parodysime, kad (1.5) ryšiai neapibrėžia trinties jėgos R_τ. Kai taškas M juda kreive, tai $r = r(t)$. Tegul $v = \sum\limits_{k=1}^{2} a_k \nabla f_k + a_3 v^\circ_{rel}$, $w = \sum\limits_{k=1}^{2} b_k \nabla f_k + b_3 v^\circ_{rel}$ yra vektorių v ir w išraiškos bazėje $\nabla f_1, \nabla f_2, v^\circ_{rel}$. Išdiferencijavę (1.5) du kartus pagal t ir panaudoję v ir w išraiškas bei (1.7) sistemos pirmąją lygtį gausime lygtis

$$\sum_{k=1}^{2} a_{sk} \mathcal{U}_k = Q_s,\ a_{sk} = \nabla f_s \cdot \nabla f_k,\ \mathcal{U}_k = a_k, b_k, \lambda_k;$$

$$Q_s = -\tfrac{\partial f_s}{\partial t},\ -(\tfrac{\partial f_s}{\partial t})' - v \cdot (\nabla f_s)',\ -m(\tfrac{\partial f_s}{\partial t})' - mv \cdot (\nabla f_s)' - F \cdot \nabla f_s,\ s = 1, 2.$$

Kadangi $det\|a_{sk}\| = |\nabla f_1|^2 |\nabla f_2|^2 - (\nabla f_1 \cdot \nabla f_2)^2 = |\nabla f_1 \times \nabla f_2|^2 > 0$, tai dydžiai a_k, b_k, λ_k, $k = 1, 2$, t.y., vektoriai $v_n = \sum\limits_{k=1}^{2} a_k \nabla f_k$, $w_n = \sum\limits_{k=1}^{2} b_k \nabla f_k$, R_n yra apibrėžiami vienareikšmiškai. Be to matome, jog ryšiai (1.5) dydžių $a_3, b_3, \tilde{\lambda}_3$, t.y. vektorių $v_\tau = a_3 v^\circ_{rel}$, R_τ, $w_\tau = b_3 v^\circ_{rel}$, visisškai neapibrėžia. Kai $\frac{\partial f_s}{\partial t} = 0$, $s = 1, 2$, tai $v = v_\tau$. Empiriškai nustatyta, kad

$$R_\tau = \kappa(R_n). \tag{1.8}$$

Čia (1.7), (1.8) yra taško M judėjimo lygčių sistema. Joje lygčių skaičius lygus nežinomųjų skaičiui. Kai $R_\tau = 0$, kreivę vadiname idealiąja (glotniąja), arba visiškai (absoliučiai) lygia kreive. Priešingu atveju ji vadinama šiurkščiąja kreive.

Kai $\frac{\partial f_s}{\partial t} = 0$, $s = 1, 2$, t.y. kai $v_{M_\nu} = 0$, tai

$$R_\tau = \begin{cases} -\alpha_d |R_n| v^\circ, & \text{kai } |F_\tau| > \alpha_s |R_n|. \text{ Tada } |v| \neq 0 \\ -F_\tau \tau^\circ, & \text{kai } |F_\tau| = |R_\tau| \le \alpha_s |R_n|. \text{ Tada } |v| \equiv 0. \end{cases} \tag{1.9}$$

Kai $|v| \equiv 0$ taškas yra parimęs. Teigiami dydžiai α_d ir α_s vadinami dinaminės ir statinės trinties koeficentais ir nustatotmi bandymais. Daugeliui medžiagų $\alpha_d(|v|)$ yra monotoniškai mažėjanti funkcija. Be to $0 < c \le \alpha_d \le \alpha_s$, $\alpha_d(0) = \alpha_s < 1$. Paprastumo sumetimais dažnai tariama, jog $\alpha_d = \alpha_s$. Kampas $\arctan \alpha$, vadinamas statinės trinties kampu. Pastebėsime, kad galioja ir atvirkštinis teiginys:

$$v \equiv 0, \text{ kai } R_\tau = -F_\tau \tau^\circ,\ |F_\tau| = |R_\tau| \le \alpha_s |R_n|.$$

Glaustinėje plokštumoje nuo vektoriaus ν°, kai $R_n \cdot \nu^\circ > 0$ ir nuo vektoriaus $(-\nu^\circ)$, kai $R_n \cdot \nu^\circ < 0$ atidėkime į abi puses kampą $\theta = \arctan \alpha_s$. Gautą dydžio 2θ kampą pažymėkime γ. Formulė (1.9) rodo, jog taškas bus parimęs tik tada, kai vektorius R yra kampe γ.

Kai $\alpha_s = \alpha_d = 0\,(\tilde{\lambda}_3 = 0)$, kreivė yra idealioji. Priešingu atveju - šiurkščioji.

Kai $F = \nabla U(r)$, o kreivė yra idealioji ir stacionarioji ($\partial f_k/\partial t = 0$, $k = 1,2$), tai $R = R_n$, $v = v_\tau$, $R \cdot v = R_n \cdot v_\tau = 0$. Todėl galioja (1.3) energijos integralas.

Pastaba. Kai $\partial f_k/\partial t \neq 0$, $k = 1,2$, tai (1.9) formulėje vektorių v reikia pakeisti vektoriumi v_{rel}.

Išvada. Kreivė yra idealioji tada ir tik tada, kai

$\mathcal{N}_{rel}^R = R \cdot v_{rel} = R_\tau \cdot v_{rel} = -\alpha_d |R_n||v_{rel}| = 0 \Rightarrow \alpha_d = 0.$

Tarkime, kad kreivė yra stacionarioji ir apibrėžta natūraliuoju būdu, t.y. $r = r(s)$. Tada $\rho^{-1}(s) = |\frac{d^2r}{ds^2}|$. Užrašysime (1.7) sistemos pirmąją lygtį projekcijomis į natūraliąsias kryptis:

$$\begin{cases} ms^{''} = F_\tau - \alpha_d |R_n| \frac{s^{'}}{|s^{'}|}, \\ \frac{ms^{'2}}{\rho} = F_\nu + R_\nu, \\ 0 = F_\beta + R_\beta. \end{cases} \tag{1.10}$$

čia $|R_n| = (R_\beta^2 + R_\nu^2)^{1/2}$.

Išvada. Kai $\alpha_d = 0$, taško greitis nepriklauso nuo $F_\nu \neq 0$.

3. Matematinė svyruoklė.

Svarųjį (čia ir toliau tašką arba kūną vadinsime svariuoju, jeigu jį veikia sunkio jėga $P = mg = const$) tašką, judantį nejudančiu idealiuoju vertikaliuoju apskritimu, vadiname matematine svyruokle (švytuokle). Sunkio jėga P (14 brėžinys)

yra apskritimo plokštumoje. Todėl $R_n = R_\nu \nu^\circ$, nes $R_\beta = 0$. Tegul $OA = P^\circ$. Kadangi $\alpha_d = 0$, $s = l\varphi$, $\rho = l = |OM|$, tai (1.10) sistema yra tokia:

$$\varphi^{''} = -\frac{g}{l}\sin\varphi,\ ml\varphi^{'2} + mg\cos\varphi = R_\nu. \tag{1.11}$$

Uždavinys $\varphi(0) = \varphi_0$, $\varphi^{'}(0) = v_0 l^{-1}$, $\varphi^{''} = -\frac{g}{l}\sin\varphi$ turi energijos integralą

$l^2\varphi^{'2} = v_0^2 + 2gl(\cos\varphi - \cos\varphi_0),$

kurį galima užrašyti taip:

$$\varphi^{'2} = \tau(\varphi),\ \tau(\varphi) = \frac{2g}{l}(\cos\varphi + h),\ h = v_0^2\frac{l}{2gl} - \cos\varphi_0. \tag{1.12}$$

Kadangi $\tau(\varphi) \geq 0$, tai $h \geq -\cos\varphi \geq -1$. Ištirsime judėjimą.

1. $h = -1$. Šiuo atveju $\varphi = 0\,\forall t \geq 0$. Vadinasi, $\varphi_0 = 0$, $v_0 = 0$, o taškas M yra žemiausioje padėtyje A ir nejuda.

2. $-1 < h < 1$. Kadangi $\tau \geq 0$, tai $|\varphi| \leq \varphi_\star = \arccos(-h) < \pi$. Be to, $\varphi'' \,|_{\varphi=\varphi_0} < 0$, $\varphi'' \,|_{\varphi=-\varphi_0} > 0$, $\varphi' \,|_{|\varphi|=\varphi_0} = 0$. Todėl $\max\limits_t \varphi = \varphi_\star$, $\min\limits_t \varphi = -\varphi_\star$. Kai $|h| < 1$, tai $|v_0| < (2gl(1+\cos\varphi_0))^{1/2}$. Vadinasi, kai $0 \leq |v_0| < (2gl(1+\cos\varphi_0))^{1/2}$, taškas M svyruoja apskritimo lanku apie padėtį A. Svyravimo periodas $T_\varphi = 4\int\limits_0^{\varphi_0} \tau^{-1/2}(\varphi)d\varphi < \infty$, nes $\tau = (\varphi_\star^2 - \varphi^2)\psi(\varphi)$, $\psi > 0\,\forall |\varphi| \leq \varphi_\star$. Kadangi $h = -\cos\varphi_\star$, tai
$$T_\varphi = 4\int\limits_0^{\varphi_\star} \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{2g}{l}}\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_\star}} = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\int\limits_0^{\varphi_\star} \frac{d\varphi}{(\sin^2\frac{\varphi_\star}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2})^{1/2}}$$
$$= 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{(1-(\sin\frac{\varphi_\star}{2}\sin\alpha)^2)^{1/2}};$$
čia panaudota transformacija $\sin\frac{\varphi}{2} = \sin\frac{\varphi_\star}{2}\sin\alpha$, $0 \leq \varphi \leq \varphi_\star < \pi$. Matome, jog T_φ priklauso nuo pradinių sąlygų. Todėl svyravimai nėra izochroniški.

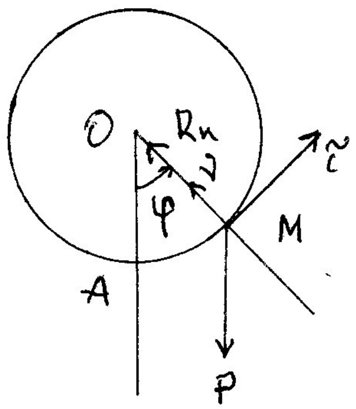
   Kadangi $\sin^2\frac{\varphi_\star}{2} < 1$, tai $(1 - (\sin\frac{\varphi_\star}{2}\sin\alpha)^2)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}\sin^2\frac{\varphi_\star}{2}\sin^2\alpha + O(\sin^4\frac{\varphi_\star}{2})$. Vadinasi $T_\varphi = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}(1 + \frac{1}{2}\sin^2\frac{\varphi_\star}{2} + O(\sin^4\frac{\varphi_\star}{2})$. Iš (1.12) randame $t = \pm\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} \tau^{-1/2}(\varphi)d\varphi$; čia imame teigiamą ženklą, kai $v_0 > 0$, ir neigiamą – kai $v_0 < 0$. Kai $v_0 = 0$, tai ženklas sutampa su dydžio $\varphi'' \,|_{\varphi=\varphi_0\neq 0} \neq 0$ ženklu.

3. $h = 1$, t.y. $|v_0| = (2gl(1+\cos\varphi_0))^{1/2}$. Vadinasi, $\varphi_\star = \pi$. Be to,
$$t = \pm\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} \tau^{-1/2}(\varphi)d\varphi = \pm\sqrt{\frac{l}{g}}\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi/2}{\cos\varphi/2}$$
$$= \pm\sqrt{\frac{l}{g}}\ln\frac{(1+\sin\frac{\varphi}{2})(1-\sin\frac{\varphi_0}{2})}{(1-\sin\frac{\varphi}{2})(1+\sin\frac{\varphi_0}{2})} \underset{\varphi\to\pm\pi}{\longrightarrow} \infty,\ |\varphi_0| < \pi.$$
   Šiuo atveju, kai $|\varphi_0| < \pi$, taškas M asimptotiškai kyla aukštyn, o $\varphi' \underset{\varphi\to\pm\pi}{\longrightarrow} 0$.

   Kai $\varphi_0 = \pi$ tai $v_0 = 0$, $\varphi'' \,|_{\varphi=\pi} = 0$. Todėl funkcija $\varphi(t) \equiv \pi$ yra lygties $\varphi'' = -\frac{g}{l}\sin\varphi$ sprendinys. Vadinasi, šiuo atveju taškas M visą laiką liks aukščiausioje padėtyje.

4. $h > 1$. Šiuo atveju $\tau(\varphi) > 0$ su visais φ. Vadinasi, $\varphi' > 0$, kai $v_0 > 0$, ir $\varphi' < 0$, kai $v_0 < 0$. Todėl taškas M suksis apskritimu nesustodamas,

o $t = \pm \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} \tau^{-1/2}(\varphi) d\varphi \underset{\varphi \to \pm\infty}{\longrightarrow} \infty.$



14 pav.

4. Lanksčiuoju netąsiuoju siūlu pakabinto taško plokščiasis judėjimas.

Siūlą vadinsime absoliučiai (visiškai) lanksčiu (lanksčiuoju), jei jis nesipriešina, kai jį lenkiame. Tegul 14 brėžinyje OM yra lankstusis siūlas. Kai jis nesulenktas, tai taškas M juda apskritimu, o kai sulenktas, tai juda laisvai. Iš (1.11) sistemos antrosios lygybės matome, jog $R_\nu \mid_{\varphi=0} > 0$, kai $\varphi' \mid_{\varphi=0} \neq 0$. Trečioji aksioma parodo, kad siūlas tempiamas. Absoliučiai lankstus siūlas gniuždomas sulinksta nesipriešindamas. Vadinasi, R_ν negali būti neigiamas. Todėl, kai siūlas tempiamas, visada $R_\nu > 0$. Tegul taškas juda apskritimu. Tada $v = v_\tau \tau^\circ$. Tarkime, kad $R_\nu \mid_{\varphi(t_\star)} = 0$. Jeigu $t_\star$ aplinkoje iš dešinės R_ν nekeičia ženklo, tai šioje aplinkoje M juda apskritimu. Jeigu $t_\star$ aplinkoje iš dešinės R_ν keičia ženklą, tai esant $t > t_\star$, taškas judės laisvai iki tokio momento, kai vėl siūlas įsitemps. Laisvojo judėjimo pradinės sąlygos yra $\varphi(t_\star)$, $\varphi'(t_\star) = l^{-1} v_\tau(t_\star)$.

Iš (1.11) matome, jog $R_\nu > 0 \, \forall |\varphi| < \frac{\pi}{2}$. Todėl šiame intervale taškas judės apskritimu. Jeigu jis sustos, tai po to judės apskritmu atgal. Sustojus φ įgyja ekstremalią reikšmę φ_1, $R_\nu \mid_{|\varphi_\star| = \frac{\pi}{2}} = 0$ tik tada, kai $\varphi' \mid_{|\varphi_\star| = \frac{\pi}{2}} = 0$. Bet tai yra funkcijos φ ekstremali reikšmė, nes $\varphi'' \mid_{\varphi_\star = \pm\frac{\pi}{2}} = \mp \frac{g}{l}$. Vadinasi, po sustojimo taške $|\varphi_\star| = \varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ taškas M pradės judėti atgal.

Iš (1.11) taip pat matyti, kad $\pi \geq |\varphi_\star| > \frac{\pi}{2}$, o $\varphi'^2 \mid_{\varphi=\varphi_0} = \frac{g}{l} \cos\varphi_\star > 0$. Bet $R_\nu(\cos\varphi)$ yra tolydi monotoniška funkcija. Todėl $R_\nu \mid_{|\varphi| < \varphi_\star} > 0, R_\nu \mid_{|\varphi| > \varphi_\star} <$

0. Vadinasi, kai $t > t_\star$, reikia spręsti laisvojo judėjimo uždavinį. Iš (1.11), (1.12) randame

$$R_\nu = mg(3\cos\varphi + 2h).$$

Iš čia matyti, kad $|\varphi_\star| = \arccos(-\frac{2}{3}h)$, kai $-1 \leq h \leq \frac{3}{2}$. Kai $h > \frac{3}{2}$, tai taškas judės apskritimu nepalikdamas jo. Kai $h = \frac{3}{2}$ taškas judės apskritimu jo nepalikdamas.

5. Taško judėjimas paviršiumi.

Judėjimo lygtys. Tegul paviršius apibrėžtas lygtimi

$$f(t, r) = 0. \tag{3.1}$$

Tarkime, kad f turi antrąsias tolydžias išvestines pagal vektoriaus r koordinates ir t. Tegul $l_1 = \nabla f$, $l_k \cdot l_1 = 0$, $k = 2, 3$, o l_2 ir l_3 nėra kolinearūs. Tada

$$R = \sum_{k=1}^{3} \lambda_k l_k = R_n + R_\tau,\ R_n = \lambda_1 \nabla f,\ R_\tau = \sum_{k=2}^{3} \lambda_k l_k. \tag{3.2}$$

R_τ yra liečiamasis paviršiui vektorius. Todėl jį vadiname trinties jėga, o R_n – normaline reakcija. Vektorių R_τ galima užrašyti taip:

$$R_\tau = -R_\tau v_{rel}^\circ,\ v_{rel} = v - v_{M_\nu}; \tag{3.3}$$

čia v_{M_ν} yra paviršiaus taško M_ν, su kuriuo duotuoju momentu sutampa taškas M, greitis. Kai $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$, teisingos (1.8),(1.9) formulės, kuriose R_τ ir R_n išreiškiami (3.2) lygybėmis. Prijungę prie (3.1)–(3.3) lygčių (1.1) lygtį

$$mw = F + R \tag{3.4}$$

gauname taško judėjimo paviršiumi lygčių sistemą:

$$\begin{cases} mw = F + \lambda \nabla f + R_\tau \\ R_\tau = -R_\tau v_{rel}^\circ,\ R_\tau = \kappa(R_n),\ f(t, r) = 0 \end{cases} \tag{3.5}$$

čia $\lambda = \lambda_1$. Kai $R_\tau = 0$, paviršių vadiname idealiuoju. Priešingu atveju šiurkščiuoju. Kadangi $N_{rel}^R = R \cdot v_{rel} = R_\tau \cdot v_{rel} = -|v_{rel}| R_\tau$, tai paviršius yra idealusis tada ir tik tada, kai $N_{rel}^R = 0$.

Pirmieji integralai. Kai $F = \nabla U(r)$, o paviršius $f(r) = 0$ yra idealus ir nepriklauso nuo t, tai galioja (1.3) integralas

$$E - U = const, \tag{3.6}$$

nes $R_n \cdot v = 0$.

Kai vektoriai $F^\circ = const$, r, R yra komplanarūs, o $f(r) = 0$ yra idealusis nepriklausantis nuo t paviršius, tai galioja (1.4) integralas

$$F^\circ \cdot (r \times v) = const. \tag{3.7}$$

Nukreipę x_3 ašį vektoriaus F° kryptimi, iš (3.7) gauname lygybę

$$0 = F^\circ \cdot (r \times mw) = F^\circ \cdot (r \times R) = \lambda F^\circ \cdot (r \times \nabla f) = \lambda (x_1 \tfrac{\partial f}{\partial x_2} - x_2 \tfrac{\partial f}{\partial x_1}),\ \lambda \neq 0.$$

Šios lygties bendrasis sprendinys yra $f = f(x_3, x_1^2 + x_2^2)$. Vadinasi (3.7) integralas galioja, kai $f(r) = 0$ yra sukimosi apie kryptį F° paviršius. Polinėms koordinatėms (3.7) užrašysime taip:

$$\rho^2 \varphi' = c. \tag{3.8}$$

6. Svariojo taško judėjimas vertikaliuoju sukimosi paviršiumi.

Rasime judančio vertikaliuoju idealiuoju sukimosi paviršiumi $\rho = \rho(z)$ svariojo taško trajektorijos lygtį bei judėjimo dėsnį. Cilindrinės sistemos z ašį nukreipkime priešingai sunkio jėgai. Iš (3.6) ir (3.8) gauname

$$2h - 2gz = \rho'^2 + \rho^2 \varphi'^2 + z'^2 = z'^2 (1 + \dot{\rho}^2) + c^2 \rho^{-2},\ 2h = |v_0|^2 + 2g z_0,\ \dot{\rho} = \tfrac{d\rho}{dz},$$

t.y.,

$$z' = \pm \{\tfrac{2h - 2gz - c^2 \rho^{-2}}{1 + \dot{\rho}^2}\}^{1/2}; \tag{3.9}$$

čia $z_0 = z(0)$, $v_0 = v(0)$, o dešiniosios dalies ženklas lygus $\mathrm{sign} v_z(0)$, kai $v_z \neq 0$ ir $\mathrm{sign} z''(0)$, kai $v_z = 0$, $z'' \neq 0$. Panaudoję (3.8) integralą, gauname, trajektorijos lygtį.

$$\varphi = \varphi_0 \pm \int_{z_0}^{z} \rho^{-1}(s) \{\tfrac{\dot{\rho}^2 + 1}{\rho^2(s)(2h - 2gs) - c^2}\}^{1/2} ds, \varphi(0) = \varphi_0. \tag{3.10}$$

Iš (3.9) gauname

$$t = \pm \int_{z_0}^{z} \{\tfrac{\dot{\rho}^2 + 1}{2h - 2gs - c^2 \rho^{-2}}\}^{1/2} ds. \tag{3.11}$$

Lygybės $\rho = \rho(z)$ ir (3.10), (3.11) išreiškia taško judėjimo dėsnį parametrine forma.

7. Svariojo taško judėjimas šiurkščiąja nuožulniąja plokštuma.

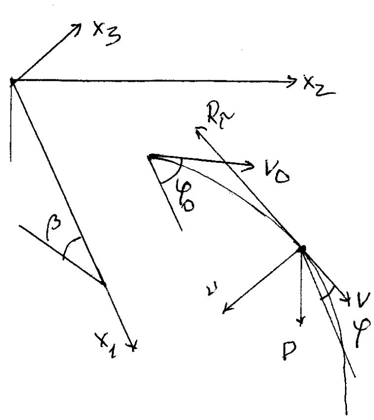
Tarkime, kad taškas juda (15 pav.) $x_3 = 0$ plokštuma veikiamas sunkio ir trinties jėgų P ir $R_\tau = -\alpha_d |R_{x_3}| v^\circ$, o ašis x_2 statmena vektoriui P. Kadangi $w_{x_3} = 0$, tai

$$w = -\alpha_d g \cos\beta v^\circ + g \sin\beta x_1^\circ,\ R_{x_3} = mg \cos\beta. \tag{3.12}$$

Atvejis, kai $\varphi(0) \in (0, \pi)$**.** Ištirsime šį uždavinį hodografo metodu. Tegul $x_k(0) = x_{k0}$, $v_\tau(0) = v_0 > 0$, $\varphi(0) = \varphi_0 \in (0, \pi)$. Užrašysime judėjimo lygtis natūraliosiomis koordinatėmis $v_\tau' = -\gamma a + \gamma\cos\varphi$, $\rho^{-1}v_\tau^2 = \gamma\sin\varphi$; čia $\gamma = g\sin\beta$, $a = \alpha_d(|v_\tau|)\cot\beta$, $\rho^{-1} = |\frac{d\tau^\circ}{ds}| = |\frac{d\varphi}{ds}| = -\frac{d\varphi}{ds}$, nes $w = m^{-1}R_\tau + \gamma x_1^\circ$ nukreiptas į trajektorijos įgaubimo pusę. Remdamiesi lygybe $v_\tau' = v_\tau\frac{dv_\tau}{ds}$, gauname lygtis

$$v_\tau\frac{dv_\tau}{ds} = -\gamma a + \gamma\cos\varphi,$$

$$v_\tau^2\frac{d\varphi}{ds} = -\gamma\sin\varphi. \tag{3.13}$$



15 pav.

Todėl

$$\frac{dv_\tau}{d\varphi} = v_\tau\left(\frac{a(v_\tau)}{\sin\varphi} - \cot\varphi\right), \; v_\tau(\varphi_0) = v_0. \tag{3.14}$$

Pažymėkime šio uždavinio sprendinį $v_\tau = u(\varphi)$. Ši kreivė reiškia greičio hodografą. Iš (3.13), kai $s(0) = 0$, randame

$$s = -\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{1}{\gamma}u^2(\varphi)(\sin\varphi)^{-1}d\varphi.$$

Kadangi $dt = \frac{ds}{v_\tau} = -\gamma^{-1}u(\sin\varphi)^{-1}d\varphi$, $dx_1 = v_\tau\cos\varphi dt = -\gamma^{-1}u^2\cot\varphi d\varphi$, $dx_2 = v_\tau\sin\varphi dt = -\gamma^{-1}u^2 d\varphi$, tai

$$t = -\frac{1}{\gamma}\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{u(\varphi)d\varphi}{\sin\varphi}, \; x_1 = x_{10} - \gamma^{-1}\int_{\varphi_0}^{\varphi}u^2(\varphi)\cot\varphi d\varphi,$$

$$x_2 = x_{20} - \gamma^{-1}\int_{\varphi_0}^{\varphi}u^2(\varphi)d\varphi.$$

Ištirsime atvejį, kai $a = const$. Tada (3.14) uždavinys turi sprendinį $v_\tau = u(\varphi) = c(\sin\varphi)^{-1}\tan^a\frac{\varphi}{2}$, $0 < c = v_0\sin\varphi_0\cot^a\frac{\varphi}{2}$. Pakeitę φ kintamuoju $z = \tan\frac{\varphi}{2}$, randame

$\sin\varphi = \frac{2z}{1+z^2}$, $\cos\varphi = \frac{1-z^2}{1+z^2}$, $d\varphi = \frac{2dz}{1+z^2}$.

Todėl

$$v_\tau = \frac{c}{2}z^{\alpha-1}(1+z^2),\ s = -\frac{c^2}{4\gamma}\int\limits_{z_0}^{z} z^{2a-3}(1+z^2)^2dz = -\frac{c^2}{4\gamma}(\kappa_1(z)-\kappa_1(z_0)),$$

$$z_0 = \tan\frac{\varphi_0}{2},$$

$$\kappa_1(z) = \begin{cases} \frac{z^{2a-2}}{2a-2} + \frac{z^{2a}}{a} + \frac{z^{2a+2}}{2a+2},\ a \neq 1, \\ \ln z + z^2 + \frac{1}{4}z^4,\ a = 1, \end{cases}$$

$$t = -\frac{c}{2\gamma}\int\limits_{z_0}^{z} z^{a-2}(1+z^2)dz = -\frac{c}{2\gamma}(\kappa_2(z)-\kappa_2(z_0)),$$

$$\kappa_2(z) = \begin{cases} \frac{z^{a-1}}{a-1} + \frac{z^{a+1}}{a+1},\ a \neq 1, \\ \ln z + \frac{1}{2}z^2,\ a = 1, \end{cases}$$

$$x_1 = x_{10} - \frac{c^2}{4\gamma}\int\limits_{z_0}^{z} z^{2a-3}(1-z^4)dz = x_{10} - \frac{c^2}{4\gamma}(\kappa_3(z)-\kappa_3(z_0)),$$

$$\kappa_3(z) = \begin{cases} \frac{z^{2a-2}}{2a-2} - \frac{z^{2a+2}}{2a+2},\ a \neq 1, \\ \ln z - \frac{1}{4}z^4,\ a = 1, \end{cases}$$

$$x_2 = x_{20} - \frac{c^2}{2\gamma}\int\limits_{z_0}^{z} z^{2a-2}(1+z^2)dz = x_{20} - \frac{c^2}{2\gamma}(\kappa_4(z)-\kappa_4(z_0)),$$

$$\kappa_4(z) = \begin{cases} \frac{z^{2a-1}}{2a-1} + \frac{z^{2a+1}}{2a+1},\ a \neq \frac{1}{2}, \\ \ln z + \frac{1}{2}z^2,\ a = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Kai $a > 1$, o $z \to 0$, tai $\varphi \to 0$, $s \to \frac{c^2}{4\gamma}\kappa_1(z_0)$, $t \to t_1 = \frac{c}{2\gamma}\kappa_2(z_0)$, $x_1 \to x_{11} = x_{10} + \frac{c^2}{4\gamma}\kappa_3(z_0)$, $x_2 \to x_{21} = x_{20} + \frac{c^2}{2\gamma}\kappa_4(z_0)$, $v_\tau \to 0$. Todėl padėtyje (x_{11}, x_{21}) taškas sustoja. Jeigu sustojus bus patenkintos rimties sąlygos, tai taškas nejudės $\forall t \geq t_1$. Ištirsime tai. Jeigu taškas yra parimęs, kai $t \geq t_1$, tai jį veikia jėgos $P, R^s_{x_1}x_1^\circ, R^s_{x_3}x_3^\circ$, kurios susietos rimties lygtimi $0 = P + R^s$, $R^s = R^s_{x_1}x_1^\circ + R^s_{x_3}x_3^\circ$. Iš čia gauname $R^s_{x_1} = -mg\sin\beta$, $R^s_{x_3} = mg\cos\beta$. Todėl $|R^s_{x_1}| = mg\cos\beta\tan\beta = R^s_{x_3}\tan\beta = R^s_{x_3}\frac{\alpha_d}{a} < \alpha_s R^s_{x_3}$, nes $\alpha > 1$, $\alpha_d \leq \alpha_s$. Todėl pagal (1.9) taškas nepradės judėti.

Kai $a = 1$, o $z \to 0$, tai $\varphi \to 0$, $v_\tau \to \frac{c}{2}$, $s \to \infty$, $t \to \infty$, $x_1 \to \infty$, $x_2 \to x_{21}$.

Kai $\frac{1}{2} < a < 1$, o $z \to 0$, tai $\varphi \to 0$, $v_\tau \to \infty$, $s \to \infty$, $t \to \infty$, $x_1 \to \infty$, $x_2 \to x_{21}$.

Todėl, kai $\frac{1}{2} < a \leq 1$, trajektorija turi asimptotę $x_2 = x_{21}$.

Kai $0 < a \leq \frac{1}{2}$, o $z \to 0$, tai $\varphi \to 0$ o v_τ, s, t, x_1, x_2 neaprėžtai didėja.

Pastaba. Kadangi R_{x_3} nekeičia ženklo visiems $t \geq 0$, tai šio uždavinio sprendinys yra ir uždavinio, kai plokštuma $x_3 = 0$ nevaržo taško judėjimo x_3^0 kryptimi, sprendinys.

Atvejis, kai $\varphi(0) = k\pi$, $k = 0, 1$. Iš (3.12) gauname uždavinį

$$x_1^{''} = \gamma(1 - a(|x_1|)\frac{x_1^{'}}{|x_1^{'}|}),\ x_1(0) = x_{10},\ x_1^{'}(0) = v_0,\ t > 0.$$

Reikalausime, kad šis uždavinys turėtų vienintelį sprendinį.

Ištirsime atvejį, kai $v_0 > 0$. Tada $x_1^{''} = \gamma(1 - a(x_1^{'}))$, $x_1(0) = x_{10}$, $x_1^{'}(0) = v_0$, nes $t = 0$ aplinkoje iš dešinės tolydi funkcija $x^{'} > 0$.

Kai $a(v_0) = 1$, tai dėl sprendinio vienaties gauname, kad $x_1^{'} = v_0$, $x_1 = v_0 t + x_{10}$, $t \geq 0$.

Kai $a(v_0) < 1$, tai $dt = \gamma^{-1}\frac{dx_1^{'}}{1-a(x_1^{'})}$, $dx_1 = x_1^{'}dt$. Todėl

$$t = \gamma^{-1}\int\limits_{v_0}^{x_1^{'}} \frac{ds}{1-a(s)},\ x_1 = x_{10} + \gamma^{-1}\int\limits_{v_0}^{x_1^{'}} \frac{sds}{1-a(s)}.$$

$a(s)$ yra monotoniškai mažėjanti funkcija. Todėl $a(s) \leq a(v_0) < 1$, kai $s \geq v_0$. Vadinasi $t \to \infty$, $x_1 \to \infty$, kai $x_1^{'} \to \infty$.

Kai $a(v_0) > 1$, tai

$$t = \gamma^{-1}\int\limits_{x_1^{'}}^{v_0} \frac{ds}{a(s)-1},\ x_1 = x_{10} + \gamma^{-1}\int\limits_{x_1^{'}}^{v_0} \frac{sds}{a(s)-1}.$$

Kadangi $a(s) \geq a(v_0) > 1$, kai $s \leq v_0$, tai $t \to t_1 = \gamma^{-1}\int\limits_0^{v_0} \frac{ds}{a(s)-1}$, $x_1 \to x_{11} = x_{10} + \gamma^{-1}\int\limits_0^{v_0} \frac{sds}{a(s)-1}$, kai $x_1^{'} \to 0$ Todėl taškas sustos. Kadangi sustojus $a(0) > a(v_0) > 1$, o $R_{x_1}^s = R_{x_3}^s\frac{\alpha_d(0)}{a(0)} < \alpha_d(0)R_{x_3}^s = \alpha_s R_{x_3}^s$, tai pagal (1.9) taškas nepradės judėti visiems $t \geq t_1$.

Ištirsime atvejį, kai $v_0 < 0$. Tada $x_1^{''} = \gamma(1+a(|x_1^{'}|))$, $x_1(0) = x_{10}$, $x_1^{'}(0) = v_0$. Kadangi $x_1^{''}|_{t=0} > 0$, o $v_0 < 0$, tai judėjimas yra lėtėjantis. Be to,

$$t = \gamma^{-1}\int\limits_{v_0}^{x_1^{'}} \frac{ds}{a(|s|)+1},\ x_1 = x_{10} + \gamma^{-1}\int\limits_{v_0}^{x_1^{'}} \frac{sds}{a(|s|)+1},\ v_0 < 0.$$

Momentu $t_1 = \gamma^{-1}\int\limits_{v_0}^{0} \frac{ds}{a(|s|)+1}$ taškas sustos padėtyje

$$x_{11} = x_{10} + \gamma^{-1}\int\limits_{v_0}^{0} \frac{ds}{a(|s|)+1} < x_{10}.$$

Jei taškas nejuda, kai $t \geq t_1$, tai galioja lygybė $R^s_{x_1} = R^s_{x3}\frac{\alpha_s}{a(0)}$. Kai $a(0) > 1$, tai remdamiesi (1.9), darome išvadą, kad judėjimas neprasidės. Kai $a(0) < 1$, tai $|R^s_{x_1}| > \alpha_s|R^s_{x_3}|$. Todėl pagal (1.9) $x_1(t) \neq 0$, kai $t \geq 0$. Bet $x_1^{''}|_{t=t_1} = \gamma(1 - a(0)) > 0$. Todėl taškas pradės judėti vektoriaus x_1^0 kryptimi be pradinio greičio. Šio uždavinio sprendimas jau ištirtas. Ištirsime atvejį, kai $a(0) = 1$. Kadangi $x^{'}(t_1) = 0$, $a(|z^{'}(t_1)|) = a(0) = 1$, tai uždavinys $x_1^{''} = \gamma(1 - a(|x_1^{'}|))$, $x_1(t_1) = x_{11}$, $x_1^{'}(t_1) = 0$ dėl vienaties turi sprendinį $x_1 = x_{11}$, $t \geq t_1$. Vadinasi taškas nejudės.

Jis pradės judėti tik tada, kai $a(0) < 1$.

Reliatyvusis taško judėjimas

1. Reliatyviojo judėjimo ir reliatyviosios rimties lygtys

Absoliutusis suvaržytojo taško judėjimas inercinės atskaitos sistemos atžvilgiu aprašomas lygtimi

$$mw = F + R, \tag{1.1}$$

čia w yra taško pagreitis inercinės sistemos atžvilgiu, kurią santykinai vadinsime nejudančia (absoliučiąja), o judėjimą jos atžvilgiu – absoliučiuoju. Be to, nagrinėsime kitą laisvai judančią atskaitos sitemą. Įrašę $w = w_{abs} = w_{kel} + w_{rel} + w_c$, $w_c = 2\omega \times v_{rel}$ į (1.1), gauname antrosios Niutono aksiomos reliatyviąją formą:

$$mw_{rel} = F + R + I_{kel} + I_c,\ I_{kel} = -mw_{kel},\ I_c = -mw_c, \tag{1.2}$$

Vektoriai I_{kel} ir I_c vadinami keliamąja (nešamąja) ir Korjolio inercijos jėgomis.

Kai $v_{rel} = 0$, $w_{rel} = 0$, sakome, jog taškas yra reliatyviojoje rimtyje. Iš (1.2) išvedame reliatyviosios rimties lygtį:

$$F + R + I_{kel} = 0. \tag{1.3}$$

Padauginę (2) skaliariškai iš v_{rel}, gauname

$$mv_{rel} \cdot w_{rel} = (F + R + I_{kel}) \cdot v_{rel}.$$

Bet $v_{rel} \cdot w_{rel} = v_{rel} \cdot (w_{rel} + \omega \times v_{rel}) = v_{rel} \cdot \frac{d}{dt}v_{rel} = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}|v_{rel}|^2$, $m = const$. Iš čia gauname kinetinės energijos kitimo dėsnio reliatyviąją formą:

$$\frac{d}{dt}\frac{m}{2}|v_{rel}|^2 = (F + R + I_{kel}) \cdot v_{rel}$$

2. Reliatyvusis taško judėjimas besisukančios Žemės atžvilgiu

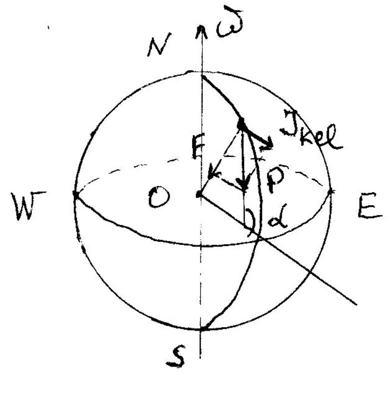
Tarkime, nejudančioji (absoliučioji) sistema yra heliocentrinė, t.y. pradžia yra Saulės centre, o ašys nukreiptos į "nejudančias" žvaigždes. Judančią sistemą standžiai susiekime su Žeme. Pastaroji sistema nėra inercinė, nes Žemė sukasi apie savo ašį. Be to, absoliučios sistemos atžvilgiu Žemė skrieja orbita netiesiaeigiai ir netolygiai. Tačiau žymiai mažesniu už metus laikotarpiu Žemės centro judėjimą orbitos lanku apytiksliai galima manyti esant tiesiaeigiu ir tolygiu. Todėl toliau tirsime tik Žemės sukimosi apie ašį poveikį reliatyviajai taško rimčiai bei jo reliatyviajam judėjimui. Be to tarsime, jog tašką veikia tik Žemės traukos jėga.

Reliatyvioji rimtis. Sunkio jėga. Tarkime, Žemės sukimosi ašis ir jos kampinio greičio vektorius ω yra pastovūs. Tada $|\omega| = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600 s} \approx 7.27\, 10^{-5} s^{-1}$. Kadangi $\omega = const$, o Žemės centro pagreitis lygus 0, tai $w_{kel} = -|\omega|^2 \rho$, $\rho \cdot \omega = 0$. Iš čia ir (1.3) lygties gauname

$$-R = F + I_{kel} = m(-\frac{\mu r^\circ}{R_0^2} + |\omega|^2 \rho);$$

čia R_0 – Žemės spindulys, o μ – Gauso konstanta. Priešingą Žemės paviršiaus reakcijai vektorių

$$P = F + I_{kel} \tag{2.1}$$



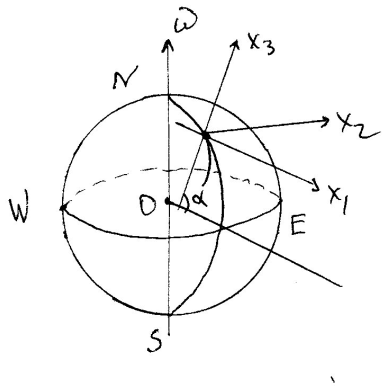
16 pav.

vadinsime sunkio jėga. Iš 16 brėžinio matome, kad $(-P)$ su pusiaujo plokštuma sudaro kampą $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$ ir ne visuose Žemės paviršiaus taškuose nukreiptas į Žemės centrą.

Raidės N, S, W, E 16–18 brėžinyje žymi šiaurę, pietus, vakarus ir rytus. Sunkio jėgos kryptį vadinsime vietos vertikale, o jai statmeną plokštumą – horizontaliąja plokštuma.

Laisvasis taško kritimas į besisukančią Žemę. Tarkime, jog taškas krinta vakuume iš nedidelio aukščio be pradinio greičio. Tada galima apytiksliai sakyti, kad $P = const$, $|P| = mg$.

Tegul judančios Dekarto atskaitos sistemos pradžia yra pradinėje taško padėtyje, x_3 ašis nukreipta priešingai sunkio jėgai, x_1 – meridiano plokštumoje į pietus, o x_2 – statmena meridiano plokštumai ir nukreipta į rytus.



17 pav.

Taip apibrėžta atskaitos sitema yra standžiai susieta su Žeme (17 pav.). (1.2) lygtys ir pradinės sąlygos yra tokios:

$$\begin{cases} m\frac{d}{dt}\frac{dr}{dt} = -mgx_3^0 - 2m\omega \times \frac{dr}{dr}, \\ r(0) = 0,\ \frac{dr}{dr}\mid_{t=0} = 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Iš čia remdamiesi tuo, kad $\omega = |\omega|(-\cos\alpha x_1^\circ + \sin\alpha x_3^\circ)$, gauname

$$\begin{cases} x_1'' = 2|\omega|\sin\alpha x_2', \\ x_2'' = -2|\omega|(x_1'\sin\alpha + x_3'\cos\alpha), \\ x_3'' = -g + 2|\omega|x_2'\cos\alpha. \end{cases} \tag{2.3}$$

$$x_k(0) = 0,\ x_k'(0) = 0,\ k = 1, 2, 3.$$

Pastebėsime, kad šiaurės pusrutulyje α yra teigiamas, o pietų – neigiamas. Iš (2.3) randame funkcijas

$$x_1' = 2|\omega|\sin\alpha x_2,\ x_3' = -gt + 2|\omega|\cos\alpha x_2, \tag{2.4}$$

kurias įrašę į (2.3) sistemos antrąją lygtį, gauname uždavinį

$$x_2'' = -4|\omega|^2 x_2 + 2|\omega|gt\cos\alpha,\ x_2(0) = 0, x_2'(0) = 0,$$

turintį sprendinį

$$x_2 = \frac{g\cos\alpha}{4|\omega|^2}(2|\omega|t - \sin 2|\omega|t) = \frac{|\omega|}{3}gt^3\cos\alpha + \dots . \tag{2.5}$$

Iš (2.4) ir (2.5) gauname

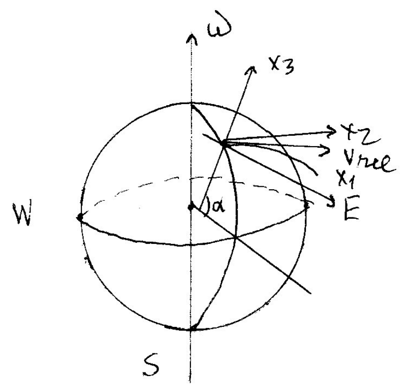
$$x_1 = \frac{g\sin\alpha\cos\alpha}{2|\omega|}\Big(|\omega|t^2 + \frac{1}{2|\omega|}(\cos 2|\omega|t - 1)\Big) = \frac{|\omega|^2}{6} g\sin\alpha\cos\alpha t^4 + ..., \quad (2.6)$$

$$x_3 = -\frac{gt^2}{2} + \frac{g\cos^2\alpha}{2|\omega|}\Big(|\omega|t^2 + \frac{1}{2|\omega|}(\cos 2|\omega|t - 1)\Big)$$

$$= -\frac{gt^2}{2} + |\omega|^2\frac{g\cos^2\alpha t^4}{6} + \dots . \quad (2.7)$$

Bet $|\omega t|$ yra mažas dydis. Todėl, krisdamas be pradinio pagreičio iš nedidelio aukščio į besisukančią Žemę, nuo vietos vertikalės taškas nukrypsta į pusiaujo rytus. Į rytus nukrypsta daugiau, negu į ekvatorių. Šio nukrypimo priežastis yra Korjolio inercijos jėga.

Taško judėjimas idealiąja horizontaliąja plokštuma, standžiai susieta su besisukančia Žeme. Tarkime, kad d yra taško nueitas atstumas trajektorija per baigtinį laikotarpį $t_1 - t_0$, R_0 – Žemės spindulys, o d/R_0 – mažas dydis. Tada apytiksliai galima sakyti, kad $P = const$. Judančios atskaitos sistemos pradžią patalpinkime pradinėje taško padėtyje (18 pav.), o ašis nukreipkime taip pat, kaip ir laisvojo kritimo uždavinyje.



18 pav.

Plokštuma Ox_1x_2 yra horizontali ir ideali. Ištirsime kokybinį judėjimo pobūdį. Taško judėjimą aprašo lygtis $mw_{rel} = P + R - 2m|w|(-\cos\alpha x_1^\circ \times v_{rel} + \sin\alpha x_3^\circ \times v_{rel})$, kurioje vektoriai $w_{rel}, x_3^\circ \times v_{rel}$ yra polkštumoje Ox_1x_2, o $P, R, x_1^\circ \times v_{rel}$ yra statmeni jai. Todėl

$$w_{rel} = -2|\omega|\sin\alpha x_3^\circ \times v_{rel}, \quad (2.8)$$

$$0 = P + R + 2m|\omega|\cos\alpha x_1^\circ \times v_{rel}. \quad (2.9)$$

Lygybė (2.8) rodo, jog šiaurės pusrutulyje ($\alpha > 0$) pagreitis nuo greičio krypties nukreiptas į dešinę, o pietų – į kairę pusę. Be to, pagal (2.8) $0 = v_{rel}\cdot w_{rel} = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}|v_{rel}|^2$. Todėl $|v_{rel}| = const$. Tada $w_{rel} = \rho_{rel}^{-1}|v_{rel}|^2 v_{rel}^\circ$. Iš čia ir (2.8) randame

$\rho_{rel} = |v_{rel}|/2|\omega||\sin\alpha| = const.$

Kadangi ρ_{rel} yra didelis, tai trajektorijos (apskritimo) lankas yra artimas tiesės atkarpai. Kai O yra ekvatoriuje, tai $\alpha = 0$. Tada taškas brėžia tiesės atkarpą.

Taškų sistemos dinamika

1. Pagrindiniai absoliučiojo judėjimo dėsniai

Dinaminiai matai ir laisvosios sistemos judėjimo lygtys. Kai sistemos taškų judėjimo nevaržo jokie ryšiai, ji vadinama laisvąja. Priešingu atveju - suvaržytąja. Bendrieji suvaržytosios sistemos judėjimo lygčių sudarymo principai bei jų sprendimo metodai nagrinėjami analizinėje mechanikoje.

Tegul $\mathcal{N}, m_k, r_k, w_k, F_k, R_k$, $k = \overline{1, \mathcal{N}}$, yra sistemos taškų skaičius, k-ojo taško masė, radiusas vektorius nejudančio taško O atžvilgiu, absoliutieji greitis ir pagreitis, aktyvioji ir reakcijos jėgos. Masę m_k, $k = \overline{1, \mathcal{N}}$, manysime esant pastovia. Remdamiesi greičio ir pagreičio apibrėžimu ir antrąją Niutono aksioma, užrašome laisvosios sistemos judėjimo lygtis:

$m_k r_k^{''} = F_k(t, r_1, ..., r_{\mathcal{N}}, r_1^{'}, ..., r_{\mathcal{N}}^{'})$, $k = \overline{1, \mathcal{N}}$.

Sistemos judėjimo kiekio vektorių (impulsą) $Q = \sum\limits_{k=1}^{N} m_k v_k$, kinetinį momentą O taško atžvilgiu $G_0 = \sum\limits_{k=1}^{N} r_k \times m_k v_k$ ir kinetinę energiją $E = \frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{N} m_k |v_k|^2$ vadinsime sistemos dinaminiais matais. Vektoriaus r_k pradžia yra taške O.

Suvaržytosios sistemos judėjimo lygčių absoliučioji forma. Remdamiesi ryšių aksioma užrašome lygtį

$$m_k w_k = F_k + R_k. \tag{1.1}$$

Išvesime matų Q, G_0, E kitimą aprašančius dėsnius (teoremas). Vektorių F_k galima užrašyti taip:

$$F_k = F_k^e + F_k^i; \qquad 1.2$$

čia F_k^e ir F_k^i yra k-ąjį tašką veikiančios išorinė ir vidinė jėgos. Sistemos taškų tarusavio sąveikos jėgas vadinsime vidinėmis jėgomis. Jėgos, kuriomis nepriklausantys sistemai taškai veikia duotosios sistemos taškus, vadinamos išorinėmis. Tik vidinių jėgų veikiamą sistemą vadinsime uždarąja (izoliuotąja) sistema. Tarkime, kad F_{ks}^i yra jėga, kuria s-asis taškas veikia k-ąjį tašką, o $F_{ss}^i = 0$. Tada

$$F_k^i = \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} F_{ks}^i. \tag{1.3}$$

Vektorių $\sum\limits_k (F_k + R_k)$ vadinsime svarbiausiuoju (pagrindiniu, suminiu) sistemą veikiančių jėgų vektoriumi.

Judėjimo kiekio vektoriaus kitimo teorema (dėsnis). Įrašę (1.1) į lygybę

$\frac{dQ}{dt} = \sum\limits_k m_k w_k$

ir panaudoję (1.2) ir (1.3), gauname

$$\frac{dQ}{dt} = \sum_k (F_k^e + R_k) + \sum_k F_{ks}^i. \tag{1.4}$$

Bet

$$\sum_k F_{ks}^i = \sum_{k<s} F_{ks}^i + \sum_{k>s} F_{ks}^i = \sum_{k<s} F_{ks}^i + \sum_{s>k} F_{sk}^i = \sum_{s>k} (F_{ks}^i + F_{sk}^i) = 0;$$

čia sumoje $\sum\limits_{k>s} F_{ks}^i$, pažymint indeksus priešingai, pakeičiama sumavimo tvarka, o pagal trečiąją Niutono aksiomą $F_{ks}^i + F_{sk}^i = 0$. Iš čia ir (1.4) gauname judėjimo kiekio vektoriaus kitimo dėsnį:

$$\frac{dQ}{dt} = \sum_k (F_k^e + R_k) \tag{1.5}$$

t.y., judėjimo kiekio išvestinė pagal laiką yra lygi sistemą veikiančių išorinių ir reakcijos jėgų sumai.

Kinetinio momento kitimo teorema (dėsnis). Įrašę (1.1) į lygybę

$\frac{dG_0}{dt} = \sum\limits_k r_k \times m_k w_k$

ir panaudoję (1.2), (1.3), gauname

$$\frac{dG_0}{dt} = \sum_k r_k \times (F_k^e + R_k) + \sum_{k,s} r_k \times F_{ks}^i. \tag{1.6}$$

Bet

$$\begin{aligned}\sum_{k,s} r_k \times F_{ks}^i &= \sum_{k<s} r_k \times F_{ks}^i + \sum_{k>s} r_k \times F_{ks}^i = \sum_{k<s} r_k \times F_{ks}^i + \sum_{s>k} r_s \times F_{sk}^i \\ &= \sum_{k<s} (r_k - r_s) \times F_{ks}^i = 0;\end{aligned} \tag{1.7}$$

čia sumoje $\sum\limits_{s>k} r_s \times F_{sk}^i$, pažymint indeksus priešingai, pakeičiama sumavimo tvarka, o vektoriai $r_k - r_s$, F_{ks}^i yra kolinearūs. Iš (1.6) bei (1.7) gauname kinetinio momento kitimo dėsnį (teoremą):

$$\frac{dG_0}{dt} = \sum_k r_k \times (F_k^e + R_k), \tag{1.8}$$

t.y. kinetinio momento O taško atžvilgiu išvestinė pagal laiką yra lygi išorinių ir rakcijos jėgų momentų O taško atžvilgiu sumai. Vektorių $\sum\limits_k r_k \times (F_k^e + R_k)$

vadinsime svarbiausiuoju (suminiu, pagrindiniu) taškų sistemą veikiančių jėgų momentu O taško atžvilgiu.

Kinetinės energijos kitimo teorema (dėsnis). Įrašę (1.1) į lygybę

$$\frac{dE}{dt} = \sum_k m_k v_k \cdot w_k$$

gauname kinetinės energijos kitimo dėsnį (teoremą):

$$\frac{dE}{dt} = \sum_k (F_k + R_k) \cdot v_k, \tag{1.9}$$

kurį galima užrašyti taip:

$$dE = \sum_k (F_k + R_k) \cdot dr_k, \tag{1.10}$$

nes $dr_k = v_k dt$. Dydžiai $\sum_k (F_k + R_k) \cdot v_k$, $\sum_k (F_k + R_k) \cdot dr_k$ yra sistemą veikiančių jėgų suminė galia ir suminis elementarusis darbas. Todėl kinetinės energijos išvestinė pagal laiką yra lygi sistemą veikiančių jėgų suminei galiai, o jos diferencialas lygus sistemą veikiančių jėgų suminiam elementariajam darbui.

Parodysime, kad standžiosios sistemos atveju $\sum_k F_k^i \cdot dr_k = 0$. Pažymėję $r_k - r_s = \rho_{ks}$, gausime

$$\sum_k F_k \cdot dr_k = \sum_k F_k^e \cdot dr_k + \sum_k F_k^i \cdot dr_k,$$

$$\begin{aligned}\sum_k F_k^i \cdot dr_k &= \sum_{k<s} F_{ks}^i \cdot dr_k + \sum_{k>s} F_{ks}^i \cdot dr_k = \sum_{k<s} F_{ks}^i \cdot dr_k + \sum_{s>k} F_{sk}^i \cdot dr_s \\ &= \sum_{k<s} F_{ks}^i \cdot d\rho_{ks} = \sum_{s>k} F_{ks}^i \cdot (\rho_{ks}^\circ d|\rho_{ks}| + |\rho_{ks}| d\rho_{ks}^\circ) = \sum_{s>k} F_{ks}^i \cdot \rho_{ks}^\circ d|\rho_{ks}|;\end{aligned} \tag{1.11}$$

čia sumoje $\sum_{k>s} F_{sk}^i \cdot dr_k$, pažymint indeksus priešingai, pakeičiama sumavimo tvarka. Be to, pasinaudota tuo, kad $F_{sk}^i = -F_{ks}^i$, $\rho_{ks} \cdot d\rho_{ks}^\circ = 0$, o F_{ks}^i ir ρ_{ks}° yra kolinearūs vektoriai. Standžiosios sistemos atveju $|\rho_{ks}| = const$. Todėl pagal (1.11) $\sum_k F_k^i \cdot dr_k = 0$, o kinetinės energijos kitimo dėsnis yra toks:

$$dE = \sum_k (F_k^e + R_k) \cdot dr_k \tag{1.12}$$

arba toks:

$$\frac{dE}{dt} = \sum_k (F_k^e + R_k) \cdot v_k \tag{1.13}$$

Svarbiausieji vektorius ir momentas bei suminė galia vadinami taško mechaninės sąveikos su jį supančiais objektais matas.

Pirmieji integralai. Kai vektoriai $F_k^e + R_k$, $k = \overline{1, N}$, yra kolinearūs kuriam nors pastoviosios krypties vektoriui ρ°, iš (1.5) bei (1.8) gauname integralus

$$Q \cdot p^\circ = const,\ G_0 \cdot \rho^\circ = const,\ p^\circ \cdot \rho^\circ = 0, p^\circ = const.$$

Iš (1.5) gauname uždarosios sistemos integralus

$$Q = c_1,\ \sum_k m_k r_k = c_1 t + c_2,\ c_k = const.$$

Kai $\sum_k R_k \cdot dr_k = 0$, $F_k^e = \nabla_{r_k} U^e(r_1, ..., r_N)$, $F_{ks}^i = f_{ks}^i(|\rho_{ks}|)\rho_{ks}^\circ$, iš (1.10) bei (1.11)išvedame integralą

$$E - U = const,\ U = U^e + U^i,\ U^i = \sum_{s>k} \int f_{ks}^i(|\rho_{ks}|)\rho_{ks}^\circ, \tag{1.15}$$

nes $\sum_k F_k^e \cdot dr_k = dU^e$, $\sum_k F_k^i \cdot dr_k = dU^i$, čia U^e, f_{ks}^i, U^i yra skaliarinės funkcijos. Funkcija $(-U)$ yra sistemos potencinė energija.

Dviejų taškų sistemos judėjimas. Dangaus mechanikoje šis uždavinys vadinamas dviejų kūnų uždaviniu. Tarkime, jog sistema juda veikiama jėgų $F_{sk}^i = f_{sk}^i(|\rho_{ks}|)\rho_{ks}^\circ$, $\rho_{sk} = r_s - r_k$, $f_{sk}^i = f_{ks}^i$, $k = 1, 2$. Tuomet judėjimą aprašo lygtys

$$m_1 r_1^{''} = f_{12}^i(|\rho_{12}|)\rho_{12}^\circ,\ m_2 r_2^{''} = f_{21}^i(|\rho_{12}|)\rho_{21}^\circ. \tag{1.16}$$

Iš čia gauname lygtį

$$\tilde{m}\rho_{12}^{''} = f_{12}^i(|\rho_{12}|)\rho_{12}^\circ,\ \tilde{m} = \tfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \tag{1.17}$$

Šią lygtį galima laikyti $\tilde{m}$ masės taško judėjimo centrinės jėgos lauke lygtimi. Kadangi sistema uždara, tai ji turi integralą

$$m_1 r_1 + m_2 r_2 = u_1,\ u_1 = c_1 t + c_2,\ c_k = const,\ k = 1, 2. \tag{1.18}$$

Kai žinomas (1.17) lygties sprendinys

$$\rho_{12} = r_1 - r_2 = u_2(t), \tag{1.19}$$

iš (1.18) bei (1.19) randame

$$r_1 = (m_1 + m_2)^{-1}(m_2 u_2 + u_1),\ r_2 = (m_1 + m_2)^{-1}(u_1 - m_1 u_2).$$

2. Kenigo ašys ir pagrindinės reiatyviojo judėjimo teoremos

Masių centras ir Kenigo formulės. Tašką C, kurio radiusas vektorius

$$r_c = m^{-1} \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} m_k r_k,\ m = \sum_k m_k, \tag{1}$$

vadinsime sistemos masių centru, o m - sistemos mase. Dažnai C vadinamas inercijos centru. Vektoriai $v_c = r_c^{'}$, $w_c = v_c^{'} = r_c^{''}$ yra taško C greitis ir pagreitis. Iš (1) gauname $v_c = m^{-1} \sum_{k=1} m_k v_k$, $w_c = m^{-1} \sum_k m_k w_k$. (2)

Įrašę $r_k = r_c + r_k^{\star}$ į (1) gauname lygybę $mr_c = \sum_k m_k r_k = mr_c + \sum_k m_k r_k^{\star}$, iš kurios darome išvadą, jog $\sum_k m_k r_k^{\star} = 0$. (3)

Iš čia gauname $\sum_k m_k \frac{dr_k^{\star}}{dt} = 0$. (4)

Tarkime, kad taškas C yra slenkamai judančios stačiakampės Dekarto atskaitos sistemos pradžia, o jos baziniai vektoriai z_k° yra lygiagretūs nejudančios sistemos ortams x_k° . Taip judančias koordinačių ašis vadinsime Kenigo (Koenig S.) ašimis. Tada $v_k^{\star} = \frac{dr_k^{\star}}{dt}$ yra k–ojo taško reliatyvusis, o v_c keliamasis greičiai. Remdamiesi (3), (4) lygybėmis, gauname Kenigo formules:

$$Q = mv_c,\ G_0 = r_c \times mv_c + G_c^{\star},\ E = \tfrac{1}{2} m |v_c|^2 + E_c^{\star}, \tag{5}$$

$$G_c^{\star} = \sum_k r_k^{*} \times m_k v_k^{*},\ E_c^{\star} = \sum_k m_k |v_k^{*}|^2, \tag{6}$$

Tarkime, kad sistemos masė sutelkta taške C. Tada iš (5) bei (6) darome išvadą: 1) sistemos judėjimo kiekio vektorius lygus masių centro C judėjimo kiekio vektoriui; 2) sistemos kinetinis momentas O taško atžvilgiu yra lygus sumai masių centro kinetinio momento taško O atžvilgiu ir sistemos kinetinio momento C taško atžvilgiu, jai judant reliatyviai Kenigo ašių atžvilgiu; 3) sistemos kinetinė energija lygi sumai masių centro C kinetinės energijos ir sistemos kinetinės energijos, jai judant reiatyviai Kenigo ašių atžvilgiu. Užrašysime $v_c, G_c^{\star}$ ir $E_c^{\star}$ kitimo dėsnius

Masių centro judėjimo dėsnis. Įrašę (5) į (1.5), gauname taško C judėjimo dėsnį:

$$mw_c = \sum_k (F_k^e + R_k). \tag{7}$$

Pastaba. Remiantis (7) lygtimi taškui C galima užrašyti pagrindines teoremas. Šiuo atveju F_k^e ir R_k veikia tašką C.

$G_c^{\star}$ **kitimo dėsnis.** Įrašę į (1.8) vektorių

$$\frac{dG_0}{dt} = r_c \times mw_c + \frac{dG_c^{\star}}{dt}$$

ir panaudoję (7) formulę, gauname vektoriaus $G_c^{\star}$ kitimo dėsnį:

$$\frac{d}{dt} G_c^{\star} = \sum_k r_k^{\star} \times (F_k^e + R_k). \tag{8}$$

$E_c^\star$ **kitimo dėsnis.** Įrašę į (1.10) lygybę diferencialą

$$dE = v_c \cdot mw_c dt + dE_c^\star$$

ir panaudoję (7) formulę, gauname dydžio $E_c^\star$ kitimo dėsnį:

$$dE_c^\star = \sum_k (F_k + R_k) \cdot dr_k. \tag{9}$$

Standžiojo kūno dinamika

1. Pagrindiniai absoliučiojo judėjimo dėsniai

Dinaminiai matai. Tarkime, kad standusis kūnas juda nejudančios atskaitos sistemos $Ox_1x_2x_3$ atžvilgiu. Pažymėkime jo masę, judėjimo kiekio vektorių, kinetinį momentą O taško atžvilgiu ir kinetinę energiją raidėmis $m(\tau), Q, G_0, E$, o jo tūrio elemento $\Delta\tau$ masę, judėjimo kiekio vektorių, kinetinį momentą O taško atžvilgiu ir kinetinę energiją raidėmis $\Delta m, \Delta Q, \Delta G_0, \Delta E$. Ribą $\rho(\tau) = \lim\limits_{\Delta\tau\to 0} \frac{\Delta m}{\Delta\tau}$ vadinsime kūno tankiu taške r. Iš čia gauname lygybę

$$\Delta m = \rho\Delta\tau + o(\Delta r). \tag{1}$$

Tegul elemento $\Delta\tau$ bet kurio taško absoliutusis greitis yra v. Tada

$$\Delta Q = v\Delta m + o(\Delta\tau),\ \Delta G_0 = r \times v\Delta m + o(\Delta\tau),$$

$$\Delta E = \tfrac{1}{2}|v|^2\Delta m + o(\Delta\tau). \tag{2}$$

Iš čia ir (1) gauname lygybes

$$\Delta Q = \rho v\Delta\tau + o(\Delta\tau),\ \Delta E = \tfrac{1}{2}|v|^2\rho\Delta\tau + o(\Delta\tau). \tag{3}$$

o iš (2) bei (3) - formulę

$$\Delta G_0 = r \times \rho v\Delta\tau + o(\Delta\tau). \tag{4}$$

Dešiniųjų (1), (3), (4) lygybių dalių pagrindiniai dėmenys yra atitinkamų funkcijų diferencialai. Todėl

$$dm = \rho d\tau,\ dQ = \rho v d\tau,\ dG_0 = r \times \rho v d\tau,\ dE = \tfrac{1}{2}\rho|v|^2 d\tau.$$

Vadinasi,

$$m = \int_\tau \rho d\tau,\ Q = \int_\tau \rho v d\tau,\ G_0 = \int_\tau r \times \rho v d\tau,\ E = \int_\tau \tfrac{1}{2}\rho|v|^2 d\tau. \tag{5}$$

Dydžiai Q, G_0, E yra standžiojo kūno dinaminiai matai. Kai τ yra paviršius arba kreivė, tai $d\tau$ yra paviršiaus arba lanko elementas.

Jėgos, jų momentai ir galia. Standųjį kūna gali veikti išorinės tūrio, paviršiaus ir koncentruotosios (taškinės, arba sutelktosios) jėgos. Proporcingos tūriui (masei) jėgos vadinamos tūrio jėgomis. Proporcingos paviršiaus dydžiui jėgos vadinamos paviršiaus jėgomis, o sutelktos viename taške jėgos vadinamos koncentruotomis (taškinėmis), arba sutelktosiomis jėgomis. Tūrio jėgų pavyzdžiu gali būti sunkio ir inercijos jėgos. Aplinkos, kurioje juda standusis kūnas, pasipriešinimo jėgos yra paviršiaus jėgos. Apibrėšime tūrio ir paviršiaus jėgų tankius. Tegul kūną τ veikia tūrio jėga F^τ, jo paviršių S - paviršiaus jėga F^s, o elementus $\Delta\tau$ ir ΔS - jėgos ΔF^τ ir ΔF^s. Vektorius

$$\lim_{\Delta\tau\to 0}(\Delta\tau)^{-1}\Delta F^\tau = \mathcal{F}(r), \ \lim_{(\Delta S\to 0)}(\Delta S)^{-1}\Delta F^s = p(r^s)$$

vadinsime tūrio ir paviršiaus jėgų tankiais (intensyvumais); čia r^s yra paviršiaus S taško radiusas vektorius. Iš čia gauname lygybes

$$\Delta F^\tau = \rho\mathcal{F}\Delta\tau + o(\Delta\tau), \ \Delta F^s = p\Delta S + o(\Delta S). \tag{6}$$

Todėl $dF^\tau = \rho\mathcal{F}d\tau$, $dF^s = pdS$. Vadinasi,

$$F^\tau = \int_\tau \rho\mathcal{F}d\tau, \ F^s = \int_S pdS. \tag{7}$$

Pažymėję koncentruotas jėgas F_k, $k = \overline{1, N_1}$ užrašysime jų svarbiausiąjį vektorių, svarbiausiąjį momentą O taško atžvilgiu ir galią:

$$F^\mathcal{K} = \sum_{k=1}^{N_1} F_k, \ M_0^\mathcal{K} = \sum_{k=1}^{N_1} r_k \times F_k, \ N^\mathcal{K} = \sum_{k=1}^{N_1} F_k \cdot v_k;$$

čia v_k yra sutelktosios jėgos veikiamo taško r_k absoliutusis greitis. Kūną τ ir jo paviršių S veikiančių išorinių jėgų momentus O taško atžvilgiu pažymėkime M_0^τ ir M_0^s. Elementus Δr ir ΔS veikiančių jėgų momentai O taško atžvilgiu yra lygūs

$$\Delta M_0^\tau = r \times \Delta F^\times + o(\Delta\tau), \ \Delta M_0^s = r^s \times \Delta F^s + o(\Delta S), \tag{8}$$

čia r^s yra elemento ΔS taško radiusas vektorius. Iš (6) bei (8) išvedame lygybes

$$\Delta M_0^\tau = r \times \rho\mathcal{F}\Delta\tau + o(\Delta\tau), \ \Delta M_0^s = r^s \times p\Delta S + o(\Delta S).$$

Todėl

$$dM_0^\tau = r \times \rho\mathcal{F}d\tau, \ dM_0^s = r^s \times pdS, \tag{9}$$

τ ir S veikiančių jėgų galią pažymėkime $\mathcal{N}^\tau$ ir $\mathcal{N}^s$. Elementus $\Delta\tau$ ir ΔS veikiančių jėgų galia $\Delta\mathcal{N}^\tau$ ir $\Delta\mathcal{N}^s$ yra

$$\Delta\mathcal{N}^\tau = v \cdot \Delta F^\tau + o(\Delta\tau), \ \Delta\mathcal{N}^s = v \cdot \Delta F^s + o(\Delta S); \tag{10}$$

čia v^s yra elemento ΔS taško r^s absoliutusis greitis. Įrašę (6) į (10), gauname

$$\Delta\mathcal{N}^\tau = v \cdot \rho\mathcal{F}\Delta\tau + o(\Delta\tau), \ \Delta\mathcal{N}^s = v \cdot p\Delta S + o(\Delta S)$$

Todėl $d\mathcal{N}^\tau = \rho v \cdot \mathcal{F}d\tau$, $d\mathcal{N}^s = v^s \cdot pdS$,

$$\mathcal{N}^\tau = \int_\tau v \cdot \rho \mathcal{F} d\tau, \; \mathcal{N}^s = \int_s v^s \cdot p dS. \tag{11}$$

Kai kūno judėjimas yra suvaržytas, jį veikia reakcijos jėgos ir jų momentai O taško atžvilgiu. Suminę reakcijos jėgą, suminį jų momentą ir suminę jų galią pažymėkime raidėmis $R, M_0^R, \mathcal{N}^R$.

Vektoriai $F = F^\tau + F^s + F^\mathcal{K} + R$, $M_0 = M_0^\tau + M_0^s + M_0^\mathcal{K} + M_0^R$ yra svarbiausiasis kūną veikiančių jėgų vektorius ir svarbiausiasis momentas O taško atžvilgiu, o $\mathcal{N} = \mathcal{N}^\tau + \mathcal{N}^s + \mathcal{N}^\mathcal{K} + \mathcal{N}^R$ yra kūną veikiančių jėgų suminė galia.

Pagrindiniai judėjimo dėsniai. Postuluosime lygybes

$$\tfrac{dQ}{dt} = F, \; \tfrac{dG_0}{dt} = M_0, \; \tfrac{dE}{dt} = \mathcal{N}, \tag{12}$$

kuriose

$$\begin{cases} Q = \int_\tau \rho v d\tau, \; G_0 = \int_\tau r \times \rho v d\tau, \; E = \frac{1}{2} \int_\tau \rho |v|^2 d\tau, \\ F = \int_\tau \rho \mathcal{F} d\tau + \int_S p dS + \sum_{k=1}^{N_1} F_k + R, \\ M_0 = \int_\tau r \times \rho \mathcal{F} d\tau + \int_S r^s \times p dS + \sum_{k=1}^{N_1} r_k \times F_k + M_0^R, \\ \mathcal{N} = \int_\tau v \cdot \rho \mathcal{F} d\tau + \int_S p \cdot v^s dS + \sum_{k=1}^{N_1} F_k \cdot v_k + \mathcal{N}^R. \end{cases} \tag{13}$$

Šias lygybes vadinsime atitinkamai judėjimo kiekio vektoriaus, kinetinio momento O taško atžvilgiu ir kinetinės energijos kitimo dėsniais. Nežiūrint į tai, kad (12) lygybės postuluojamos, dažnai jos vadinams teoremomis. Kūną veikiančių jėgų elementarusis darbas yra $\mathcal{N} dt$.

Pateiksime dydžių $R, M_0^R, \mathcal{N}^R$ išraiškas. Daugelyje praktikos uždavinių reakcijos jėgos veikia atskirus kūno taškus arba jų paviršiaus dalis. Pirmuoju atveju jos yra sutelktosios jėgos. Tarkime, kad sutelktosios reakcijos jėgos R_k veikia taškus r_k, $k = N_1{+}1, ..., N_2$, o paviršiuje pasiskirsčiusios reakcijos jėgos - kūno paviršiaus S dalį S_1. Apibrėšime reakcijos jėgų tankį. Tegul elementą ΔS veikia reakcijos jėga ΔR^s. Ribą $\lim\limits_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta R^s}{\Delta S} = \nu$ vadinsime reakcijos jėgų tankiu (intensyvumu). Tada $\Delta R^s = \nu \Delta S + o(\Delta S)$. Todėl $dR^s = \nu dS$. Panašiai samprotaudami, randame veikiančių elementą dS reakcijos jėgų momentą O taško atžvilgiu $dM_0^{R^s} = r^s \times \nu dS$ ir jų galią $d\mathcal{N}^{R^s} = \nu \cdot v^s dS$. Vadinasi,

$$\begin{cases} R^s = \int_{S_1} \nu dS, \; M_0^{R^s} = \int_{S_1} r^s \times \nu dS, \; \mathcal{N}^{R^s} = \int_{S_1} \nu \cdot v^s dS, \\ R = \sum_{k=N_1+1}^{N_2} R_k + R^s, \; M_0^R = \sum_{k=N_1+1}^{N_2} r_k \times R_k + M_0^{R^s}, \\ \mathcal{N}^R = \sum_{k=N_1+1}^{N_2} R_k \cdot v_k + \mathcal{N}^{R^s}. \end{cases} \tag{14}$$

Pastaba. Nagrinėdami standžiųjų kūnų ir materialiųjų taškų sudarytos mišriosios sistemos judėjimą taip pat postuluojame (12) lygtis. Sistemos dinaminiai matai yra sistemą sudarančių objektų atitinkamų matų sumos. Sistemos svarbiausiasis vektorius ir svarbiausiasis momentas yra atitinkamai sistemos objektus veikiančių išorinių jėgų bei jų momentų O taško atžvilgiu sumos, o sistemos galia yra sistemą veikiančių jėgų suminė galia.

Galima rašyti kiekvienam sistemą sudarančiam objektui pagrindinius judėjimo dėsnius. Tuomet iš gautų lygčių, remiantis trečiąja Niutono aksioma, reikia eliminuoti tarpusavio reakcijos jėgas, jų momentus bei galią.

2. Pagrindinių judėjimo dėsnių reliatyvioji forma ir inercijos momentai

Tašką C, kurio radiusas vektorius

$$r_c = m^{-1} \int_\tau \rho\tau d\tau,\ m = \int_\tau \rho d\tau,$$

vadinsime kūno τ masių centru. r_c pradžia yra taške 0. Tuomet

$$r = r_c + r^\star,\ v = v_c + v^\star,\ v^\star = \frac{d}{dt}r^\star = \omega \times r^\star,\ v_c = \frac{d}{dt}r_c,$$

$$Q = mv_c,\ G_0 = r_c \times mv_c + G_c^\star,\ G_c^\star = \int_\tau r^\star \times \rho v^\star d\tau, \tag{2.1}$$

$$E = \frac{1}{2}m|v_c|^2 + E_c^\star,\ E_c^\star = \frac{1}{2}\int_\tau \rho|v^\star|^2 d\tau. \tag{2.2}$$

Čia ω yra kūno kampinio greičio vektorius. Lygtys (2.1) ir (2.2) vadinamos Kenigo formulėmis. Iš (2.1), (2.2), (1.12), (1.13) ir (1.14) gauname masių centro judėjimo lygtį

$$mw_c = F$$

ir kinetinio momento bei kinetinės energijos kitimo dėsnių reliatyviąją formą

$$\frac{dG_c^\star}{dt} = M_c^\star, \tag{2.4}$$

$$\frac{dE_c^\star}{dt} = N_c^\star. \tag{2.5}$$

Čia F apibrėžtas $(1.13)_4$ formule, $w_c = v_c'$,

$$M_c^\star = \int_\tau r^\star \times \rho\mathcal{F} d\tau + \int_S r^\star \times p dS + \sum_{k=1}^{N_1} r_k^\star \times F_k + \int_{S_1} r^\star \times \nu dS$$
$$+ \sum_{k=N_1+1}^{N_2} r_k^\star \times R_k,$$

$$N_c^\star = \int_\tau v^\star \cdot \rho\mathcal{F} d\tau + \int_S v^\star \cdot p dS + \sum_{k=1}^{N_1} v_k^\star \cdot F_k + \int_{S_1} v^\star \cdot \nu dS$$
$$+ \sum_{k=N_1+1}^{N_2} v_k^\star \cdot R_k = \omega \cdot M_c^\star.$$

Pasinaudoję tuo, kad $v^\star = \omega \times r^\star$, gauname

$$G_c^\star = \int_\tau r^\star \times (\omega \times r^\star)\rho d\tau = \int_\tau \rho(\omega |r^*|^2 - (r^\star \cdot \omega) r^\star) d\tau = \omega \cdot I, \tag{2.6}$$

$$E_c^\star = \frac{1}{2}\omega \cdot G_c^\star. \tag{2.7}$$

Čia

$$I = \begin{pmatrix} I_{11} & -I_{12} & -I_{13} \\ -I_{21} & I_{22} & -I_{23} \\ -I_{31} & -I_{31} & I_{33} \end{pmatrix}$$

yra inercijos tenzorius su Dekarto komponentėmis.

$$I_{ii} = \sum_{k \neq i} \int_\tau \rho x_k^2 d\tau, \; I_{ij} = \int_\tau \rho x_i x_j d\tau, i \neq j,$$

kur x_1, x_2, x_3 yra vektoriaus r^* Dekarto koordinatės. Dydžiai I_{ii} ir I_{ij} vadinami ašiniais ir mišriaisiais inercijos momentais. Dydį $I_{ll} = \int_\tau \rho h^2 d\tau$, kuriame h kūno taško nuotolis nuo ašies l, vadiname inercijos momentu ašies l atžvilgiu. Kadangi

$$|v^\star|^2 = |\omega \times r^\star|^2 = |\omega|^2 |r^\star|^2 \sin^2 \measuredangle(\omega, r^\star) = |\omega|^2 h^2, \text{ tai } E_c^\star = \frac{1}{2} I_{ll} |\omega|^2.$$

Kadangi

$$\begin{aligned} I_{ii} + I_{jj} &= \int_\tau \rho(x_j^2 + x_k^2) d\tau + \int_\tau \rho(x_i^2 + x_k^2) d\tau \\ &= \int_\tau \rho(x_i^2 + x_j^2) d\tau + 2\int_\tau \rho x_k^2 d\tau > I_{kk} \end{aligned}$$

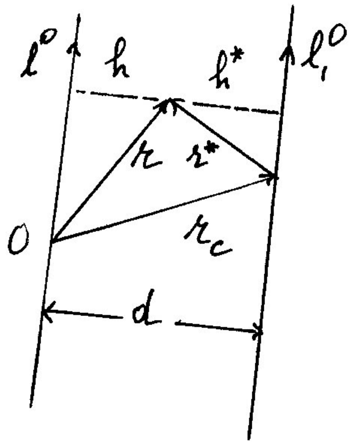
tai

$$I_{ii} + I_{jj} > I_{kk}.$$

Įrodysime Hiuigenso - Šteinerio (Huyghens) teoremas.

1 teorema. Jei l ir l_1 yra lygiagrečios ir l_1 eina per masių centrą, tai $I_{ll} = I_{l_1 l_1} + md^2$; čia d yra atstumas tarp ašių l ir l_1

Iš (19) brėžinio matyti, kad



19 pav.

$h^2 = |l^\circ \times r|^2 = |l^\circ \times (r_c + r^\star)|^2 = |l^\circ \times r_c|^2 + |l^\circ \times r^\star|^2 + 2(l^\circ \times r_c) \cdot (l^\circ \times r^\star)$

Be to

$l^\circ = l_1^\circ$, $|l^\circ \times r_c| = d$, $|l^\circ \times r^\star| = h^\star$, $\int\limits_\tau \rho h^\star d\tau = 0.$

Todėl

$I_{ll} = md^2 + I_{l_1 l_1}.$

2. teorema. Jei ašys $x_k^{'}$ lygiagrečios ašims x_k ir jų pradžia yra masių centre C, tai $I_{ks} = I_{ks}^{'} + m x_{ck} x_{cs}$, $I_{ks}^{'} = \int\limits_\tau \rho x_k^{'} x_s^{'} d\tau$.

Pasinaudojus I_{ks} apibrėžimu ir tuo, kad $x_k = x_{ck} + x_k^{'}$, o $\int\limits_\tau \rho x_k^{'} d\tau = 0$, gauname

$I_{ks} = \int\limits_\tau \rho (x_{ck} + x_k^{'})(x_{cs} + x_s^{'}) d\tau = m x_{ck} x_{cs} + I_{ks}^{'}.$

3. teorema. Jei α_k yra ašies l krypties kampų kosinusai, tai

$$I_{ll} = \sum_{k=1}^{3} \alpha_k^2 I_{kk} - 2 \sum_{s<k}^{3} \alpha_k \alpha_s I_{ks}. \tag{2.8}$$

Pasinaudojus tuo, kad

$$h^2 = |l^\circ \times r|^2 = |\begin{pmatrix} x_1^\circ & x_2^\circ & x_3^\circ \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}|^2 = (\alpha_2 x_3 - \alpha_3 x_2)^2$$
$$+(\alpha_3 x_1 - \alpha_1 x_3)^2 + (\alpha_1 x_2 - \alpha_2 x_1)^2,$$

ir I_{ll} apibrėžimu įrodome 3 teoremą.

Ašyje l pasirinkime tašką $M(x_1, x_2, x_3)$ nutolusį nuo koordinačių pradžios atstumu R. Kadangi $\alpha_k = \frac{x_k}{R}$, tai iš (2.8) išplaukia

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = I_{ll}R^2 = \sum_{k=1}^{3} \alpha_k^2 I_{kk} - 2\sum_{s<k} x_k x_s I_{ks}. \tag{2.9}$$

Tarkime, kad $I_{ll}R^2 = const = a^2$. Kai l keičia savo kryptį, tai ši lygtis apibrėžia antrosios eilės paviršių, kuris yra elipsoidas, nes $R^2 = \frac{a^2}{I_{ll}} < \infty$.

Šį paviršių vadinsime inercijos elipsoidu. Užrašę (2.9) kanonine forma gauname $I_{ll}R^2 = \sum\limits_{k=1}^{3} x_k^2 I'_{kk}$. Momentai I'_{kk} vadinami pagrindiniais inercijos momentais. Koordinačių sistema, kurioje inercijos elipsoido lygtis turi kanoninę formą, vadinama pagrindine elipsoido koordinačių sistema, o jos ašys - pagrindinėmis inercijos ašimis. Pabrėšime, kad $I'_{ks} = 0, k \neq s$. Pagrindinius inercijos momentus žymėsime I_k.

Tarkime, kad $\rho = const$. Lengvai įrodomi teiginiai:

1. Jei kūnas turi simetrijos plokštumą, tai ašis statmena simetrijos plokštumai yra pagrindinė inercijos ašis.

2. Jei kūnas turi simetrijos ašį, tai ji yra pagrindinė inercijos ašis.

Pavyzdžiai

Užrašysime kelių paprastų kūnų ašinius inercijos momentus.

1. Kai l yra statmena ilgio a atkarpai ir eina per jos vidurį, tai $I_{ll} = \frac{1}{12}ma^2$. Kai l eina per jos galą, tai $I_{ll} = \frac{1}{3}ma^2$, $m = \rho a$.

2. Kai l yra statmena spindulio R apskritimo plokštumai ir eina per jo centrą, tai $I_{ll} = mR^2$, $m = 2\pi R\rho$.

3. Kai l yra sukimosi cilindrinio paviršiaus ašis, o R ir H jo spindulys ir aukštis, tai $I_{ll} = mR^2$, $m = \pi R^2 H\rho$.

4. Kai l yra statmena spindulio R skrituliui ir eina per jo centrą, tai $I_{ll} = \frac{1}{2}mR^2$, $m = \pi R^2\rho$.

5. Kai l yra ritinio ašis, R - jo pagrindo spindulys, o H - aukštis, tai $I_{ll} = \frac{1}{2}mR^2$, $m = \pi R^2 H\rho$.

6. Kai l yra statmena spindulio R skritulio plokštumai ir eina per jo apskritimo tašką, tai $I_{ll} = \frac{3}{2}mR^2$.

7. Kai l eina per spindulio R rutulio centrą, tai $I_{ll} = \frac{2}{5}mR^2$, $m = \frac{4}{3}\pi R^3\rho$.

3. Standžiojo kūno sukimasis apie pastoviąją ašį

Tarkime, O ir A nejuda, x_3 ašis eina per juos, o kūną veikia tik koncentruotos jėgos. Užrašykime (2.3) ir $(1.12)_2$ lygtį

$$mw_c = F + R_0 + R_A,\ F = \sum_{k=1}^{N} F_k, \tag{3.1}$$

$$\frac{d}{dt}G_0 = \sum_{k=1}^{N} r_k \times F_k + ax_3^0 \times R_A,\ a = |\overrightarrow{OA}|. \tag{3.2}$$

Bet $w_c = \varepsilon \times r_c - |\omega|^2 h_c$

$$\frac{d}{dt}G_0 = \int_\tau \rho r \times w d\tau = \int_\tau \rho r \times (\varepsilon \times r_c - |\omega|^2 h) d\tau$$
$$= \int_\tau \rho(\varepsilon|r|^2 - (r \cdot \varepsilon)r - r \times |\omega|^2 h) d\tau.$$

Čia $h = r - (r \cdot \omega^\circ)\omega^\circ$, o $\omega = \varphi' x_3^\circ$, $\varepsilon = \varphi'' x_3^\circ$. Užrašę (3.1) ir (3.2) projekcijomis į ašis x_1, x_2, x_3 standžiai susietos su kūnu gausime

$$-m(\varphi'' x_{c2} + \varphi'^2 x_{c1}) = F_1 + R_{01} + R_{A1}, \tag{3.3}$$

$$m(\varphi'' x_{c1} - \varphi'^2 x_{c2}) = F_2 + R_{02} + R_{A2}, \tag{3.4}$$

$$0 = F_3 + R_{03} + R_{A3}, \tag{3.5}$$

$$-\varphi'' I_{31} + \varphi'^2 I_{32} = \sum_{k=1}^{N} (x_{k2}F_{k3} - x_{k3}F_{k2}) - aR_{A2}, \tag{3.6}$$

$$-\varphi'' I_{32} - \varphi'^2 I_{31} = \sum_{k=1}^{N} (x_{k3}F_{k1} - x_{k1}F_{k3}) - aR_{A1}, \tag{3.7}$$

$$\varphi'' I_{33} = \sum_{k=1}^{N} (x_{k1}F_{k2} - x_{k2}F_{k1}). \tag{3.8}$$

Kūno judėjimą apibrėžia tik (3.8) lygtis. (3.3), (3.4), (3.6) ir (3.7) lygtys apibrėžia reakcijos jėgų komponentes $R_{01}, R_{02}, R_{A1}, R_{A2}$ ir $R_{03} + R_{A3}$. Šios jėgos vadinamos dinaminėmis reakcijos jėgomis. Statikos atveju $\varphi' = \varphi'' = 0$. (3.3)–(3.7) lygtys, kuriose $\varphi' = \varphi'' = 0$ apibrėžia statines reakcijos jėgas. Kyla klausimas: kokioms sąlygoms esant statinės ir dinaminės reakcijos jėgos sutaps. Jos sutaps, kai jas apibrėžiančios lygtys sutaps, o tam būtina ir pakanka, kad būtų

$$\varphi'' x_{c_2} + \varphi'^2 x_{c_1} = 0,$$
$$\varphi'' x_{c_1} - \varphi'^2 x_{c_2} = 0,$$
$$-\varphi'' I_{31} + \varphi'^2 I_{32} = 0,$$
$$-\varphi'' I_{32} - \varphi'^2 I_{31} = 0.$$

Šios lygtys turi nenulinį sprendinį tik, kai $x_{c_1} = x_{c_2} = 0$ ir $I_{31} = I_{32}$. Tai rodo, kad x_3 turi būti pagrindinė inercijos ašis, o masių centras privalo būti joje.

4. Turinčio vieną nejudantį tašką kūno judėjimas

Kinematinės ir dinaminės Oilerio lygtys. Iš kinematikos žinome, kad kūno kampinis greitis

$\omega = \varphi' x_3^0 + \psi' \zeta^0 + \theta' l^0$. Čia ζ^0 yra nejudančios ašies ortas. Padauginę ω skaliariškai iš judančių ortų x_1^0, x_2^0, x_3^0, gauname kinematines Oilerio lygtis

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \psi' \sin\varphi \sin\theta + \theta' \cos\varphi, \\ \omega_2 &= \psi' \cos\varphi \sin\theta - \theta' \sin\varphi, \\ \omega_3 &= \psi' \cos\theta + \theta'. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Kadangi $v = \omega \times r$, o $G_0 = \int\limits_\tau \rho r \times v d\tau$, tai

$$G_0 = \int\limits_\tau \rho(\omega |r|^2 - r(r \cdot \omega)) d\tau$$

arba

$$G_0 = \omega \cdot I \tag{4.2}$$

čia I yra kūno inercijos tenzorius, kurio Dekarto koordinatės sudaro matricą

$$I = \begin{pmatrix} I_{11} & -I_{12} & -I_{13} \\ -I_{21} & I_{22} & -I_{23} \\ -I_{31} & -I_{32} & I_{33} \end{pmatrix}.$$

Kai x_1, x_2, x_3 yra pagrindinės inercijos ašys, tai $I_{sk} = 0, s \neq k$, o $I_{ss} = I_s$. Tada

$$G_O = \omega_1 I_1 x_1^\circ + \omega_2 I_2 x_2^\circ + \omega_3 I_3 x_3^\circ. \tag{4.3}$$

Išvesime ω_1, ω_2 ir ω_3 kitimo lygtis. Kadangi $\frac{\widetilde{dG_\omega}}{dt} + \omega \times G_0 = M_0$, kur $\frac{\widetilde{dG_\omega}}{dt}$ yra reliatyvioji išvestinė, tai atsižvelgę į (4.3), gauname

$$\begin{aligned} I_1 \omega_1' + \omega_2 \omega_3 (I_3 - I_2) &= M_{01}, \\ I_2 \omega_2' + \omega_1 \omega_3 (I_1 - I_3) &= M_{02}, \\ I_3 \omega_3' + \omega_1 \omega_2 (I_2 - I_1) &= M_{03}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

(4.4) lygtys vadinamos dinaminėmis Oilerio lygtimis. Irašę (4.1) į (4.4) galime gauti trijų antrosios eilės lygčių sistemą Oilerio kampams rasti.

Kinematinės ir dinaminės Puasono (Poisson) lygtys. Nagrinėsime atvejį, kai kūną veikia tik pastovioji sunkio jėga. Tuomet, nukreipę nejudančią ašį ζ prieš sunkio jėgą, gausime

$M_0 = \int\limits_\tau \rho r \times (-g\zeta^\circ) d\tau = -g \int\limits_\tau \rho r d\tau \times \zeta^\circ = -g r_c m \times \zeta^\circ.$

Čia g yra laisvojo kritimo pagreitis Žemės paviršiaus lygyje, ρ kūno tankis, o r_c jo masių centro radiusas vektorius.

Kadangi $\zeta^\circ = \gamma_1 x_1^\circ + \gamma_2 x_2^\circ + \gamma_3 x_3^\circ$, $\gamma_1 = \sin\varphi \sin\theta, \gamma_2 = \cos\varphi \sin\theta, \gamma_3 = \cos\theta$, tai (4.4) lygtys yra tokios

$$\begin{aligned} &I_1\omega_1' + \omega_2\omega_3(I_3 - I_2) = gm(x_{c_3}\gamma_2 - x_{c_2}\gamma_3), \\ &I_2\omega_2' + \omega_1\omega_3(I_1 - I_3) = gm(x_{c_1}\gamma_3 - x_{c_3}\gamma_1), \\ &I_3\omega_3' + \omega_1\omega_2(I_2 - I_1) = gm(x_{c_2}\gamma_1 - x_{c_1}\gamma_2). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Šios lygtys yra vadinamos dinaminėmis Puasono lygtimis. Išvesime kinematines Puasono lygtis. Kadangi $\zeta^\circ = const$, tai $\frac{d\zeta^\circ}{dt} = \frac{\tilde{d}\zeta^\circ}{dt} + \omega \times \zeta^\circ = 0$. Iš čia gauname kinematines Puasono lygtis

$$\begin{aligned} &\gamma_1' = \gamma_2\omega_3 - \gamma_3\omega_2, \\ &\gamma_2' = \gamma_3\omega_1 - \gamma_1\omega_3, \\ &\gamma_3' = \gamma_1\omega_2 - \gamma_2\omega_1. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Lygčių (4.5) ir (4.6) integralai. Juos gausime pasinaudoję kinetinio momento ir kinetinės energijos kitimo dėsniais

$$\begin{aligned} &\frac{dG_O}{dt} = -g r_c m \times \zeta^\circ, \\ &\frac{dE}{dt} = \int\limits_\tau \rho v \cdot (-g\zeta^\circ) d\tau = -g v_c \cdot \zeta^\circ m = -\frac{d}{dt}(g r_c \cdot \zeta^\circ) m. \end{aligned}$$

Padauginę pirmąją iš jų skaliariškai iš ζ° ir suintegravę gauname

$$G_O \cdot \zeta^\circ = c_1 = I_1\omega_1\gamma_1 + I_2\omega_2\gamma_2 + I_3\omega_3\gamma_3,\ c_1 = const. \tag{4.7}$$

Integruodami antrąją lygtį gauname energijos tvermės dėsnį.

$$E + mg(\gamma_1 x_{c_1} + \gamma_2 x_{c_2} + \gamma_3 x_{c_3}) = \frac{1}{2}c_2,\ c_2 = const. \tag{4.8}$$

Be pirmųjų (4.7) ir (4.8) integralų dar yra ir specialusis integralas

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1.$$

Oilerio - Puanso (Poinsot) atvejis. Šiuo atveju masių centras C sutampa su nejudančiu tašku O, o $M_0 = 0$. Tada $G_O' = 0$. Todėl $G_O = const$. Tai dar du pirmieji integralai. Iš čia gauname $|G_O|^2 = const$ arba

$$I_1^2\omega_1^2 + I_2^2\omega_2^2 + I_3^2\omega_3^2 = |G_O|^2. \tag{4.9}$$

Kadangi

$$2E = \int\limits_\tau \rho v \cdot v d\tau = \int\limits_\tau \rho v \cdot (\omega \times r) d\tau = \omega \cdot G_O = I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2$$

tai (4.8) integralas yra toks

$I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2 = c_2.$

Bendruoju atveju I_1, I_2 ir I_3 yra skirtingi. Pirmiausia nagrinėkime atvejį, kai I_1, I_2 ir I_3 yra skirtingi. Paprastumo dėlei, tegul $I_3 < I_2 < I_1$. Iš (4.9) ir (4.10) išvedame

$$\omega_1^2 = \tfrac{I_2(I_2-I_3)}{I_1(I_1-I_3)}(\lambda_1^2 - \omega_2^2), \tag{4.11}$$

$$\omega_3^2 = \tfrac{I_2(I_1-I_2)}{I_3(I_1-I_3)}(\lambda_3^2 - \omega_2^2), \tag{4.12}$$

Čia λ_1 ir λ_2 yra laisvos konstantos ir tokios, kad $0 \le \omega_2^2 \le \lambda^2 = \min(\lambda_1^2, \lambda_3^2)$. Imsime $\lambda > 0$. Pasinaudojus pradinėmis sąlygomis $\omega_k(0) = \omega_{k0}$, randame

$\lambda_1^2 = \omega_{20}^2 + \omega_{10}^2 \tfrac{I_1(I_1-I_3)}{I_2(I_2-I_3)}$, $\lambda_3^2 = \omega_{20}^2 + \omega_{30}^2 \tfrac{I_3(I_1-I_3)}{I_2(I_1-I_2)}$.

Iš (4.11), (4.12) ir antrosios (4.5) sistemos lygties gauname

$$\omega_2' = \pm\sqrt{\sigma}((\lambda_1^2 - \omega_2^2)(\lambda_3^2 - \omega_2^2))^{1/2},\ \sigma = \tfrac{(I_1-I_2)(I_2-I_3)}{I_1 I_3}. \tag{4.13}$$

Čia imame neigiamą ženklą, kai ω_{10} ir ω_{30} yra vienodų ženklų ir teigiamą, kai jų ženklai priešingi. Kai $\omega_{10}\omega_{30} = 0$, tai iš (4.11) ir (4.12) gauname $\omega_{20}^2 = \min(\lambda_1^2, \lambda_3^2) = \lambda^2$, t.y., $\omega_{20} = \pm\lambda$. Tada iš (4.13) gauname lygtį

$\omega_2'^2 = \tau(\omega_2)$, $\tau(\omega_2) = \sigma(\lambda_1^2 - \omega_2^2)(\lambda_3^2 - \omega_2^2) \ge 0.$

Iš čia

$\omega_2'' = \frac{1}{2}\tau_{\omega_2} = -\sigma\omega_2(\lambda_1^2 - \omega_2^2 + \lambda_3^2 - \omega_2^2).$

Todėl, kai $\lambda > 0$, $\omega''|_{\omega_2=\omega_{20}} = \mp\kappa^2$

$\kappa^2 = \sigma\lambda(\lambda_1^2 - \lambda^2 + \lambda_3^2 - \lambda^2) > 0.$

Kadangi $\omega_2'|_{\omega_2=\omega_{20}} = 0$, tai pradinio taško aplinkoje

$\mathrm{sgn}\omega_2'(t) = \mathrm{sgn}\omega_2''(t) = \mathrm{sgn}\omega_2''|_{\omega_2=\omega_{20}=\pm\lambda} = \mp 1.$

Todėl, kai $\lambda > 0$ ir $\omega_{10}\omega_{30} = 0$, (4.13) lygtyje ženklai yra priešingi dydžio $\omega_{20} = \pm\lambda$ ženklams.

Kai $\lambda > 0$, iš (4.13) gauname

$$t = \pm\int\limits_{\omega_{20}}^{\omega_2} \frac{1}{\sqrt{\tau(s)}} ds. \tag{4.14}$$

(4.11), (4.12) ir (4.14) lygtys, kai $\lambda > 0$ apibrėžia funkcijas

$\omega_3 = \omega_3(\omega_2)$, $\omega_1 = \omega_1(\omega_2)$, $t = t(\omega_2)$.

Tarkime, kad $\lambda_1 \ne \lambda_3$, o $\lambda > 0$. Kadangi $|\omega_2| \le \lambda$, o

$\omega_2'|_{|\omega_2|=\lambda} = 0$, $\omega_2''|_{\omega_2=\pm\lambda} = \mp\kappa^2$, tai $\min\limits_t \omega_2 = -\lambda$, $\max\limits_t \omega_2 = \lambda$.

Todėl $\omega_2(t)\,(\omega_{20} \in (-\lambda, \lambda))$ yra periodinė laiko funkcija, kurios periodas $T = 2\int\limits_{-\lambda}^{\lambda} \tau^{-1/2}(s)ds$. Iš (4.11) ir (4.12) matome, kad ω_1 ir ω_2 yra periodinės funkcijos.

Kai $\lambda_1 = \lambda = 0, \lambda_3 \neq 0$, tai iš (4.11), (4.12) gauname, kad $\omega_1 = \omega_2 = 0$, $\omega_3 = const$. Todėl kūnas sukasi tolygiai apie x_3 ašį.

Kai $\lambda_3 = \lambda = 0$, $\lambda_1 \neq 0$, tai $\omega_2 = \omega_3 = 0$, $\omega_1 = const$. Todėl kūnas sukasi tolygiai apie x_1 ašį.

Kai $\lambda_1 = \lambda_3 = \lambda > 0$, tai iš (4.14) gauname, kad

$$\pm 2\lambda\sqrt{\sigma t} = \ln((\lambda + \omega_2)(\lambda - \omega_2)^{-1}c),\ c = (\lambda - \omega_{20})(\lambda + \omega_{20})^{-1}.$$

Todėl

$$\omega_2 = \lambda\frac{\lambda\sinh(\pm\lambda\sqrt{\sigma t}) + \omega_{20}\cosh(\pm t\sqrt{\sigma}\lambda)}{\lambda\cosh(\pm\lambda\sqrt{\sigma t}) + \omega_{20}\sinh(\pm t\sqrt{\sigma}\lambda)} \xrightarrow[t\to\infty]{} \pm\lambda.$$

Šiuo atveju iš (4.11) ir (4.12) gauname, kad $\omega_k = \omega_k(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$, $k = 1; 3$.

Kai $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$, tai $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$.

Rasime Oilerio kampus. Kadangi $G_O = const$ tai ζ° ašį galime nukreipti G_O kryptimi. Tada

$$I_k\omega_k = |G_0|\gamma_k,\ k = 1, 2, 3 \tag{4.15}$$

Todėl $\tan\varphi = \gamma_1\gamma_2^{-1} = I_1\omega_1(\omega_2)(I_2\omega_2)^{-1}$, $\cos\theta = \frac{I_3}{|G_O|}\omega_3(\omega_2)$.

Vadinasi, kai $\lambda_1 \neq \lambda_3$, o $\lambda > 0$, tai θ ir φ yra periodinės funkcijos.

Iš (4.1) išvedame formulę

$$\psi' = (\omega_1(\omega_2)\sin\varphi(\omega_2) + \omega_2\cos\varphi(\omega_2))(\sin\theta(\omega_2))^{-1} \tag{4.16}$$

Vadinasi, kai $\lambda_1 \neq \lambda_3$, ψ' yra periodinė. Tačiau ψ ne, nes integruodami lygybę $\psi'(t+\tau) = \psi'(t)$ gauname $\psi(t+\tau) = \psi(t) + const$.

Pasinaudoję (4.14) ir suintegravę (4.16) gauname

$$\psi = \psi_0 \pm \int\limits_{\omega_{20}}^{\omega_2} \frac{\omega_1(\zeta)\sin\varphi(\zeta) + \zeta\cos\varphi(\zeta)}{\sin\theta(\zeta)}\tau^{-1/2}(\zeta)d\zeta.$$

Dabar ištirsime atvejį, kai inercijos elipsoidas yra sukimosi paviršius. Tegul $I_1 = I_2$. Rasime funkcijas $\omega_k, \theta, \varphi, \psi$. Iš (4.15) ir (4.15) išplaukia, kad $\omega_3 = const = \omega_{30}$, $\gamma_3 = \cos\theta = \frac{I_3}{|G_O|}\omega_{30}$. Vadinasi $\theta = \theta_0 = \arccos(\frac{I_3}{|G_O|}\omega_{30})$. Tuomet iš $(4.15)_1$, gauname $I_1\omega_1 = |G_O|\sin\theta_0\sin\varphi$. Iš čia $\psi' = \frac{|G_O|}{I_1}$ arba $\psi = \frac{|G_O|}{I_1}t + \psi_0$. Pagaliau iš $(4.1)_3$ išplaukia, kad $\varphi' = \kappa = \omega_{30} - \frac{|G_O|}{I_1}\cos\theta_0$, arba $\varphi = \kappa t + \varphi_0$. Gavome, kad nutacijos kampas yra pastovus, o apie precesijos ir savojo sukimosi ašis kūnas sukasi tolygiai. Toks kūno judėjimas vadinamas reguliariąja precesija.

Pagaliau ištirsime atvejį, kai inercijos elipsoidas yra sfera, t.y. $I = I_1 = I_2 = I_3$. Iš (4.5) ir (4.15) gauname $\omega_k = \omega_{k0} = const$, $\gamma_k = \frac{I_k \omega_{k0}}{|G_O|}$. Iš čia $\theta = \theta_0$, $\varphi = \varphi_0$, o iš $(4.1)_3$ gauname

$$\psi' = \frac{\omega_{30}}{\cos\theta_0} \text{ arba } \psi = \frac{\omega_{30}}{\cos\theta_0} t + \psi_0.$$

Lagranžo - Puasono (Lagrange - Poisson) atvejis. Šiuo atveju inercijos elipsoidas yra sukimosi paviršius, o masių centras yra sukimosi ašyje. Tarkime, sukimosi ašis yra x_3 ašis. Tada $I = I_1 = I_2$, $x_{c3} = a > 0$.

Iš $(4.5)_3$ gauname $\omega_3 = const = \omega_{30}$. (4.7) ir (4.5) pirmuosius integralus užrašysime taip

$$\psi' \sin^2\theta = a_3 - a_4 \cos\theta,$$

$$\theta'^2 + \psi'^2 \sin^2\theta = a_1 - a_2 \cos\theta \geq 0,$$

$$a_1 = I^{-1}(c_2 - I_3\omega_{30}^2),\ a_2 = 2mgaI^{-1} > 0,\ a_3 = I^{-1}c_1,\ a_4 = I^{-1}I_3\omega_{30}$$

Iš čia gauname lygtį

$$\theta'^2 = \{(a_1 - a_2\cos\theta)(1 - \cos^2\theta) - (a_3 - a_4\cos\theta)^2\}\sin^{-2}\theta = \tau(\theta) \geq 0,$$

arba

$$\theta' = \pm\sqrt{\tau(\theta)}.$$

Imame teigiamą ženklą, kai $\theta'(0) > 0$ ir neigiamą , kai $\theta'(0) < 0$.

Tada

$$t = \pm \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{dx}{\sqrt{\tau(x)}},\ \theta_0 = \theta(0),$$

$$\psi = \psi_0 \pm \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{a_3 - a_4\cos(x)}{\sin^2(x)} \frac{dx}{\sqrt{\tau(x)}}.$$

Pagaliau iš $(4.1)_3$ gauname

$$\varphi = \varphi_0 \pm \int_{\theta_0}^{\theta} (\omega_3 - \frac{a_3 - a_4\cos(x)}{\sin^2(x)}) \frac{dx}{\sqrt{\tau(x)}}.$$

Detalų šio atvejo tyrimą galima rasti knygoje V. Skakauskas, Teorinė (klasikinė) mechanika, VU, 1993.

Kovalevskajos atvejis. Šiuo atveju inercijos elipsoidas yra sukimosi paviršius. Tegul x_3 yra sukimosi ašis. Tada $I_1 = I_2$. Kovalevskaja iš sukimosi paviršių išskyrė siauresnę klasę paviršių tenkinačių sąlygą $I_1 = I_2 = 2I_3$. Be to, ji pareikalavo, kad masių centras būtų elipsoido ekvatoriaus plokštumoje Ox_1x_2. Kadangi bet kuri ašis išeinanti iš taško O ir einanti ekvatoriaus plokštumoje yra pagrindinė inercijos ašis, tai, nesiaurindami bendro atvejo, reikalausime, kad masių centras būtų Ox_1 ašyje. Tegul $x_{c1} = a_1 > 0$. $(4.5)_{1,2}$ ir $(4.6)_{1,2}$ lygtys yra tokios

$$2\omega_1' - \omega_2\omega_3 = 0,\ 2\omega_2' + \omega_1\omega_3 = aI_3^{-1}\gamma_3,\ a = a_1 mg, \tag{4.17}$$

$$\gamma_1' = \gamma_1\omega_3 - \gamma_3\omega_2,\ \gamma_2' = \gamma_3\omega_1 - \gamma_1\omega_3. \tag{4.18}$$

Padauginę $(4.17)_2$ ir $(4.18)_2$ iš $i = \sqrt{-1}$ ir sudėję, gausime lygtis

$$2(\omega_1 + i\omega_2)' = -i\omega_3(\omega_1 + i\omega_2) + bi\gamma_3,\ b = aI_3^{-1},$$

$$(\gamma_1 + i\gamma_2)' = -\omega_3 i(\gamma_1 + i\gamma_2) + i\gamma_3(\omega_1 + i\omega_2).$$

Padauginę pirmą iš jų iš $\omega_1 + i\omega_2$, o antrą iš b ir atėmę sandaugas, gausime

$$((\omega_1 + i\omega_2)^2 - b(\gamma_1 + i\gamma_2))' = -i\omega_3((\omega_1 + i\omega_2)^2 - b(\gamma_1 + i\gamma_2)).$$

Iš čia

$$d\ln\{(\omega_1 + i\omega_2)^2 - b(\gamma_1 + i\gamma_2)\} = -i\omega_3 dt.$$

Užrašykime šiai lygybei kompleksinę jungtinę

$$d\ln\{(\omega_1 - i\omega_2)^2 - b(\gamma_1 - i\gamma_2)\} = i\omega_3 dt.$$

Sudėję pastarąsias dvi lygybes gauname Kovalevskajos integralą

$$|(\omega_1 + i\omega_2)^2 - b(\gamma_1 + i\gamma_2)|^2 = c = const, \text{ t.y.},$$

$$(\omega_1^2 - \omega_2^2 - b\gamma_1)^2 + (2\omega_1\omega_2 - b\gamma_2)^2 = c. \tag{4.19}$$

(4.7), (4.8), (4.9), ir (4.19) integralai yra algebriniai atžvilgiu ω_k ir γ_k. Kovalevskaja parodė, kad esant bet kokioms pradinėms sąlygoms, algebriniai atžvilgiu ω_k ir γ_k pirmieji integralai egzistuoja tik Oilerio - Puanso, Lagranžo - Puasono bei Kovalevskajos atvejais.

Analizinė mechanika

1. Pagrindinės sąvokos

Nagrinėkime N taškų sistemos judėjimą. Tarkime, kad jų radiusai vektoriai ir absoliutieji greičiai yra $r_1, r_2, ..., r_N$ ir $v_1, v_2..., v_N$. Jei šie vektoriai nesusieti iš anksto žinomais ryšiais, tai sistema juda laisvai. Priešingu atveju sistemos judėjimas yra suvaržytas ryšiais, kurie gali būti dviejų rūšių:

$$f_\alpha(t, r_1, ..., r_N) = 0,\ \alpha = 1, ...\kappa, \tag{1.1}$$

$$g_\beta(t, r_1, ..., r_N, v_1, ..., v_N) = 0,\ \beta = 1, ...\gamma. \tag{1.2}$$

Reikalausime, kad $\kappa + \gamma < 3N$. Jei f_α ir g_β nepriklauso nuo laiko, tai ryšiai vadinami stacionariais (skleronominiais). Priešingu atveju jie vadinami nestacionariais (reonominiais). (1.1) ryšiai vadinami geometriniais, o (1.2) kinematiniais arba diferencialiniais. Sistema suvaržyta geometriniais ryšiais vadinama holonomine. Jei ją varžo bent vienas diferencialinis ryšys, ji vadinama neholonomine. Reikalausime, kad f_α turėtų tolydžias antrąsias, o g_β - tolydžias pirmąsias išvestines pagal visus kintamuosius. Išdifirencijavę (1.1) gausime

$$\varphi_\alpha := \sum_{k=1}^{N} \nabla_{r_k} f_\alpha \cdot v_k + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = 0. \tag{1.3}$$

Čia ∇_{r_k} yra gradijento operatorius. Tarsime, kad (1.2) ir (1.3) sudaro nepriklausomų lygčių sistemą. Tai reiškia, kad Jakobio matricos

$$\frac{D(\varphi_1, ..., \varphi_\kappa, g_1, ..., g_\gamma)}{D(x'_{11}, x'_{12}, x'_{13}, ..., x'_{3N-2}, x'_{3N-1}, x'_{3N})}$$

rangas yra $\kappa + \gamma < 3N$. Čia $x'_{3k-2}, x'_{3k-1}, x'_{3k}$, $k = 1, ..., N$ yra k – ojo taško greičio vektoriaus v_k Dekarto koordinatės, o $x'_{3k-2}, x'_{3k-1}, x'_{3k}$ yra vektoriaus r_k Dekarto koordinatės. Dydis $3N - \kappa - \gamma$ vadinamas holonominės sistemos laisvės laipsnių skaičiumi.

Geometrinių ryšių pavyzdžiais gali būti paviršiai arba kreivės, kuriais priversti judėti taškai. Neholonominių sistemų realizacijomis gali būti riedantys neslysdami absoliučiai standžiu šiurkščiu paviršiumi absoliučiai standūs kūnai. Kai paviršius nejuda, riedančio neslystant kūno lietimosi taško arba lietimosi tiesės su paviršiumi greičiai yra lygūs nuliui.

Pavyzdys. Plokštuma Ox_1x_2 neslysdamas rieda a spindulio standus skritulys būdamas statmenas į ją. Taškas P yra momentinis greičių centras. Todėl

$$v_c = \varphi' l^\circ \times a x_3^\circ,$$

Čia $\varphi' l^\circ$ yra skritulio kampinis greitis, $l^\circ = \sin\psi x_1^\circ - \cos\psi x_2^\circ$. Iš čia

$$x'_1 = -\varphi' a \cos\psi,$$
$$x'_2 = -\varphi' a \sin\psi. \tag{1.4}$$

Ryšiai (1.4) yra kinematiniai. Juose nežinomi kampai φ, ψ ir lietimosi taško P koordinatės x_1 ir x_2, kurios sutampa su skritulio centro C koordinatėmis.

2. Lagranžo pirmosios rūšies lygtys

Nagrinėsime neholonominės sistemos judėjimą. Judėjimo lygtys yra tokios

$$m_s w_s = F_s + R_s,\ s = 1, ..., N, \tag{2.1}$$

$$f_\alpha(t, r_1, ..., r_N) = 0,\ \alpha = 1, ...\kappa, \tag{2.2}$$

$$g_\beta(t, r_1, ..., r_N, v_1, ..., v_N) = 0,\ \beta = 1, ...\gamma. \tag{2.3}$$

Tegul

$$m = \sum_{s=1}^{N} m_s,\ \tilde{r}_s = \sqrt{\tfrac{m_s}{m}} r_s,\ \tilde{F}_s = F_s / \sqrt{\tfrac{m_s}{m}},\ \tilde{R}_s = R_s / \sqrt{\tfrac{m_s}{m}},$$

$$r = (\tilde{r}_1, \tilde{r}_2, ..., \tilde{r}_N),\ F = (\tilde{F}_1, \tilde{F}_2, ..., \tilde{F}_N),\ R = (\tilde{R}_1, \tilde{R}_2, ..., \tilde{R}_N).$$

Tada (2.1)-(2.3) užrašysime taip

$$mw = F + R,\ w = v' = r'', \tag{2.4}$$

$$f_\alpha(t, r) = 0,\ \alpha = 1, ..., \kappa, \tag{2.5}$$

$$g_\beta(t, r, v) = 0,\ \beta = 1, ..., \gamma. \tag{2.6}$$

Pabrėšime, kad r, F, R yra $3N$ –ačiai vektoriai. Sistemoje yra $3N + \kappa + \gamma$ lygčių, o vektorių r ir R nežinomų koordinačių yra $6N$. Vadinasi, trūksta $3N - \kappa - \gamma$ lygčių. Apibrėžkime vektorius

$$l_\alpha = \nabla_r f_\alpha,\ \alpha = 1, ..., \kappa,\ l_{\kappa+\beta} = \nabla_v g_\beta,\ \beta = 1, ..., \gamma.$$

Paimkime tiesiškai nepriklausomus vektorius $l_s; s = \kappa + \gamma + 1, ..., 3N$ statmenus vektoriams $l_1, ..., l_{\kappa+\gamma}$.

Tuomet

$$R = \sum_{\alpha=1}^{\kappa} \lambda_\alpha \nabla_r f_\alpha + \sum_{\beta=1}^{\gamma} \mu_\beta \nabla_v g_\beta + \sum_{s=\kappa+\gamma+1}^{3N} \zeta_s l_s.$$

Vektorius

$$R^n = \sum_{\alpha=1}^{\kappa} \lambda_\alpha \nabla_r f_\alpha + \sum_{\beta=1}^{\gamma} \mu_\beta \nabla_v g_\beta$$

yra stamenas hiperpaviršiui S, kurio matavimas yra $3N - \kappa - \gamma$. Vektorius $R^l = \sum_{s=\kappa+\gamma+1}^{3N} \zeta_s l_s$ yra liečiamasis hiperpaviršiui S. Vektoriaus r galas yra paviršiuje S. R^n vadinamas normaline ryšių reakcija, o R^l – liečiamąja reakcija, kuri gali būti interpretuota kaip apibendrinta trinties jėga.

Trinties jėgai apibrėžti turime pasitelkti eksperimento būdu nustatomą lygtį.

$$R^l = R^l(|R^n|, ...). \tag{2.7}$$

Čia daugtaškiu pažymėtas hiperpaviršiaus S fizinės charakteristikos. Vektoriaus R^l matavimas yra $3N - \kappa - \gamma$.

(2.4)–(2.6), (2.7) lygtys vadinamos pirmojo tipo Lagranžo lygtimis. Jų, kaip ir nežinomųjų, skaičius yra $6N$. Kai ryšiai idealūs, tai $R^l = 0$.

Tegul ryšiai idealūs $F = \nabla_r U(r)$, $\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = 0$, g_β yra homogeninės vektoriaus v funkcijos. Tada

$$E_{kin} + E_{pot} = const,\ E_{pot} = -U.$$

Įrodymas išplaukia iš (2.4)–(2.7) lygčių, padauginus (2.4) lygtį skaliariškai iš v ir panaudojus teiginio sąlygas.

Uždavinys 1. Masių m_1 ir m_2 taškai M_1 ir M_2 juda plokštuma taip, kad atstumas tarp jų yra pastovus ir lygus a, o masių centras lygiagretus vektoriui M_1M_2. Užrašyti sistemos judėjimo lygtis ir rasti jų sprendinį.

Uždavinys 2. Sunkių P_1 ir P_2 taškai M_1 ir M_2 juda vertikalia plokštuma x_1Ox_2 taip, kad $|M_1M_2| = l = const$, o koordinatė $x_1 = 0$. x_2 ašis, kuria juda M_1, yra ideali. Užrašyti sistemos judėjimo lygtis ir ištirti jų sprendinį

3. Lagranžo antrosios rūšies lygtys

Nagrinėkime pastovių masių holonominių sistemų judėjimą. Judėjimą aprašo lygtys

$$mw = F + \sum_{\alpha=1}^{\kappa} \lambda_\alpha \nabla_r f_\alpha, \tag{3.1}$$

$$f_\alpha(t, r) = 0,\ \alpha = 1, ..., \kappa. \tag{3.2}$$

Tegul r Dekarto koordinatės yra $x_1, x_2, ..., x_{3N}$.
Ryšiai (3.2) apibrėžia koordinates

$$x_k = \varphi_k(t, x_{\kappa+1}, ..., x_{3N}),\ k = 1, ..., \kappa. \tag{3.3}$$

Tegul

$$x_s = \psi_s(t, q_1, ..., q_n),\ s = \kappa + 1, ..., 3N,\ n = 3N - \kappa. \tag{3.4}$$

Įrašę (3.4) į (3.3) gausime, kad φ_k yra t ir $q_1, ..., q_n$ funkcijos.

Vadinasi, $r = r(t, q_1, ..., q_n)$. Apibrėžkime vektorius $l_k = \frac{\partial r}{\partial q_k}$, $k = 1, ..., n$. Jie yra liečiamieji hiperpaviršiui S, kurio matavimas yra $3N - \kappa$. Tuomet

$$v = \sum_{k=1}^{n} l_k q_k' + \frac{\partial r}{\partial t},$$

$$\frac{\partial v}{\partial q_s'} = l_s,\ s = 1, ..., n. \tag{3.5}$$

Padauginę (3.1) skaliariškai iš l_k gausime

$$(mw - F) \cdot l_k = \sum_{\alpha=1}^{\kappa} \lambda_\alpha \nabla_r f_\alpha \cdot \frac{\partial r}{\partial q_k} = 0$$

nes $\nabla_r f_\alpha$ yra statmenas vektoriui l_k. Iš čia

$$\frac{d}{dt}(v \cdot \frac{\partial r}{\partial q_k}) - v \cdot \frac{d}{dt}\frac{\partial r}{\partial q_k} = F \cdot \frac{\partial r}{\partial q_k}.$$

Bet

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial r}{\partial q_k} = \frac{\partial^2 r}{\partial q_k \partial t} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial^2 r}{\partial q_k \partial q_s} q_s^{'} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial q_k}(\frac{\partial r}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial r}{\partial q_s} q_s^{'}) = \frac{\partial}{\partial q_k} v,$$

nes $t, q_1, ..., q_n$ ir $q_1^{'}, ..., q_n^{'}$ nepriklausomi kintamieji. Pasinaudoję (3.5) formulę gauname

$$m\frac{d}{dt}(v \cdot \frac{\partial v}{\partial q_k^{'}}) - v \cdot \frac{\partial v}{\partial q_k} = F \cdot \frac{\partial r}{\partial q_k},$$

arba

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E}{\partial q_k^{'}} - \frac{\partial E}{\partial q_k} = F \cdot \frac{\partial r}{\partial q_k}. \tag{3.6}$$

(3.6) yra Lagranžo antrosios rūšies lygtys užrašytos holonominėms sistemoms. Sandaugą $F \cdot \frac{\partial r}{\partial q_k}$ galime užrašyti taip

$$F \cdot \frac{\partial r}{\partial q_k} = \sum_{s=1}^{N} F_s \cdot \frac{\partial r_s}{\partial q_k}.$$

čia F_s ir r_s yra trimačiai vektoriai.

Tuo atveju, kai $F_s = \nabla_{r_s} U(r, r_1, ..., r_N)$, (3.6) lygtis galime užrašyti taip

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_k^{'}} - \frac{\partial L}{\partial q_k}, \ k = 1, ..., n \tag{3.7}$$

$L = E + U$ yra vadinama Lagranžo funkcija.

Teorema. Tegul f_α ir U yra stacionarūs. Tada galioja energijos tvermės dėsnis $E - U = const$.

Įrodymas. Iš (3.7) gauname

$$\sum_{k=1}^{n} dq_k \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_k^{'}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k = 0,$$

arba

$$\sum_{k=1}^{n} (q_k^{'} d\frac{\partial L}{\partial q_k^{'}} - \frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k) = d\sum_{k=1}^{n} q_k^{'} \frac{\partial L}{\partial q_k^{'}}$$

$$- \sum_{k=1}^{n} (\frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial L}{\partial q_k^{'}} dq_k^{'}) = 0.$$

Iš čia išplaukia pirmasis integralas

$$\sum_{k=1}^{n} q_k^{'} d\frac{\partial L}{\partial q_k^{'}} - L = c = const \tag{3.8}$$

nes L nepriklauso nuo t. Be to

$$L = U + \frac{1}{2}|\frac{\partial r}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} l_k q_k^{'}|^2 = U + \frac{1}{2}m|\sum_{k=1}^{n} l_k q_k^{'}|^2,$$

nes $\frac{\partial r}{\partial t} = 0$.

Bet

$$\sum_{s=1}^{n} q_s^{'} \frac{\partial L}{\partial q_s^{'}} = m\sum_{s=1}^{n} q_s^{'} \sum_{k=1}^{n} l_k \cdot l_s q_k^{'} = m|\sum_{k=1}^{n} l_k q_k^{'}|^2 = 2E.$$

Iš čia ir (3.8) gauname, kad $2E - U - E = E - U = C$.

Pavyzdys. m masės taškas juda veikiamas centrinės jėgos $F = f(|r|)r^{\circ}$. Užrašyti judėjimo lygtis.

$$E = \frac{1}{2}m(|r|^{'2} + |r|^2\varphi^{'2}),\ U = \int_{|r_0|}^{|r|} f(s)ds,\ q_1 = |r|_1,\ q_2 = \varphi.$$

Todėl judėjimo lygtys yra tokios:

$$m|r|^{''} - m|r|\varphi^{'2} = f(|r|),$$

$$\frac{d}{dt}m|r|^2\varphi^{'} = 0.$$

4. Rauto neholonominių sistemų lygtys

Nagrinėsime neholononines sistemas suvaržytas idealiais ryšiais. Lagranžo pirmosios rūšies lygtys yra tokios

$$mw = F + \sum_{\alpha=1}^{\kappa} \lambda_\alpha \nabla_r f_\alpha + \sum_{\beta=1}^{\gamma} \mu_\beta \nabla_v g_\beta, \tag{4.1}$$

$$f_\alpha(t, r) = 0,\ \alpha = 1, ..., \kappa, \tag{4.2}$$

$$g_\beta(t, r, v) = 0,\ \beta = 1, ..., \gamma. \tag{4.3}$$

Įvedę koordinates $q_1, ..., q_n$, $n = 3N - \kappa$, gausime, kad

$r = r(t, q_1, ..., q_n)$, o $f_\alpha(t, r(t, q_1, ..., q_n)) = 0$. Padauginę (4.1) skaliariškai iš $l_k = \frac{\partial r}{\partial q_k}$, gausime

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E}{\partial q_k^{'}} - \frac{\partial E}{\partial q_k} = F \cdot \frac{\partial r}{\partial q_k} + \sum_{\beta=1}^{\gamma} \mu_\beta \nabla_v g_\beta \cdot \frac{\partial r}{\partial q_k}.$$

Pasinaudoję tuo, kad $l_k = \frac{\partial v}{\partial q_k^{'}}$ iš čia ir (4.3) gauname Rauto (Routh) lygtis

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E}{\partial q_k^{'}} - \frac{\partial E}{\partial q_k} = F \cdot \frac{\partial r}{\partial q_k} + \sum_{\beta=1}^{\gamma} \mu_\beta \frac{\partial g_\beta}{\partial q_k^{'}}, \tag{4.4}$$

$$g_\beta(t, q_1, ..., q_n, q_1^{'}, ..., q_n^{'}) = 0,\ \beta = 1, ..., \gamma.$$

5. Madži (Maggi) lygtys.

Jas išvesime pasinaudoję Lagranžo pirmosios rūšies lygtimis

$$mw = F + \sum_{\alpha=1}^{\kappa} \lambda_\alpha \nabla_r f_\alpha + \sum_{\beta=1}^{\gamma} \mu_\beta \nabla_v g_\beta, \tag{5.1}$$

$$f_\alpha(t, r) = 0,\ \alpha = 1, ..., \kappa,$$

$$g_\beta(t, r, v) = 0,\ \beta = 1, ..., \gamma.$$

Remdamiesi geometriniais ryšiais, gauname

$$r = r(t, q_1, ..., q_n),\ n = 3N - \kappa.$$

Tuomet išsprendę diferencialinius ryšius turėsime

$$q_k^{'} = z_k(t, q_1, ..., q_n, q_{\gamma+1}^{'}, ..., q_n^{'}),\ k = 1, 2, ..., \gamma, \tag{5.2}$$

$$v = \sum_{k=1}^{\gamma} q_k^{'} \frac{\partial r}{\partial q_k} + \sum_{k=\gamma+1}^{n} q_k^{'} \frac{\partial r}{\partial \varphi_k} + \frac{\partial r}{\partial t}$$

$$= \sum_{k=1}^{\gamma} z_k(t, q_1, ..., q_n, q_{\gamma+1}^{'}, ..., q_n^{'}) \frac{\partial r}{\partial q_k} + \sum_{k=\gamma+1}^{n} q_k^{'} \frac{\partial r}{\partial q_k} + \frac{\partial r}{\partial t}.$$

Iš čia

$$\frac{\partial v}{\partial q_s^{'}} = l_s + \sum_{k=1}^{\gamma} \frac{\partial z_k}{\partial q_s^{'}} l_s,\ l_s = \frac{\partial r}{\partial q_s^{'}} = \frac{\partial r}{\partial q_s}.$$

Padauginę (5.1) lygtis skaliariškai iš $\frac{\partial v}{\partial q_s^{'}}$, gausime

$$(mw - F) \cdot l_s + (mw - F) \cdot \sum_{k=1}^{\gamma} l_k \frac{\partial z_k}{\partial q_s^{'}} = 0, \text{ nes } l_s \cdot \nabla_r f_\alpha = 0,\ \frac{\partial v}{\partial q_s^{'}} \cdot \nabla_v g_\beta = 0.$$

Atlikę veiksmus, gausime

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E}{\partial q_s^{'}} - \frac{\partial E}{\partial q_s} - F \cdot \frac{\partial r}{\partial q_s} + \sum_{k=1}^{\gamma} \frac{\partial z_k}{\partial q_s^{'}} \{ \frac{d}{dt}\frac{\partial E}{\partial q_k^{'}} - \frac{\partial E}{\partial q_k} - F \cdot \frac{\partial r}{\partial q_k} \},\ s = \gamma + 1, ..., n. \tag{5.3}$$

Prijungę (5.2) diferencialinius ryšius gausime Madži lygtis.

6. Apelio (Appell) lygtys

Jas išvesime iš Lagranžo pirmosios rūšies lygčių. Remdamiesi geometriniais ryšiais gauname

$$r = r(t, q_1, ..., q_n),\ n = 3N - \kappa,$$

$$v = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial r}{\partial q_k} q_k' + \frac{\partial r}{\partial t},$$

$$w = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial r}{\partial q_k} q_k'' + O(t, q_1, ..., q_n, q_1', ..., q_n').$$

Įrašę w į iš diferencialinių ryšių išvestą lygybę turėsime

$$\nabla_v g_\beta \cdot w + O_\beta(t, q_1, ..., q_n, q_1', ..., q_n')$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \nabla_v g_\beta \cdot \frac{\partial r}{\partial q_k} q_k'' + O_\beta(t, q_1, ..., q_n, q_1', ..., q_n') = 0.$$

Iš šių lygčių išsprendę g_β'', $\beta = 1, ..., \gamma$, gausime

$$g_\beta'' = z_\beta(q_{\beta+1}'', ..., q_n'', t, q_1, ..., q_n, q_1', ..., q_n'),\ \beta = 1, ..., \gamma.$$

Tada

$$w = \sum_{k=1}^{\gamma} l_k z_k(q_{\beta+1}'', ..., q_n'', ...) + \sum_{\gamma+1}^{n} l_k q_k'' + O(t, q_1, ..., q_n, q_1', ..., q_n').$$

Iš čia

$$\frac{\partial w}{\partial q_s''} = l_s + \sum_{k=1}^{\gamma} l_k \frac{\partial z_k}{\partial q_s''},\ s = \gamma + 1, ..., n.$$

Padauginę (4.1) skaliariškai iš $\frac{\partial w}{\partial q_s''}$ turėsime

$$mw \cdot \frac{\partial w}{\partial q_s''} = F \frac{\partial w}{\partial q_s''} \sum_{\beta=1}^{\gamma} \mu_s \nabla_v g_\beta \cdot \frac{\partial w}{\partial q_s''}.$$

Čia pasinaudota tuo, kad $\nabla_r f_\alpha \cdot l_s = 0$. Išdiferencijavę diferencialinius ryšius turėsime

$$K_\beta(w) := \nabla_v g_\beta \cdot w + O(t, q_1, ..., q_n, q_1', ..., q_n') = 0.$$

Iš čia

$$\nabla_w K_\beta = \nabla_w g_\beta,\ \nabla_w g_\beta \cdot \frac{\partial w}{\partial q_s''} = \nabla_w K_\beta \cdot \frac{\partial w}{\partial q_s''} = \frac{\partial K_\beta}{\partial q_s''},\ s = \gamma + 1, ..., n.$$

Vadinasi

$$\frac{\partial}{\partial q_s''} S = F \cdot \frac{\partial w}{\partial q_s''},\ S = \frac{1}{2} m |w|^2,\ s = \gamma + 1, ..., n.$$

Prijungę prie šių lygčių ryšius (5.2), turėsime Apelio lygtis. S vadiname pagreičių energija.

Pastebėsime, kad funkcijai S galioja Kioningo tipo formulė.

$$S = \frac{1}{2} m |w_c|^2 + S_c'',\ S_c'' = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} m_k |w_k^*|^2.$$

Uždavinys. Išspręskite rogučių slydimo uždavinį nuožulnia idealia plokštuma. Rogutes vaizduoti stačiakampiu, kurio inercijos momentas atžvilgiu ašies einančios per jo masių centrą statmenai jo plokštumai yra žinomas. Uždavinį išspręsti Rauto, Madži ir Apelio metodais.

7. Hamiltono kanoninės lygtys

Nagrinėsime holonominių sistemų judėjimą potencinių jėgų atveju. Naudosimės Lagranžo antrosios rūšies lygtimis

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_s'} = \frac{\partial L}{\partial q_s'},\ s = 1, ..., n. \tag{7.1}$$

čia

$$L = E + U.$$

Apibrėžę apibendrintą impulsą $p_s = \frac{\partial L}{\partial q_s'}$ gauname

$$p_s' = \frac{\partial L}{\partial q_s}. \tag{7.2}$$

Bet $L = E + U = U + \frac{1}{2}m|\frac{\partial r}{\partial t} + \sum\limits_{k=1}^{n} l_k q_k'|^2$. Iš čia

$$p_s = m\sum_{k=1}^{n} l_k \cdot l_s q_k' + m\frac{\partial r}{\partial t} \cdot l_s. \tag{7.8}$$

Kadangi

$$|\sum_{k=1}^{n} l_k q_k'|^2 = \sum_{s;k=1}^{n} l_k \cdot l_s q_k' q_s'$$

yra teigiamai apibrėžta kvadratinė forma, tai pagal Silvestro teoremą

$$det\left\|l_k \cdot l_s\right\|_{k,s=1}^{n} > 0.$$

Todėl (7.5) lygtys vienareikšmiškai apibrėžia

$$q_k' = z_k(t, q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n),\ k = 1, ..., n. \tag{7.9}$$

Apibrėžkime Hamiltono funkciją

$$H_k(t, q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n) = (\sum_{k=1}^{n} p_k q_k' - L(t, q_1, ..., q_n, q_1', ..., q_n'))|_{q_k'=z_k}. \tag{7.10}$$

Iš čia, atsižvelgę į p_s apibrėžimą, gauname

$$\frac{\partial H}{\partial q_s} = \sum_{k=1}^{n} p_k \frac{\partial q_k'}{\partial q_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_k'}\frac{\partial q_k'}{\partial q_s} = -\frac{\partial L}{\partial q_s'},$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_s} = q_s' + \sum_{k=1}^{n} p_k \frac{\partial q_k'}{\partial p_s} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_k'}\frac{\partial q_k'}{\partial p_s} = q_s'.$$

Pagaliau turint omenyje (7.2) užrašome kanonines Hamiltono lygtis

$$q_s^{'} = \frac{\partial H}{\partial p_s},$$

$$p_s^{'} = -\frac{\partial H}{\partial q_s},\ s = 1, ..., n. \tag{7.11}$$

Tegul geometriniai ryšiai f_α ir potencialas u yra stacionarūs. Tada r taip pat nepriklauso nuo t. Todėl

$$E = \frac{1}{2}m|\sum_k^n q_k^{'} l_k|^2,\ \sum_k^n p_k q_k^{'} = \sum_k^n q_k^{'} \frac{\partial E}{\partial q_k^{'}} = 2E,\ H = (E-U)_{q_k^{'}=z_k}.$$

Vadinasi, šiuo atveju, Hamiltono funkcija yra sistemos mechaninė energija, kurioje $q_k^{'}$ išreikštos (7.9) lygtimis.

Tarkime, kad $q_1, ..., q_n$ ir $p_1, ..., p_n$ yra sistemos (7.11) sprendinys, o H stacionari. Tada, turėdami omenyje (7.11), gauname

$$\frac{d}{dt}H = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial q_k} q_k^{'} + \frac{\partial H}{\partial p_k} p_k^{'}\right) = 0.$$

Vadinasi $H(q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n) = c$ yra (7.11) lygčių pirmasis integralas.

Tegul H nepriklauso nuo $q_1, ..., q_l$, $l \leq n$. Tada $p_k = c_k$, $k = 1, ..., l$, yra (7.11) sistemos pirmieji integralai

8. Jakobio metodas Hamiltono lygtims spręsti

Nagrinėsime holonomines sistemas potencinių jėgų atveju. Galioja kanoninės Hamiltono lygtys

$$q_k^{'} = \frac{\partial H}{\partial p_k},\ p_k^{'} = \frac{\partial H}{\partial q_k}.$$

Tarkime, kad $p_k = p_k(t, q_1, ..., q_n)$. Tada

$$\frac{\partial p_k}{\partial t} + \sum_{s=1}^n \frac{\partial p_k}{\partial q_s} q_s^{'} = -\frac{\partial H}{\partial q_k},$$

arba

$$\frac{\partial p_k}{\partial t} + \sum_{s=1}^n \frac{\partial p_k}{\partial q_s}\frac{\partial H}{\partial p_s} + \frac{\partial H}{\partial q_k} = 0. \tag{8.2}$$

Tarkime, kad $p_k = \frac{\partial S_1(t, q_1, ..., q_n)}{\partial q_k}$.

Tada

$$\frac{\partial p_k}{\partial q_s} = \frac{\partial^2 S_1}{\partial q_k \partial \varphi_s} = \frac{\partial}{\partial q_k} p_s,$$ o (8.2) galima užrašyti taip

$$\frac{\partial^2 S_1}{\partial t \partial \varphi_k} + \sum_{s=1}^n \frac{\partial p_s}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_s} + \frac{\partial H}{\partial q_k} = 0$$

arba

$$\frac{\partial}{\partial q_k}\left\{\frac{\partial S_1}{\partial t} + H(t, q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n)\right\} = 0.$$

Iš čia

$$\frac{\partial S_1}{\partial t} + H(t, q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n, \frac{\partial S_1}{\partial q_1}, ..., \frac{\partial S_1}{\partial q_n}) = f(t),$$

kur $f(t)$ yra laisva funkcija. Paėmę $S_1 = S(t, q_1, ..., q_n) + \int (f(t))dt$, gausime Jakobio lygtį Jakobio funkcijai rasti.

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(t, q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n, \frac{\partial S}{\partial q_1}, ..., \frac{\partial S}{\partial q_n}) = 0. \tag{8.3}$$

Apibrėžimas. Priklausantį nuo $n+1$ laisvos konstantos (8.3) lygties sprendinį

$$S = \widetilde{S}(t, q_1, ..., q_n, c_1, ..., c_n) + c_{n+1}, \tag{8.4}$$

tenkinatį sąlygą,

$$det \left\| \frac{\partial^2 \widetilde{S}}{\partial q_k \partial c_s} \right\|_{k,s=1}^{n} \neq 0.$$

vadinsime jos pilnuoju integralu. Įrašę (8.4) į (8.3) įsitikiname, kad (8.4) yra (8.3) sprendinys, jeigu $\widetilde{S}$ yra jos sprendinys.

Jakobio teorema. Jei (8.4) yra (8.3) lygties pilnasis integralas, tai

$$p_k = \frac{\partial \widetilde{S}}{\partial q_k}, \ \frac{\partial \widetilde{S}}{\partial c_k} = a_k, \ k = 1, ..., n,$$

a_k laisvos konstantos, yra Hamiltono kanoninių lygčių pirmieji nepriklausomi integralai.

Pavyzdžiai.

1. Atvejis, kai H stacionari. Tada, įrašę $S = -ht + w(q_1, ..., q_n)$, $h = const$, į (8.3), gauname lygtį

$$H(q_1, ..., q_n, \frac{\partial w}{\partial q_1}, ..., \frac{\partial w}{\partial q_n}) = h. \tag{8.5}$$

Tarkime, kad (8.5) lygties pilnasis integralas yra

$$w = \widetilde{w}(q_1, ..., q_n, c_1, ..., c_{n-1}, h) + c_n$$

Tuomet pagal Jakobio teoremą Hamiltono lygčių pirmieji inetgralai yra tokie

$$p_k = \frac{\partial \widetilde{w}}{\partial q_k}, \ k = 1, ..., n, \ \frac{\partial \widetilde{w}}{\partial c_k} = a_k, \ k = 1, ..., n-1, \ \frac{\partial \widetilde{w}}{\partial h} = a_n + t.$$

Iš lygčių $\frac{\partial \widetilde{w}}{\partial c_k} = a_k$ randame $q_k = I_k(q_n, c_1, ..., c_{n-1}, h, a_1, ..., a_n)$.
o iš $\frac{\partial \widetilde{w}}{\partial h} = a_n + t$ randame $q_n = I_n(t, c_1, ..., c_{n-1}, h, a_1, ..., a_n)$.

2. Atvejis, kai H nepriklauso nuo $q_1, ..., q_l, l \leq n$. Tuomet paėmę (8.3) lygtyje

$$s = \sum_{k=1}^{l} c_k q_k + z(t, q_{l+1}, ..., q_n, c_1, ..., c_n)$$

gausime lygtį

$\frac{\partial z}{\partial t} + H(t, q_{l+1}, ..., q_n, c_1, ..., c_l, \frac{\partial z}{\partial q_{l+1}}, ... \frac{\partial z}{\partial q_n}) = 0.$

Jei šios lygties pilnasis integralas yra $z = \widetilde{z}(t, q_{l+1}, ..., q_n, c_1, ..., c_n) + c_{n+1}$, tai Hamiltono lygčių pirmieji integralai bus tokie

$p_k = c_k,\ k = 1, ..., l,\ p_k = \frac{\partial z}{\partial q_k},\ k = l+1, ..., n,$

$q_k + \frac{\partial z}{\partial q_k} = a_k,\ k = 1, ..., l,\ \frac{\partial z}{\partial q_k} = a_k,\ k = l+1, ..., n.$

3. Tarkime, kad $q_1, ..., q_j, p_1, ..., p_j$ į Hamiltono funkciją įeina superpozicijos būdu, t.y.

$H(t, \varphi(q_1, ..., q_j, \frac{\partial S}{\partial q_1}, ..., \frac{\partial S}{\partial q_j}) q_{j+1}, ..., q_n, \frac{\partial S}{\partial q_{j+1}}, ..., \frac{\partial S}{\partial q_n}).$

Įrašę $S = S_1(q_1, ..., q_j) + S_2(t, q_{j+1}, ..., q_n)$ į (8.3) lygtį gauname dvi lygtis

$\varphi(q_1, ..., q_j, \frac{\partial S_1}{\partial q_1}, ..., \frac{\partial S_1}{\partial q_j}) = c_j,\ \frac{\partial S_2}{\partial t} + H(t, c_j, q_{j+1}, ..., q_n, \frac{\partial S_2}{\partial q_{j+1}}, ..., \frac{\partial S_2}{\partial q_n}) = 0.$

Jeigu jų pilnieji integralai yra

$S_1(q_1, ..., q_j, c_1, ..., c_j) + a,\ a = const,$

$S_2(q_{j+1}, ..., q_n, t, c_{j+1}, ..., c_n) + b,\ b = const,\ a + b = c_{n+1},$

tai Hamiltono lygčių pirmieji integralai yra tokie

$p_k = \frac{\partial S_1}{\partial q_k},\ k = 1, ..., j,\ p_k = \frac{\partial S_2}{\partial q_k},\ k = j+1, ..., n,$

$\frac{\partial S_1}{\partial c_k} = a_k,\ k = 1, ..., j-1,\ \frac{\partial S_2}{\partial c_k} = a_k,\ k = j+1, ..., n,\ \frac{\partial S_1}{\partial c_j} + \frac{\partial S_2}{\partial c_j} = a_j$

4. Jei visus argumentus galime sugrupuoti po du, tai

$H = H(t, \varphi_1(q_1, p_1), ..., \varphi_n(q_n, p_n))$. Tada $S = \sum\limits_{k=1}^{n} S_k(q_k) + S_0(t)$, kur S_0 ir S_k yra lygčių

$S_0^{'} = -H(t, c_1, ..., c_n),\ \varphi_k(q_k, S_k^{'}) = c_k$ sprendiniai.

Tada

$p_k = S_k^{'},\ \frac{\partial S_k}{\partial c_k} + \frac{\partial S_0}{\partial c_k} = a_k,\ k = 1, ..., n,$

yra Hamiltono lygčių pirmieji integralai.