ALGIRDAS AMBRAZEVIČIUS

ĮVADAS Į KOKYBINĘ PAPRASTŲJŲ DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ TEORIJĄ

Vilnius
2000

TURINYS

1 S K Y R I U S

Bendros sąvokos

1.1. SPRENDINIŲ EGZISTAVIMAS, VIENATIS, PRATĘSIMAS

Šiame skyrelyje be įrodymo[1] pateiksime kai kuriuos teiginius iš paprastųjų diferencialinių lygčių teorijos. Iš pradžių nagrinėsime vienos lygties su viena nežinomąja funkcija atvejį. Tiksliau nagrinėsime pirmosios eilės paprastąją diferencialinę lygtį, išreikštą išvestinės atžvilgiu

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (t, x) \in D; \tag{1.1}$$

čia D – sritis plokštumoje $\mathbb{R}^2$, $f \in \mathrm{C}(D)$.

A p i b r ė ž i m a s. Sakysime, funkcija $\varphi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ yra (1.1) lygties sprendinys, jeigu:

1. Funkcija φ yra diferencijuojama intervale $\langle a, b\rangle$.
2. Taškas $(t, \varphi(t)) \in D$, $\forall t \in \langle a, b\rangle$.
3. Teisinga tapatybė $\dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t))$, $\forall t \in \langle a, b\rangle$.

P a s t a b a Pagal prielaidą f yra tolydi funkcija. Todėl sprendinio išvestinė $\dot{\varphi}$ taip pat yra tolydi intervale $\langle a, b\rangle$ funkcija. Be to, sprendinio apibrėžimo sritis yra intervalas, t.y. jungioji aibė. Pavyzdžiui, funkcija $x = (C - t)^{-1}$, apibrėžta $\forall t \neq C$, nėra lygties

$$\dot{x} = x^2, \quad D = \mathbb{R}^2 \tag{1.2}$$

sprendinys, nors visos trys apibrėžimo sąlygos yra patenkintos. Antra vertus, funkcija $x = (C - t)^{-1}$, apibrėžta intervale $(-\infty, C)$ arba intervale (C, ∞), yra šios lygties sprendinys.

Iš pateikto pavyzdžio išplaukia, kad (1.2) diferencialinė lygtis turi be galo daug sprendinių. Pasirodo, tokia situacija yra bendra, t.y (1.1) lygtis taip pat turi be galo daug sprendinių. Norint išskirti kurį nors vieną sprendinį, reikia pareikalauti, kad jis tenkintų tam tikrą papildomą sąlygą. Dažniausiai tokia sąlyga apibrėžiama taip:

$$x(t_0) = x_0. \tag{1.3}$$

Ši sąlyga vadinama *pradine* arba *Koši sąlyga.* Jeigu (1.1) lygtį nagrinėsime kartu su (1.3) sąlyga, tai tokį uždavinį vadinsime *pradiniu* arba *Koši uždaviniu.*

Tegu $x = \varphi(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$ yra (1.1) lygties sprendinys. Tada funkcija φ srityje D apibrėžia kreivę, kuri yra vadinama (1.1) lygties *i*ntegraline kreive.

1.1 **teorema.** *Tegu f yra tolydi srityje D funkcija. Tada $\forall (t_0, x_0) \in D$ egzistuoja toks (1.1) lygties sprendinys $x = \varphi(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$, kad $x(t_0) = x_0$.*

[1] Įrodymus galima rasti [6] knygoje.

Teoremoje tvirtinama, kad per kiekvieną tašką $(t_0, x_0) \in D$ eina bent viena (1.1) lygties integralinė kreivė, jeigu tik funkcija f yra tolydi srityje D. Karu yra galima ir tokia situacija, kai per vieną srities D tašką eina kelios (1.1) lygties integralinės kreivės. Pavyzdžiui, lygties

$$\dot{x} = 2\sqrt{|x|}$$

dešinioji pusė yra tolydi funkcija visoje plokštumoje $\mathbb{R}^2$. Pagal 1.1 teoremą per kiekvieną tašką $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ eina bent viena šios lygties integralinė kreivė. Tiesiogiai galima įsitikinti, kad funkcija $\varphi(t) \equiv 0$, kai $t \in (-\infty, \infty)$, o taip pat funkcijos:

$$\varphi(t) = \begin{cases} (t-C)^2, & \text{kai } t \in (C, \infty); \\ 0, & \text{kai } t \in (-\infty, C) \end{cases}$$

ir

$$\varphi(t) = \begin{cases} -(t-C)^2, & \text{kai } t \in (-\infty, C); \\ 0, & \text{kai } t \in (C, -\infty), \end{cases}$$

tenkina pastarąją lygtį. Tarp šių funkcijų yra be galo daug tokių, kurios tenkina sąlygą $\varphi(t_0) = 0$ (pakanka paimti $C > t_0$). Todėl per tašką $(t_0, 0)$ eina be galo daug nagrinėjamos lygties integralinių kreivių.

A p i b r ė ž i m a s. Sakysime, sritis D yra *vienaties sritis* (1.1) lygčiai, jeigu bet kokie du jos sprendiniai, apibrėžti intervale $\langle a, b\rangle$ ir sutampantys taške $t_0 \in \langle a, b\rangle$, sutampa visame intervale $\langle a, b\rangle$.

1.2 **teorema.** *Tarkime, funkcijos f dalinė išvestinė f_x egzistuoja ir yra tolydi srityje D. Tada sritis D yra vienaties sritis* (1.1) *lygčiai.*

P a s t a b a. Teorema išliks teisinga, jeigu vietoje f_x tolydumo pareikalausime, kad funkcija f srityje D lokaliai tenkintų Lipšico sąlygą kintamojo x atžvilgiu.

Jeigu funkcija f ir jos dalinė išvestinė f_x yra tolydžios srityje D, tai pagal 1.2 teoremą per kiekvieną srities D tašką eina lygiai viena (1.1) lygties integralinė kreivė. Tačiau kartais ši savybė išlieka ir tuo atveju, kai funkcija f yra tik tolydi. Pavyzdžiui lygtis

$$\dot{x} = f(t)g(x), \quad t \in (a, b),\ x \in (c, d) \tag{1.4}$$

kiekvienam $t_0 \in (a, b)$, $x_0 \in (c, d)$ turi vienintelį sprendinį, tenkinantį pradinę sąlygą $x(t_0) = x_0$, jeigu $f \in \mathrm{C}(a, b)$, $g \in \mathrm{C}(c, d)$ ir $g(x) \neq 0$, $\forall x \in (c, d)$. Tuo lengvai galime įsitikinti, jeigu atskirsime kintamuosius ir gautą lygtį suintegruosime. Taigi sritis

$$D = \{(t, x) : t \in (a, b),\ x \in (c, d)\}$$

yra vienaties sritis (1.4) lygčiai, nors dešinioji šios lygties pusė yra tik tolydi.

Išskirsime kelis atvejus, kai galima garantuoti sprendinio egzistavimą ir vienatį visoje nagrinėjamoje srityje.

1.3 **teorema.** *Tegu funkcija f yra tolydi juostoje*

$$D = \{(t, x) : a < t < b,\ -\infty < x < \infty\}$$

ir kintamojo x atžvilgiu tenkina Lipšico sąlygą

$$|f(t,x) - f(t,\bar{x})| \leq L(t)|x - \bar{x}|, \quad \forall (t,x), (t,\bar{x}) \in D, \quad L \in \mathrm{C}(a,b). \tag{1.5}$$

Tada $\forall (t_0, x_0) \in D$ *egzistuoja vienintelis* (1.1), (1.3) *Koši uždavinio sprendinys* $x = \varphi(t)$, *apibrėžtas visame intervale* (a,b); *čia skaičiai* a *ir* b *gali įgyti bet kokias reikšmes, net ir simbolius* $\pm\infty$.

1.4 **teorema.** *Tegu funkcija f yra tolydi juostoje*

$$D = \{(t,x) : a \leq t \leq b, \, -\infty < x < \infty\}$$

ir kintamojo x atžvilgiu tenkina Lipšico sąlygą

$$|f(t,x) - f(t,\bar{x})| \leq L|x - \bar{x}|, \quad \forall (t,x), (t,\bar{x}) \in D. \tag{1.6}$$

Tada $\forall (t_0, x_0) \in D$ *egzistuoja vienintelis aprėžtas* (1.1), (1.3) *Koši uždavinio sprendinys* $x = \varphi(t)$, *apibrėžtas visame segmente* $[a,b]$.

A p i b r ė ž i m a s. Tegu $x = \varphi(t), t \in \langle a, b\rangle$ ir $x = \psi(t), t \in \langle \alpha, \beta\rangle$ yra (1.1) lygties sprendiniai. Be to, tegu $\langle \alpha, \beta\rangle \subset \langle a, b\rangle$ ir

$$\varphi(t) = \psi(t), \quad \forall t \in \langle \alpha, \beta\rangle.$$

Tada sakysime, kad sprendinys $x = \psi(t)$ yra sprendinio $x = \varphi(t)$ *siaurinys*, o sprendinys $x = \varphi(t)$ yra sprendinio $x = \psi(t)$ *tęsinys*.

Kiekvieną (1.1) lygties sprendinį, apibrėžta intervale $\langle a, b]$, galima pratęsti į dešinę, o sprendinį, apibrėžtą intervale $[a, b\rangle$, galima pratęsti į kairę. Jeigu $x = \varphi(t)$, $t \in (a,b)$ yra (1.1) lygties sprendinys ir jo negalima pratęsti nei į kairę nei į dešinę, tai toks sprendinys vadinamas *pilnuoju*, o intervalas (a,b) – *maksimaliu sprendinio egzistavimo intervalu.*

1.5 **teorema.** *Tarkime, funkcija f ir jos dalinė išvestinė f_x yra tolydžios srityje D ir* (t_0, x_0) *– laisvai pasirinktas taškas srityje D. Tada egzistuoja vienintelis* (1.1) *lygties pilnasis sprendinys* $x = \varphi(t)$, *apibrėžtas maksimaliame intervale* (a,b), *tenkinantis* (1.3) *sąlygą. Be to, taškas* $t_0 \in (a,b)$ *ir, kai* $t \to a + 0$ *arba kai* $t \to b - 0$, *taškas* $(t, \varphi(t))$ *artėja į* ∂D.

Toliau kalbėdami apie diferencialinės lygties sprendinį, jeigu nenurodyta priešingai, visada turėsime omenyje pilnąjį sprendinį.

Tegu $D = \{(t,x) : a < t < b, \, -\infty < x < \infty\}$ ir f yra tiesinė kintamojo x atžvilgiu funkcija, t.y. $f(t,x) = p(t)x + q(t)$, $p, q \in \mathrm{C}(a,b)$. Tada $\forall (t_0, x_0) \in D$ tiesinė lygtis

$$\dot{x} = p(t)x + q(t)$$

turi vienintelį sprendinį, apibrėžtą visame intervale (a,b), tenkinantį sąlygą $x(t_0) = x_0$. Iš tikrųjų, funkcijos f dalinė išvestinė $f_x = p \in \mathrm{C}(a,b)$. Todėl 1.3 teoremoje galime imti $L = p$.

Tegu $D = \{(t,x) : a \leq t \leq b,\ -\infty < x < \infty\}$ ir yra teisinga nelygybė

$$|f_x(t,x)| \leq L, \quad \forall (t,x) \in D.$$

Tada $\forall (t_0, x_0) \in D$ egzistuoja vienintelis aprėžtas (1.1), (1.3) Koši uždavinio sprendinys, apibrėžtas visame segmente $[a,b]$ (žr. 1.4 teoremą). Iš pastarosios nelygybės išplaukia, kad funkcija f kintamojo x atžvilgiu auga ne greičiau už tiesinę funkciją. Tuo atveju, kai funkcija f kintamojo x atžvilgiu auga greičiau už tiesinę funkciją, situacija gali iš esmės pasikeisti. Tiksliau, gali atsitikti taip, kad sprendinio negalima pratęsti į visą intervala (a,b) arba pratęstas į visą intervalą (a,b) sprendinys nėra aprėžtas. Pavyzdžiui, funkcija $f(t,x) = x^2$ yra apibrėžta ir diferencijuojama visoje plokštumoje $\mathbb{R}^2$. Todėl per kiekvieną šios plokštumos tašką eina lygiai viena lygties

$$\dot{x} = x^2$$

integralinė kreivė. Iš pirmo žvilgsnio atrodo, kad nėra jokių kliūčių sprendinį neribotai pratęsti tiek į kairę, tiek į dešinę. Tačiau taip nėra. Šiuo atveju funkcija f kintamojo x atžvilgiu auga kaip kvadratinė. Todėl negalime tvirtinti, kad egzistuoja pastarosios lygties sprendinys, apibrėžtas visame intervale $(-\infty, \infty)$ ir tenkinantis laisvai pasirinktą pradinę sąlygą $x(t_0) = x_0$. Iš tikrųjų, ši lygtis turi sprendinį $x(t) \equiv 0$, apibrėžtą visame intervale $(-\infty, \infty)$. Likusius sprendinius galima apibrėžti formule

$$x = (C - t)^{-1};$$

čia $t > C$ arba $t < C$, C – laisva konstanta. Tegu $x_0 \neq 0$. Tada iš sąlygos $x(t_0) = x_0$ randame, kad $C = t_0 + x_0^{-1}$. Vadinasi, sprendinys

$$x = \frac{1}{t_0 + x_0^{-1} - t}$$

yra apibrežtas arba intervale $(-\infty, t_0 + x_0^{-1})$, arba intervale $(t_0 + x_0^{-1}, \infty)$. Taigi maksimalus sprendinio egzistavimo intervalas nesutampa su visa tiese. Be to, kai t artėja į intervalo $(-\infty, t_0 + x_0^{-1})$ arba intervalo $(t_0 + x_0^{-1}, \infty)$ kraštinius taškus, taškas $(t, x(t))$ artėja į begalybę.

Visi šie teiginiai apie sprendinių egzistavimą, vienatį ir pratęsimą, išlieka teisingi ir normaliajai paprastųjų diferencialinių lygčių sistemai. Vektoriniu pavidalu ją galima užrašyti taip:

$$\dot{x} = f(t,x), \quad (t,x) \in D; \tag{1.7}$$

čia $f = (f_1, \dots, f_n)$ – žinoma vektorinė funkcija, $x = (x_1, \dots, x_n)$ – ieškoma vektorinė funkcija, D – sritis erdvėje $\mathbb{R}^{n+1}$, $f \in \mathrm{C}(D)$.

Tiesinę nehomogeninę paprastųjų diferencialinių lygčių sistemą patogu užrašyti taip:

$$\dot{x} = A(t)x + q(t), \quad (t) \in (a,b); \tag{1.8}$$

čia $A = \{a_{ij}\}$ – žinoma $n \times n$ eilės matrica, $q = \mathrm{colon}(q_1, \dots, q_n)$ – žinoma vektorinė funkcija, $x = \mathrm{colon}(x_1, \dots, x_n)$ – ieškoma vektorinė funkcija, $a_{ij}, q_i \in \mathrm{C}(a,b)$.

A p i b r ė ž i m a s. Sakysime, funkcija $\varphi : \langle a,b \rangle \to \mathbb{R}^n$ yra (1.7) sistemos sprendinys, jeigu:

1. Funkcija φ yra diferencijuojama intervale $\langle a, b\rangle$.
2. Taškas $(t, \varphi(t)) \in D$, $\forall t \in \langle a, b\rangle$.
3. Teisinga tapatybė $\dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t))$, $\forall t \in \langle a, b\rangle$.

Tegu $x = \varphi(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$ yra (1.7) lygčių sistemos sprendinys. Tada funkcija φ srityje $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ apibrėžia kreivę, kuri yra vadinama šios sistemos *integraline kreive.* Kartu su integraline kreive erdvėje $\mathbb{R}^{n+1}$ sprendinys φ apibrėžia kreivę

$$\{x \in \mathbb{R}^n : x = \varphi(t),\, t \in \langle a, b\rangle\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Taip apibrėžta kreivė, kartu su apėjmo kryptimi, vadinama *trajektorija*, o erdvė $\mathbb{R}^n$ – *fazine erdve.*

Normalioji paprastųjų diferencialinių lygčių sistema turi be galo daug sprendinių. Norint išskirti kurį nors vieną, reikia pareikalauti, kad jis tenkintų kokią nors papildomą sąlygą. Dažniausiai tai yra *pradinė* sąlyga

$$x(t_0) = x_0. \tag{1.9}$$

Tegu D yra vienaties sritis. Tada (1.7) sistemos sprendinys, tenkinantis (1.9) pradinę sąlygą yra funkcija $x = x(t, t_0, x_0)$, apibrėžta aibėje

$$\{(t, t_0, x_0) : (t_0, x_0) \in D,\, t \in I(t_0, x_0)\};$$

čia $I(t_0, x_0)$ yra šio sprendinio apibrėžimo intervalas.

Jeigu funkcija f tiesiogiai nepriklauso nuo kintamojo t, tai (1.7) sistema vadinama *autonomine.* Autonominę sistemą vektoriniu pavidalu galima užrašyti taip:

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \Omega. \tag{1.10}$$

Įvairių fizikinių klasikinės mechanikos, ekonomikos, gyvų organizmų ir daugelio kitų sistemų matematiniai modeliai aprašomi autonominėmis sistemomis.

Nagrinėjant autonominę sistemą, jeigu nenurodyta priešingai, visada reikalausime, kad funkcija f srityje Ω tenkintų Lipšico sąlygą. Ši prielaida garantuoja, kad kiekvienam taškui (t_0, x_0), $x_0 \in \Omega$, egzistuoja vienintelis (1.10) autonominės sistemos sprendinys $x = \varphi(t)$, tenkininantis pradinę sąlygą

$$\varphi(t_0) = x_0 \tag{1.11}$$

ir apibrėžtas maksimaliame intervale $I(t_0, x_0)$.

Kintamieji $x \in \mathbb{R}^n$ yra vadinami *faziniais kintamisiais*, o sritis $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – *fazine erdve.* Jeigu $x = \varphi(t)$ yra autonominės sistemos sprendinys, apibrėžtas intervale I, tai jis apibrėžia parametrinę kreivę srityje Ω. Ši kreivė vadinama *fazine kreive.* Fazinė kreivė, kartu su jos orentacija, t.y. judėjimo kryptimi kreive, kai laikas t auga, vadinama *fazine trajektorija.* Taigi fazinė trajektorija yra integralinės kreivės projekcija lygiagrečiai t ašiai.

Iš sprendinio egzistevimo ir vienaties teoremų išplaukia, kad per kiekvieną tašką $x_0 \in \Omega$ eina vienintelė (1.10), (1.11) Koši uždavinio trajektorija apibrėžta tam tikroje taško $t = t_0$ aplinkoje. Tačiau jeigu yra žinoma, kad trajektorija nepalieka kokio nors kompakto $K \subset \Omega$, tai šią trajektoriją galima pratęsti į visą realių skaičių ašį. Tiksliau yra teisinga tokia teorema.

1.6 **teorema.** *Tegu K yra kompaktas srityje Ω ir $x = \varphi(t)$ yra* (1.10) *autonominės sistemos sprendinys, apibrėžtas maksimaliame intervale (a, b). Tada, jeigu sprendinį $x = \varphi(t),\ t \in (a, b)$ apibrėžianti trajektorija γ nepalieka kompakto K, tai $(a, b) = \mathbb{R}^1$.*

$\triangleleft$ Tegu $x = \varphi(t)$ yra (1.10) sistemos sprendinys, apibrėžtas maksimaliame intervale (a, b) ir $Q = K \times (a, b)$ yra cilindras erdvėje $\mathbb{R}^{n+1}$. Reikia įrodyti, kad $(a, b) = R^1$. Tarkime priešingai, $(a, b) \neq R^1$. Pagal teoremos sąlygą integralinė kreivė $\{(x, t) : x = \varphi(t),\ t \in (a, b)\}$ nepalieka cilindro Q per jo šoninį paviršių. Todėl ji pasiekia cilindrą jo apatiniame ir viršutiniame pagrinduose: $t = a$ ir $t = b$. Tai rieškia, kad taškuose $t = a$ ir $t = b$ funkcija φ yra apibrėžta. Todėl sprendinį $x = \varphi(t)$ galima pratęsti į intervalo (a, b) išorę. Tačiau tai prieštarauja tam, kad sprendinys $x = \varphi(t)$ yra apibrėžtas maksimaliame intervale (a,b). Gauta prieštara įrodo, kad padaryta prielaida yra neteisinga ir $(a, b) = \mathbb{R}^1$. $\triangleright$

P a s t a b a. Įrodant šią teoremą pasinaudojome tik tuo, kad kiekvienam taškui (t_0, x_0), $x_0 \in \Omega$, egzistuoja Koši uždavinio

$$\dot{x} = f(x), \quad x(t_0) = x_0$$

sprendinys, apibrėžtas kokioje nors taško t_0 aplinkoje $|t_0| < \delta$. Todėl iš funkcijos f pakanka reikalauti, kad $f\, \mathrm{C}(\Omega)$. Jeigu (1.6) teoremos sąlygos nėra patenkintos, tačiau funkcija f tenkina Lipšico sąlygą srityje Ω, tai (žr. 1.4) teoremą, galima įrodyti, kad bet kuris (1.10) sistemos sprendinys $x = \varphi(t)$ yra aprėžtas ir jį galima pratęsti į visą realių skaičių ašį.

Iš kitų sistemų autonominė sistema išsiskiria viena svarbia savybe.

1.7 **teorema.** *Tegu $x = \varphi(t), t \in (a, b)$ yra* (1.10) *sistemos sprendinys. Tada $x = \psi(t) = \varphi(t + c), t \in (a - c, b - c), c \in \mathbb{R}$, taip pat yra* (1.10) *sistemos sprendinys.*

$\triangleleft$ Pagal funkcijos ψ apibrėžimą

$$\dot{\psi}(t) = \dot{\varphi}(t + c) = f(\varphi(t + c)) = f(\psi(t)).$$

Taigi integralinė kreivė $x = \varphi(t)$ gaunama iš integralinės kreivės $x = \psi(t)$ poslinkiu teigiama t ašies kryptimi dydžiu C. $\triangleright$

I š v a d o s:

1. Tarkime, Ω yra vienaties sritis ir $x = x(t, t_0, x_0)$ yra (1.10) sistemos sprendinys, tenkinantis (1.9) pradinę sąlygą. Tada $\forall t$ iš maksimalaus sprendinio egzistavimo intervalo yra teisinga lygybė

$$x(t + c, t_0 + c, x_0) = x(t, t_0, x_0). \tag{1.12}$$

   Iš tikrųjų, kai $t = t_0$, reiškiniai kairėje ir dešinėje sutampa su x_0. Kadangi Ω yra vienaties sritis, tai jie sutampa $\forall t$ iš jų apibrėžimo intervalo.

2. Imkime (1.12) formulėje $c = -t_0$. Tada autonominės sistemos sprendinį galima užrašyti taip:

$$x(t, t_0, x_0) = x(t - t_0, 0, x_0) := \varphi(t - t_0, x_0).$$

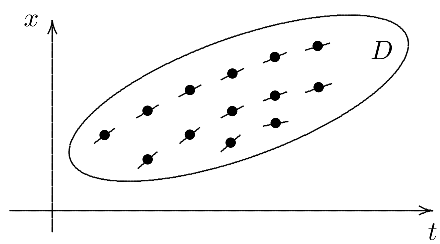
Iš čia išplaukia, kad autonominės sistemos sprendinys priklauso ne nuo laiko momento t, pradinio laiko momento t_0 ir pradinio taško x_0, o nuo laiko atkarpos $t - t_0$ ir pradinio taško x_0. Geometriškai šią savybę galima interpretuoti taip. Jeigu dvi autonominės sistemos trajektorijos turi bendrą tašką, tai jos sutampa.

1.2. KRYPČIŲ LAUKAS

Tegu f yra tolydi funkcija, apibrėžta srityje $D \subset \mathbb{R}^2$. Nagrinėsime lygtį

$$\dot{x} = f(t, x). \tag{1.13}$$

Laisvai pasirinktam taškui $(t, x) \subset D$ priskirkime tiesę su krypties koeficientu $k = f(t, x)$, einančią per šį tašką. Tiksliau, per tašką (t, x) brėžiame nedidelę atkarpėlę su krypties koeficientu k. Visuma tokių atkarpėlių vadinama *krypčių lauku*, atitinkančiu (1.13) lygtį (žr. 1.1 pav.).



1.1 pav.

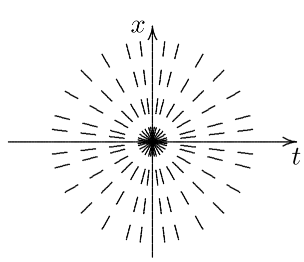
Pagal apibrėžimą kreivė $l \subset D$ yra integralinė tada ir tik tada, kai ji yra glodi ir jos liestinės krypties koeficientas kiekviename taške (t, x) sutampa su $f(t, x)$. Taigi (1.13) lygtis apibrėžia sąryšį tarp kiekvieno integralinės kreivės taško ir jos liestinės krypties koeficiento tame pačiame taške. Šis sąryšis leidžia gauti kokybinį integralinių kreivių vaizdą tiesiogiai iš pačios lygties, jos tiksliai nesprendžiant. Norint apytiksliai nubrėžti inegralines kreives, iš pradžių tikslinga rasti geometrinę vietą taškų, kuriuose krypčių laukas yra pastovus. Ši geometrinė vieta taškų vadinama *izokline*. Izoklinės yra apibrėžiamos lygtimi $f(x, y) = k$.

P a v y z d ž i a i:

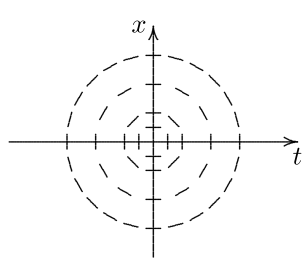
1. Nagrinėsime lygtį

$$\dot{x} = x/t. \tag{1.14}$$

Kiekviename taške $(t, x) \in \mathbb{R}^2$, išskyrus koordinačių pradžios tašką, ieškomos integralinės kreivės krypties koeficientas $k = x/t$, t.y. sutampa su tiesės, einančios per koordinačių pradžią ir tašką (t, x), krypties koeficientu (žr. 1.2 pav.).



1.2 pav.



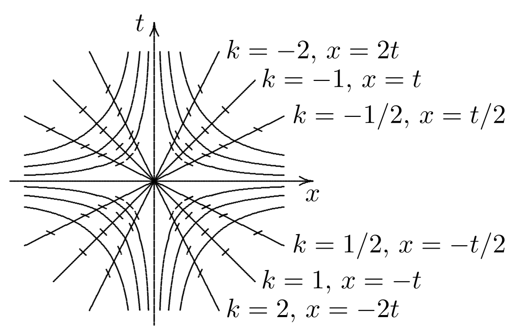
1.3 pav.

Todėl (1.14) lygties integralinės kreivės yra pustiesės

$$x = kt, \quad k \in \mathbb{R}, \quad t \neq 0.$$

2. Nagrinėsime lygtį
$$\dot{x} = -t/x. \tag{1.15}$$
Kiekviename ieškomos integralinės kreivės taške, išskyrus koordinačių pradžios tašką, liestinės krypties koeficientas $k = -t/x$. Kadangi $-t/x \cdot x/t = -1$, tai krypčių laukas sukonstruotas pirmame pavyzdyje yra ortogonalus (1.15) lygties krypčių laukui (žr. 1.3 pav.). Kartu galime tvirtinti, kad (1.15) lygties integralinės kreivės yra pusapskritimiai
$$t^2 + x^2 = a^2, \quad a \in \mathbb{R}, \quad x \neq 0$$
su centru koordinačių pradžioje.

3. Nagrinėsime lygtį
$$\dot{x} = -x/t, \quad t \neq 0. \tag{1.16}$$
Iš pradžių rasime geometrinę vietą taškų, kuriuose krypčių laukas turi tą patį krypties koeficientą k. Priminsime, kad taip apibrėžta aibė taškų vadinama izokline. Nagrinėjamu atveju izoklinės yra pustiesės
$$-x/t = k \Leftrightarrow x = -kt, \quad t \neq 0.$$
Jų taškuose laukas turi tą pačią kryptį (žr. 1.4 pav.).



1.4 pav.

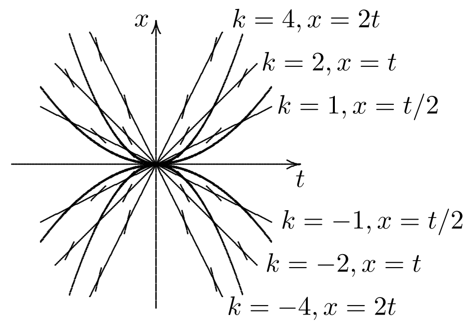
Nubrėžę pakankamą skaičių izoklinių galime spėti, kad integralinės kreivės yra hiperbolių šakos. Iš tikrųjų, atskyrę (1.16) lygtyje kintamuosius ir gautą lygtį suintegravę, gausime, kad integralinės kreivės yra hiperbolių, apibrėžtų lygtimi $x = C/t$, $t \neq 0$, šakos.

4. Nagrinėsime lygtį
$$\dot{x} = 2x/t. \tag{1.17}$$

Šiuo atveju izoklinės yra pustiesės

$$2x/t = k \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}kt, \quad t \neq 0.$$

Jų taškuose laukas turi tą pačią kryptį (žr. 1.5 pav.).



1.5 pav.

Nubrėžę pakankamą skaičių izoklinių galime spėti, kad integralinės kreivės yra pusparabolės, išeinančios iš koordinačių pradžios. Iš tikrųjų, atskyrę (1.17) lygtyje kintamuosius ir gautą lygtį suintegravę, gausime, kad integralinės kreivės yra pusparabolės, apibrėžiamos lygtimi $x = Ct^2$.

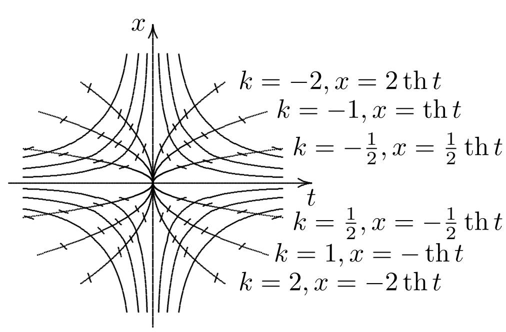
5. Nagrinėsime lygtį

$$\dot{x} = -x/\operatorname{th} t, \quad t \neq 0. \tag{1.18}$$

Šiuo atveju izoklinės yra kreivės, apibrėžtos lygtimi

$$-x/\operatorname{th} t = k \Leftrightarrow x = -k \operatorname{th} t, \quad t \neq 0.$$

Jų taškuose laukas turi tą pačią kryptį (žr. 1.6 pav.).



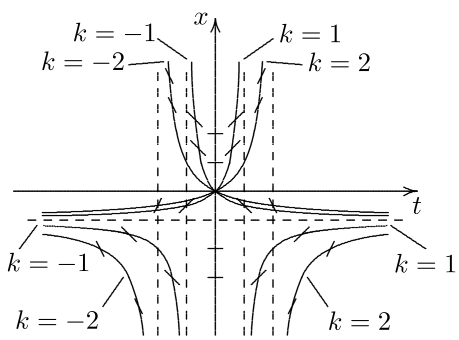
1.6 pav.

Nubrėžę pakankamą skaičių izoklinių galime spėti, kad integralinės kreivės yra "hiperbolių" šakos. Iš tikrųjų, atskyrę (1.18) lygtyje kintamuosius ir gautą lygtį suintegravę, gausime, kad integralinės kreivės yra hiperbolių, apibrėžtų lygtimi

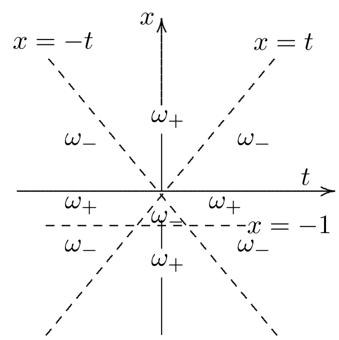
$$x = \frac{C}{\operatorname{ch} t}, \quad t \neq 0,$$

šakos.

6. Nagrinėsime lygtį
$$\dot{x} = t + t/x, \quad x \neq 0. \tag{1.19}$$
Šią lygtį atitinkančios izoklinės yra hiperbolės, apibrėžiamos lygtimi (žr. 1.7 pav.)
$$t + t/x = k \Leftrightarrow x = \frac{t}{k-t}.$$
Jų asimptotės yra tiesės $x = -1$ ir $t = k$.

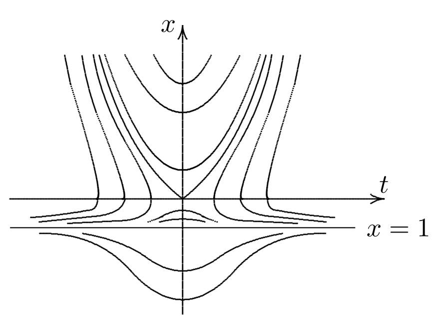


1.7 pav.



1.8 pav.

Rasime integralinių kreivių iškilumo ir įgaubtumo taškus. Iš matematinės analizės kurso žinome, kad iškilumo (įgaubtumo) taškai randami iš sąlygos $\ddot{x} < 0$, ($\ddot{x} > 0$). Pasinaudoję (1.19) lygtimi, gausime
$$\ddot{x} = (x+1)(x-t)(x+t)x^{-3}.$$
Iš čia randame, kad plokštuma $\mathbb{R}^2$ dalinasi į sritis ω_- ir ω_+, kurių taškuose $\ddot{x} < 0$ ir $\ddot{x} > 0$ (žr. 1.8 pav.). Kadangi izoklinės $t + t/x = k$ yra simetrinės x ašies atžvilgiu, tai integralinės kreivės taip pat yra simetrinės x ašies atžvilgiu. Apibendrinę visa tai gausime gana tikslų (1.19) lygties integralinių kreivių kokybinį vaizdą (žr. 1.9 pav.).



1.9 pav.

Atskyrę (1.19) lygtyje kintamuosius ir gautą lygtį suintegravę, lengvai rasime nagrinėjamos lygties integralines kreives. Jos yra apibrėžiamos lygtimi $x = 1$ ir lygtimi

$$x - \ln|x+1| = t^2/2 + C;$$

čia C – laisva konstanta. Atkreipsime dėmesį į tai, kad gauti integralinių kreivių kokybinį vaizdą tiesiogiai iš šių lygčių nėra lengviau kaip iš pačios (1.19) lygties.

Iš šių pavyzdžių matome, kad integralinių kreivių kokybinį vaizdą pilnai nusako lygties dešinioji pusė, t.y. funkcija f. Tiksliau, skirtingas funkcijas f atitinka skirtingi integralinių kreivių portretai. Tačiau kartais jie turi daug bendrų bruožų. Pavyzdžiui, 1.4 ir 1.6 pav. pavaizduotos integralinės kreivės yra panašios. Be to, jos turi tas pačias asimptotes ir kiekvieną vieno paveikslėlio integralinę kreivę atitinka viena kito paveikslėlio integralinė kreivė. Apie tokių integralinių kreivių šeimas sakoma, kad jos yra *kokybiškai ekvivalenčios.*

1.3. AUTONOMINĖS LYGTYS TIESĖJE

Šiame skyrelyje nagrinėsime pirmosios eilės specialiojo pavidalo lygtis. Tiksliau, lygtis, kurių dešinioji pusė tiesiogiai nepriklauso nuo laiko t, t.y.

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in (a, b) \subset \mathbb{R}. \tag{1.20}$$

Tokios lygtys vadinamos *autonominėmis*. Jų sprendinio kitimo greitis priklauso tik nuo paties sprendinio. Kitais žodžiais tariant, tokių lygčių sprendinys pats valdo savo keitimąsi.

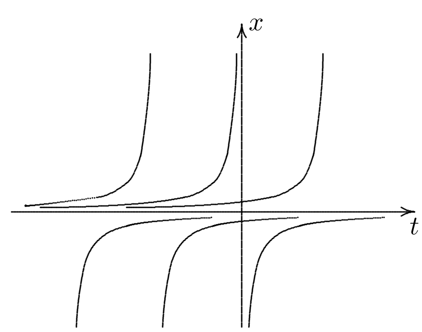
Parodysime, kad autonomines lygtis galima suskirstyti į kokybiškai ekvivalenčias lygčių klases. Iš pradžių priminsime, kad autonominės lygtys išsiskiria iš kitų viena svarbia savybe. Jeigu $x = \varphi(t), t \in (a, b)$ yra (1.20) lygties sprendinys, tai $x = \psi(t) = \varphi(t + c), t \in (a - c, b - c), c \in \mathbb{R}$, taip pat yra (1.20) lygties sprendinys (žr. (1.7) teoremą).

I š v a d a. Tegu $x = \varphi(t)$ yra (1.20) lygties sprendinys, apibrėžtas $\forall t \in \mathbb{R}$ ir I – šio sprendinio reikšmių sritis. Be to, tegu per kiekvieną juostos $\Pi = \mathbb{R} \times I$ tašką eina tik viena (1.20) lygties integralinė kreivė. Tada bet kurią kitą šios lygties integralinę kreivę, esančią juostoje Π, galima apibrėžti lygtimi $x = \varphi(t + c), c \in \mathbb{R}$. Taigi integralinės kreivės juostoje Π gaunamos viena iš kitos poslinkiu t ašies kryptimi.

P a v y z d y s. Lygtis

$$\dot{x} = x^2$$

turi trivialų sprendinį $x(t) = 0, t \in \mathbb{R}$ ir netrivialius sprendinius $x = (c - t)^{-1}$, kai $t > c$ bei $x = (c - t)^{-1}$, kai $t < c$. Pastaruosius sprendinius atitinkančios integralinės kreivės yra hiperbolės (žr. 1.10 pav.).



1.10 pav.

Integralinės kreivės dalina plokštumą $\mathbb{R}^2$ į dvi pusplokštumes $x > 0$ ir $x < 0$. Pusplokštumėje $x > 0$ bet kurią integralinę kreivę galima gauti paslinkus viršutinę hiperbolės $x = -t^{-1}$ šaką t ašies kryptimi. Analogiškai pusplokštumėje $x < 0$ bet kurią integralinę kreivę galima gauti paslinkus apatinę hiperbolės $x = -t^{-1}$ šaką t ašies kryptimi.

Integralinių kreivių šeimų, kurios gaunamos viena iš kitos poslinkiu t ašies kryptimi, kokybinį vaizdą nusako kiekvienas individualus sprendinys. Savo ruožtu kiekvieno tokio sprendinio kokybinį vaizdą apibrėžia funkcija f. Jeigu kokiame nors taške

$x = c$ funkcija $f(c) = 0$, tai funkcija

$$\varphi(t) = c, \quad t \in (-\infty, \infty)$$

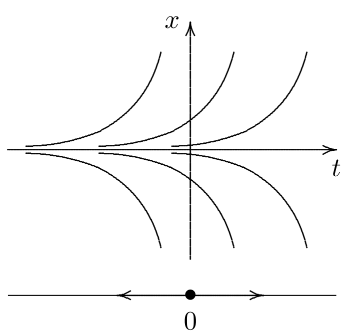
yra (1.20) lygties sprendinys. Toks sprendinys vadinamas *stacionariuoju* sprendiniu, o taškas *c-pusiausvyros* tašku. Jeigu $f(x) \neq 0$, t.y. $f(x) > 0$, arba $f(x) < 0$, tai kiekvienas (1.20) lygties sprendinys yra arba didėjanti, arba mažėjanti funkcija. Tokias sprendinių savybes patogiau vaizduoti x ašyje negu (t, x) plokštumoje. Pavyzdžiui taškas $x = 0$ yra lygties

$$\dot{x} = x$$

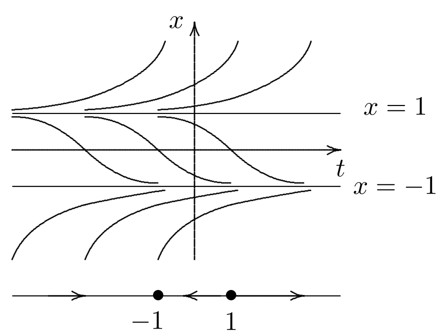
pusiausvyros taškas. Kai $x > 0$, visi šios lygties sprendiniai yra didėjančios, o kai $x < 0$ – mažėjančios funkcijos. Integralinių kreivių kokybinis vaizdas (t, x) plokštumoje ir x ašyje pavaizduotas 1.11 paveikslėlyje. Lygties

$$\dot{x} = x^2 - 1$$

pusiausvyros taškai $x = \pm 1$. Kai $x > 1$ arba $x < -1$, visi šios lygties sprendiniai yra didėjančios, o kai $-1 < x < 1$ – mažėjančios funkcijos. Integralinių kreivių kokybinis vaizdas plokštumoje (t, x) ir x ašyje pavaizduotas 1.12 paveikslėlyje.

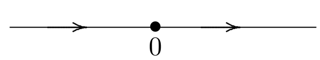


1.11 pav.



1.12 pav.

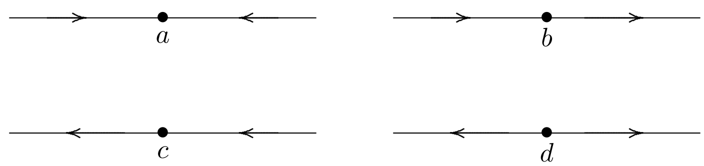
Geometrinis sprendinių kokybinis vaizdas x ašyje vadinamas *faziniu portretu*, x ašis – *fazine* ašimi, o jos taškai-*faziniais* taškais. Jeigu sprendinys $x = \varphi(t)$ nėra pusiausvyros taškas, tai φ yra arba didėjanti, arba mažėjanti funkcija. Todėl jeigu pusiausvyros taškų yra baigtinis skaičius, tai jį atitinkančių skirtingų fazinių portretų taip pat yra tik baigtinis skaičius. Čia, sakydami "skirtingi", turime omenyje, kad jie skiriasi sritimis, kuriose sprendiniai didėja arba mažėja. Pavyzdžiui lygties $\dot{x} = x^2$ fazinis portretas, pavaizduotas 1.13 paveikslėlyje



1.13 pav.

skiriasi nuo fazinio portreto lygties $\dot{x} = x$, pavaizduoto 1.9 paveikslėlyje. Akivaizdu, kad vieno pusiausvyros taško atveju yra galimi tik keturi skirtingi faziniai portretai (žr.

1.14 paveikslėlį).



1.14 pav.

Pusiausvyros taškas a vadinamas *atraktoriumi* , taškai b ir c – *šuntu*, o taškas d – *repeleriu.*

A p i b r ė ž i m a s. Sakysime, skirtingos diferencialinės lygtys yra *kokybiškai ekvivalenčios*, jeigu jos turi tą patį fazinį portretą, t.y. turi vienodą skaičių ta pačia tvarka išsidėsčiusių pusiausvyros taškų.

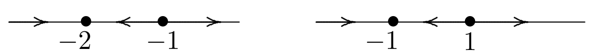
Pavyzdžiui, lygtys:

$$\dot{x} = x, \quad \dot{x} = x^3$$

yra kokybiškai ekvivalenčios. Jos turi vieną pusiausvyros tašką – repelerį. Lygtys:

$$\dot{x} = (x+2)(x+1), \quad \dot{x} = x^2 - 1$$

taip pat yra kokybiškai ekvivalenčios. Jos turi po du pusiausvyros taškus. Vienas iš jų yra atraktorius, o kitas – repeleris. Be to, atraktorių atitinka mažesnioji reikšmė (žr. 1.15 pav.).

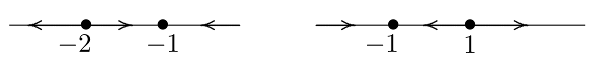


1.15 pav.

Lygtys:

$$\dot{x} = -(x+2)(x+1), \quad \dot{x} = x^2 - 1$$

nėra kokybiškai ekvivalenčios. Jos turi po du pusiausvyros taškus: atraktorių ir repelerį. Tačiau jie yra išsidėstę priešinga tvarka (žr. 1.16 pav.).



1.16 pav.

Diferencialinės lygtys gali turėti be galo daug pusiausvyros taškų (pvz. lygtis $\dot{x} = \sin x$). Todėl skirtingų fazinių portretų taip pat gali būti be galo daug. Tačiau, bet kuris fazinis portretas gali turėti ne daugiau kaip keturis skirtingus pusiausvyros taškus.

1.4. AUTONOMINĖS LYGTYS PLOKŠTUMOJE

Autonominę diferencialinių lygčių sistemą plokštumoje $\mathbb{R}^2$ galima užrašyti vektoriniu pavidalu

$$\dot{x} = f(x); \tag{1.21}$$

čia $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $f = (f_1, f_2)$. Tegu $x = \varphi(t)$, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ yra šios sistemos sprendinys. Tada fazinėje plokštumoje $\mathbb{R}^2$ jis apibrėžia kreivę. Jeigu ši kreivė nėra taškas, tai jai galima priskirti apėjimo kryptį, kai laikas t auga. Priminsime, kad kreivė, kartu su jos apėjimo kryptimi, vadinama *trajektorija.*

Bendru atveju (1.21) sistemos sprendiniai priklauso nuo dviejų laisvų konstantų. Todėl fazinėje plokštumoje $\mathbb{R}^2$ šie sprendiniai apibrėžia dviparametrinę kreivių (trajektorijų) šeimą. Norint gauti kokybinį (1.21) sistemos trajektorijų vaizdą, reikia žinoti kaip kinta fazinis taškas x fazinėje plokštumoje $\mathbb{R}^2$, kai laikas t auga. Taigi (1.21) sistemos fazinis portretas yra dvimatis, o jos kokybinį vaizdą nusako kreivių šeima kartu su jų apėjimo kryptimi.

Kokybinį (1.21) sistemos tyrimą plokštumoje $\mathbb{R}^2$ pradėsime nuo šios sistemos pusiausvyros taškų. Taškas $c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ yra (1.21) sistemos *pusiausvyros* taškas, jeigu $f(c) = 0$. Pusiausvyros tašką c atitinka *stacionarusis* (1.21) sistemos sprendinys $\varphi(t) = c$, $t \in \mathbb{R}$, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$.

Išsiaiškinsime (1.21) sistemos trajektorijų galimą elgesį pusiausvyros taško aplinkoje. Tuo tikslu išnagrinėsime keletą paprasčiausių sistemų su vienu pusiausvyros tašku.

1 P a v y z d y s. Sistema

$$\dot{x}_1 = -x_1, \quad \dot{x}_2 = -x_2 \tag{1.22}$$

turi pusiausvyros tašką $(0, 0)$ ir išsiskaido į dvi lygtis, kurių sprendiniai

$$x_1(t) = C_1 e^{-t}, \quad x_2(t) = C_2 e^{-t}, \quad t \in (-\infty, \infty).$$

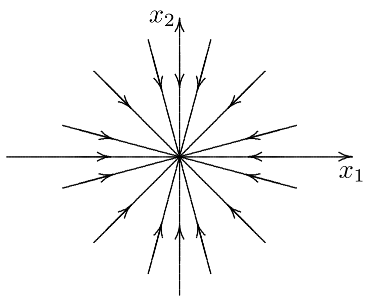
Iš šių formulių eliminavę kintamąjį t gausime, kad sprendiniai x_1, x_2 tenkina lygtį

$$x_1 = k x_2, \quad k = C_1/C_2.$$

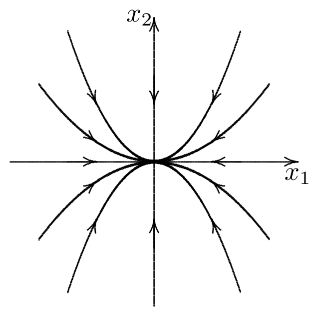
Todėl galime tvirtinti, kad kiekviena (1.22) sistemos trajektorija yra kokioje nors tiesėje, einančioje per koordinačių pradžią. Be to, kai $t \to \infty$,

$$|x_1(t)| \to 0, \quad |x_2(t)| \to 0.$$

Taigi kiekvienas (1.22) sistemos fazinis taškas artėja prie koordinačių pradžios taško tiese $x_1 = k x_2$, kai $t \to \infty$. Fazinis (1.21) sistemos portretas pavaizduotas 1.17 paveikslėlyje.



1.17 pav.



1.18 pav.

2 P a v y z d y s. Sistema

$$\dot{x}_1 = -x_1, \quad \dot{x}_2 = -2x_2 \tag{1.23}$$

turi pusiausvyros tašką $(0, 0)$ ir išsiskaido į dvi lygtis, kurių sprendiniai

$$x_1(t) = C_1 e^{-t}, \quad x_2(t) = C_2 e^{-2t}, \quad t \in (-\infty, \infty).$$

Iš šių formulių eliminavę kintamąjį t, gausime, kad sprendiniai x_1, x_2 tenkina lygtį

$$x_2 = k x_1^2, \quad k = C_2/C_1^2.$$

Be to, kai $t \to \infty$,

$$|x_1(t)| \to 0, \quad |x_2(t)| \to 0.$$

Taigi kiekvienas (1.23) sistemos fazinis taškas juda parabole $x_2 = kx_1^2$ ir artėja prie koordinačių pradžios, kai $t \to \infty$. Fazinis (1.23) sistemos portretas pavaizduotas 1.18 paveikslėlyje.

3 P a v y z d y s. Sistema

$$\dot{x}_1 = -x_1, \quad \dot{x}_2 = x_2 \tag{1.24}$$

turi pusiausvyros tašką $(0, 0)$ ir išsiskaido į dvi lygtis, kurių sprendiniai

$$x_1(t) = C_1 e^{-t}, \quad x_2(t) = C_2 e^{t}, \quad t \in (-\infty, \infty).$$

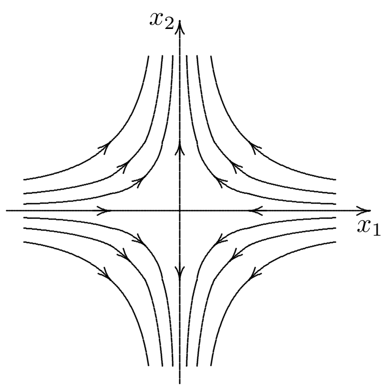
Iš šių formulių eliminavę kintamąjį t, gausime, kad sprendiniai x_1, x_2 tenkina lygtį

$$x_1 x_2 = k, \quad k = C_1 C_2.$$

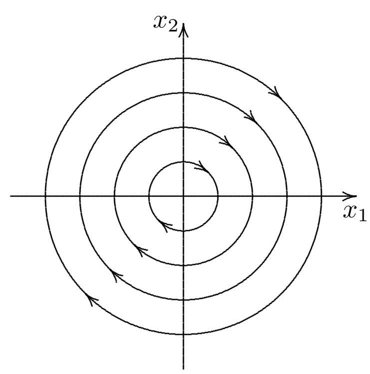
Be to, kai $t \to \infty$,

$$|x_1(t)| \to 0, \quad |x_2(t)| \to \infty.$$

Taigi kiekvienas (1.24) sistemos fazinis taškas juda hiperbole $x_1 x_2 = k$ ir artėja į begalybę, kai $t \to \infty$. Fazinis (1.24) sistemos portretas pavaizduotas 1.19 paveikslėlyje.



1.19 pav.



1.20 pav.

4 P a v y z d y s. Sistema

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 \tag{1.25}$$

turi pusiausvyros tašką $(0, 0)$. Apibrėžkime polines koordinates

$$x_1 = r\cos\varphi, \quad x_2 = r\sin\varphi.$$

Naujose koordinatėse gausime sistemą

$$\dot{r} = 0, \quad \dot{\varphi} = -1,$$

kurios sprendiniai

$$r = C_1, \quad \varphi = -t + C_2.$$

Grįžę prie senų kintamųjų x_1, x_2, rasime (1.25) sistemos sprendinius

$$x_1(t) = C_1\cos(-t + C_2), \quad x_2(t) = C_1\sin(-t + C_2), \quad t \in (-\infty, \infty).$$

Iš šių formulių eliminavę kintamąjį t, gausime, kad sprendiniai x_1, x_2 tenkina lygtį

$$x_1^2 + x_2^2 = C^2, \quad C = C_1.$$

Iš (1.25) lygties išplaukia, kad pusplokštumėje $x_2 > 0$ sprendinys x_1 didėja, o pusplokštumėje $x_2 < 0$ – mažėja. Be to, pusplokštumėje $x_1 > 0$ sprendinys x_2 mažėja, o pusplokštumėje $x_1 < 0$ – didėja. Taigi (1.25) sistemos trajektorijos yra koncentruoti apskritimai su centru pusiausvyros taške $(0, 0)$ ir apėjimo kryptimi pagal laikrodžio rodyklę, kai laikas t didėja. Fazinis (1.25) sistemos portretas pavaizduotas 1.20 paveikslėlyje.

5 P a v y z d y s. Sistema

$$\dot{x}_1 = x_1, \quad \dot{x}_2 = x_1 + x_2 \tag{1.26}$$

turi pusiausvyros tašką $(0,0)$ ir sprendinius

$$x_1(t) = C_1 e^t, \quad x_2(t) = e^t(C_1 t + C_2), \quad t \in (-\infty, \infty).$$

Eliminavę kintamąjį t, gausime, kad sprendiniai x_1, x_2 tenkina lygtį

$$x_2 = x_1(\ln x_1/C_1 + C_2/C_1).$$

Antrosios eilės išvestinė $d^2x_2/dx_1^2 = 1/x_1$. Todėl visos trajektorijos yra iškilos, kai $x_1 > 0$ ir įgaubtos, kai $x_1 < 0$.

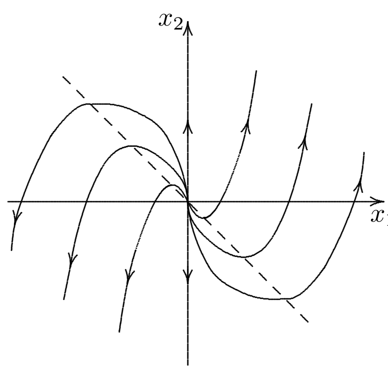
Tegu $C_1 > 0$. Tada sprendinys x_1 didėja nuo 0 iki ∞, kai t kinta nuo $-\infty$ iki $+\infty$. Sprendinys $x_2 \to +\infty$, kai $t \to +\infty$, ir $x_2 \to -0$, kai $t \to -\infty$. Kai $C_1 = 0$, turime sprendinį

$$x_1(t) = 0, \quad x_2(t) = C_2 e^t, \quad t \in (-\infty, +\infty).$$

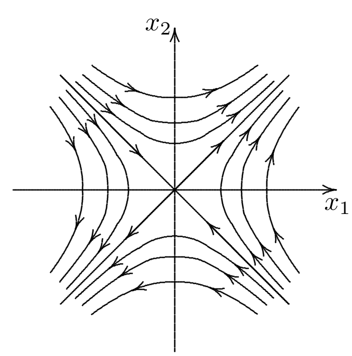
Kai $C_1 < 0$, kiekviena sistemos trajektorija yra simetrinė koordinačių pradžios taško atžvilgiu vienai iš trajektorijų, atitinkančių atvejį $C_1 > 0$. Tuo lengvai galima įsitikinti ir iš pačios sistemos. Reikia tik pastebėti, kad ji yra invariantiška keitinio $x_1 \to -x_1$, $x_2 \to -x_2$ atžvilgiu. Be to, iš pačios sistemos išplaukia, kad

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 > 0, &\quad \text{kai} \quad x_1 > 0,\\
\dot{x}_1 < 0, &\quad \text{kai} \quad x_1 < 0,\\
\dot{x}_2 > 0, &\quad \text{kai} \quad x_1 + x_2 > 0,\\
\dot{x}_2 < 0, &\quad \text{kai} \quad x_1 + x_2 < 0,\\
\dot{x}_2 = 0, &\quad \text{kai} \quad x_1 + x_2 = 0.
\end{aligned}$$

Fazinis (1.26) sistemos portretas pavaizduotas 1.21 paveikslėlyje.



1.21 pav.



1.22 pav.

6 P a v y z d y s. Sistema

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1 \tag{1.27}$$

turi pusiausvyros tašką $(0,0)$. Padalinę antrąją šios sistemos lygtį iš pirmosios, gausime paprastąją diferencialinę lygtį

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{x_1}{x_2}, \quad x_2 \neq 0$$

kintamųjų x_1, x_2 atžvilgiu. Šios lygties sprendiniai yra hiperbolės

$$x_2^2 - x_1^2 = C.$$

Jų asimptotės yra tiesės $x_1 + x_2 = 0$ ir $x_1 - x_2 = 0$. Hiperbolių apėjimo kryptį galima nustatyti iš (1.27) lygčių. Pavyzdžiui, $\dot{x}_2 > 0$, kai $x_1 > 0$, $\dot{x}_1 > 0$, kai $x_2 > 0$, t.y. pusplokštumėje $x_1 > 0$ sprendinys x_2 auga, o pusplokštumėje $x_2 > 0$ auga sprendinys x_1. Fazinis (1.27) sistemos portretas pavaizduotas 1.22 paveikslėlyje.

Norint nubrėžti (1.21) sistemos trajektorijų kokybinį vaizdą, nevisada būtina žinoti jos sprendinius apibrėžiančias formules. Tai galima padaryti nesprendžiant pačios sistemos. Šiuo atveju reikia pasinaudoti izoklinių metodu.

Tarkime, funkcija f yra apibrėžta srityje $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Kiekviename taške $x \in \Omega$ yra apibrėžtas vektorius $\dot{x}$. Šių vektorių visuma sudaro krypčių lauką. Priminsime, kad izoklinė yra geometrinė vieta taškų, kuriuose krypčių laukas yra pastovus, t.y.

$$\frac{dx_2}{dx_1} = k = const.$$

Ypatingai įdomūs tie izoklinių taškai, kuriuose dx_2/dx_1 lygus nuliui arba begalybei, t.y. izoklinės, kuriose $\dot{x}_2 = 0$ arba $\dot{x}_1 = 0$.

7 P a v y z d y s. Sistemos

$$\dot{x}_1 = x_2^2, \quad \dot{x}_2 = x_1 \tag{1.28}$$

vienintelis pusiausvyros taškas yra koordinačių pradžioje. Izoklinės yra apibrėžiamos lygtimi

$$x_1/x_2^2 = k.$$

Kai $x_2 = 0$, turime $k = \infty$. Kai $x_1 = 0$, turime $k = 0$. Kitoms k reikšmėms izoklinės yra parabolės $x_1 = kx_2^2$. Pavyzdžiui,

$$\begin{array}{lll} k = 1/2, & \text{parabolėje} & x_1 = x_2^2/2, \\ k = 1, & \text{parabolėje} & x_1 = x_2^2, \\ k = 2, & \text{parabolėje} & x_1 = 2x_2^2, \\ k = -1/2, & \text{parabolėje} & x_1 = -x_2^2/2, \\ k = -1, & \text{parabolėje} & x_1 = -x_2^2, \\ k = -2, & \text{parabolėje} & x_1 = -2x_2^2. \end{array}$$

Trajektorijų apėjimo kryptį nusako sistemos lygčių dešiniosios pusės. Iš pirmosios lygties išplaukia, kad x_1 didėja, kai t kinta nuo $-\infty$ iki ∞. Iš antrosios lygties gauname, kad x_2 didėja, kai $x_1 > 0$ ir mažėja, kai $x_1 < 0$.

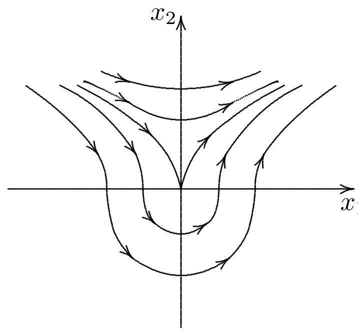
Padalinę antrąją šios sitemos lygtį iš pirmosios, gausime paprastąją diferencialinę lygtį

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{x_1}{x_2^2}, \quad x_2 \neq 0$$

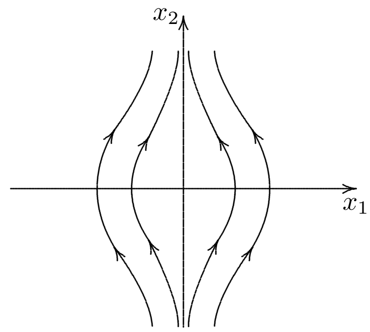
kintamųjų x_1, x_2 atžvilgiu. Šios lygties sprendiniai yra apibrėžiami formule

$$x_2^3 - 3x_1^2 = C.$$

Kai $C = 0$, gauname trajektoriją $x_2^3 - 3x_1^2 = 0$, einančią per koordinačių pradžią. Trajektorijų fazinis portretas pavaizduotas 1.23 paveikslėlyje.



1.23 pav.



1.24 pav.

8 P a v y z d y s. Sistema

$$\dot{x}_1 = -x_1 x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1^2 + x_2^2 \tag{1.29}$$

turi vienintelį pusiausvyros tašką $(0,0)$. Jos izoklinės apibrėžiamos lygtimi

$$-\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} = k.$$

Iš šios lygties išplaukia, kad $k \geq 2$ ir izoklinės yra tiesės

$$x_2 = \alpha x_1;$$

čia α yra randamas iš lygties

$$-\frac{1+\alpha^2}{\alpha} = k.$$

Kai $\alpha = 0$, turime $k = \infty$. Todėl visos trajektorijos kerta statmenai x_1 ašį. Kai $\alpha \to \infty$, $k \to \infty$. Kai $x_1 = 0$, turime trajektoriją, apibrėžtą lygtimi $\dot{x}_2 = x_2^2$. Kitoms k reikšmėms izoklinės yra tiesės $x_2 = \alpha x_1$. Pavyzdžiui,

$$\begin{array}{lll} k = 5/2, & \text{tiesėse} & x_2 = -2x_1,\ x_2 = -x_1/2, \\ k = 2, & \text{tiesėje} & x_2 = -x_1, \\ k = -5/2, & \text{tiesėse} & x_2 = 2x_1,\ x_2 = x_1/2, \\ k = -2, & \text{tiesėje} & x_2 = x_1. \end{array}$$

Trajektorijų apėjimo kryptį nusako lygčių sistemos dešiniosios pusės. Iš pirmosios lygties išplaukia, kad x_1 didėja, kai t kinta nuo $-\infty$ iki ∞. Iš antrosios lygties gauname, kad x_2 didėja, kai $x_1 > 0$ ir mažėja, kai $x_1 < 0$. Fazinis (1.29) sistemos portretas pavaizduotas 1.24 paveikslėlyje

9 P a v y z d y s. Nubrėžti sistemos

$$\dot{x}_1 = x_1^2, \quad \dot{x}_2 = x_2(2x_1 - x_2) \tag{1.30}$$

trajektorijų kokybinį vaizdą. Nagrinėjamu atveju

$$f_1(x) = x_1^2, \quad f_2(x) = x_2(2x_1 - x_2).$$

Todėl lygtis $f(x) = 0$ turi tik trivialų sprendinį $x = (0,0)$. Kartu galime tvirtinti, kad vienintelis (1.30) sistemos pusiausvyros taškas yra koordinačių pradžioje. Be to, $f(x) = f(-x)$. Iš čia išplaukia, kad visos trjektorijos yra invariantinės keitinio $x \to -x$ atžvilgiu. Atkreipsime dėmesį, kad izoklinė $\dot{x}_1 = 0$ sutampa su x_2 ašimi. Jos taškuose $\dot{x}_2 = -x_2^2$. Todėl egzistuoja trajektorija, einanti per šią ašį. Tiksliau ji įeina į koordinačių pradžią, kai $x_2 > 0$ ir išeina iš jos, kai $x_2 < 0$. Kai $x_1 \neq 0$, izoklinių lygtį galima užrašyti taip:

$$\frac{x_2(2x_1 - x_2)}{x_1^2} = k \quad \Longleftrightarrow \quad x_1^2 - (x_1 - x_2)^2 = kx_1^2.$$

Iš jos randame

$$x_1^2(1-k) = (x_1 - x_2)^2.$$

Taigi $k \leq 1$, o izoklinės yra apibrėžiamos lygtimi

$$x_2 = x_1(1 \pm \sqrt{1-k}).$$

Kai $k = 1$, izoklinė yra tiesė $x_2 = x_1$. Per šią tiesę einančių trajektorijų kryptis nusako lygtys $\dot{x}_1 = x_1^2$, $\dot{x}_2 = x_2^2$. Iš šių lygčių išplaukia, kad funkcijos x_1 ir x_2 didėja, kai laikas t auga. Todėl per šią tiesę einanti trajektorija įeina į koordinačių pradžią, kai $x_1, x_2 < 0$ ir išeina iš koordinačių pradžios, kai $x_1, x_2 > 0$. Kitoms k reikšmėms izoklinė yra pora tiesių. Pavyzdžiui,

$$\begin{array}{lll}
k = 0, & \text{tiesėse} & x_2 = 0 \text{ ir } x_2 = 2x_1, \\
k = 1/2, & \text{tiesėse} & x_2 = x_1(1 \pm \sqrt{2}/2), \\
k = 3/4, & \text{tiesėse} & x_2 = x_1(1 \pm 1/2), \\
k = -1, & \text{tiesėse} & x_2 = x_1(1 \pm \sqrt{2}), \\
k = -2, & \text{tiesėse} & x_2 = x_1(1 \pm \sqrt{3}), \\
k = -3, & \text{tiesėse} & x_2 = 3x_1 \mathrm{ir} x_2 = -x_1.
\end{array}$$

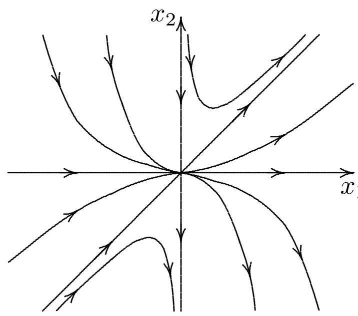
Trajektorijų iškilumo (įgaubtumo) taškai randami iš sąlygos

$$d^2x_2/dx_1^2 > 0 \quad (d^2x_2/dx_1^2 < 0).$$

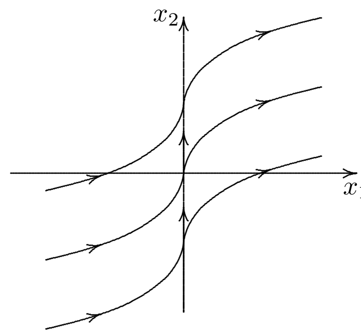
Nagrinėjamu atveju $\ddot{x}_2 = x_2[(2x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_2)^2 + x_1^2]$, $\ddot{x}_1 = 2x_1^3$. Todėl

$$\frac{d^2x_2}{dx_1^2} = \frac{\ddot{x}_2\dot{x}_1 - \ddot{x}_1\dot{x}_2}{\dot{x}_1^3} = \frac{2x_2(x_1 - x_2)^2}{x_1^4};$$

Taigi pusplokštumėje $x_2 > 0$ trajektorijos yra iškilos, o pusplokštumėje $x_2 < 0$ – įgaubtos. Fazinis (1.30) sistemos trajektorijų vaizdas pavaizduotas (1.25) paveikslėlyje.



1.25 pav.



1.26 pav.

Tarkime, funkcija f yra apibrėžta ir tolydi srityje $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Jeigu $\forall x_0 \subset \Omega$ ir $\forall t_0 \in \mathbb{R}$ egzistuoja vienintelis 1.21 sistemos sprendinys $x = \varphi(t)$ toks, kad $\varphi(t_0) = x_0$, tai per kiekvieną srities Ω tašką eina lygiai viena (1.21) sistemos trajektorija. Jeigu vienaties nėra, tai dažniausiai jos nėra kokios nors kreivės, esančios srityje Ω, taškuose. Šios kreivės taškų aplinkoje trajektorijų kokybinį vaizdą ne iš karto galima nustatyti vien tik pagal sistemos dešinę pusę.

10 P a v y z d y s. Sistema

$$\dot{x}_1 = 3x_1^{2/3}, \quad \dot{x}_2 = 1 \tag{1.31}$$

pusiausvyros taškų neturi. Jos sprendiniai randami iš formulių

$$x_1(t) = (t + C_1)^3, \quad x_2(t) = t + C_2.$$

Be to, yra dar vienas sprendinys

$$x_1(t) \equiv 0, \quad x_2(t) = t + C_2.$$

Imkime šiose formulėse $C_2 = 0$, $C_1 = -c$. Abiem atvejais taškas

$$\big(x_1(c), x_2(c)\big) = (0, c).$$

Vadinasi taškas $(0, c)$ guli ne mažiau kaip dviejose skirtingose trajektorijose. Eliminavę iš šių formulių kintamąjį t, gausime, kad (1.31) sistemos trajektorijos yra apibrėžiamos lygtimis:

$$x_1 = (x_2 + C)^3, \qquad x_1 = 0;$$

čia $C = C_1 - C_2$. Taigi trajektorijos yra kubinės parabolės, liečiančios ašį x_2. Jų apėjimo kryptį lengvai galima nustatyti iš (1.31) sistemos dešinės pusės. Fazinis sistemos portretas pavaizduotas 1.26 paveikslėlyje.

Toliau nagrinėsime tik tokias sistemas, kurios tenkina vienaties sąlygą. Priminsime, kad ši sąlyga yra patenkinta, jeigu funkcija f yra diferencijuojama.

Iš pateiktų pavyzdžių matome, kad iš trajektorijų sudarytų skirtingų geometrinių konfigūracijų gali būti be galo daug. Kartu galime tvirtinti, kad skirtingų pusiausvyros taškų taip pat gali būti be galo daug. Tiesa, čia, kaip ir 1.3 skyrelyje, reikia susitarti, ką reiškia žodis ,,skirtingi". Priklausomai nuo nagrinėjamų sistemų bei keliamų reikalavimų galima pasirinkti įvairius kriterijus.

Pavyzdžiui, galime nekreipti dėmesio į trajektorijų, įeinančių į pusiausvyros tašką, formą. Tiksliau, tegu a yra sistemos $\dot{x} = f(x)$, o b sistemos $\dot{x} = g(x)$ pusiausvyros taškai. Be to, tegu sistemos $\dot{x} = f(x)$ visos trajektorijos sueina į tašką a, o sistemos $\dot{x} = g(x)$ – į tašką b. Tada natūralu tokius nagrinėjamų sistemų taškus laikyti ,,vienodais". Pagal šį apibrėžimą sistemos $\dot{x} = -f(x)$ pusiausvyros takas a ir sistemos $\dot{x} = g(x)$ pusiausvyros taškas b yra ,,skirtingi", nes sistemos $\dot{x} = -f(x)$ visos trajektorijos išeina iš taško a. Be to, galime išskirti tiesines sistemas. Kiekvieną tokią sistemą atitinka kvadratinė matrica. Šią matricą galima suvesti į žordaninį pavidalą. Pagal tai, kokie yra šios matricos žordano langeliai, galima klasifikuoti tiesinių sistemų pusiausvyros taškus (žr. 2.1 skyrelį).

1.5. FAZINIS SRAUTAS

Tegu Ω yra kokia nors sritis erdvėje $\mathbb{R}^n$ ir f – apibrėžta srityje Ω funkcija. Autonominė sistema

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \Omega, \tag{1.32}$$

aprašo įvairius fizikinius procesus. Šių procesų dinamiką nusako fazinio taško x judėjimas fazinėje erdvėje. Toks požiūris leidžia autonominei sistemai ir jos sprendiniui suteikti kitokią prasmę.

Tegu $x = x(t)$ yra (1.32) sistemos sprendinys. Kiekvienu laiko momentu t taškas $x(t)$ yra fazinėje erdvėje $\mathbb{R}^n$ ir, didėjant laikui, juda tam tikra trajektorija greičiu $\dot{x} = f(x)$. Todėl galima manyti, kad (1.32) sistema apibrėžia srautą taškų fazinėje erdvėje $\mathbb{R}^n$, o funkcija f–šio srauto greitį kiekviename taške $x \in \Omega$. Tarkime toliau, kad yra patenkintos egzistavimo ir vienaties teoremų sąlygos. Pavyzdžiui, tegu funkcija f srityje Ω tenkina Lipšico sąlygą. Tada $\forall x_0 \in \Omega$, $t_0 \in \mathbb{R}$ egzistuoja vienintelis (1.32) sistemos sprendinys $x = x(t, t_0, x_0)$, tenkinantis sąlygą $x(t_0, t_0, x_0) = x_0$. Šis sprendinys nusako taško x_0 evoliuciją, t.y. praeitį, kai $t < t_0$ ir ateitį, kai $t > t_0$. Iš tikrųjų taško $x(t, t_0, x_0)$ padėtį fazinėje erdvėje nusako ne laiko momentas t, o laiko atkarpa $t - t_0$, per kurią taškas x_0 pereina į tašką $x(t, t_0, x_0)$ (žr. 1.1 skyrelį). Todėl sprendinį $x = x(t, t_0, x_0)$ galima užrašyti taip:

$$x = \varphi(t - t_0, x_0).$$

Laiko momentu $t = t_0 + \tau$ taškas

$$x(t_0 + \tau, t_0, x_0) = \varphi(\tau, x_0).$$

Laiko momentu $t = t_0 + \tau + s$ taškas

$$x(t_0 + \tau + s, t_0, x_0) = \varphi(\tau + s, x_0).$$

Antra vertus, per laiko atkarpą $[t_0 + \tau, t_0 + \tau + s]$ taškas $x(t_0 + \tau, t_0, x_0)$ pereis į tašką

$$x(t_0 + \tau + s, t_0 + \tau, x(t_0 + \tau, t_0, x_0)) = \varphi(s, \varphi(\tau, x_0)).$$

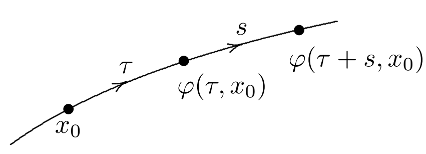
Tačiau

$$x(t_0 + \tau + s, t_0, x_0) = x(t_0 + \tau + s, t_0 + \tau, x(t_0 + \tau, t_0, x_0)).$$

Todėl

$$\varphi(\tau + s, x_0) = \varphi(s, \varphi(\tau, x_0)), \tag{1.33}$$

jeigu tik yra apibrėžtos kairė ir dešinė pastarosios lygybės pusės (žr. 1.27 pav.).



1.27 pav.

Fiksuotam τ į funkciją $\varphi(\tau, \cdot)$ galima žiūrėti kaip į operatorių, veikiantį iš srities Ω į sritį Ω. Šis operatorius vadinamas *evoliucijos* operatoriumi ir žymimas φ_τ. Visuma operatoriu $\{\varphi_\tau\}$ vadinama *faziniu srautu.* Tarkime, visus (1.32) sistemos sprendinius galima pratęsti į visą realių skaičių ašį. Tada (1.33) formulę galima perrašyti taip:

$$\varphi_{s+\tau} = \varphi_s \circ \varphi_\tau \quad \forall s, \tau \in \mathbb{R}.$$

Be to, $\varphi_0 = \varphi_s \circ \varphi_{-s}$ yra tapatus operatorius. Taigi (1.32) sistemos fazinis srautas $\{\varphi_\tau\}$ yra srities Ω transformacijų vienparametrinė grupė. Remiantis bendra paprastųjų diferencialinių lygčių teorija galima tvirtinti, kad:

1. Kintamojo x_0 atžvilgiu operatorius φ_t, kartu ir atvirkštinis operatorius $\varphi_t^{-1} = \varphi_{-t}$, yra tolydus.

2. Operatorius $\varphi_t^{-1} \circ \varphi_t = \varphi_{-t} \circ \varphi_t^{-1}$ yra tapatus.

Todėl operatorius

$$\varphi_t : \Omega \to \varphi_t(\Omega)$$

yra homeomorfizmas. Be to, jeigu funkcija $f \in \mathrm{C}^{\mathrm{k}}(\Omega)$, tai operatorius φ_t yra C^{k} klasės difeomorfizmas.

P a v y z d y s. Tiesinės lygties

$$\dot{x} = kx \tag{1.34}$$

sprendinys, tenkinantis sąlygą $x(t_0) = x_0$, yra apibrėžiamas formule

$$x(t) = e^{k(t-t_0)} x_0.$$

Todėl

$$\varphi_{t-t_0}(x_0) = e^{k(t-t_0)} x_0.$$

Taigi evoliucijos operatorius φ_t tašką x atvaizduoja į tašką $e^{kt}x$. Atkreipsime dėmesį į tai, kad φ_t yra tiesinė tiesės transformacija, tiksliau ištempimas e^{kt} kartu. Be to, yra teisingos formulės

$$\varphi_{s+t} = \varphi_s \circ \varphi_t = \varphi_t \circ \varphi_s, \quad \forall s, t \in \mathbb{R}.$$

$$\varphi_t \circ \varphi_{-t} = \varphi_{-t} \circ \varphi_t = \varphi_0,$$

Jos išplaukia iš eksponentės apibrėžimo. Iš šių formulių matome, kad (1.32) lygties fazinis srautas yra vienparametrinė grupė tiesės tiesinių transformacijų. Galima įrodyti ir atvirkštinį teiginį. Bet kokia vienparametrinė grupė tiesinių tiesės transformacijų yra (1.34) lygties fazinis srautas su tam tikra parametro k reikšme.

Tokia paprasta evoliucijos operatoriaus formulė gaunama tik tiesinėms lygtims. Iš tikrųjų, diferencialinės lygties fazinio srauto radimas yra ekvivalentus šios lygties sprendimui ir ne visada yra toks paprastas. Bendru atveju, remiantis vien tik sprendinio apibrėžimu, ne visada yra paprasta įrodyti (kaip tai buvo padaryta tiesinės lygties atveju), kad fazinis srautas yra vienparametrinė srities Ω transformacijų grupė.

P a v y z d y s. Rasti lygties

$$\dot{x} = x - x^2$$

fazinį srautą. Atskyrę šioje lygtyje kintamuosius ir suintegravę, gausime

$$\ln\left|\frac{x}{x-1}\right| = t + \ln|C|, \quad x \neq 0,\ x \neq 1.$$

Iš čia išplaukia, kad

$$\frac{x}{x-1} = Ce^t,$$

t.y.

$$x(t) = Ce^t/(Ce^t - 1).$$

Tegu $x(0) = x_0$. Tada $C = x_0/(x_0 - 1)$ ir

$$x(t) = x_0 e^t/(x_0 e^t - x_0 + 1) := \varphi_t(x_0). \tag{1.35}$$

Taškai $x = 0$ ir $x = 1$ yra pusiausvyros taškai. Todėl

$$\varphi_t(0) = 0, \quad \varphi_t(1) = 1, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Patikrinsime, kad fazinis srautas yra fazinės tiesės transformacijų vienparametrinė grupė.

Tegu $\varphi_t(x) = y$. Tada

$$\varphi_s(y) = ye^s/(ye^s - y + 1)$$

ir

$$\varphi_s(\varphi_t(x)) = xe^{s+t}/(xe^{s+t} - x + 1) = \varphi_{s+t}(x).$$

Remiantis šiuo pavyzdžiu, galime iškelti hipotezę: kiekvieną autonominę didferencialinę lygtį

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

atitinka tokia fazinės tiesės vienparametrinė grupė $\{\varphi_t\}$, kad $\varphi_t(x_0) = x(t)$; čia $x(t)$ yra autonominės lygties sprendinys, tenkinantis sąlygą $x(0) = x_0$. Pasirodo, kad ši hipotėzė yra teisinga, jeigu sprendinys nenueina į begalybę per baigtinį laiką. Tai susiję su tuo, kad evoliucijos operatorius gali būti apibrėžtas ne visiems t.

P a v y z d y s. Lygties

$$\dot{x} = x^2$$

sprendinys, tenkinantis pradinę sąlygą $x(0) = x_0$, apibrėžiamas formule

$$x(t) = x_0/(1 - x_0 t), \quad t \neq x_0^{-1}.$$

Todėl evoliucijos operatorius

$$\varphi_t(x) = x/(1 - xt), \quad x \neq 0. \tag{1.36}$$

Taškas $x = 0$ yra pusiausvyros taškas. Todėl $\varphi_t(0) = 0$. Taigi evoliucijos operatorius yra apibrėžtas visoje fazinėje tiesėje. Tačiau jis yra apibrėžtas ne visoms t reikšmėms. Kai $x > 0$, taško x evoliucija yra apibrėžta intervale $(-\infty, x^{-1})$, o kai $x < 0$ – intervale (x^{-1}, ∞). Taško $x = 0$ evoliucija yra apibrėžta $\forall t \in (-\infty, \infty)$. Be to, $\varphi_t(x)$ artėja į begalybę, kai $t \to x^{-1}$ ir artėja į nulį, kai $t \to \pm\infty$.

1.6. AUTONOMINIŲ SISTEMŲ TRAJEKTORIJOS

Tarkime, funkcija $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ yra tolydi srityje Ω ir šioje srityje tenkina Lipšico sąlygą. Tada per kiekvieną tašką $x_0 \in \Omega$ eina lygiai viena autonominės sistemos

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.37}$$

trajektorija. Kiekvieno jos taško padėtį fazinėje erdvėje nusako pradinis taškas x_0 ir laiko atkarpa $t - t_0$ (žr. 1.5 skyrelį), t.y. (1.37) sistemos sprendinį $x = x(t, t_0, x_0)$ galima užrašyti tokiu pavidalu

$$x = x(t - t_0, 0, x_0) := \varphi(t - t_0, x_0).$$

Tegu $t_0 = 0$. Taškas $x_0 \in \Omega$ yra (1.37) sistemos *pusiausvyros taškas*, jeigu

$$\varphi(t, x_0) = x_0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Akivaizdu, kad taškas x_0 yra pusiausvyros taškas tada ir tik tada, kai $f(x_0) = 0$. Tašką $x_0 \in \Omega$ vadinsime (1.37) sistemos *paprastuoju tašku*, jeigu $f(x_0) \neq 0$. Jeigu taškas x_0 yra paprastasis (1.37) sistemos taškas ir funkcija f yra tolydi, tai kiekvienas taškas iš pakankamai mažos taško x_0 aplinkos taip pat bus paprastasis taškas.

Tegu $x = \varphi(t)$ yra (1.37) sistemos sprendinys, apibrėžtas $\forall t \in \mathbb{R}^1$. Jeigu šis sprendinys yra periodinė, periodo $T > 0$ funkcija, tai jį atitinkanti trajektorija vadinama *uždara trajektorija* arba *ciklu*.

Tarkime, taškas x_0 yra paprastasis (1.37) sistemos taškas. Jeigu sprendinio $x = \varphi(t, x_0)$ trajektorija γ savęs nekerta, tai šis sprendinys yra neperiodinis. Įrodysime, kad trajektorija γ kerta save tik tuo atveju, kai ji yra uždara, o ją apibrėžiantis sprendinys $x = \varphi(t, x_0)$ yra periodinis.

Tarkime, trajektorija γ kerta save. Tada egzistuoja tokie t_1, t_2 $(t_1 < t_2)$, kad

$$\varphi(t_1, x_0) = \varphi(t_2, x_0).$$

Kadangi x_0 nėra pusiausvyros taškas, tai galime tarti, kad

$$\varphi(t, x_0) \neq \varphi(t_1, x_0), \quad \text{kai} \quad t \in (t_1, t_2).$$

Įrodysime, kad sprendinys $x = \varphi(t, x_0)$ yra periodinė funkcija su periodu $\omega = t_2 - t_1$. Iš tikrųjų, funkcija ψ apibrėžta formule

$$\psi(t) = \varphi(t + \omega, x_0), \quad t \in [t_1 - \omega, t_2 - \omega] = [t_1 - \omega, t_1]$$

yra (1.37) sistemos sprendinys. Be to,

$$\varphi(t_1 + \omega, x_0) = \varphi(t_2, x_0) = \varphi(t_1, x_0).$$

Remiantis vienaties teorema, sprendiniai $x = \varphi(t + \omega, x_0)$ ir $x = \varphi(t, x_0)$ sutampa, kai $t \in [t_1 - \omega, t_1]$. Analogiškai galima įrodyti, kad sprendiniai $x = \varphi(t - \omega, x_0)$ ir $x = \varphi(t, x_0)$ sutampa, kai $t \in [t_2, t_2 + \omega]$. Taip samprotaudami toliau gausime, kad sprendinį $x = \varphi(t, x_0)$ galima pratęsti į visą realių skaičių ašį $\mathbb{R}$ ir yra teisinga tapatybė

$$\varphi(t + \omega, x_0) = \varphi(t, x_0), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Taigi funkcija φ yra ω-periodinė, o ją atitinkanti trajektorija yra uždara. Kartu yra įrodyta tokia teorema.

1.8 **teorema.** *Autonominės sistemos trajektorijos gali būti tik tokių trijų rūšių:*

1. *Pusiausvyros taškas.*
2. *Uždara trajektorija. Ją atitinka ω-periodinis sprendinys.*
3. *Nekertanti savęs trajektorija. Ją atitinka neperiodinis sprendinys.*

Nagrinėjant (1.37) autonominę sistemą svarbu žinoti ar ji turi uždarų trajektorijų. Kai $n = 2$ nurodysime dvi pakankamas sąlygas garantuojančias, kad (1.37) sistema uždarų trajektorijų neturi.

1.9 **teorema.** *Tarkime, srityje $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ funkcija f tenkina kurią nors vieną iš šių sąlygų:*

1. *Vektorinis laukas f yra potencialus srityje Ω.*
2. *Vektorinio lauko divergencija $\operatorname{div} f$ turi pastovų ženklą srityje Ω.*

Tada (1.37) *autonominė sistema srityje Ω neturi uždarų trajektorijų.*

$\triangleleft$ Tarkime priešingai, (1.37) autonominė sistema srityje Ω turi uždara trajektoriją $\gamma \subset \Omega$. Sritį, apribota kreive γ, pažymėkime raide D. Jeigu yra patenkinta pirmoji teoremos sąlyga, tai $f_{2x_1} = f_{1x_2}$ ir

$$0 = \int\limits_D \big(f_{2x_1}(x) - f_{1x_2}(x)\big)\, dx = \int\limits_D \operatorname{div} f^*(x)\, dx = \int\limits_\gamma \big(f^*(x), n(x)\big)\, dl;$$

čia $n(x)$ yra vienetinis normalės vektorius trajektorijai γ taške x, išorinis srities D atžvilgiu, o vektorius f^* turi koordinates $f_1^* = f_2$ ir $f_2^* = -f_1$. Vektorius f^* yra statmenas vektoriui f. Tačiau vektorius f yra statmenas vektoriui n. Taigi vektoriai f^* ir n yra lygiagretūs ir

$$\int\limits_\gamma \big(f^*(x), n(x)\big)\, dl \neq 0.$$

Gauta prieštara įrodo, kad (1.37) sistema negali turėti uždarų trajektorijų srityje Ω, jeigu yra patenkinta pirmoji teoremos sąlyga.

Tarkime, yra patenkinta pirmoji teoremos sąlyga. Tada

$$0 \neq \int\limits_D \operatorname{div} f(x)\, dx = \int\limits_\gamma \big(f(x), n(x)\big)\, dl = 0,$$

nes vektoriai f ir n yra statmeni. Gauta prieštara įrodo, kad (1.37) sistema negali turėti uždarų trajektorijų srityje Ω, jeigu yra patenkinta antroji teoremos sąlyga. $\triangleright$

P a v y z d y s. Tegu $f(x) = Ax, A \in \mathbb{R}^{2,2}$. Vektorinis laukas $f(x)$ yra potencialus, jeigu matrica A yra simetrinė. Vektorinės funkcijos f divergencija yra lygi matricos A pėdsakui, t.y. div $f(x) = \text{Tr } A$. Todėl tiesinė sistema

$$\dot{x} = Ax$$

plokštumoje $\mathbb{R}^2$ neturės uždarų trajektorijų, jeigu matrica A yra simetrinė arba jos pėdsakas Tr $A \neq 0$.

A p i b r ė ž i m a s. Sakysime, autonominės sistemos

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \Omega; \quad \dot{y} = g(y), \quad y \in D$$

yra *kokybiškai ekvivalenčios* (homeomorfiškos), jeigu egzistuoja toks homeomorfizmas $h : \Omega \to D$, $h(\omega) = D$, kad kiekviena pirmos sistemos trajektorija, išlaikant orientaciją, pereina į tam tikrą antros sistemos trajektoriją ir atvirkščiai. Jeigu, be to ši transformacija yra difeomorfizmas, tai sakysime, kad sistemos yra *difeomorfiškai ekvivalenčios* (difeomorfinės).

Tegu taškas $x \in \Omega$ nėra (1.37) sistemos pusiausvyros taškas. Tada kiekvieno tokio taško aplinkoje (1.37) sistemos trajektorijų struktūra yra tokia pati. Tiksliau yra teisinga tokia teorema.

1.10 **teorema. (Apie trajektorijų ištiesinimą)** *Tarkime,* $f \in \mathrm{C}^1(\Omega)$ *ir taškas* $a \in \Omega$ *nėra* (1.21) *sistemos pusiausvyros taškas. Tada egzistuoja toks difeomorfizmas* $y = y(x)$, *kad pakankamai mažoje taško* $x = a$ *aplinkoje* (1.21) *sistemą galima perrašyti taip:*

$$\dot{y}_i = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n-1, \quad \dot{y}_n = 1$$

Be to kiekviena (1.21) *sistemos trajektorijos dalis, esanti šioje aplinkoje, pereina į atkarpą*

$$y_i = c_i, \quad \forall i = 1, \dots, n-1, \quad y_n = t + c_n;$$

čia $c_1, \dots, c_n$ *yra konstantos.*

$\triangleleft$ Nenusižengiant bendrumui galime tarti, kad taškas $a = 0$. Pagal teoremos sąlygą $f(0) \neq 0$. Todėl galime tarti, kad $f_n(0) \neq 0$. Tegu $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, 0)$ yra fiksuotas vektorius iš taško $x = 0$ aplinkos. Nagrinėsime Koši uždavinį

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = \xi.$$

Pakankamai mažoje taško $t = 0$ aplinkoje šis Koši uždavinys turi vienintelį sprendinį. Tiksliau egzistuoja toks teigiamas skaičius ε ir tokia funkcija $x = \varphi(t, \xi)$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, kad

$$\dot{\varphi}(t, \xi) = f(\varphi(t, \xi)), \quad \varphi(0, \xi) = \xi.$$

Pagal 3.2 teoremą egzistuoja toks teigiamas skaičius δ, kad funkcija $x = \varphi(t, \xi)$ yra diferencijuojama, kai $|t| < \varepsilon$, $|\xi| < \delta$. Parodysime, kad šioje taško $t = 0$, $\xi = 0$

aplinkoje funkcija $x = \varphi(t, \xi)$ turi atvirkštinę $t = \omega(x)$, $\xi = \psi(x)$ ir ji yra diferencijuojama. Iš Koši sąlygos gauname, kad

$$\varphi_i(0, \xi) = \xi_i, \quad \forall i = 1, \dots, n-1, \quad \varphi_n(0, \xi) = 0$$

ir

$$\left|\frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi_j}\right|_{t=0, \xi=0} = \delta_{ij}, \quad i = 1, \dots, n, \; j = 1, \dots, n-1.$$

Todėl Jakobianas

$$J = \begin{vmatrix} \varphi_{1\xi_1} & \cdots & \varphi_{n\xi_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{1\xi_{n-1}} & \cdots & \varphi_{n\xi_{n-1}} \\ \varphi_{1t} & \cdots & \varphi_{nt} \end{vmatrix}_{t=0, \xi=0} = f_n(0) \neq 0.$$

Pagal neišreikštinės funkcijos teoremą pakankamai mažoje taško $x = 0$ aplinkoje egzistuoja diferencijuojama atvirkštinė funkcija

$$\xi_i = \psi_i(x), \quad i = 1, \dots, n-1, \quad t = \psi_n(x)$$

Šioje aplinkoje apibrėžkime naujus nepriklausomus kintamuosius

$$y = \psi(x).$$

Taip apibrėžta transformacija yra difeomorfizmas. Be to, šioje aplinkokje kiekvienam fiksuotam vektoriui ξ trajektorija $x = \varphi(t, \xi)$, išeinanti iš taško ξ laiko momentu $t = 0$, pereina į atkarpą, apibrėžta lygtimi

$$y_i = \xi_i, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad y_n = t.$$

Taigi, atlikus tokią transformaciją, (1.37) sistema pereis į standartinę sistemą

$$\dot{y}_i = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n-1, \quad \dot{y}_n = 1$$

Teorema įrodyta.▷

Iš įrodytos teoremos išplaukia, kad autonominė sistema kiekvieno savo paprastojo taško aplinkoje yra kokybiškai ekvivalenti standartinei sistemai (netgi difeomorfiškai ekvivalenti). Pusiausvyros taško aplinkoje situacija yra iš esmės kita. Netgi tiesinės sistemos atveju (žr. 2.5 skyrelį) kokybinis trajektorijų vaizdas pusiausvyros taško aplinkoje iš esmės priklauso nuo pusiausvyros taško struktūros. Kokybinis trajektorijų vaizdą, geometriškai pavaizduotas srityje Ω, vadinamas *faziniu portretu*.

P a s t a b a. Nagrinėjant (1.37) autonominę sistemą fazinę erdvę ne visada tikslinga apibrėžti kaip sritį $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, kurioje yra apibrėžta funkcija f. Pavyzdžiui, jeigu (1.37) sistema yra vienmatė autonominė lygtis, o jos dešinioji pusė $f \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^1)$ ir yra 2π periodinė funkcija, tai fazinę erdvę tikslinga apibrėžti ne kaip erdvę $\mathbb{R}^1$, o kaip vienetinį apskritimą $S_1 = \{x \bmod 2\pi\}$ su apėjimo kriptimi prieš laikrodžio rodyklę. Ypač tai aktualu tada, kai nagrinėjama autonominė lygtis aprašo realų fzikinį procesą. Šiuo atveju fizikinio proceso būseną erdvė $\mathbb{R}^1$ apibrėžia nevienareikšmiškai. Tuo tarpu tarp vienetinio apskritimo S_1 tašku ir fizikinės sistemos būsenos taškų yra abipus vienareikšmiška atitinkamybė. Jeigu $n = 2$, o vektorinė funkcija $f \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^2)$ yra 2π periodinė pagal abu kintamuosius x_1, x_2, tai (1.37) sistemos fazinę erdvę tikslinga apibrėžti ne kaip erdvę $\mathbb{R}^2$, o kaip torą $S_1 \times S_1 = \{x_1 \bmod 2\pi, x_2 \bmod 2\pi\}$. Jeigu funkcija f yra 2π periodinė tik pagal kokį nors vieną kintamąjį, pavyzdžiui x_1, tai fazinę erdvę tikslinga apibrėžti kaip begalinį cilindrą $S_1 \times \mathbb{R}^1 = \{x_1 \bmod 2\pi, x_2\}$. Taigi (1.37) sistemos fazine erdve gali būti ne tik sritis erdvėje $\mathbb{R}^n$, bet ir kokia nors daugdara matavimo $1 \leq k \leq n$.

1.7. UŽDAVINIAI

1. Raskite diferencialinės lygties $\dot{x} = 3x^{2/3}$ sprendinius ir parodykite, kad yra be galo daug sprendinių, tenkinančių sąlygą $x(0) = 0$.

2. Nubrėžkite diferencialinių lygčių integralines kreives šiais atvejais:

$$\begin{array}{lll} a)\ \dot{x} = x - t; & b)\ \dot{x} = x^2 - t^2 - 1; & c)\ \dot{x} = x^2 + t^2; \\ d)\ \dot{x} = x^3 - x; & e)\ \dot{x} = xt^2; & f)\ \dot{x} = x\ln x,\ x > 0. \end{array}$$

3. Raskite autonominių diferencialinių lygčių pusiausvyros taškus, nustatykite jų rūšį ir nubrėžkite fazinius portretus šiais atvejais:

$$\begin{array}{llll} a)\ \dot{x} = x - 1; & b)\ \dot{x} = x^2 - x^4; & c)\ \dot{x} = \sin x; & d)\ \dot{x} = x^3 - x; \\ e)\ \dot{x} = x - x^3; & f)\ \dot{x} = x^2 + 1; & g)\ \dot{x} = 2x; & h)\ \dot{x} = \operatorname{tg} x. \end{array}$$

4. Suskirstykite diferencialines lygtis

$$\begin{array}{lll} a)\ \dot{x} = (x-1)^2; & b)\ \dot{x} = \sin x; & c)\ \dot{x} = \operatorname{ch} x; \\ d)\ \dot{x} = x^3; & e)\ \dot{x} = \cos x - 1; & f)\ \dot{x} = \operatorname{ch} x - 1 \\ g)\ \dot{x} = \sin 3x; & h)\ \dot{x} = e^x; & i)\ \dot{x} = \operatorname{sh}^2(x-1) \end{array}$$

į kokybiškai ekvivalenčių diferencialinių lygčių klases.

5. Raskite autonominių sistemų

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(1 - x_2), \\ \dot{x}_2 = -x_2(1 - x_1); \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\sin x_1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sin x_1, \\ \dot{x}_2 = \cos x_2; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^2, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2^2 \end{cases}$$

pusiausvyros taškus.

6. Nubrėžkite autonominių sistemų

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1^2; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^2, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2^2 \end{cases}$$

fazinius portretus.

7. Raskite diferencialinių lygčių

$$\dot{x} = x - x^3, x > 1; \quad \dot{x} = x\ln x, x > 0$$

evoliucijos operatorius. Patikrinkite grupinę savybę $\varphi_s(\varphi_t(x)) = \varphi_{s+t}(x)$.

8. Raskite autonominių sistemų

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 x_2, \\ \dot{x}_2 = x_2^2 \end{cases}$$

evoliucijos operatorius. Patikrinkite grupinę savybę $\varphi_s(\varphi_t(x)) = \varphi_{s+t}(x)$.

2 SKYRIUS

Tiesinės sistemos

2.1. TIESINIŲ SISTEMŲ KANONINIS PAVIDALAS

Šiame skyrelyje nagrinėsime tiesinę homogeninę sistemą su pastoviais koeficientais

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n; \tag{2.1}$$

čia A – $n \times n$ eilės pastovioji matrica, $x = \operatorname{colon}(x_1, \ldots, x_n)$ – ieškoma vektorinė funkcija.

Parodysime, kad šią sistemą galima suvesti į paprasčiausią pavidalą. Vietoje ieškomos funkcijos x apibrėžkime naują ieškomą funkciją y formule

$$x = Qy;$$

čia Q – neišsigimusi $n \times n$ eilės matrica. Tada y atžvilgiu gausime sistemą

$$\dot{y} = Q^{-1}AQy.$$

Matrica $B = Q^{-1}AQ$ vadinama *panašia* matricai A. Matricų panašumas yra ekvivalentiškumo sąryšis, t.y.

1. $A \sim A$.
2. $B \sim A \Longleftrightarrow A \sim B$.
3. $A \sim B, B \sim C \Longrightarrow A \sim C$.

Bet kokioms matricoms A, B, priklausančioms tai pačiai ekvivalentiškumo klasei, sistemų $\dot{x} = Ax$, $\dot{y} = By, B = Q^{-1}AQ$ sprendiniai yra tarpusavyje susiję sąryšiu

$$x = Qy.$$

Todėl, jeigu žinome kurios nors vienos sistemos sprendinį, tai galime rasti bet kurios kitos sitemos iš tos pačios ekvivalentiškumo klasės sprendinį.

Tegu A yra kokia nors $n \times n$ eilės matrica. Matricos A tikrinės reikšmės randamos iš lygties

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = 0.$$

Pastaroji lygtis vadinama *charakteristine lygtimi*, o polinomas $p_A(\lambda)$ – *charakteristiniu polinomu*.

Tiesinėje algebroje įrodoma, kad matricos A charakteristinis polinomas

$$p_A(\lambda) = (-\lambda)^n + c_1(-\lambda)^{n-1} + c_2(-\lambda)^{n-2} + \ldots + c_{n-1}(-\lambda) + c_n;$$

čia c_k yra matricos $A = \{a_{ij}\}$ pagrindinių k-osios eilės minorų suma (priminsime, kad minoras vadinamas pagrindiniu, jeigu jo eilučių numeriai sutampa su stulpelių numeriais). Koeficientas

$$c_1 = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

vadinamas matricos A *pėdsaku* ir žymimas $\mathrm{Tr}\,A$. Koeficientas

$$c_n = \det A.$$

Tegu $B = Q^{-1}AQ$, $\det Q \neq 0$. Tada

$$p_B(\lambda) = \det(B - \lambda E) = \det(Q^{-1}AQ - \lambda E) = \det(Q^{-1}(A - \lambda E)Q) =$$

$$= \det Q^{-1} \det(A - \lambda E) \det Q = \det(A - \lambda E) = p_A(\lambda).$$

Iš čia išplaukia, kad panašių matricų charakteristiniai polinomai sutampa. Kartu galime tvirtinti, kad panašių matricų charakteristiniai polinomai turi vienodas šaknis ir jų kartotinumas sutampa. Be to, jeigu matricos A ir B yra panašios, tai

$$\mathrm{Tr}\,A = \mathrm{Tr}\,B \quad ir \quad \det A = \det B.$$

Matricą A atitinka ekvivalentiškumo klasė. Kiekvienoje ekvivalentiškumo klasėje išskirsime matricą su paprasčiausia struktūra.

Tegu $\lambda = a$ yra matricos A charakteristinio polinomo k kartotinumo šaknis. Tada charakteristinis polinomas $\det(A - \lambda E)$ dalinasi iš $(\lambda - a)^k$ be liekanos. Iš charakteristinės matricos $A - \lambda E$, išbraukiant vieną eilutę ir vieną stulpelį, sudarome visus galimus $n-1$ eilės determinantus. Tegu $(\lambda - a)^{k_1}$ yra visų šių determinantų bendras didžiausias daliklis. Išbraukiant dvi eilutes ir du stulpelius, sudarome visus galimus $n-2$ eilės determinantus. Tegu $(\lambda - a)^{k_2}$ yra visų šių $n-2$ eilės determinantų bendras didžiausias daliklis. Taip toliau tęsdami, gausime seką teigiamų skaičių $k_1, \ldots, k_s$, $s \le k$. Remiantis determinanto apibrėžimu, galima įrodyti, kad

$$k > k_1 > \cdots > k_s > 0.$$

Tegu $l_1 = k - k_1, l_2 = k_1 - k_2, \ldots l_s = k_{s-1} - k_s, l_{s+1} = k_s$. Taip apibrėžti skaičiai $l_i \ge 1$ ir jų suma lygi k. Reiškiniai

$$(\lambda - a)^{l_1}, \ldots, (\lambda - a)^{l_s}, (\lambda - a)^{l_{s+1}}$$

vadinami matricos A elementariais dalikliais (atitinkančiais charakteristinę šaknį $\lambda = a$). Analogiškai apibrėžiami elementarūs dalikliai, atitinkantys kitas charakteristinio polinomo šaknis.

P a s t a b a . Galima įrodyti, kad panašių matricų elementarūs dalikliai sutampa.

P a v y z d ž i a i :

1. Tegu

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Tada

$$\det(A-\lambda E)=\det\begin{pmatrix} a-\lambda & 0 & 0\\ 0 & a-\lambda & 0\\ 0 & 0 & a-\lambda\end{pmatrix}=(a-\lambda)^3.$$

Šiuo atveju $\lambda = a$ yra 3 kartotinumo šaknis. Taigi $k = 3$. Visi antros eilės determinantai, sudaryti iš matricos $A-\lambda E$, dalinasi iš $(\lambda-a)^2$, o pirmos eilės determinantai – iš $(\lambda-a)$. Todėl $k_1 = 2$, $k_2 = 1$. Kartu $l_1 = 3-2 = 1$, $l_2 = 2-1 = 1$, $l_3 = 1$ ir matrica A turi tris elementarius daliklius $\lambda-a$, $\lambda-a$, $\lambda-a$.

2. Tegu

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0\\ 0 & a & 0\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}.$$

Tada

$$\det(A-\lambda E)=\det\begin{pmatrix} a-\lambda & 1 & 0\\ 0 & a-\lambda & 0\\ 0 & 0 & a-\lambda\end{pmatrix}=(a-\lambda)^3.$$

Šiuo atveju $\lambda = a$ yra 3 kartotinumo šaknis, $k = 3$. Visi antros eilės determinantai, sudaryti iš matricos $A-\lambda E$, dalinasi iš $(\lambda-a)$. Todėl $k_1 = 1$. Be to, vienas pirmos eilės determinantas nesidalina iš $(\lambda-a)$. Todėl $l_1 = 3-1 = 2$, $l_2 = k_1 = 1$. Taigi matrica A turi du elementarius daliklius $(\lambda-a)^2$, $\lambda-a$.

3. Tegu

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0\\ 0 & a & 1\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}.$$

Tada

$$\det(A-\lambda E)=\det\begin{pmatrix} a-\lambda & 1 & 0\\ 0 & a-\lambda & 1\\ 0 & 0 & a-\lambda\end{pmatrix}=(a-\lambda)^3.$$

Šiuo atveju $\lambda = a$ yra 3 kartotinumo šaknis, $k = 3$. Matricos $A-\lambda E$ antros eilės determinantas

$$\begin{vmatrix} 1 & 0\\ a-\lambda & 1\end{vmatrix}=1$$

nesidalina iš $(\lambda-a)$. Todėl $l_1 = 3$ ir $(\lambda-a)^3$ yra vienintelis elementarus daliklis.

4. Lengvai galima įsitikinti, kad k-os eilės matrica

$$J_k(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{pmatrix}$$

turi tik vieną elementarų daliklį $(\lambda - a)^k$. Be to,

$$J_k(a) = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Taigi

$$J_k(a) = aE_k + T_k;$$

čia E_k – vienetinė matrica, o T_k – matrica, kurios pirmoje (ne pagrindinėje) viršutinėje įstrižainėje vienetukai, o kiti elementai lygūs nuliui.

Tiesinėje algebroje yra įrodoma tokia teorema.

2.1 **teorema. (Žordano)** *Kiekvienai matricai $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ egzistuoja tokia neišsigimusi matrica Q, kad*

$$A = QJQ^{-1}, \quad J = \operatorname{diag}\{J_{s_1}(\lambda_1), \dots, J_{s_m}(\lambda_m)\};$$

čia $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ – matricos A charakteristinio polinomo šaknys (kai kurios iš jų arba net visos gali būti vienodos), $s_1 + \dots + s_m = n$, $(\lambda - \lambda_i)^{s_i}$ – elementarūs dalikliai.

Matrica J yra vadinama *Žordano matrica*, matricos $J_{s_i}(\lambda_i)$ – *Žordano langeliais.*

I š v a d a. Žordano matricos struktūrą nusako ne charakteristinio polinomo šaknys, o elementarūs dalikliai.

Tegu $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ – pastovioji matrica. Tada (2.1) sistemą keitiniu

$$x = Qy, \quad \det Q \neq 0,$$

galima suvesti į *kanoninį* pavidalą

$$\dot{y} = Jy; \tag{2.2}$$

čia $J = Q^{-1}AQ$ – Žordano matrica. Kadangi matricos A ir J yra panašios, tai

$$\operatorname{Tr} A = \operatorname{Tr} J \quad ir \quad \det A = \det J.$$

Tegu $n = 2$. Tada charakteristinę lygtį galima užrašyti taip:

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - (\mathrm{Tr}\, A)\lambda + \det A = 0;$$

čia $\mathrm{Tr}\, A = \sum_{i=1}^{2} a_{ii}$. Jos šaknys

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(\mathrm{Tr}\, A \pm \sqrt{D}), \quad D = (\mathrm{Tr}\, A)^2 - 4\det A.$$

Tiesiogiai galima įsitikinti, kad

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{Tr}\, A, \quad \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det A.$$

Dvimačiu atveju Žordano matrica J gali turėti vieną iš keturių pavidalų:

$$J_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, J_2 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, J_3 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, J_4 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix};$$

čia $\lambda_1, \lambda_2, \lambda, \alpha, \beta$ – realūs skaičiai.

Išskirsime tris atvejus:

1. Matricos A tikrinės reikšmės yra realios ir skirtingos (tai bus tada ir tik tada, kai $D > 0$). Šiuo atveju tikrines reikšmes λ_1, λ_2 atitinka du tiesiškai nepriklausomi tikriniai vektoriai x_1, x_2. Jie randami iš lygčių

$$Ax_i = \lambda_i x_i, \quad i = 1, 2.$$

Tegu Q yra matrica, sudaryta iš šių vektorių. Tada

$$AQ = (Ax_1, Ax_2) = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2) = QJ_1;$$

čia

$$J_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Taigi Žordano matrica $J = Q^{-1}AQ = J_1$.

2. Matricos A tikrinės reikšmės yra realios ir sutampa, t.y. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ (tai bus tada ir tik tada, kai $D = 0$). Šiuo atveju yra galimos dvi skirtingos situacijos, kai matrica A yra diagonali ir nediagonali. Tarkime, matrica A yra diagonali. Tada

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda E;$$

čia E – tapati matrica. Šiuo atveju bet kokiai neišsigimusiai matricai Q yra teisinga lygybė

$$Q^{-1}AQ = A.$$

Tai reiškia, kad matricos A ekvivalentiškumo klasėje yra tik viena matrica A ir $A = J_2$.

Jeigu matrica A yra nediagonali, tai matricos $A - \lambda E$ rangas lygus vienetui ir matrica A turi tik vieną tikrinę reikšmę x. Tegu Q yra matrica, sudaryta iš vektorių x, y. Čia y yra sistemos

$$Ay = x + \lambda y$$

sprendinys. Tada

$$AQ = (Ax, Ay) = (\lambda x, x + \lambda y) = QJ_3;$$

čia

$$J_3 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Taigi Žordano matrica $J = Q^{-1}AQ = J_3$.

3. Tarkime, matricos A tikrinės reikšmės $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ yra kompleksinės (tai bus tada ir tik tada, kai $D < 0$). Šiuo atveju jas atitinka du kompleksiškai jungtiniai tikriniai vektoriai $x = u + iv$, $y = u - iv$. Jie randami iš lygties

$$A(u + iv) = (\alpha + i\beta)(u + iv).$$

Atskyrę šioje lygtyje realią ir menamą dalis, gausime

$$Au = \alpha u - \beta v, \quad Av = \beta u + \alpha v.$$

Tegu $Q = (u, v)$. Tada

$$AQ = (Au, Av) = (\alpha u - \beta v, \beta u + \alpha v) = QJ_4;$$

čia

$$J_4 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Taigi Žordano matrica $J = Q^{-1}AQ = J_4$.

Kai $n = 3$, Žordano matrica J gali turėti vieną iš keturių pavidalų

$$J_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

$$J_3 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad J_4 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & -\beta & \alpha \end{pmatrix};$$

čia $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Atkreipsime dėmesį, kad pirmąją, antrąją ir ketvirtąją Žordano matricas galima išskaidyti į blokus, kurių matavimas lygus vienetui arba dviem. Tokia blokinė Žordano matricos struktūra leidžia kanoninę sistemą išskaidyti į kelias nepriklausomas sistemas. Pavyzdžiui, (2.2) sistemą, kai $J = J_4$, galima išskaidyti taip:

$$\dot{y}_1 = \lambda_1 y_1, \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{y}_2 &=& \alpha y_2 + \beta y_3, \\ \dot{y}_3 &=& -\beta y_2 + \alpha y_3, \end{array} \right.$$

Kai $n = 4$, Žordano matrica J turi vieną iš trijų pavidalų:

$$J_1 = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}, \; J_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \; J_3 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix};$$

čia M ir N antros eilės Žordano langeliai, λ_1 ir $\lambda \in \mathbb{R}$. Kai $J = J_1$, kanoninė sistema išsiskaido į dvi dviejų lygčių sistemas:

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}.$$

o kai $J = J_2$ – į vieną vienos lygties ir vieną trijų lygčių sistemas:

$$\dot{y}_1 \;=\; \lambda_1 y_1, \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{y}_2 & = & \lambda y_2 + y_3, \\ \dot{y}_3 & = & \lambda y_3 + y_4, \\ \dot{y}_4 & = & \lambda y_4 \end{array} \right. .$$

Tegu

$$J = \operatorname{diag}\{J_{s_1}(\lambda_1), \ldots, J_{s_m}(\lambda_m)\}.$$

Tada (2.2) sistemą galima perrašyti taip:

$$\begin{array}{rcl} \dot{y}_1 & = & \lambda_1 y_1 + y_2, \\ \dot{y}_2 & = & \lambda_1 y_2 + y_3, \\ \vdots & & \vdots \\ \dot{y}_{s_1} & = & \lambda_1 y_{s_1}, \\ \vdots & & \vdots \\ \dot{y}_{n-s_m+1} & = & \lambda_m y_{n-s_m+1} + y_{n-s_m+2}, \\ \dot{y}_{n-s_m+2} & = & \lambda_m y_{n-s_m+2} + y_{n-s_m+3}, \\ \vdots & & \vdots \\ \dot{y}_n & = & \lambda_m y_n. \end{array}$$

Pastaroji sistema turi svarbų privalumą prieš bendro pavidalo sistemą. Visų pirma ji išsiskaido į m nepriklausomų sistemų. Kiekvieną iš šių sistemų galima suintegruoti atskirai. Bendrąjį sistemos sprendinį lengvai galima apibrėžti nuosekliai ją integruojant, pradedant nuo paskutinės sistemos lygties.

Antra – nagrinėjant įvairius diferencialinių lygčių teorijos klausimus, pakanka šiuos klausimus ištirti kanoninėms sistemoms. Pavyzdžiui, nagrinėjant įvairius uždavinius, susijusius su antros eilės sistema, pakanka išnagrinėti kanoninę sistemą, kurioje Žordano matrica įgyja vieną iš keturių pavidalų (žr. atvejį $n = 2$).

2.2. KANONINIŲ SISTEMŲ PLOKŠTUMOJE FAZINIAI PORTRETAI

Tegu A yra antros eilės kvadratinė matrica ir J yra ją atitinkanti Žordano matrica. Tada tiesinę sistemą
$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^2$$
atitinka kanoninė sistema
$$\dot{y} = Jy, \quad y \in \mathbb{R}^2; \tag{2.3}$$
Ištirsime šios sistemos pusiausvyros taškų charakterį, priklausomai nuo charakteristinio polinomo $p_A(\lambda)$ šaknų, t.y. nuo matricos A tikrinių reikšmių λ_1, λ_2. Kadangi panašių matricų charakteristiniai polinomai sutampa, tai
$$\mathrm{Tr}\, A = \mathrm{Tr}\, J = \lambda_1 + \lambda_2, \quad \det A = \det J = \lambda_1 \cdot \lambda_2.$$

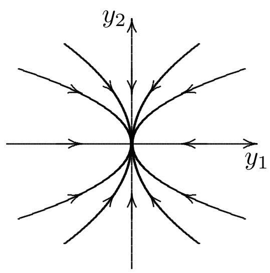
Tarkime, matricos J tikrinės reikšmės λ_1, λ_2 yra realios, skirtingos ir nelygios nuliui. Tada (2.3) sistemą galima perrašyti taip:
$$\dot{y}_1 = \lambda_1 y_1, \quad \dot{y}_2 = \lambda_2 y_2.$$
Jos bendrasis sprendinys
$$y_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}, \quad y_2(t) = c_2 e^{\lambda_2 t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{2.4}$$
Išskirsime tris atvjus:

1. Tikrinės reikšmės λ_1, λ_2 yra neigiamos. Tai bus tada ir tik tada, kai $\det A > 0$, $D > 0$ ir $\mathrm{Tr}\, A < 0$. Tegu $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$. Tada $|y_1(t)| \to 0$ ir $|y_2(t)| \to 0$, kai $t \to \infty$. Taigi visos nagrinėjamos sistemos trajektorijos artėja į koordinačių pradžią. Eliminavę iš (2.4) lygčių kintamąjį t, gausime lygtį
$$y_1 = c|y_2|^{\lambda_1/\lambda_2}, \quad c = c_1/|c_2|^{\lambda_1/\lambda_2}.$$
Iš jos išplaukia, kad (2.3) sistemos trajektorijos yra parabolės[1]. Be to, $\lambda_1/\lambda_2 > 1$. Todėl visos jos liečia ašį x_2 (žr. 2.1 pav.)

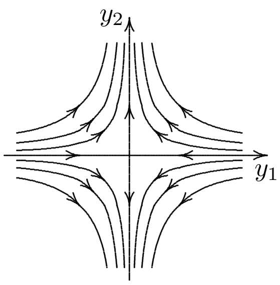
2. Tikrinės reikšmės λ_1, λ_2 yra priešingų ženklų. Tai bus tada ir tik tada, kai $\det A < 0$, $D > 0$. Tegu $\lambda_1 < \lambda_2$. Tiksliau tegu $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. Tada $|y_1(t)| \to 0$, $|y_2(t)| \to \infty$, kai $t \to \infty$. Kadangi $\lambda_1/\lambda_2 < 0$, tai trajektorijos yra hiperbolės[2] (žr. 2.2 pav.).

3. Tikrinės reikšmės λ_1, λ_2 yra teigiamos. Tai bus tada ir tik tada, kai $\det A > 0$, $D > 0$ ir $\mathrm{Tr}\, A > 0$. Tegu $0 < \lambda_1 < \lambda_2$. Tada $|y_1(t)| \to \infty$, $|y_2(t)| \to \infty$, kai $t \to \infty$. Kadangi $\lambda_1/\lambda_2 > 0$, tai trajektorijos yra parabolės[3]. Be to, $\lambda_1/\lambda_2 < 1$. Todėl jos visos liečia ašį x_1 (žr. 2.3 pav).

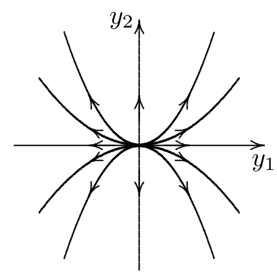
[1] Iš tikrųjų tikrosios parabolės yra gaunamos tik tuo atveju, kai $\lambda_1/\lambda_2 = 2$.
[2] Iš tikrųjų tikrosios hiperbolės gaunamos tik tuo atveju, kai $\lambda_1/\lambda_2 = -1$.
[3] Iš tikrųjų tikrosios parabolės gaunamos tik tuo atveju, kai $\lambda_1/\lambda_2 = 1/2$.



2.1 pav.



2.2 pav.



2.3 pav.

Pusiausvyros taškas, pavaizduotas 2.1 ir 2.3 paveikslėliuose, vadinamas *mazgo* tašku, o pusiausvyros taškas, pavaizduotas 2.2 paveikslėlyje – *balno* tašku.

Tarkime dabar, kad tikrinės reikšmės λ_1, λ_2 sutampa ir nelygios nuliui. Tai bus tada ir tik tada, kai $\det A > 0$ ir $D = 0$. Tegu $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$. Išskirsime du atvejus:

1. Tarkime, matrica J yra diagonali. Tada (2.3) sistemą galima perrašyti taip:

$$\dot{y}_1 = \lambda y_1, \quad \dot{y}_2 = \lambda y_2.$$

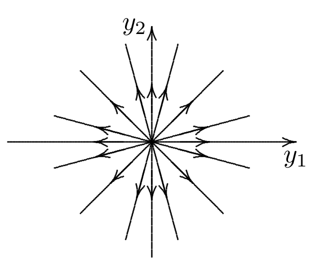
Jos bendrasis sprendinys

$$y_1(t) = c_1 e^{\lambda t}, \quad y_2(t) = c_2 e^{\lambda t}.$$

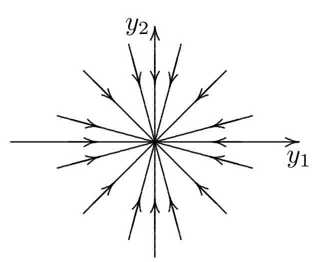
Tegu $\lambda > 0$. Tada $|y_1(t)| \to \infty$, $|y_2(t)| \to \infty$, kai $t \to \infty$. Jeigu $\lambda < 0$, tai $|y_1(t)| \to 0$, $|y_2(t)| \to 0$, kai $t \to \infty$. Eliminavę iš pastarųjų lygčių kintamąjį t, gausime lygtį

$$y_1 = k y_2, \quad k = c_1/c_2.$$

Taigi sistemos trajektorijos yra spinduliai, išeinantys iš koordinačių pradžios, kai $\lambda > 0$, ir įeinantys į koordinačių pradžią, kai $\lambda < 0$ (žr. 2.4 ir 2.5 pav.). Pusiausvyros taškai, pavaizduoti 2.4 ir 2.5 paveikslėliuose, vadinami *dikritiniais* mazgais.



2.4 pav.



2.5 pav.

2. Matrica J nėra diagonali. Tada turime sistemą

$$\dot{y}_1 = \lambda y_1 + y_2, \quad \dot{y}_2 = \lambda y_2.$$

Jos bendrasis sprendinys

$$y_1(t) = (c_1 + c_2 t) e^{\lambda t}, \quad y_2(t) = c_2 e^{\lambda t}.$$

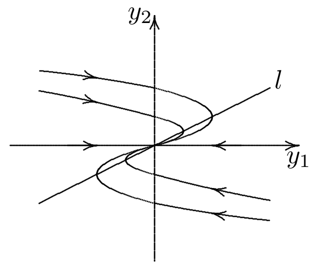
Jeigu $\lambda > 0$, tai $|y_1(t)| \to \infty$, $|y_2(t)| \to \infty$, kai $t \to \infty$. Jeigu $\lambda < 0$, tai $|y_1(t)| \to 0$, $|y_2(t)| \to 0$, kai $t \to \infty$. Eliminavę iš pastarųjų lygčių kintamąjį t, gausime sitemos trajektorijų lygtį

$$y_1 = \frac{c_1}{c_2} y_2 + \frac{1}{\lambda} y_2 \ln \frac{y_2}{c_2}.$$

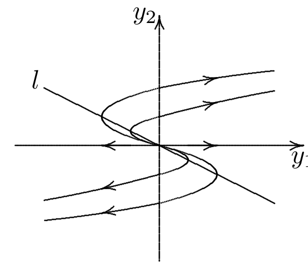
Išvestinė $dy_1/dy_2 \to \infty$, kai $y_2 \to 0$. Todėl visos trajektorijos liečia ašį y_1 koordinačių pradžios taške. Geometrinė vieta taškų, kuriuose trajektorijos keičia kryptį, apibrėžiama lygtimi $\dot{y}_1 = 0$. Iš pirmosios sistemos lygties gauname, kad tai yra tiesė

$$l: \ \lambda y_1 + y_2 = 0.$$

Fazinis sitemos portretas, kai $\lambda < 0$ ir $\lambda > 0$, pavaizduotas 2.6 ir 2.7 paveikslėliuose. Abiem atvejais pusiausvyros taškas vadinamas *išsigimusiu mazgo* tašku.



2.6 pav.



2.7 pav.

Tarkime, tikrinės reikšmės yra kompleksiškai jungtinės: $\lambda = \alpha + i\beta$, $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$. Tai bus tada ir tik tada, kai $D < 0$. Šiuo atveju (2.3) sistemą galima perrašyti taip:

$$\dot{y}_1 = \alpha y_1 + \beta y_2, \quad \dot{y}_2 = -\beta y_1 + \alpha y_2.$$

Įvedę polines koordinates

$$y_1 = r\cos\theta, \quad y_2 = r\sin\theta,$$

gausime sistemą

$$\dot{r} = \alpha r, \quad \dot{\theta} = -\beta.$$

Jos sprendinys

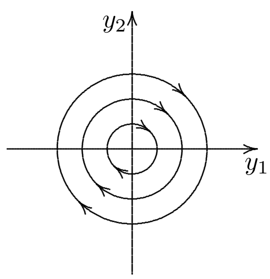
$$r = r_0 e^{\alpha t}, \quad \theta = \theta_0 - \beta t.$$

Taigi

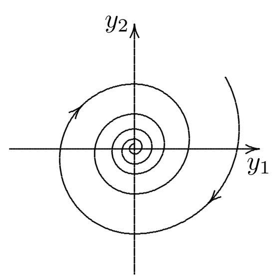
$$y_1 = r_0 e^{\alpha t}\cos(\theta_0 - \beta t), \quad y_2 = r_0 e^{\alpha t}\sin(\theta_0 - \beta t).$$

Jeigu $\alpha < 0$, tai $|y_1(t)| \to 0$, $|y_2(t)| \to 0$, kai $t \to \infty$. Jeigu $\alpha > 0$, tai $|y_1(t)| \to \infty$, $|y_2(t)| \to \infty$, kai $t \to \infty$. Jeigu $\alpha = 0$, tai visos trajektorijos yra $2\pi/\beta$ periodinės funkcijos.

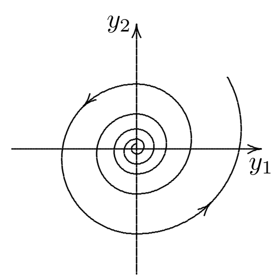
Tarkime $\alpha = 0$, t.y. tikrinė reikšmė λ yra grynai menama (tai bus tada ir tik tada, kai $\mathrm{Tr}\, A = 0$). Šiuo atveju trajektorijos yra koncentriški apskritimai su centru koordinačių pradžioje (žr. 2.8 pav.). Pusiausvyros taškas, pavaizduotas 1.8 paveikslėlyje, vadinamas *centro* tašku. Tegu $\alpha \neq 0$. Tada trajektorijos yra spiralės. Kai $t \to \infty$ ir $\alpha < 0 (\Leftrightarrow \operatorname{Tr} A < 0)$, fazinis taškas juda spirale, artėdamas prie koordinačių pradžios (žr. 2.9 pav.), o kai $\alpha > 0$ $(\Leftrightarrow \operatorname{Tr} A > 0)$, fazinis taškas juda spirale, toldamas nuo koordinačių pradžios į begalybę (žr. 2.10 pav.). Pusiausvyros taškas, pavaizduotas 2.9, 2.10 paveikskėliuose, vadinamas *židinio* tašku. Visais atvejais judėjimą prieš ar pagal laikrodžio rodyklę, nusako koeficiento β ženklas.



2.8 pav.



2.9 pav.



2.10 pav.

Tarkime $\det J = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$. Jeigu $\lambda_1 = 0$, o $\lambda_2 \neq 0$, tai (2.3) sistemą galima perrašyti taip:

$$\dot{y}_1 = 0, \quad \dot{y}_2 = \lambda_2 y_2.$$

Jos bendrasis sprendinys

$$y_1(t) = C_1, \quad y_2(t) = C_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Iš čia išplaukia, kad bet kuris taškas, gulintis y_1 ašyje, yra pusiausvyros taškas. Kai $\lambda_2 > 0$ $(\lambda_2 < 0)$, trajektorijos yra iš y_1 ašies išeinantys (įeinantys) spinduliai, lygiagretūs y_2 ašiai. Fazinis sistemos portretas, kai $\lambda_2 > 0$ ir $\lambda_2 < 0$, pavaizduotas 2.11 ir 2.12 paveikslėliuose.

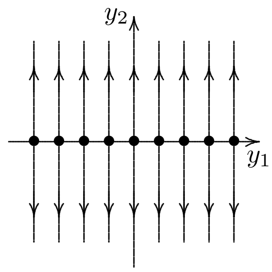
Jeigu $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ir matrica J nėra nulinė, tai (2.3) sistemą galima perrašyti taip:

$$\dot{y}_1 = y_2, \quad \dot{y}_2 = 0.$$

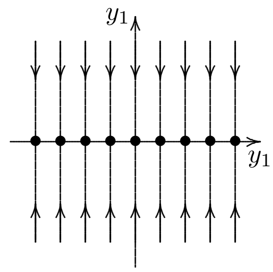
Jos bendrasis sprendinys

$$y_1(t) = C_2 t, \quad y_2(t) = C_2.$$

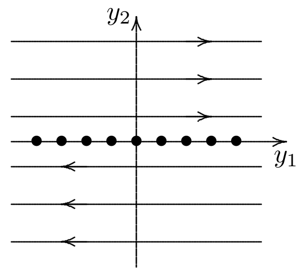
Iš čia išplaukia, kad bet kuris taškas, gulintis y_1 ašyje, yra pusiausvyros taškas, o trajektorijos yra tiesės, lygiagrečios y_1 ašiai. Fazinis sistemos portretas pavaizduotas 2.13 paveikslėlyje.



2.11 pav.

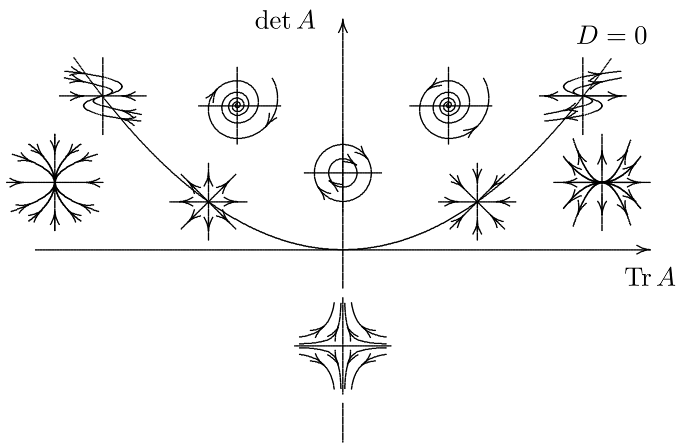


2.12 pav.



2.13 pav.

Kanoninės sistemos $\dot{y} = Jy$ pusiausvyros taško charakteris priklauso nuo Žordano matricos J tikrinių reikšmių. Tiksliau, nuo charakteristinio polinomo $p_J(\lambda)$ koeficientų $\mathrm{Tr}\, J$ ir $\det J$. Kadangi panašių matricų charakteristiniai polinomai sutampa, tai $\mathrm{Tr}\, J = \mathrm{Tr}\, A$, $\det J = \det A$. Todėl tiesinių sistemų $\dot{x} = Ax$ pusiausvyros taškus galima klasifikuoti lygiai taip pat kaip ir jas atitinkančių kanoninių sistemų pusiausvyros taškus. Pavyzdžiui, jeigu kokios nors kanoninės sistemos $\dot{y} = Jy$ pusiausvyros taškas yra židinys, tai visų ją atitinkančių tiesinių sistemų pusiausvyros taškai taip pat yra židiniai.



2.14 pav.

Kiekvieną fiksuotą reikšmių $\mathrm{Tr}\, A$ ir $\det A$ porą atitinka charakteristinis polinomas $p_A(\lambda)$. Savo ruožtu charakteristinis polinomas $p_A(\lambda)$ vienareikšmiškai apibrėžia kanoninę sistemą $\dot{y} = Jy$ bei jos pusiausvyros tašką. Kartu yra apibrėžiamas ir su šia sistema susijusios tiesinės sistemos $\dot{x} = Ax$ pusiausvyros taškas. Taigi kiekvieną reikšmių $\mathrm{Tr}\, A$, $\det A$ porą atitinka tam tikras tieisnės sistemos $\dot{x} = Ax$ pusiausvyros taškas. Ši atitinkamybė geometriškai pavaizduota 2.14 paveikslėlyje

Tegu Q yra neišsigimusi matrica, kurios pagalba matrica A suvedama į Žordano pavidalą J. Tada transformacija $x = Qy$ deformuoja kanoninės sistemos $\dot{y} = Jy$ fazinį portretą į tiesinės sistemos $\dot{x} = Ax$ fazinį portretą. Kadangi tokia transformacija yra tiesinė ir tolydi, tai trajektorijų kokybinis vaizdas išlieka toks pats. Jos gali būti tik kiek ištemptos (suspaustos) ir pasuktos apie koordinačių pradžią. Pavyzdžiui, sistema

$$\dot{x}_1 = \frac{5}{3}x_1 - \frac{4}{3}x_2, \quad \dot{x}_2 = \frac{4}{3}x_1 - \frac{5}{3}x_2$$

tiesinės transformacijos

$$x_1 = 2y_1 + y_2, \quad x_2 = y_1 + 2y_2$$

pagalba suvedama į kanoninį pavidalą

$$\dot{y}_1 = y_1, \quad \dot{y}_2 = -y_2.$$

Šiuo atveju Žordano matricos tikrinės reikšmės $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$. Todėl pusiausvyros taškas yra balno taškas. Kanoninės sistemos bendrasis sprendinys

$$y_1 = c_1 e^t, \quad y_2 = c_2 e^{-t}.$$

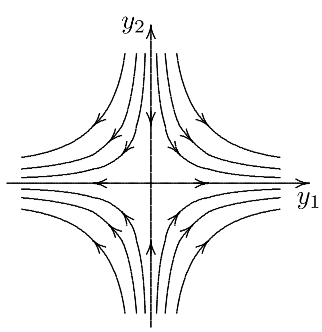
Fazinis sitemos portretas pavaizduotas 2.15 paveikslėlyje. Grįžę prie kintamųjų x_1, x_2, gausime

$$x_1 = 2c_1 e^t + c_2 e^{-t}, \quad x_2 = c_1 e^t + 2c_2 e^{-t}.$$

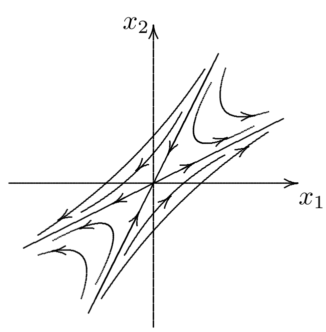
Iš šių lygčių eliminavę kintamąji t, gausime nagrinėjamos sistemos trajektorijų lygtį

$$(x_2 - 2x_1)(x_1 - 2x_2) = c;$$

čia $c = 9c_1c_2$. Taigi nagrinėjamos sitemos trajektorijos yra hiperbolės. Jų fazinis portetas pavaizduotas 2.16 paveikslėlyje.



2.15 pav.



2.16 pav.

2.3. EKSPONENTĖ. JOS SAVYBĖS

Vienmačiu atveju Koši uždavinio

$$\dot{x} = ax, \quad x(t_0) = x_0$$

sprendinys apibrėžiamas formule

$$x(t) = e^{a(t-t_0)}x_0.$$

Pasirodo, kad n-mačiu atveju yra teisinga analogiška formulė. Reikia tik apibrėžti eksponentės e^A, $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ sąvoką.

Akivaizdu, kad $\mathbb{R}^{n,n}$ yra tiesinė aibė. Normą joje galima apibrėžti taip:

$$\|A\| = \max_{i,j=1,\dots,n} |a_{ij}|;$$

čia a_{ij} yra matricos A elementai. Su taip apibrėžta norma aibė $\mathbb{R}^{n,n}$ yra tiesinė erdvė. Priminsime, kad matricų suma ir daugyba iš realaus skaičiaus apibrėžiamos paelemenčiui, t.y. sudedant dvi matricas, yra sudedami atitinkami matricų elementai, o dauginant matricą iš realaus skaičiaus, visi jos elementai dauginami iš to paties skaičiaus. Todėl erdvę $\mathbb{R}^{n,n}$ galima sutapatinti su $\mathbb{R}^{n^2}$. Iš matricos normos apibrėžimo bei dviejų matricų sandaugos apibrėžimo išplaukia, kad

$$\|AB\| \le n\|A\|\,\|B\|, \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^{n,n}.$$

Įrodysime, kad erdvė $\mathbb{R}^{n,n}$ yra pilna. Iš tikrųjų, tegu $\{A_n\} \subset \mathbb{R}^{n,n}$ – Koši seka, t.y. $\forall\varepsilon > 0$, egzistuoja toks skaičius $N(\varepsilon)$, kad

$$\|A_m - A_k\| < \varepsilon, \quad \text{kai } m, k > N(\varepsilon).$$

Pagal normos apibrėžimą tai reiškia, kad

$$|a_{ij}^m - a_{ij}^k| < \varepsilon, \quad \text{kai } m, k > N(\varepsilon),\ \forall i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Realiųjų skaičių erdvė $\mathbb{R}$ yra pilna. Todėl egzistuoja tokie realūs skaičiai a_{ij}, kad $a_{ij}^k \to a_{ij}$, kai $k \to \infty$. Tegu $A = \{a_{ij}\}$. Tada

$$\|A_m - A\| < \varepsilon, \quad \text{kai } m > N(\varepsilon).$$

Taigi $A = \lim_{m\to\infty} A_m$ ir erdvė $\mathbb{R}^{n,n}$ yra pilna.

Remiantis šia savybe galima įrodyti, kad iš matricų sudarytoms eilutėms išlieka teisingi funkcinių eilučių teorijos teiginiai. Atskiru atveju išlieka teisingas Vejerštraso požymis ir teorema apie eilučių diferencijavimą panariui:

2.2 **teorema. (Vejerštraso požymis)** *Jeigu matricų eilutė*

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k(t), \quad A_k : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^{n,n} \tag{2.5}$$

turi skaitinę mažorantę

$$\|A_k(t)\| \le a_k, \quad \forall t \in \langle a, b\rangle,\ k = 1, 2, \ldots$$

ir

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty,$$

tai matricų eilutė intervale $\langle a, b\rangle$ *konverguoja absoliučiai ir tolygiai.*

2.3 **teorema. (apie eilučių diferencijavimą panariui)** *Jeigu* (2.5) *eilutė konverguoja ir eilutė, sudaryta iš išvestinių*

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k'(t),$$

konverguoja tolygiai, tai (2.5) *eilutę galima diferencijuoti panariui ir yra teisinga formulė*

$$\frac{d}{dt}\Big(\sum_{k=1}^{\infty} A_k(t)\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k'(t).$$

P a s t a b a. Pagal apibrėžimą $A'(t) = \{a_{ij}'(t)\}$. Be to, jeigu matricos $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$ yra diferencijuojamos, tai

$$\big(AB\big)' = A'B + AB'.$$

Tegu $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Tada matricos A k-ąjį laipsnį galima apibrėžti rekurentine formule

$$A^k = A^{k-1}A, \quad k = 2, 3, \ldots$$

Kartu $\forall m = 1, 2, \ldots,$ galime apibrėžti baigtinę sumą

$$S_m(A) = \sum_{k=0}^{m} \frac{A^k}{k!} = E + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^m}{m!} \in \mathbb{R}^{n,n}.$$

Matricos A *eksponente* vadinsime eilutę

$$e^A = \lim_{m\to\infty} S_m(A) = E + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^m}{m!} + \cdots$$

Parodysime, kad ši eilutė konverguoja.

Tegu $\|A\| \le a$. Tada skaitinė eilutė

$$1 + a + \frac{a^2}{2!} + \cdots + \frac{a^m}{m!} + \cdots$$

konverguoja ir yra mažoranta eilutei e^A. Pagal Vejerštraso požymį eilutė e^A konverguoja.

Įrodysime paprasčiausiais eksponentės e^A savybes. Tegu Q neišsigimusi matrica tokia, kad $A = QJQ^{-1}$, J – Žordano matrica. Tada

$$(QJQ^{-1})^2 = QJQ^{-1}QJQ^{-1} = QJ^2Q^{-1}.$$

Taikant matematinės indukcijos metodą, galima įrodyti, kad

$$(QJQ^{-1})^k = QJ^kQ^{-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Todėl

$$e^A = e^{QJQ^{-1}} = E + QJQ^{-1} + \frac{(QJQ^{-1})^2}{2!} + \cdots + \frac{(QJQ^{-1})^k}{k!} + \cdots =$$

$$= Q(E + J + \frac{J^2}{2!} + \cdots + \frac{J^k}{k!} + \cdots)Q^{-1} = Qe^JQ^{-1} \tag{2.6}$$

ir yra teisinga formulė

$$\det e^A = \det Q \det e^J \det Q^{-1} = \det e^J. \tag{2.7}$$

Tarkime matricos $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$ komutuoja, t.y. $AB = BA$. Kadangi eilutės e^A ir e^B konverguoja absoliučiai, tai jas galima dauginti panariui:

$$e^Ae^B = (E + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^m}{m!} + \cdots)(E + B + \frac{B^2}{2!} + \cdots + \frac{B^m}{m!} + \cdots) =$$

$$= E + (A + B) + \frac{1}{2!}(A^2 + 2AB + B^2) + \cdots$$

Eilutė

$$e^{A+B} = E + (A + B) + \frac{1}{2!}(A + B)^2 + \cdots =$$

$$= E + (A + B) + \frac{1}{2!}(A^2 + 2AB + B^2) + \cdots,$$

nes $AB = BA$. Todėl tokioms matricoms yra teisinga formulė

$$e^{A+B} = e^Ae^B. \tag{2.8}$$

Jeigu šioje formulėje A pakeisime į tA, o B į sB, tai gausime formulę

$$e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA}. \tag{2.9}$$

Matricą e^{tA} atitinka operatorius[4] $e^{tA} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Iš (2.9) formulės išplaukia, kad $\{e^{tA}\}$ yra erdvės $\mathbb{R}^n$ tiesinių transformacijų vienparametrinė grupė.

Panariui diferencijuodami eilutę e^{tA} gausime formalią eilutę

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dt}\frac{t^k}{k!}A^k = A\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}A^k = Ae^{tA} = e^{tA}A.$$

[4] Jį žymėsime tuo pačiu simboliu e^{tA}.

Kai $\|A\| \le a$, $|t| \le T$, pastaroji eilutė konverguoja absoliučiai ir tolygiai. Pagal (2.3) teoremą eilutę e^{tA} galima diferencijuoti panariui ir yra teisinga formulė

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA} = e^{tA}A. \tag{2.10}$$

Nustatysime ryšį tarp eksponentės e^A determinanto ir matricos A pėdsako $\operatorname{Tr} A$. Iš pradžių įrodysime tokią teoremą.

2.4 **teorema.** *Tegu* $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ *ir* $\varepsilon \in \mathbb{R}$. *Tada*

$$\det(E + \varepsilon A) = 1 + \varepsilon \operatorname{Tr} A + O(\varepsilon^2).$$

$\triangleleft$ Tegu λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ yra matricos A tikrinės reikšmės. Tada $1 + \varepsilon\lambda_i$ yra matricos $E + \varepsilon A$ tikrinės reikšmės ir

$$\det(E + \varepsilon A) = \prod_{i=1}^{n}(1 + \varepsilon\lambda_i) = 1 + \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \lambda_i + O(\varepsilon^2) = 1 + \varepsilon \operatorname{Tr} A + O(\varepsilon^2). \triangleright$$

Matematinėje analizėje eksponentė apibrėžiama formule

$$e^a = \lim_{k\to\infty}\Big(1 + \frac{a}{k}\Big)^k, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Ši formulė išlieka teisinga, jeigu skaičių $a \in \mathbb{R}$ pakeisime matrica $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Tiksliau

$$e^A = \lim_{k\to\infty}\Big(E + \frac{A}{k}\Big)^k, \quad A \in \mathbb{R}^{n,n}.$$

Įrodysime, kad abu eksponentės apibrėžimai yra ekvivalentūs. Skirtumas

$$e^A - \Big(E + \frac{A}{m}\Big)^m = \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{k!} - \frac{C_m^k}{m^k}\Big)A^k, \quad C_m^k = 0, \, \forall k > m.$$

Eilutė šios lygybės dešinėje konverguoja, nes konverguoja abi eilutės kairėje lygybės pusėje (antroji yra polinomas). Be to,

$$\frac{1}{k!} \ge \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{m \cdot m \cdot \cdots \cdot m}\frac{1}{k!}.$$

Todėl eilutės dešinėje visi koeficientai yra neneigiami ir yra teisingas įvertis

$$\Big\|e^A - \Big(E + \frac{A}{m}\Big)^m\Big\| \le \sum_{k}^{\infty}\Big(\frac{1}{k!} - \frac{C_m^k}{m^k}\Big)a^k = e^a - \Big(1 + \frac{a}{m}\Big)^m \to 0,$$

kai $m \to \infty$; čia $a = \|A\|$.

2.5 **teorema.** *Tegu* $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. *Tada*

$$\det e^A = e^{\operatorname{Tr} A}.$$

◁ Remiantis antruoju eksponentės apibrėžimu ir 2.4 teorema

$$\det e^{A} = \det\Big(\lim_{k\to\infty}\Big(E+\frac{A}{k}\Big)^{k}\Big) = \lim_{k\to\infty}\det\Big(E+\frac{A}{k}\Big)^{k} =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\Big[\det\Big(E+\frac{A}{k}\Big)\Big]^{k} = \lim_{k\to\infty}\Big[1+\frac{1}{k}\operatorname{Tr}A + O\Big(\frac{1}{k^2}\Big)\Big]^{k} = e^{\operatorname{Tr}A}. \ \triangleright$$

I š v a d a. Matrica e^A yra neišsigimusi, t.y. $\det e^A > 0$.

Jeigu matrica A yra pakankamai paprasta, tai jos eksponentę galima suskaičiuoti remiantis tik apibrėžimu. Pavyzdžiui, tegu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tada

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots A^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots$$

ir

$$e^A = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} & \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} \\ 0 & \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & e \\ 0 & e \end{pmatrix} = e\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jeigu matrica A yra diagonali, pavyzdžiui

$$A = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\},$$

tai

$$e^A = \operatorname{diag}\{e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \dots, e^{\lambda_n}\}.$$

Tegu $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ yra Žordano langelis, t.y.

$$A = J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda E + T;$$

čia E – vienetinė matrica, o T – matrica, kurios pirmoje įstrižainėje virš pagrindinės yra vienetukai, o visi kiti elementai nuliai. Pastebėsime, kad matricos T laipsniai T^k, $k < n$ turi panašią struktūrą. Tiksliau matricos T^k, lyginant su matrica T^{k-1}, įstrižainė iš vienetukų yra pasislinkusi į dešinę per vieną elementą. Kai $k = n-1$, gauname matricą, kurios viršutinis elementas dešinėje lygus vienetui, o visi kiti elementai lygūs nuliui. Jeigu $k \geq n$, tai matrica T^k yra nulinė. Todėl

$$e^{tA} = e^{\lambda t E}e^{tT} = e^{\lambda t}e^{tT} = e^{\lambda t}\begin{pmatrix} 1 & t & \dots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & \dots & \frac{t^{n-3}}{(n-3)!} & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & t \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bendruoju atveju eksponentę e^A galima ieškoti (2.6) formulės pagalba. Pavyzdžiui, tegu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Tada charakteristinis polinomas $p_A(\lambda) = (1-\lambda)^2 - 1$. Jo šaknys $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$ yra skirtingos ir realios. Todėl Žordano matrica

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Matricos A tikrines reikšmes $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$ atitinka tikriniai vektoriai

$$x = \mathrm{colon}(1, -1), \quad y = \mathrm{colon}(1, 1).$$

Tegu Q yra matrica, sudaryta iš šių vektorių, t.y.

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Jos atvirkštinė matrica

$$Q^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Todėl

$$e^A = Q e^J Q^{-1}.$$

Žordano matricos J eksponentė

$$e^J = \begin{pmatrix} e^0 & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix}.$$

Taigi

$$e^A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^2+1 & e^2-1 \\ e^2-1 & e^2+1 \end{pmatrix}.$$

Logaritminė funkcija yra atvirkštinė rodiklinei. Todėl funkciją $y = \ln x$, $x > 0$, galima apibrėžti formulės $x = e^y$ pagalba. Logaritminė funkcija kompleksinėje plokštumoje yra daugiareikšmė. Ji apibrėžiama taip:

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln |z| + i \arg z + 2\pi k i, \quad k \in \mathbb{Z},\ z \neq 0.$$

Tegu $B \in \mathbb{R}^{n,n}$. Matricą $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ vadinsime matricos $B \in \mathbb{R}^{n,n}$ *logaritmu* ir žymėsime $\mathrm{Ln}\, B$, jeigu $e^A = B$. Akivaizdu, kad ne kiekviena matrica turi logaritmą. Pagal 2.5 teoremą matrica e^A yra neišsigimusi. Todėl lygybė $e^A = B$ yra teisinga tik tuo atveju, kai matrica B yra neišsigimusi. Pasirodo, kad ši sąlyga yra ir pakankama. Tiksliau yra teisinga tokia teorema.

2.6 **teorema.** *Tegu $B \in \mathbb{R}^{n,n}$ yra neišsigimusi matrica. Tada $\mathrm{Ln}\, B$ egzistuoja, t.y egzistuoja tokia matrica $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, kad*

$$e^A = B.$$

$\triangleleft$ Iš pradžių išnagrinėsime du atvejus, kai matrica B turi paprasčiausią struktūrą.

1. Tegu B yra diagonali matrica, t.y.

$$B = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}.$$

Pagal teoremos sąlygą $\lambda_j \neq 0$, $\forall j = 1, \dots, n$. Todėl $\operatorname{Ln}\lambda_j$ egzistuoja. Apibrėžkime matricą A formule

$$A = \operatorname{diag}\{\operatorname{Ln}\lambda_1, \dots, \operatorname{Ln}\lambda_n\};$$

čia galima imti bet kokią $\operatorname{Ln}\lambda_j$ šaką. Patikrinsime, kad taip apibrėžta matrica A yra matricos B logaritmas. Iš tikrųjų

$$e^A = e^{\operatorname{diag}\{\operatorname{Ln}\lambda_1, \dots, \operatorname{Ln}\lambda_n\}} = \operatorname{diag}\{e^{\operatorname{Ln}\lambda_1}, \dots, e^{\operatorname{Ln}\lambda_n}\} =$$

$$= \operatorname{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} = B.$$

2. Tegu B yra Žordano langelis. Tiksliau tegu

$$B = J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda E + T;$$

Apibrėžkime matricą A formule

$$A = \operatorname{Ln}\lambda \cdot E + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \tfrac{1}{k} \left(\tfrac{1}{\lambda} T\right)^k;$$

čia galime imti bet kokią $\operatorname{Ln}\lambda$ šaką. Kai $k \geq n$, matrica T^k yra nulinė. Todėl pastaroji eilutė konverguoja. Patikrinsime, kad taip apibrėžta matrica A yra matricos B logaritmas. Remiantis (2.8) formule

$$e^A = e^{\operatorname{Ln}\lambda \cdot E} \cdot e^{\left[\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} \left(\frac{1}{\lambda} T\right)^k\right]}.$$

Matrica

$$e^{\operatorname{Ln}\lambda \cdot E} = \lambda E.$$

Pagal eksponentės apibrėžimą

$$e^{\left[\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} \left(\frac{1}{\lambda} T\right)^k\right]} = E + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!} \Big[\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \tfrac{1}{k} \left(\tfrac{1}{\lambda} T\right)^k\Big].$$

Tegu z yra kompleksinis skaičius, $|z| < 1$. Tada funkciją $\ln(1+z)$ galima skleisti Teiloro eilute ir

$$\ln(1+z) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \tfrac{1}{k} z^k.$$

Pasinaudoję šia formule, randame

$$1 + z/\lambda = e^{\ln(1+z/\lambda)} = 1 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!} \Big[\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \tfrac{1}{k} \big(\tfrac{z}{\lambda} \big)^k \Big]^l.$$

Surinkę koeficientus prie vienodų z laipsnių gausime, kad koeficientas prie pirmojo laipsnio lygus $1/\lambda$, o koeficientai prie k-ojo laipsnio, kai $k > 1$, lygūs nuliui. Eilutėje

$$E + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!} \Big[\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} \Big(\frac{1}{\lambda} T \Big)^k \Big]$$

koeficientai prie vienodų matricos T laipsnių skaičiuojami pagal tas pačias formules. Todėl

$$e^{\left[\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} \left(\frac{1}{\lambda} T \right)^k \right]} = E + \tfrac{1}{\lambda} T$$

ir

$$e^A = \lambda E \cdot \big(E + \tfrac{1}{\lambda} T \big) = \lambda E + T = B.$$

Išnagrinėsime bendrąjį atvejį. Tegu B yra kokia nors neišsigimusi matrica ir

$$J = \operatorname{diag}\{ J_{s_1}(\lambda_1), \dots, J_{s_m}(\lambda_m) \}, \quad s_1 + \dots + s_m = n$$

yra ją atitinkanti Žordano matrica, t.y.

$$B = QJQ^{-1}.$$

Kiekvieno Žordano langelio $J_{s_i}(\lambda_i)$ logaritmas egzistuoja. Todėl visos Žordano matricos logaritmą galima apibrėžti taip:

$$\operatorname{Ln} J = \operatorname{diag}\{ \operatorname{Ln} J_{s_1}(\lambda_1), \dots, \operatorname{Ln} J_{s_m}(\lambda_m) \}.$$

Iš tikrųjų

$$e^{\operatorname{Ln} J} = e^{\operatorname{diag}\{ \operatorname{Ln} J_{s_1}(\lambda_1), \dots, \operatorname{Ln} J_{s_m}(\lambda_m) \}} =$$

$$= \operatorname{diag}\big\{ e^{\operatorname{Ln} J_{s_1}(\lambda_1)}, \dots, e^{\operatorname{Ln} J_{s_m}(\lambda_m)} \big\} = \operatorname{diag}\{ J_{s_1}(\lambda_1), \dots, J_{s_m}(\lambda_m) \} = J.$$

Tegu

$$A = Q \operatorname{Ln} J Q^{-1}.$$

Tada

$$e^A = e^{Q \operatorname{Ln} J Q^{-1}} = Q e^{\operatorname{Ln} J} Q^{-1} = QJQ^{-1} = B$$

ir $A = \operatorname{Ln} B$. $\triangleright$

2.4. TIESINĖS SISTEMOS SU PASTOVIAIS KOEFICIENTAIS

Iš pradžių nagrinėsime tiesinę homogeninę sistemą

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.11}$$

Jos sprendinio, tenkinančio pradinę sąlygą

$$x(t_0) = x_0, \tag{2.12}$$

ieškosime pavidalu

$$x(t) = e^{tA}C;$$

čia $C \in \mathbb{R}^n$ – pastovus vektorius. Rasime šios funkcijos išvestinę. Remiantis (2.10) formule,

$$\dot{x}(t) = Ae^{tA}C = Ax(t).$$

Todėl funkcija $x(t) = e^{tA}C$ yra (2.11) sistemos sprendinys. Jis vadinamas *bendruoju* (2.11) sistemos sprendiniu. Pareikalavę, kad taške $t = t_0$ jis tenkintų (2.12) pradinę sąlygą, gausime

$$e^{t_0A}C = x_0 \quad \Longleftrightarrow \quad C = e^{-t_0A}x_0$$

Iš čia išplaukia, kad funkcija

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0 \tag{2.13}$$

yra (2.11) sistemos sprendinys, tenkinantis (2.12) pradinę sąlygą. Pagal vienaties teoremą bet kuris kitas sprendinys savo apibrėžimo srityje sutampa su šiuo sprendiniu.

Norint rasti (2.11) sistemos fundamentaliąją sprendinių matricą, reikia rasti matricos e^{tA} arba kokios nors kitos fundamentalios matricos stulpelius. Tegu Q yra tokia neišsigimusi matrica, kad $A = QJQ^{-1}$, J – Žordano matrica. Tada

$$e^{tA} = Qe^{tJ}Q^{-1}$$

yra (2.11) sistemos fundamentalioji matrica. Matrica $e^{tA}Q = Qe^{tA}$ taip pat yra (2.11) sistemos fundamentalioji matrica. Todėl pakanka rasti fundamentaliosios matricos Qe^{tA} stulpelius.

Žordano matrica

$$J = \operatorname{diag}\{J_{s_1}(\lambda_1), \dots, J_{s_m}(\lambda_m)\}, \quad s_1 + \dots + s_m = n.$$

Ją atitinkanti eksponentė

$$e^{tJ} = \operatorname{diag}\{e^{tJ_{s_1}(\lambda_1)}, \dots, e^{tJ_{s_m}(\lambda_m)}\};$$

čia $J_{s_i}(\lambda_i)$ yra Žordano langeliai. Be to,

$$e^{tJ_{s_i}(\lambda_i)} = e^{t\lambda_i} \begin{pmatrix} 1 & t & \dots & \frac{t^{s_i-2}}{(s_i-2)!} & \frac{t^{s_i-1}}{(s_i-1)!} \\ 0 & 1 & \dots & \frac{t^{s_i-3}}{(s_i-3)!} & \frac{t^{s_i-2}}{(s_i-2)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & t \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tegu $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ ir $q_1, \dots, q_n$ yra matricų Qe^{tA} ir Q stulpeliai. Tada

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= e^{t\lambda_1} q_1, \\ \vdots & \qquad \vdots \\ \varphi_{s_1} &= e^{t\lambda_1}\Big(\tfrac{t^{s_1-1}}{(s_1-1)!}q_1 + \ldots + tq_{s_1-1} + q_{s_1}\Big) \\ \vdots & \qquad \vdots \\ \varphi_{n-s_m+1} &= e^{t\lambda_m} q_{n-s_m+1}, \\ \vdots & \qquad \vdots \\ \varphi_n &= e^{t\lambda_m}\Big(\tfrac{t^{s_m-1}}{(s_m-1)!}q_{n-s_m+1} + \ldots + tq_{n-1} + q_n\Big). \end{aligned}$$

Jeigu matrica A neturi kartotinių tikrinių reikšmių, t.y. $s_1 = \cdots = s_n = 1$, tai vektoriai

$$\varphi_i = e^{t\lambda_i} q_i, \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n.$$

Vektoriai φ_i turi tokį patį pavidalą ir tuo atveju, kai matrica A turi kartotines tikrines reikšmes, tačiau kiekvieną kartotinę tikrinę reikšmę atitinkantis Žordano langelis yra diagonalus. Vektorius $q_1, \ldots, q_n$ galima rasti iš sąlygos

$$AQ = QJ.$$

Tegu $\Phi(t)$ yra (2.11) sistemos fundamentalioji matrica ir matricos A tikrinių reikšmių λ_i realiosios dalys yra neigiamos. Tada galima rasti tokius teigiamus skaičius λ ir K, kad

$$\|\Phi(t)\| \le Ke^{-t\lambda}, \quad \forall t \ge t_0. \tag{2.14}$$

Iš (2.13) formulės išplaukia, kad (2.11) sistemos evoliucijos operatorius

$$\varphi_t = e^{tA}.$$

Remiantis 2.5 teorema,

$$\det \varphi_t = \det e^{tA} = e^{\operatorname{Tr} tA} = e^{t \operatorname{Tr} A}.$$

Todėl (2.11) sistemos fazinis srautas $\{\varphi_t\}$ per laiką t keičia bet kokios figūros tūrį $e^{t \operatorname{Tr} A}$ kartu. Pavyzdžiui, jeigu $\operatorname{Tr} A > 0$, tai fazinis srautas bet kokį gretasienį transformuoja į didesnio tūrio gretasienį, o jeigu $\operatorname{Tr} A < 0$, tai į mažesnio tūrio gretasienį. Tuo atveju, kai $\operatorname{Tr} A = 0$, fazinis srautas bet kokį gretasienį transformuoja į to paties tūrio gretasienį. Iš (2.9) formulės išplaukia, kad evoliucijos operatorių visuma $\{\varphi_t\}$ yra erdvės $\mathbb{R}^n$ tiesinių transformacijų vienparametrinė grupė. Galima įrodyti ir atvirkščią teiginį. Tiksliau yra teisinga tokia teorema.

2.7 **teorema.** *Tegu $\{\varphi_t\}$ yra erdvės $\mathbb{R}^n$ tiesinių transformacijų vienparametrinė grupė. Tada egzistuoja toks tiesinis operatorius $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, kad $\varphi_t = e^{tA}$, $\forall t \in \mathbb{R}$.*

P a v y z d y s. Rasime sistemos

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + 3x_2 \end{aligned}$$

evoliucijos operatorių. Matricos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

tikrinės reikšmės $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. Tikrinis vektorius $x = \mathrm{colon}(1,1)$ randamas iš lygties $Ax = 2x$. Prijungtinis vektorius $y = \mathrm{colon}(1,2)$ randamas iš lygties $Ay = x + 2y$. Tegu Q yra matrica, sudaryta iš vektorių x ir y, t.y. $Q = (x, y)$. Tada Žordano matrica

$$J = Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Matrica

$$tJ = \begin{pmatrix} 2t & 0 \\ 0 & 2t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2tE + tT.$$

Matricos E ir T komutuoja. Todėl

$$e^{tJ} = e^{2tE}e^{tT} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nagrinėjamos sistemos evoliucijos operatorius

$$\varphi_t = e^{tA} = Qe^{tJ}Q^{-1} = e^{2t} \begin{pmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t \end{pmatrix}.$$

Toliau nagrinėsime *tiesinę nehomogeninę* sistemą

$$\dot{x} = Ax + q(t), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.15}$$

Iš pradžių tarkime, kad $q(t) = 0$. Tada pastaroji sistema yra homogeninė ir jos bendrasis sprendinys

$$x_h(t) = e^{tA}C;$$

čia $C \in \mathbb{R}^n$ – pastovus vektorius. Atskirojo nehomogeninės sistemos sprendinio ieškosime pavidalu

$$x_a(t) = e^{tA}C(t);$$

čia $C(t) \in \mathbb{R}^n$ – ieškomas vektorius. Įstatę taip apibrėžtą funkciją į (2.15) sistemą, gausime

$$Ae^{tA}C(t) + e^{tA}\dot{C}(t) = Ae^{tA}C(t) + q(t).$$

Suprastinę panašius narius, gausime

$$\dot{C}(t) = e^{-tA}q(t).$$

Suintegravę šią lygtį nuo t_0 iki t, randame

$$C(t) = \int_{t_0}^{t} e^{-\tau A}q(\tau)\, d\tau.$$

Taigi nehomogeninės sistemos atskirasis sprendinys

$$x_a(t) = e^{tA} \int_{t_0}^{t} e^{-\tau A} q(\tau)\, d\tau = \int_{t_0}^{t} e^{(t-\tau)A} q(\tau)\, d\tau.$$

Bendrasis nehomogeninės sistemos sprendinys

$$x(t) = x_h(t) + x_a(t) = e^{tA} C + \int_{t_0}^{t} e^{(t-\tau)A} q(\tau)\, d\tau. \tag{2.16}$$

Šis sprendinys tenkins (2.12) pradinę sąlygą, jeigu

$$C = e^{-t_0 A} x_0.$$

Įstatę pastarąją vektoriaus C išraišką į (2.16), gausime (2.15) sistemos sprendinį

$$x(t) = e^{(t-t_0)A} x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-\tau)A} q(\tau)\, d\tau, \tag{2.17}$$

tenkinantį (2.12) pradinę sąlygą.

P a v y z d y s. Rasime sistemos

$$\dot{x} = Ax + q(t)$$

sprendinį, tenkinantį pradinę sąlygą $x(0) = 0$. Čia

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad q(t) = \begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{pmatrix}.$$

Matricos A tikrinės reikšmės $\lambda_1 = -1 + i$, $\lambda_2 = -1 - i$. Šias tikrines reikšmes atitinka kompleksiniai tikriniai vektoriai $u + iv$ ir $u - iv$, $u = \mathrm{colon}(1, -2)$, $v = \mathrm{colon}(1, 0)$. Jie randami iš lygčių:

$$A(u + iv) = (-1 + i)(u + iv), \quad A(u - iv) = (-1 - i)(u - iv).$$

Iš vektorių u ir v sudarome matricą

$$Q = (u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ayvirkštinė matrica

$$Q^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Matricą A atitinka Žordano matrica

$$J = Q^{-1} A Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -E + T.$$

Matricos $-E$ ir T komutuoja. Todėl

$$e^{tJ} = e^{-tE} e^{tT}.$$

Matricos $-tE$ eksponentė

$$e^{-tE} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} = e^{-t} E.$$

Matricos T laipsniai

$$T^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, T^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, T^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, T^5 = T$$

ir t.t. Todėl matricos tT eksponentė

$$e^{tT} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} & \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ -\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} & \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

Padauginę matricą e^{-tE} iš matricos e^{tT}, gausime

$$e^{tJ} = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Taigi matrica

$$e^{tA} = Q e^{tJ} Q^{-1} = e^{-t} \begin{pmatrix} \sin t + \cos t & \sin t \\ -2 \sin t & \cos t - \sin t \end{pmatrix}.$$

Pagal prielaidą $x(0) = 0$. Todėl nagrinėjamos sistemos sprendinys

$$x(t) = \int\limits_0^t e^{(t-\tau)A} q(\tau)\, d\tau =$$

$$= \int\limits_0^t e^{-(t-\tau)} \begin{pmatrix} \sin(t-\tau) + \cos(t-\tau) & \sin(t-\tau) \\ -2\sin(t-\tau) & \cos(t-\tau) - \sin(t-\tau) \end{pmatrix} q(\tau)\, d\tau.$$

2.5. TIESINIŲ SISTEMŲ FAZINIŲ SRAUTŲ KLASIFIKACIJA

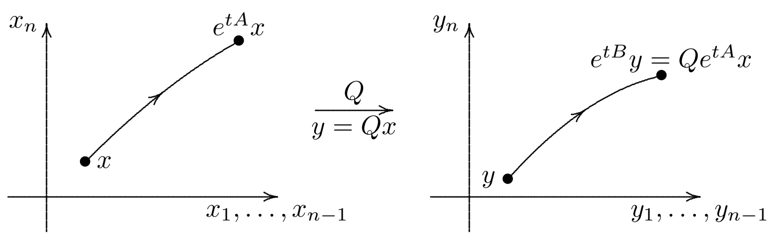
Kiekviena klasifikacija yra pagrįsta kokiu nors ekvivalentiškumo sąryšiu. Sakysime, tiesinių sistemų

$$\dot{x} = Ax, \quad \dot{y} = By, \quad x, y \in \mathbb{R}^n, \ A, B \in \mathbb{R}^{n,n} \tag{2.18}$$

faziniai srautai $\{e^{tA}\}$, $\{e^{tB}\}$ yra *ekvivalentūs,* jeigu jie yra panašūs, t.y. egzistuoja tokia abipusiškai vienareikšmė transformacija $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, kad

$$Q \circ e^{tA} = e^{tB} \circ Q, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Taigi tiesinių sistemų faziniai srautai yra ekvivalentūs, jeigu transformacija $y = Qx$ perveda vienos sistemos trajektorijas į kitos sistemos trajektorijas ir išlaiko trajektorijų apėjimo kryptis (žr. 2.17 pav.).



2.17 pav.

Išskirsime tris tiesinių sistemų fazinių srautų ekvivalentiškumo sąryšius.

1. Tegu $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ yra tiesinis izomorfizmas. Tada sakysime, kad faziniai srautai yra *tiesiškai ekvivalentūs.*

2. Tegu $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ yra difeomorfizmas. Tada sakysime, kad faziniai srautai yra *difeomorfiškai ekvivalentūs.*

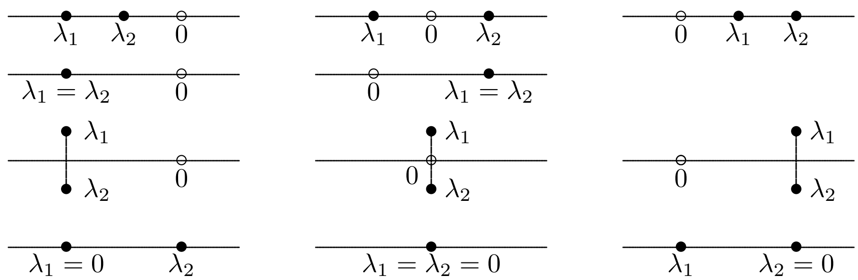
3. Tegu $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ yra homeomorfizmas. Tada sakysime, kad faziniai srautai yra *topologiškai ekvivalentūs.*

U ž d a v i n y s. Patikrinkite, kad tiesinis, difeomorfinis ir topologinis ekvivalentiškumo sąryšiai iš tikrųjų yra ekvivalentiškumo sąryšiai.

P a s t a b a. Erdvės $\mathbb{R}^n$ tiesinis izomorfizmas yra šios erdvės difeomorfizmas, o erdvės $\mathbb{R}^n$ difeomorfizmas yra homeomorfizmas. Todėl tiesiškai ekvivalentūs faziniai srautai yra difeomorfiškai ekvivalentūs, o difeomorfiškai ekvivalentūs faziniai srautai yra topologiškai ekvivalentūs.

Tiesinės sitemos fazinis srautas yra apibrėžiamas vienareikšmiškai. Todėl toliau kalbėdami apie tiesinį, difeomorfinį arba topologinį ekvivalentumą, trumpai sakysime, kad pačios sistemos yra tiesiškai, difeomorfiškai arba topologiškai ekvivalenčios.

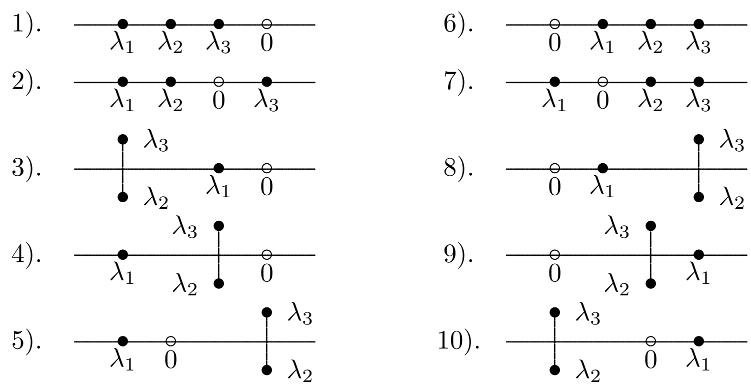
Tegu $n = 2$ ir λ_1, λ_2 yra matricos $A \in \mathbb{R}^{2,2}$ tikrinės reikšmės. Priklausomai nuo šių reikšmių išsidėstymo kompleksinėje plokštumoje yra galimi tokie atvejai:



2.18 pav.

Tarkime, rikrinių reikšmių λ_1, λ_2 realiosios dalys nelygios nuliui. Tada turime aštuonis skirtingus atvejus (žr. pirmąsias tris 2.18 paveikslėlio eilutes). Juos atitinka dešimt[5] skirtingų pusiausvyros taškų (žr. 2.1–2.10 paveikslėlius), t.y. turime dešimt skirtingų kanoninių sistemų. Bet kuri tiesinė sistema $\dot{x} = Ax$ su neišsigimusia matrica A yra tiesiškai ekvivalenti vienai iš šių sistemų. Jeigu bent viena tikrinė reikšmė lygi nuliui, tai turime tris išsigimusius atvejus (žr. paskutinę 2.18 paveikslėlio eilutę). Juos atitinka tris skirtingi faziniai portretai, pavaizduoti 2.11–2.13 paveikslėliuose.

Tegu $n = 3$ ir λ_1, λ_2, λ_3 yra matricos $A \in \mathbb{R}^{3,3}$ tikrinės reikšmės. Jos yra trečiojo laipsnio polinomo šaknys. Todėl arba jos visos yra realios, arba viena iš jų yra reali, o kitos dvi – kompleksiškai jungtinės. Priklausomai nuo šių reikšmių išsidėstymo kompleksinėje plokštumoje gali būti daug skirtingų atvejų. Tarkime, tikrinės reikšmės λ_1, λ_2, λ_3 yra skirtingos. Be to, tegu jų realiosios dalys nelygios nuliui ir kompleksiškai jungtinių tikrinių reikšmių realioji dalis nelygi realiajai tikrinei reikšmei. Tada turime dešimt skirtingų tikrinių reikšmių išsidėstymo kompleksinėje plokštumoje atvejus (žr. 2.19 pav.).



2.19 pav.

Kai kurie kiti tikrinių reikšmių $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ išsidėstymo kompleksinėje plokštumoje atvejai pavaizduoti 2.20 paveikslėlyje.

[5] Atkreipsime dėmesį į tai, kad kartotinę tikrinę reikšmę atitinka du skirtingi pusiausvyros taškai.

2.20 pav.

P a v y z d ž i a i:

1. Tegu matrica $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ ir $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0$. Tada bendrasis sistemos
$$\dot{x} = Ax$$
sprendinys
$$x(t) = c_1 e_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e_2 e^{\lambda_2 t} + c_3 e_3 e^{\lambda_3 t};$$
čia e_1, e_2, e_3 yra koordinatinių ašių x_1, x_2, x_3 vienetiniai vektoriai, o c_1, c_2, c_3 – laisvosios konstantos. Kai $t \to \infty$, $|x(t)| \to 0$. Todėl visos trajektorijos sueina į koordinačių pradžią. Fazinis sistemos portretas pavaizduotas 2.21 paveikslėlyje.

2. Tegu matrica $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ ir $\lambda_1 < \lambda_2 < 0 < \lambda_3$. Tada bendrasis sistemos
$$\dot{x} = Ax$$
sprendinys
$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} e_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} e_2 + c_3 e^{\lambda_3 t} e_3.$$
Jeigu $c_3 = 0$, tai $|x(t)| \to 0$, kai $t \to \infty$. Jeigu $c_3 \neq 0$, tai $|x(t)| \to \infty$, kai $t \to \infty$. Todėl x_1, x_2 plokštumoje visos trajektorijos sueina į koordinačių pradžią, o likusios trajektorijos artėja į begalybę. Fazinis sistemos portretas pavaizduotas 2.22 paveikslėlyje.

Tegu matrica
$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Šios matricos tikrinės reikšmės $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$. Matricą A atitinkanti tiesinė sistema

$$\dot{x} = Ax$$

išsiskaido į dvį pirmosios ir antrosios eilės tiesines sistemas:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \dot{x}_3 = \lambda x_3.$$

Sudėję šių sistemų bendruosius sprendinius, gausime nagrinėjamos sistemos bendrąjį sprendinį

$$x(t) = r_0 e^{\alpha t} \cos(\theta_0 - \beta t) e_1 + r_0 e^{\alpha t} \sin(\theta_0 - \beta t) e_2 + c_3 e^{\lambda t} e_3;$$

čia $r_0 = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$, $\operatorname{tg} \theta_0 = -c_2/c_1$, c_1, c_2, c_3 – laisvosios konstantos. Taigi nagrinėjamos sistemos trajektorijos yra spiralės. Jų apėjimo kryptį apie x_3 ašį nusako koeficiento β ženklas.

3. Tegu $\alpha < \lambda < 0$. Tada visos trajektorijos sueina į koordinačių pradžią. Be to, artėjimas x_1, x_2 ašių kryptimis yra greitesnis už artėjimą ašies x_3 kryptimi. Šiuo atveju fazinis sistemos portretas pavaizduotas 2.23 paveikslėlyje.

4. Tegu $\lambda < \alpha < 0$. Tada sistemos trajektorijos taip pat sueina į koordinačių pradžią. Tačiau artėjimas x_1, x_2 ašių kryptimis yra lėtesnis už artėjimą ašies x_3 kryptimi. Šiuo atveju fazinis sistemos portretas pavaizduotas 2.24 paveikslėlyje.

5. Tegu $\alpha < 0 < \lambda_3$. Tada sistemos trajektorijos sukasi apie x_3 ašį artėdamos prie jos ašių x_1, x_2 kryptimis ir artėja į begalybę ašies x_3 kryptimi. Šiuo atveju fazinis sistemos portretas pavaizduotas 2.25 paveikslėlyje.

Šiuose pavyzdžiuose pavaizduotų tiesinių sistemų faziniai portretai atitinka $1) - 5)$ numeriais pažymėtus atvejus, pavaizduotus 2.19 paveikslėlyje. Atvejai, pažymėti numeriais $6) - 10)$, gaunami iš atvejų, pažymėtų numeriais $1) - 5)$, pakeitus t ašies kryptį į priešingą. Todėl juos atitinkantys faziniai portretai gaunami iš 2.21 - 2.25 paveikslėliuose pavaizduotų fazinių portretų, pakeitus rodiklių kryptis į priešingas.

U ž d a v i n y s. Nubrėžkite tiesinės sitemos $\dot{x} = Ax$ fazinį portretą nurodytais 2.20 paveikslėlyje atvejais.

2.8 **teorema.** *Tarkime, matricų $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$ tikrinių reikšmių aibėje nėra kartotinių tikrinių reikšmių. Tada* (2.18) *sistemos yra tiesiškai ekvivalenčios tada ir tik tada, kai matricų A ir B tikrinės reikšmės sutampa.*

$\triangleleft$ Tarkime, (2.18) sistemos yra tiesiškai ekvivalenčios. Pagal apibrėžimą egzistuoja tokia neišsigimusi matrica Q, kad

$$Qe^{tA} = e^{tB}Q, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Remiantis eksponentės apibrėžimu

$$Qe^{tA} = Q\Big(E + tA + \frac{(tA)^2}{2!} + \ldots + \frac{(tA)^n}{n!} + \cdots\Big),$$

$$e^{tB}Q = \Big(E + tB + \frac{(tB)^2}{2!} + \ldots + \frac{(tB)^n}{n!} + \cdots\Big)Q.$$

Sulyginę šiuos reiškinius gausime, kad matricos A ir B yra panašios, t.y.

$$QA = BQ.$$

Tačiau panašių matricų charakteristiniai polinomai sutampa

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \det(B - \lambda E) = p_B(\lambda).$$

Todėl sutampa ir jų tikrinės reikšmės[6].

Tarkime, matricų A ir B tikrinės reikšmės sutampa. Kadangi jos nėra kartotinės, tai matricas A ir B atitinka ta pati Žordano matrica. Vadinasi, jos yra panašios, t.y. egzistuoja tokia neišsigimusi matrica $Q \in \mathbb{R}^{n,n}$, kad

$$QA = BQ.$$

Remiantis eksponentės apibrėžimu

$$Qe^{tA} = Q\Big(E + tA + \frac{(tA)^2}{2!} + \ldots + \frac{(tA)^n}{n!} + \cdots\Big) =$$

$$= \Big(E + tB + \frac{(tB)^2}{2!} + \ldots + \frac{(tB)^n}{n!} + \cdots\Big)Q = e^{tB}Q.$$

Sulyginę kairę ir dešinę šių lygybių puses gausime, kad (2.18) sistemų faziniai srautai yra panašūs. Taigi (2.18) sistemos yra tiesiškai ekvivalenčios. $\triangleright$

[6] Įrodant pirmąjį teoremos teiginį, nesinaudojome tikrinių reikšmių paprastumu.

U ž d a v i n y s. Įrodykite, kad sistemos

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_1, \\ \dot{x}_2 &= x_2, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 &= x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_2 \end{cases}$$

nėra tiesiškai ekvivalenčios, nors tikrinės reikšmės sutampa.

Pasirodo, kad tiesinių sistemų difeomorfinė klasifikacija nieko naujo neduoda. Tiksliau yra teisinga tokia teorema.

2.9 **teorema.** *Tegu* $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$. *Tada* (2.18) *tiesinės sistemos yra difeomorfiškai ekvivalenčios tada ir tik tada, kai jos yra tiesiškai ekvivalenčios.*

$\triangleleft$ Tegu (2.18) tiesinės sistemos yra difeomorfiškai ekvivalenčios. Tada egzistuoja toks difeomorfizmas $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, kad

$$Q \circ e^{tA} = e^{tB} \circ Q.$$

Taškas $x = 0$ yra fazinio srauto $\{e^{tA}\}$ nejudamas taškas. Todėl $Q(0)$ yra fazinio srauto $\{e^{tB}\}$ vienas iš nejudamų taškų. Pažymėkime ji raide c. Iš formulės

$$e^{tB} c = c$$

išplaukia, kad $Bc = 0$.

Tegu $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ yra poslinkio operatorius vektoriumi c, t.y.

$$h(x) = x - c.$$

Operatorius h yra erdvės $\mathbb{R}^n$ difeomorfizmas. Be to, jis transformuoja tiesinės sistemos $\dot{x} = Bx$ fazinį srautą į save. Iš tikrųjų

$$(x - c)^{\cdot} = \dot{x} = Bx = B(x - c).$$

Difeomorfizmų h ir Q superpozicija

$$q = h \circ Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

yra difeomorfizmas, transformuojantis fazinį srautą $\{e^{tA}\}$ į fazinį srautą $\{e^{tB}\}$. Be to, taškas $x = 0$ yra šio difeomorfizmo nejudamas taškas, t.y. $q(0) = 0$.

Tegu Q^* yra difeomorfizmo q išvestinė taške $x = 0$. Pagal apibrėžimą $Q^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ yra tiesinis izomorfizmas. Kadangi

$$q \circ e^{tA} = e^{tB} \circ q, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

tai sutampa ir šių difeomorfizmų išvestinės taške $x = 0$, t.y.

$$Q^* e^{tA} = e^{tB} Q^*, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Taigi (2.18) tiesinės sistemos yra tiesiškai ekvivalenčios. $\triangleright$

P a s t a b a. Atkreipsime dėmesį į tai, kad ne kiekvienas difeomorfizmas, nustatantis fazinių srautų ekvivalentiškumą, yra tiesinis.

2.10 **teorema.** *Tegu matricų* $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$ *tikrinių reikšmių aibėje nėra grynai menamų tikrinių reikšmių. Tada* (2.18) *sistemos yra topologiškai ekvivalenčios tada ir tik tada, kai matricos* A *ir* B *turi vienodą skaičių tikrinių reikšmių su teigiama ir neigiama realiąja dalimi, t.y. kai*

$$m_-(A) = m_-(B), \quad m_+(A) = m_+(B);$$

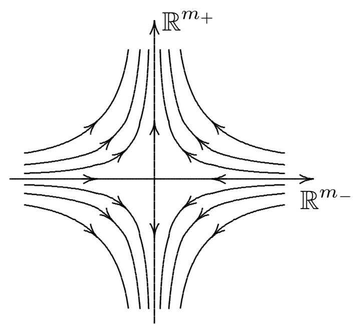
čia m_- *yra skaičius tikrinių reikšmių su neigiama, o* m_+ *– su teigiama realiąja dalimi (taigi* $m_- + m_+ = n$*).*

Šios teoremos įrodymą galima rasti [3], [1] knygose.

I š v a d a. Tegu matricos A tikrinių reikšmių aibėje nėra grynai menamų tikrinių reikšmių. Tada tiesinė sistema $\dot{x} = Ax$ topologiškai ekvivalenti standartinei sistemai

$$\dot{x}_1 = -x_1, \quad \dot{x}_2 = x_2, \quad x_1 \in \mathbb{R}^{m_-}, \quad x_2 \in \mathbb{R}^{m_+}.$$

Šios sistemos fazinis portretas pavaizduotas 2.26 paveikslėlyje, o pusiausvyros taškas vadinamas *daugiamačiu balno tašku.*



2.26 pav.

Taigi topologiškai ekvivalenčios sistemos turi vienodą skaičių tikrinių reikšmių su neigiama realiąja dalimi. Be to, jeigu Q yra homeomorfizmas, transformuojantis daugiamačio balno fazinį srautą į kito daugiamačio balno fazinį srautą, tai $Q : \mathbb{R}^{m_-} \to \mathbb{R}^{m_-}$.

P a s t a b a. Analogiškas teiginys yra teisingas ir netiesinėms sistemoms, jeigu jų tiesinė dalis neturi grynai menamų tikrinių reikšmių. Atskiru atveju tokios sistemos nejudamo taško aplinkoje topologiškai ekvivalenčios linearizuotai sistemai.

P a v y z d y s. Tegu $n = 2$. Tada turime keturis skirtingus neišsigimusius atvejus.

1. $m_- = 2$, $m_+ = 0$ – mazgai ir židiniai, kurių trajektorijos sueina į koordinačių pradžią (atvejis, kai tikrinių reikšmių realiosios dalys yra neigiamos).

2. $m_- = 1$, $m_+ = 1$ – balno taškai (atvejis, kai tikrinės reikšmės yra skirtingų ženklu).

3. $m_- = 0$, $m_+ = 2$ – mazgai ir židiniai, kurių trajektorijos išeina iš koordinačių pradžios (atvejis, kai tikrinių reikšmių realiosios dalys yra teigiamos).

4. $m_- = 0$, $m_+ = 0$ – centro taškai (atvejis, kai tikrinės reikšmės yra grynai menamos).

Taigi tiesines sistemas galima suskirstyti į keturias skirtingas topologines klases.

Tiesinių sistemų su grynai menamomis tikrinėmis reikšmėmis faziniai portretai yra žymiai sudėtingesni. Išskirsime atvejį, kai tiesinės sistemos visos tikrinės reikšmės yra grynai menamos.

2.11 **teorema.** *Tegu* $n = 2$ *ir matricų* A, B *tikrinės reikšmės yra grynai menamos. Tada* (2.18) *sistemos yra topologiškai ekvivalenčios tada ir tik tada, kai jos yra tiesiškai ekvivalenčios.*

$\triangleleft$ Pagal 2.8 teoremą (2.18) sistemos yra tiesiškai ekvivalenčios tada ir tik tada, kai jų tikrinės reikšmės sutampa.

Tegu matricos A tikrinės reikšmės yra $\pm i\alpha$, o matricos B – $\pm i\beta$. Jeigu $\alpha = \beta$, tai (2.18) sistemos yra tiesiškai ekvivalenčios. Kartu jos yra ir topologiškai ekvivalenčios.

Tarkime, kad (2.18) sistemos yra topologiškai ekvivalenčios, t.y. egzistuoja toks homeomorfizmas $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, kad

$$Q \circ e^{tA} = e^{tB} \circ Q, \quad \forall t.$$

Tegu Q_A ir Q_B tokios neišsigimusios matricos, kad

$$A = Q_A J_A Q_A^{-1}, \quad B = Q_B J_B Q_B^{-1};$$

čia J_A ir J_B yra matricų A ir B Žordano matricos. Tada

$$Q \circ Q_A e^{tJ_A} Q_A^{-1} = Q_B e^{tJ_B} Q_B^{-1} \circ Q, \quad \forall t.$$

Grynai menamoms tikrinėms reikšmėms Žordano matricos

$$J_A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}, \quad J_B = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}.$$

Jas atitinkančios eksponentės

$$e^{tJ_A} = \begin{pmatrix} \cos t\alpha & \sin t\alpha \\ -\sin t\alpha & \cos t\alpha \end{pmatrix}, \quad e^{tJ_B} = \begin{pmatrix} \cos t\beta & \sin t\beta \\ -\sin t\beta & \cos t\beta \end{pmatrix}.$$

Taip apibrėžtos transformacijos tašką $x \in \mathbb{R}^2$ pasuka atitinkamai kampu $t\alpha$ ir $t\beta$ pagal laikrodžio rodyklę. Todėl

$$Q_A e^{tJ_A} Q_A^{-1} = e^{tJ_A}, \quad Q_B e^{tJ_B} Q_B^{-1} = e^{tJ_B}$$

ir yra teisinga formulė

$$Qe^{tJ_A} = e^{tJ_B} Q.$$

Šią formulę galima perrašyti taip:

$$Qe^{tJ_A} Q^{-1} = e^{tJ_B}, \quad \forall t.$$

Eksponenčių e^{tJ_A} ir e^{tJ_B} išvestinės taške $t = 0$ yra J_A ir J_B. Todėl yra teisinga formulė

$$QJ_AQ^{-1} = J_B.$$

Iš jos gauname, kad

$$-2\alpha = \det J_A = \det QJ_AQ = \det J_B = -2\beta.$$

Taigi $\alpha = \beta$ ir galime tvirtinti, kad (2.18) sistemos yra tiesiškai ekvivalenčios. $\triangleright$.

P a s t a b a . [3] knygoje tvitinama, kad teorema yra teisinga ir kai $n > 2$. Tačiau nėra jokios nuorodos. [1] knygoje rašoma, kad grynai realių šaknų atveju tai yra neišspręsta problema. Kuris iš šių teiginių yra teisingas, nežinau.

P a v y z d y s . Tegu $n = 4$. Tiesinė homogeninė sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & \alpha x_2, \\ \dot{x}_2 & = & -\alpha x_1, \\ \dot{x}_3 & = & \beta x_4, \\ \dot{x}_4 & = & -\beta x_3, \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \lambda_{1,2} = \pm i\alpha, \\ \\ \lambda_{3,4} = \pm i\beta. \end{array} \tag{2.19}$$

išsiskaido į dvi nepriklausomas sistemas

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & \alpha x_2, \\ \dot{x}_2 & = & -\alpha x_1, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} \dot{x}_3 & = & \alpha x_3, \\ \dot{x}_4 & = & -\alpha x_4, \end{array}\right. \tag{2.20}$$

$(x_1, x_2), (x_3, x_4) \in \mathbb{R}^2$, o erdvė $\mathbb{R}^4$ – į dviejų invariantinių plokštumų $\mathbb{R}^2$ tiesioginę sandaugą. Kiekvienoje iš plokštumų fazinis kreivės yra arba apskritimai

$$x_1^2 + x_2^2 = c^2, \quad x_3^2 + x_4^2 = C^2,$$

arba taškai su koordinatėmis $x_1 = x_2 = 0,\ x_3 = x_4 = 0$. Fazinis srautas tai posūkio operatoriai kampais $t\alpha$ ir $t\beta$ atitinkamai. Bet kurią (2.19) sistemos fazinę kreivę erdvėje $\mathbb{R}^4$ galima išreikšti (2.20) sistemos fazinių kreivių plokštumoje $\mathbb{R}^2$ tiesiogine sandauga. Jeigu fazinės kreivės plokštumoje $\mathbb{R}^2$ yra apskritimai, tai fazinė kreivė erdvėje $\mathbb{R}^4$ yra dvimatis toras

$$T^2 = S^1 \times S^1 = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 = c^2, \quad x_3^2 + x_4^2 = C^2\}.$$

Tašką sferoje S^1 apibrėžia viena polinė koordinatė $\varphi \bmod 2\pi$. Todėl tašką tore T^2 apibrėžia dvi polinės koordinatės $\varphi, \psi \bmod 2\pi$.

Torą T^2 erdvėje $\mathbb{R}^4$ galima sutapatinti su "barankos" erdvėje $\mathbb{R}^3$ paviršiumi. Iš tikrųjų, barankos paviršius erdvėje $\mathbb{R}^3$ gaunamas sukant apskritimą apie ašį, esančią apskritimo plokštumoje, ir jo nekertančią. Tašką šiame paviršiuje taip pat galima apibrėžti dviem polinėm koordinatėm $\varphi, \psi \bmod 2\pi$. Taip apibrėžtos polinės koordinatės nusako "barankos" erdvėje $\mathbb{R}^3$ ir toro $T^2 \subset \mathbb{R}^4$ difeomorfizmą. Toro T^2 žemėlapis plokštumoje (φ, ψ) yra kvadratas $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$. Suklijavę taškus, esančius šio kvadrato priešingose kraštinėse, gausime "baranką" erdvėje $\mathbb{R}^3$.

Fazinis (2.19) sistemos srautas torą T^2 atvaizduoja į T^2. Šios sistemos fazinės kreivės guli toro T^2 paviršiuje. Tegu φ ir ψ poliniai kampai plokštumose $\mathbb{R}^2$ skaičiuojami atitinkamai nuo ašies x_2 ašies x_1 kryptimi ir nuo ašies x_4 ašies x_3 kryptimi. Tada (2.19) sistemos trajektorijos toro T^2 paviršiuje tenkina sistemą

$$\dot{\varphi} = \alpha, \quad \dot{\psi} = \beta. \tag{2.21}$$

Toro T^2 žemelapyje šios trajektorijos yra tiesės, o "barankos" paviršiuje apvijos.

Skaičiai α ir β vadinami racionaliai nepriklausomais, jeigu lygybė

$$k\alpha + l\beta = 0, \quad k, l \in \mathbb{Z}$$

yra galima tik tada, kai $k = l = 0$. Pavyzdžiui, skaičiai $\sqrt{3}$ ir $\sqrt{12}$ yra racionaliai priklausomi, o skaičiai $\sqrt{5}$ ir $\sqrt{12}$ – ne.

2.12 **teorema.** *1. Tegu α ir β yra racionaliai priklausomi skaičiai. Tada bet kokia* (2.19) *sistemos fazinė kreivė tore T^2 yra uždara.*

2. Tegu α ir β yra racionaliai nepriklausomi skaičiai. Tada bet kokia (2.19) *sistemos fazinė kreivė yra tiršta aibė tore T^2.*

$\lhd$ Suintegravę (2.21) sistemą, gausime

$$\varphi(t) = \varphi(0) + t\alpha, \quad \psi(t) = \psi(0) + t\beta. \tag{2.22}$$

Tegu α ir β yra racionaliai priklausomi skaičiai, t.y. egzistuoja tokie skaičiai $k, l \in \mathbb{Z}$, kad

$$k\alpha + l\beta = 0, \quad k^2 + l^2 \neq 0.$$

Tada lygtys

$$\omega\alpha = 2\pi k, \quad \omega\beta = -2\pi l$$

yra suderintos. Šių lygčių bendras sprendinys ω ir yra (2.19) sistemos fazinės kreivės tore T^2 periodas.

Įrodysime antrąjį teoremos teiginį. Tegu skaičiai α, β yra racionaliai nepriklausomi. Pagal apibrėžimą jie yra nelygūs nuliui ir jų santykis β/α yra iracionalus skaičius. Kartu galime tvirtinti, kad skaičiai $2\pi\beta/\alpha$ ir 2π yra racionaliai nepriklausomi. Todėl seka

$$\psi_k = \psi(0) + 2\pi\frac{\beta}{\alpha}k(\operatorname{mod} 2\pi), k = 1, 2, \ldots$$

yra tiršta[7] apskritime S^1. Toro T^2 žemėlapyje trajektorija, apibrėžta lygtimi

$$\varphi(t) = t\alpha, \quad \psi(t) = \psi(0) + t\beta,$$

yra tiesės, išeinančios iš taško $(0, \psi_k)$ su krypties koeficientu β/α. Akivaizdu, kad tokios tiesės yra tiršta aibė kvadrate $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$. Todėl (2.19) sistemos fazinė kreivė yra tiršta aibė tore T^2. $\rhd$

[7] Pastarąjį teiginį galima įrodyti remiantis Dirichlė principu: Jeigu k dėžutėse yra $k + 1$ rutuliukas, tai bent vienoje dėžutėje yra du rutuliukai.

2.6. NEHOMOGENINĖS SISTEMOS PERIODINIAI SPRENNIAI

Tegu $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ – pastovioji matrica, $q = \mathrm{colon}(q_1, \dots, q_n)$ – žinoma vektorinė funkcija, q_i – tolydžios ω-periodinės funkcijos, $\omega > 0$. Nagrinėsime tiesinę nehomogeninę sistemą

$$\dot{x} = Ax + q(t). \tag{2.23}$$

2.13 **teorema.** *Tegu* $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ *yra matricos* A *tikrinės reikšmės ir*

$$\lambda_j \neq 2\pi ki/\omega, \quad \forall j = 1, \dots, n, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Tada (2.23) *sistema turi vienintelį* ω*-periodinį sprendinį ir jį galima išreikšti formule*

$$x(t) = (E - e^{\omega A})^{-1} \int\limits_{t-\omega}^{t} e^{(t-s)A} q(s)\, ds. \tag{2.24}$$

◁ Pagal (2.16) formulę bendrasis (2.23) sistemos sprendinys

$$x(t) = e^{tA}C + \int\limits_{0}^{t} e^{(t-s)A} q(s)\, ds;$$

čia C – pastovus vektorius. Pasinaudoję šia formule ir funkcijos q periodiškumo sąlyga, gausime

$$x(t+\omega) = e^{(t+\omega)A}C + \int\limits_{0}^{t+\omega} e^{(t+\omega-s)A} q(s)\, ds = e^{(t+\omega)A}C + \int\limits_{-\omega}^{t} e^{(t-s)A} q(s)\, ds =$$

$$= e^{tA}e^{\omega A}C + \int\limits_{0}^{t} e^{(t-s)A} q(s)\, ds + \int\limits_{-\omega}^{0} e^{(t-s)A} q(s)\, ds.$$

Funkcija x tenkins periodiškumo sąlygą $x(t+\omega) = x(t)$, jeigu

$$e^{tA}e^{\omega A}C + \int\limits_{-\omega}^{0} e^{(t-s)A} q(s)\, ds = e^{tA}C.$$

Iš šios lygybės išplaukia, kad

$$e^{\omega A}C + \int\limits_{-\omega}^{0} e^{-sA} q(s)\, ds = C.$$

Į gautą lygybę galima žiūrėti kaip į tiesinę nehomogeninę algebrinių lygčių sistemą

$$\big(E - e^{\omega A}\big)C = \int_{-\omega}^{0} e^{-sA} q(s)\, ds$$

vektoriaus C atžvilgiu. Ji turi netrivialų sprendinį tada ir tik tada, kai matrica $E - e^{\omega A}$ yra neišsigimusi, t.y. kai $\det(E - e^{\omega A}) \neq 0$. Matricos $E - e^{\omega A}$ tikrinės reikšmės yra $1 - e^{\lambda_1 \omega}, \ldots, 1 - e^{\lambda_n \omega}$. Todėl jos determinantas

$$\det(E - e^{\omega A}) = (1 - e^{\lambda_1 \omega}) \cdot \ldots \cdot (1 - e^{\lambda_n \omega}).$$

Kadangi $\lambda_j \omega \neq 2\pi k i$, $\forall j = 1, \ldots, n$, $k \in \mathbb{Z}$, tai

$$\det(E - e^{\omega A}) \neq 0.$$

Kartu galime tvirtinti, kad matrica $E - e^{\omega A}$ turi atvirkštinę ir

$$C = (E - e^{\omega A})^{-1} \int_{0}^{\omega} e^{(\omega - s)A} q(s)\, ds.$$

Todėl (2.23) sistemos ω periodinį sprendinį galima užrašyti taip:

$$x(t) = e^{tA}(E - e^{\omega A})^{-1} \int_{0}^{\omega} e^{(\omega - s)A} q(s)\, ds + \int_{0}^{t} e^{(t-s)A} q(s)\, ds.$$

Padauginę pastarąją formulę iš kairės iš matricos $E - e^{\omega A}$, gausime

$$(E - e^{\omega A})x(t) = e^{tA}\Big[\int_{0}^{\omega} e^{(\omega - s)A} q(s)\, ds + \int_{0}^{t} e^{-sA} q(s)\, ds -$$

$$- \int_{0}^{t} e^{(\omega - s)A} q(s)\, ds\Big] = e^{tA} \int_{t-\omega}^{t} e^{-sA} q(s)\, ds,$$

arba

$$x(t) = (E - e^{\omega A})^{-1} \int_{t-\omega}^{t} e^{(t-s)A} q(s)\, ds.$$

Taigi, jeigu matricos A tikrinių reikšmių aibėje nėra skaičių $2\pi k i/\omega$, $k \in \mathbb{Z}$, tai (2.23) sistema turi vienintelį ω periodinį sprendinį ir jį galima apibrėžti (2.24) formule. $\triangleright$

P a s t a b a. Konstantų varijavimo metodą galima taikyti ir netiesinių lygčių sprendimui. Tegu $A : (a, b) \to \mathbb{R}^{n,n}$ ir $q : (a, b) \times \Omega \to \mathbb{R}^n, \Omega \subset \mathbb{R}^n$. Tada galima įrodyti, kad funkcija $x = \varphi(t)$ yra Koši uždavinio

$$\dot{x} = A(t)x + q(t, x), \quad t \in (a, b),\ x \in \Omega,$$

$$x(t_0) = x_0, \quad t_0 \in < a, b >,\ x_0 \in \Omega$$

sprendinys tada ir tik tada, kai ji yra integralinės lygties

$$x(t) = \Phi(t)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t)\Phi^{-1}(s)q(s, x(s))\, ds \tag{2.25}$$

sprendinys; čia $\Phi(t)$ yra normuota taške $t = t_0$ tiesinės lygties $\dot{x} = A(t)x$ fundamentalioji matrica.

2.7. TIESINĖS HOMOGENINĖS SISTEMOS SU PERIODINIAIS KOEFICIENTAIS

Tarkime, matricos $P(t) = \{p_{ij}(t)\}\in\mathbb{R}^{n,n}$ elementai p_{ij} yra tolydžios ω-periodinės funkcijos, $\omega > 0$. Tokias matricas vadinsime ω-*periodinėmis.* Nagrinėsime tiesinę homogeninę sistemą

$$\dot{x} = P(t)x. \tag{2.26}$$

2.14 **teorema.** *Tegu* P *yra* ω*-periodinė matrica. Tada kiekvieną* (2.26) *sistemos fundamentaliąją matricą* Φ *galima išreikšti sandauga*

$$\Phi(t) = B(t)e^{tA}; \tag{2.27}$$

čia B *– neišsigimusi* ω *periodinė matrica, o* A *– matrica su pastoviais koeficientais.*

$\triangleleft$ Laisvai pasirenkame kokią nors (2.26) sistemos fundamentaliąją matricą Φ. Tada

$$\dot{\Phi}(t+\omega) = P(t+\omega)\Phi(t+\omega).$$

Pagal teoremos sąlygą $P(t+\omega) = P(t)$. Todėl

$$\dot{\Phi}(t+\omega) = P(t)\Phi(t+\omega).$$

Iš čia išplaukia, kad matrica $\Psi(t) = \Phi(t+\omega)$ taip pat yra fundamentalioji. Remiantis bendrąja diferencialinių lygčių teorija, galime tvirtinti, kad egzistuoja tokia neišsigimusi pastovioji matrica C, kad

$$\Psi(t) = \Phi(t)C. \tag{2.28}$$

Matrica C vadinama *monodromijos matrica.* Tegu $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ yra tokia matrica, kad

$$e^{\omega A} = C.$$

Pagal 2.6 teoremą tokia matrica egzistuoja. Apibrėžkime matricą B taip:

$$B(t) = \Phi(t)e^{-tA}.$$

Tada

$$\Phi(t) = B(t)e^{tA}$$

ir

$$\begin{aligned} B(t+\omega) = \Phi(t+\omega)e^{-(t+\omega)A} = \Phi(t)Ce^{-(t+\omega)A} = \\ = \Phi(t)e^{\omega A}e^{-\omega A}e^{-tA} = \Phi(t)e^{-tA} = B(t). \end{aligned}$$

Taigi matrica B yra ω-periodinė. $\triangleright$

Tegu $\tilde{\Phi}$ yra kita (2.26) sistemos fundamentalioji matrica ir $\tilde{C}$ yra ją atitinkanti monodromijos matrica, t.y.

$$\tilde{\Phi}(t+\omega) = \tilde{\Phi}(t)\tilde{C}.$$

Remiantis bendrąja diferencialinių lygčių teorija, egzistuoja tokia neišsigimusi matrica Q, kad
$$\tilde{\Phi}(t) = \Phi(t)Q.$$
Tačiau tada
$$\Phi(t+\omega) = \tilde{\Phi}(t+\omega)Q^{-1} = \tilde{\Phi}(t)\tilde{C}Q^{-1} = \Phi(t)Q\tilde{C}Q^{-1}.$$
Sulyginę šią ir (2.28) formules, gausime
$$C = Q\tilde{C}Q^{-1}.$$
Taigi visos monodromijos matricos yra panašios. Kartu galime tvirtinti, kad visų monodromijos matricų tikrinės reikšmės yra vienodos. Tegu $\mu_1, \ldots, \mu_n$ yra kokios nors monodromojos matricos tikrinės reikšmės. Jos yra vadinamos (2.26) sistemos *multiplikatoriais*.

Iš fundamentaliųjų matricų aibės išskirkime normuotą taške $t = 0$ fundamentaliąją matricą Φ. Priminsime, kad fundamentalioji matrica Φ vadinama *normuota* taške $t = 0$, jeigu $\Phi(0) = E$, E – vienetinė matrica. Normuotą fundamentaliąją matricą atitinka monodromijos matrica C. Ją galima rasti iš formulės
$$\Phi(\omega) = \Phi(0)C = C.$$
Iš šios formulės taip pat išplaukia, kad
$$\det\Phi(\omega) = \det C = \mu_1 \cdot \ldots \cdot \mu_n.$$
Pagal Liuvilio formulę
$$\det\Phi(t) = \det\Phi(0)\exp\int\limits_0^t \sum_{i=1}^n p_{ii}(t)\,dt = \exp\int\limits_0^t \sum_{i=1}^n p_{ii}(t)\,dt.$$
Todėl
$$\det\Phi(\omega) = \exp\int\limits_0^\omega \sum_{i=1}^n p_{ii}(t)\,dt = \mu_1 \cdot \ldots \cdot \mu_n. \tag{2.29}$$

P a v y z d y s. Tegu $q = q(t)$ yra tolydi ω-periodinė skaliarinė funkcija. Nagrinėsime tiesinę homogeninę antrosios eilės lygtį
$$\ddot{x} + q(t)x = 0. \tag{2.30}$$
Šios lygties *multiplikatoriais* vadinsime ją atitinkančios tiesinės sitemos
$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -q(t)x_1$$
multiplikatorius. Pažymėkime juos μ_1 ir μ_2. Matricos
$$P(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q(t) & 0 \end{pmatrix}$$

pėdsakas $\operatorname{Tr} P(t) = 0$. Todėl pagal (2.29) formulę $\mu_1\mu_2 = 1$.

Tegu φ_1, φ_2 yra (2.30) lygties sprendiniai, tenkinantys sąlygas:

$$\varphi_1(0) = 1,\ \dot{\varphi}_1(0) = 0, \quad \varphi_2(0) = 0,\ \dot{\varphi}_2(0) = 1.$$

Multiplikatoriai μ_1, μ_2 yra matricos

$$\Phi(\omega) = \begin{pmatrix} \varphi_1(\omega) & \varphi_2(\omega) \\ \dot{\varphi}_1(\omega) & \dot{\varphi}_2(\omega) \end{pmatrix}$$

tikrinės reikšmės ir randami iš lygties

$$\det(\Phi(\omega) - \mu E) = 0.$$

Pastarąją lygtį galima užrašyti taip:

$$\mu^2 - 2a\mu + b = 0;$$

čia $2a = \varphi_1(\omega) + \dot{\varphi}_2(\omega),\ b = \mu_1\mu_2 = 1$. Todėl

$$\mu_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 - 1}.$$

2.15 **teorema.** *Tegu P yra tolydi ω-periodinė matrica. Tada yra teisingi tokie teiginiai:*

1. *Jeigu μ yra (2.26) sistemos multiplikatorius, tai egzistuoja toks netrivialus šios sistemos sprendinys φ, kad*

$$\varphi(t + \omega) = \mu\varphi(t). \tag{2.31}$$

2. *Jeigu egzistuoja (2.26) sistemos netrivialus sprendinys φ toks, kad yra teisinga (2.31) formulė, tai μ yra (2.26) sistemos multiplikatorius.*

$\lhd$ Tegu μ yra (2.26) sistemos multiplikatorius, Φ – normuota taške $t = 0$ fundamentalioji matrica. Pagal (2.29) formulę

$$\det(\Phi(\omega) - \mu E) = 0.$$

Todėl μ yra matricos $\Phi(\omega)$ tikrinė reikšmė. Šią tikrinę reikšmę atitinka tikrinis vektorius x_0. Pagal apibrėžimą $x_0 \neq 0$.

Tegu φ yra (2.26) sistemos sprendinys, tenkinantis pradinę sąlygą

$$\varphi(0) = x_0.$$

Tada jį galima išreikšti formule

$$\varphi(t) = \Phi(t)x_0.$$

Priminsime, kad monodromijos matrica $C = \Phi(\omega)$. Todėl

$$\varphi(t + \omega) = \Phi(t + \omega)x_0 = \Phi(t)Cx_0 = \Phi(t)\Phi(\omega)x_0 = \Phi(t)\mu x_0 = \mu\varphi(t).$$

Įrodysime antrąjį teoremos teiginį. Tegu φ yra (2.26) sistemos netrivialus sprendinys, tenkinantis (2.31) sąlygą. Papildykime šį sprendinį iki fundamentaliosios sprendinių sistemos, t.y. tegu $\varphi, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ – fundamentalioji sprendinių sistema. Šią sprendinių sistemą atitinka monodromijos matrica C. Pagal apibrėžimą

$$(\varphi(t+\omega), \varphi_2(t+\omega), \ldots, \varphi_n(t+\omega)) = (\varphi(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t))C, \quad C = \{c_{ij}\}.$$

Sulyginę šių matricų pirmuosius stulpelius, gausime

$$\varphi(t+\omega) = c_{11}\varphi(t) + c_{21}\varphi_2(t) + \cdots + c_{n1}\varphi_n(t) = \mu\varphi(t).$$

Perrašykime šią lygybę taip:

$$(c_{11} - \mu)\varphi(t) + c_{21}\varphi_2(t) + \cdots + c_{n1}\varphi_n(t) = 0.$$

Kadangi funkcijos $\varphi, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ yra tiesiškai nepriklausomos, tai pastaroji formulė yra teisinga tada ir tik tada, kai $c_{11} = \mu$, $c_{21} = \cdots = c_{n1} = 0$. Taigi monodromijos matrica

$$C = \begin{pmatrix} \mu & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Todėl μ yra jos tikrinė reikšmė. Kartu μ yra (2.26) sistemos multiplikatorius. Teorema įrodyta. $\triangleright$

I š v a d a. Jeigu bent vienas (2.26) sistemos multiplikatorius lygus vienetui, tai ši sistema turi netrivialų ω-periodinį sprendinį. Ir atvirkščiai, jeigu (2.26) sistema turi netrivialų ω-periodinį sprendinį, tai bent vienas šios sistemos multiplikatorius lygus vienetui.

Tegu Φ yra (2.26) sistemos fundamentalioji matrica. Pagal 2.14 teoremą

$$\Phi(t) = B(t)e^{tA};$$

čia B yra neišsigimusi ω-periodinė matrica, o A – matrica su pastoviais koeficientais. Pagal 2.1 teoremą egzistuoja tokia neišsigimusi matrica Q, kad

$$A = QJQ^{-1};$$

čia J – Žordano matrica. Matricos tA eksponentė

$$e^{tA} = Qe^{tJ}Q^{-1}.$$

Todėl fundamentalioji matrica

$$\Phi(t) = B(t)Qe^{tJ}Q^{-1}.$$

Šią formulę galima perrašyti taip:

$$\tilde{\Phi}(t) = \tilde{B}(t)e^{tJ};$$

čia $\tilde{\Phi}(t) = \Phi(t)Q$ taip pat yra fundamentalioji matrica, o matrica $\tilde{B}(t) = B(t)Q$ yra ω-periodinė. Ištirsime fundamentaliosios matricos $\tilde{\Phi}$ struktūrą.

Tegu $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – matricos A tikrinės reikšmės. Skaičiai $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ yra vadinami (2.26) sistemos *charakteristiniais rodikliais.* Priminsime, kad matrica A yra susijusi su monodromijos matrica C. Tiksliau yra teisinga formulė

$$e^{\omega A} = C.$$

Analogiška formulė yra teisinga ir šių matricų tikrinėms reikšmėms, t.y.

$$e^{\omega\lambda_j} = \mu_j, \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

Be to, matricų A ir C tikrinės reikšmės yra to paties kartotinumo ir kiekvieną kartotinę tikrinę reikšmę atitinka tokie patys elementarūs dalikliai.

P a s t a b a. Atkreipsime dėmesį, kad realios charakteristinių rodiklių dalys yra apibrėžiamos vienareikšmiškai, o menamos dalys yra apibrėžiamos $2\pi ki/\omega$, $k\in\mathbb{Z}$ tikslumu.

Tegu

$$J = \mathrm{diag}\{J_{s_1}(\lambda_1), \dots, J_{s_m}(\lambda_m)\};$$

čia s_j yra tikrinės reikšmės λ_j kartotinumas, $\sum\limits_{j=1}^{m} s_j = n$. Tada

$$e^{tJ} = \mathrm{diag}\{e^{tJ_{s_1}(\lambda_1)}, \dots, e^{tJ_{s_m}(\lambda_m)}\}.$$

Kiekvienas šios kvazidiagonalinės matricos langelis turi tokią struktūrą:

$$e^{tJ_{s_j}(\lambda_j)} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_j t} & te^{\lambda_j t} & \dots & \frac{t^{s_j-1}}{(s_j-1)!}e^{\lambda_j t} \\ 0 & e^{\lambda_j t} & \dots & \frac{t^{s_j-2}}{(s_j-2)!}e^{\lambda_j t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_j t} \end{pmatrix}.$$

Tegu $\tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_n$ ir $\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_n$ yra matricų $\tilde{\Phi}$ ir $\tilde{B}$ stulpeliai. Tada

$$\begin{aligned}
\tilde{\varphi}_1 &= \tilde{b}_1 e^{t\lambda_1}, \\
&\vdots \\
\tilde{\varphi}_{s_1} &= \Big(\tilde{b}_1 \tfrac{t^{s_1-1}}{(s_1-1)!} + \dots + \tilde{b}_{s_1}\Big) e^{t\lambda_1}, \\
&\vdots \\
\tilde{\varphi}_{n-s_m+1} &= \tilde{b}_{n-s_m+1} e^{\lambda_m t}, \\
&\vdots \\
\tilde{\varphi}_n &= \Big(\tilde{b}_n \tfrac{t^{s_m-1}}{(s_m-1)!} + \dots + \tilde{b}_n\Big) e^{t\lambda_m}.
\end{aligned}$$

Iš šių formulių matome, kad tiesinės sistemos su periodiniais koeficientais fundamentaliosios matricos struktūra yra analogiška tiesinės sistemos su pastoviais koeficientais fundamentaliosios matricos struktūrai. Todėl natūralu tikėtis, kad tiesinę sistemą su periodiniais koeficientais galima suvesti į tiesinę sistemą su pastoviais koeficientais.

Apibrėžkime naują ieškomą funkciją y formule

$$x = B(t)y, \quad B(t) = \Phi(t)e^{-tA}.$$

Pagal apibrėžimą matrica B yra diferencijuojama. Todėl

$$\dot{B}(t)y + B(t)\dot{y} = P(t)B(t)y \quad (\dot{x} = P(t)x).$$

Kadangi matrica B yra neišsigimusi, tai pastarąją formulę galima perrašyti taip:

$$\dot{y} = B^{-1}(t)[P(t)B(t) - \dot{B}(t)]y.$$

Įrodysime, kad matrica $B^{-1}(t)[P(t)B(t) - \dot{B}(t)] = A$. Visu pirma pastebėsime, kad

$$\dot{B}(t) = \dot{\Phi}(t)e^{-tA} - \Phi(t)Ae^{-tA} = P(t)\Phi(t)e^{-tA} - \Phi(t)Ae^{-tA};$$

$$B^{-1}(t) = e^{tA}\Phi^{-1}(t).$$

Todėl

$$B^{-1}[P(t)B(t) - \dot{B}(t)] = e^{tA}\Phi^{-1}(t)P(t)\Phi(t)e^{-tA} - e^{tA}\Phi^{-1}(t)P(t)\Phi(t)e^{-tA} +$$

$$+ e^{tA}\Phi^{-1}(t)\Phi(t)Ae^{-tA} = e^{tA}Ae^{-tA} = e^{tA}e^{-tA}A = A.$$

Taigi (2.26) sistemą su periodiniais koeficientais keitiniu $x = B(t)y$ galima suvesti į tiesinę sistemą

$$\dot{y} = Ay \tag{2.32}$$

su pastoviais koeficientais.

P a s t a b a. Bendru atveju matrica A, apibrėžta formule

$$e^{\omega A} = C,$$

yra kompleksinė (netgi tuo atveju, kai matricos C, Φ ir P yra realios).

Tarkime, P yra ω-periodinė reali matrica. Tada (2.26) sistemą galima suvesti į tiesinę sistemą su pastoviais realiais koeficientais netgi ir tuo atveju, kai matrica A yra kompleksinė. Iš tikrųjų į matricą P galime žiūrėti kaip į 2ω-periodinę matricą. Tegu C yra monodromijos matrica atitinkanti periodą ω. Tada

$$\Phi(t + 2\omega) = \Phi(t + \omega)C = \Phi(t)C^2.$$

Iš čia išplaukia, kad C^2 yra monodromijos matrica, atitinkanti periodą 2ω. Galima įrodyti (žr.[9]), kad matrica C^2 turi realų logaritmą, t.y. matrica A, apibrėžta formule

$$e^{A\omega} = C^2,$$

yra reali. Todėl visada egzistuoja tokia 2ω periodinė neišsigimusi matrica B, kad keitiniu

$$x = B(t)y$$

(2.26) sistema susiveda į (2.32) sistemą su pastoviais realiais koeficientais.

2.8. TIESINĖS NEHOMOGENINĖS SISTEMOS SU PERIODINIAIS KOEFICIENTAIS

Tarkime, matrica $P = \{p_{ij}\} \in \mathbb{R}^{n,n}$, vektorius $q = \mathrm{colon}(q_1, \ldots, q_n)$, p_{ij}, q_i yra tolydžios ω-periodinės funkcijos, $\omega > 0$. Nagrinėsime tiesinę nehomogeninę sistemą

$$\dot{x} = P(t)x + q(t). \tag{2.33}$$

Tegu $x = \varphi(t)$ yra šios sistemos sprendinys, tenkinantis sąlygą

$$x(0) = x(\omega). \tag{2.34}$$

Kadangi funkcijos p_{ij} ir q_i yra ω-periodinės, tai funkcija $\psi(t) = \varphi(t + \omega)$ taip pat yra (2.33) sistemos sprendinys. Be to,

$$\psi(0) = \varphi(\omega) = \varphi(0).$$

Taigi sprendiniai φ ir ψ tenkina tą pačią tiesinę sistemą ir taške $t = 0$ sutampa. Todėl

$$\varphi(t) = \varphi(t + \omega), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Iš šia išplaukia, kad (2.33) sistemos sprendinys $x = \varphi(t)$ yra ω-periodinis tada ir tik tada, kai jis tenkina (2.34) sąlygą.

2.16 **teorema.** *Tarkime, visi* (2.26) *sistemos multiplikatoriai* $\mu_1, \ldots, \mu_n$ *nelygūs vienetui. Tada* (2.33) *sistema turi vienintelį* ω*-periodinį sprendinį.*

$\triangleleft$ Bendrasis (2.33) sistemos sprendinys

$$x(t) = \Phi(t)C + \int\limits_{t_0}^{t} \Phi(t)\Phi^{-1}(s)q(s)\,ds;$$

čia $\Phi(t)$ yra (2.26) sistemos fundamentalioji matrica. Imkime $t_0 = 0$ ir tarkime, kad taške $t = 0$ fundamentalioji matrica $\Phi(t)$ yra normuota. Tada $C = x(0)$ ir pastarąją formulę galima perrašyti taip:

$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \int\limits_{0}^{t} \Phi(t)\Phi^{-1}(s)q(s)\,ds. \tag{2.35}$$

Šis sprendinys yra ω periodinis tada ir tik tada, kai jis tenkina (2.34) sąlygą, t.y.

$$x(0) = \Phi(\omega)x(0) + \int\limits_{0}^{\omega} \Phi(\omega)\Phi^{-1}(s)q(s)\,ds. \tag{2.36}$$

Vektoriaus $x(0)$ atžvilgiu tai yra tiesinė algebrinė n lygčių sistema. Ji turi vienintelį sprendinį tada ir tik tada, kai jos determinantas

$$\det(E - \Phi(\omega)) \neq 0.$$

Tačiau

$$\det(E - \Phi(\omega)) = (1 - \mu_1) \cdot \ldots \cdot (1 - \mu_n).$$

Todėl (2.26) sistema turi vienintelį sprendinį tada ir tik tada, kai visi multiplikatoriai $\mu_1, \ldots, \mu_n$ yra nelygūs vienetui. $\triangleright$

2.9. UŽDAVINIAI

1. Suveskite sistemą $\dot{x} = Ax$ į kanoninį pavidalą šiais atvejais:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Nubrėžkite tiesinės sistemos $\dot{x} = Ax$ fazinį portretą šiais atvejais:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Raskite tiesinę sistemą atitinkantį tašką Tr–$\det$ plokštumoje ir priklausomai nuo jo išsidėstymo nustatykite pusiausvyros taško charakterį.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + 2x_2; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 - 3x_2; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2, \\ \dot{x}_2 = -3x_1 - x_2. \end{cases}$$

4. Raskite eksponentę e^{tA}, kai matrica

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}.$$

5. Raskite eksponentę e^{tA}, kai matrica

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -7 & 0 \\ 3 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Įrodykite, kad aibė

$$\{k \lg 2 - N (\mathrm{mod}\, 1) : k, N \in \mathbb{N}\}$$

yra tiršta intervale $(0, 1)$.

7. Įrodykite, kad skaičiai $2^k, k \in \mathbb{N}$ gali prasidėti bet kuriuo skaitmeniu. Ar skaičius 2^k gali prasidėti bet kokia skaitmenų kombinacija?

8. Tegu skaičiai α ir 2π nėra racionaliai priklausomi. Įrodykite, kad seka

$$\{\alpha_k = \alpha_0 + k\alpha/2\pi : k \in \mathbb{N}\}$$

yra tolygiai[8] pasiskirsčiusi spindulio $1/2\pi$ apskritime.

9. Įrodykite, kad skaičiai $2^k, k \in \mathbb{N}$ dažniau prasideda skaitmeniu 7 negu skaitmeniu 8, t.y. riba
$$\lim_{k\to\infty} \frac{N_7(k)}{N_8(k)}$$
egzistuoja ir didesnė už vienetą; čia $N_i(k)$ yra sekos $1, 2, 2^2, \ldots, 2^k$ narių, prasidedančių skaitmeniu i, skaičius.

   N u r o d y m a s. Skaičius 2^k prasideda skaitmeniu a, jeigu skaičius
$$k \lg 2 - N \in [\lg a, \lg(a+1)).$$
   Intervalo $[\lg a, \lg(a+1))$ ilgis $l_a = \lg(1 + 1/a)$. Be to, jeigu $a > b$, tai $l_a < l_b$.

10. Tarkime, plokštumos R^2 taškuose (k, l) yra pasodinti daigai. Įrodykite, kad arklys, šokinėdamas šuoliais $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$, būtinai sumindys bent vieną daigą.

[8]Taškai α_k yra tolygiai pasiskirstę spindulio $1/2\pi$ apskritime, jeigu kiekvienam šio apskritimo lankui l taškų $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, priklausančių l, skaičius $N(l, k)$ yra asimptotiškai proporcingas lanko ilgiui $|l|$, t.y.
$$\lim_{k\to\infty} \frac{N(l,k)}{k} = \frac{|l|}{1}.$$

3 SKYRIUS

Netiesinės sistemos

3.1. SPRENDINIŲ GLODUMAS PRADINIŲ SĄLYGŲ IR PARAMETRŲ ATŽVILGIU

Nagrinėjant įvairius uždavinius, aprašomus diferencialinėmis lygtimis, pradinės sąlygos dažniausiai yra žinomos tik apytiksliai. Netgi tuo atveju, kai sprendinys yra ieškomas su konkrečiomis pradinėmis sąlygomis, praktiškai pradinės sąlygos yra imamos iš tam tikros duoto taško aplinkos. Todėl svarbu žinoti kokia bus sprendinio paklaida, jeigu pradinių sąlygų paklaida yra maža. Pavyzdžiui, jeigu yra nagrinėjama normalioji diferencialinių lygčių sistema

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{3.1}$$

$f : D \to \mathbb{R}^n$, $(t, x) \in D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, D – vienaties sritis, tai kiekvieną tašką $(t_0, x_0) \in D$ atitinka maksimalusis šios sistemos sprendinys

$$x = x(t, t_0, x_0),$$

apibrėžtas maksimaliame intervale $I(t_0, x_0)$. Sprendinio $x = x(t, t_0, x_0)$ apibrėžimo sritis

$$G = \{(t, t_0, x_0) : t \in I(t_0, x_0),\ (t_0, x_0) \in D\}.$$

Šiuo atveju problema susiveda į tai, ar sprendinys $x = x(t, t_0, x_0)$ ir maksimalus intervalas $I(t_0, x_0)$ yra tolydžios taško (t_0, x_0) aplinkoje funkcijos. Bendru atveju (3.1) sitemos dešinioji pusė gali priklausyti nuo tam tikrų parametrų μ. Kai kurie iš jų taip pat gali būti žinomi tik apytiksliai. Jeigu parametrų skaičius yra baigtinis, t.y. $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_m)$, tai (3.1) sistemą galima perrašyti taip:

$$\dot{x} = f(t, x, \mu), \quad (t, x, \mu) \in D_\mu \subset \mathbb{R}^{1+n+m}. \tag{3.2}$$

Tarkime, funkcija f srityje D_μ lokaliai tenkina Lipšico sąlygą kintamųjų x atžvilgiu. Tada kiekvienam fiksuotam μ sritis $Q = \{(t, x) : (t, x, \mu) \in D_\mu\}$ yra vienaties sritis (3.2) sistemai, t.y. $\forall (t_0, x_0) \in Q$ egzistuoja vienintelis (3.2) sistemos sprendinys $x = x(t, t_0, x_0, \mu)$, apibrėžtas aibėje

$$G_\mu = \{(t, t_0, x_0, \mu) : (t_0, x_0, \mu) \in D_\mu,\ t \in I(t_0, x_0, \mu)\};$$

čia $I(t_0, x_0, \mu)$ – maksimalus sprendinio egzistavimo intervalas.

3.1 **teorema.** *Tarkime, srityje D_μ funkcija f lokaliai tenkina Lipšico sąlygą kintamųjų x atžvilgiu. Tada aibė G_μ yra sritis ir kiekvienas (3.2) sistemos sprendinys $x = x(t, t_0, x_0, \mu)$ yra tolydi funkcija srityje G_μ.*

Šios teoremos įrodymą galima rasti [6] knygoje.

I š v a d a. Jeigu $D_\mu = (a,b) \times U_\mu$, (a,b) – laiko intervalas, o U_μ – sritis kintamųjų x, μ erdvėje ir visi sprendiniai yra pratęsti į intervalą (a,b), tai funkcija $x = x(t, t_0, x_0, \mu)$ yra tolydi srityje $(a,b) \times (a,b) \times U_\mu$. Atskiru atveju, kai $f(t,x,\mu) = A(t,\mu)x$, $A(t,\mu) : (a,b) \times M \to \mathbb{R}^{n,n}$ – tolydi funkcija, M – parametro μ reikšmių sritis, tiesinės sistemos

$$\dot{x} = A(t,\mu)x$$

fundamentalioji matrica $\Phi(t, t_0, \mu)$, normuota taške $t = t_0$, yra tolydi srityje $(a,b) \times (a,b) \times M$. Jeigu funkcija A yra tolydi kokioje nors kintamųjų t, μ srityje, tai normuota taške $t = t_0$ fundamentalioji matrica Φ yra tolydi toje pačioje srityje.

3.2 **teorema.** *Tarkime, yra patenkintos* 3.1 *teoremos sąlygos ir funkcijos*

$$f_x := \partial f / \partial x : D_\mu \to \mathbb{R}^{n,n}, \quad f_\mu := \partial f / \partial \mu : D_\mu \to \mathbb{R}^{n,m}$$

yra tolydžios. Tada (3.2) *sistemos sprendinys* $x = x(t, t_0, x_0, \mu)$ *srityje* G_μ *turi tolydžias dalines išvestines* $\partial x/\partial t$, $\partial x/\partial t_0$, $\partial x/\partial x_0$ *ir* $\partial x/\partial \mu$. *Be to, yra teisingi tokie teiginiai:*

1. *Dalinė išvestinė* $\partial x/\partial x_0$ *yra tiesinės homogeninės sistemos*

$$\dot{y} = f_x(t,x,\mu)y, \quad x = x(t, t_0, x_0, \mu) \tag{3.3}$$

   fundamentalioji matrica, normuota taške $t = t_0$.

2. *Dalinė išvestinė* $\partial x/\partial \mu$ *yra tieinės nehomogeninės sistemos*

$$\dot{y} = f_x(t,x,\mu)y + f_\mu(t,x,\mu), \quad x = x(t, t_0, x_0, \mu) \tag{3.4}$$

   sprendinių, tenkinančių pradinę sąlygą $y|_{t=t_0} = 0$, *matrica.*

3. *Dalinė išvestinė*

$$\frac{\partial x}{\partial t_0} = -\frac{\partial x}{\partial x_0} f(t_0, x_0, \mu), \quad x = x(t, t_0, x_0, \mu). \tag{3.5}$$

P a s t a b a. Tiesinės sistemos (3.3), (3.4) vadinamos *variacinėmis* sistemomis pagal parametrus x_0 ir μ atitinkamai. Jas galima gauti formaliai diferencijuojant tapatybę

$$\dot{x} = f(t,x,\mu), \quad x = x(t, t_0, x_0, \mu).$$

$\triangleleft$ Tegu $x = x(t, \bar{t}_0, \bar{x}_0, \bar{\mu}_0)$ yra (3.2) sistemos sprendinys, apibrėžtas uždarame intervale $[\tau, T]$. Remiantis 3.1 teorema, galime tvirtinti, kad egzistuoja toks skaičius $\delta > 0$, kad kiekvienam taškui

$$(t_0, x_0, \mu_0) \in V_\delta = \{(t,x,\mu) : t \in [\tau, T],\ |\bar{x}_0 - x| < \delta,\ |\bar{\mu}_0 - \mu| < \delta\}$$

sprendinys $x(t, t_0, x_0, \mu_0)$ taip pat yra apibrėžtas intervale $[\tau, T]$ ir aibėje $[\tau, T] \times V_\delta$ yra tolydus.

Fiksuokime tašką (t_0, x_0, μ_0). Tarkime, sprendinys $x = x(t, t_0, x_0, \mu_0)$ yra apibrėžtas intervale $[\tau, T]$. Tada kiekvienam $h : |h| < \varepsilon$, ε – pakankamai mažas teigiamas skaičius, sprendinys $x = x(t, t_0, x_0 + he_i, \mu_0)$, $i = 1, 2, \dots, n$ taip pat yra apibrėžtas intervale $[\tau, T]$. Be to, kai $h \to 0$,

$$x(t, t_0, x_0 + he_i, \mu_0) \to x(t, t_0, x_0, \mu_0)$$

tolygiai $t \in [\tau, T]$ atžvilgiu.

Fiksuokime kokią nors indekso i reikšmę ir pažymėkime

$$\Delta x(t, h) = x(t, h) - x(t, 0), \quad y(t, h) = \frac{\Delta x(t, h)}{h}, \quad h \neq 0;$$

čia $x(t, h) = x(t, t_0, x_0 + he_i, \mu_0)$. Tada

$$\frac{d}{dt}\Delta x(t, h) = f(t, x(t, h), \mu_0) - f(t, x(t, 0), \mu_0) =$$

$$= \int_0^1 f_x(t, x(t, 0) + s\Delta x(t, h), \mu_0)\, ds \cdot \Delta x(t, h).$$

Padalinę kairę ir dešinę šių lygybių puses iš h, gausime, kad funkcija $y(t, h)$ yra tiesinės sistemos

$$\dot{y} = A(t, h)y \tag{3.6}$$

sprendinys. Čia

$$A(t, h) = \int_0^1 f_x(t, x(t, 0) + s\Delta x(t, h), \mu_0)\, ds.$$

Be to,

$$y(t_0, h) = \frac{x(t_0, h) - x(t_0, 0)}{h} = \frac{x(t_0, t_0, x_0 + he_i, \mu_0) - x(t_0, t_0, x_0, \mu_0)}{h} =$$

$$= \frac{x_0 + he_i - x_0}{h} = e_i.$$

Kadangi funkcija f_x yra tolydi, tai

$$A(t, h) \to A(t, 0) = f_x(t, x(t, t_0, x_0, \mu_0), \mu_0), \tag{3.7}$$

kai $h \to 0$.

Funkcija $A(t, h)$ yra tolydi, kai $t \in [\tau, T]$ ir $|h| < \varepsilon$. Pagal 3.1 teoremos išvadą (3.6) sistemos sprendinys $\tilde{y}(t, h)$, tenkinantis pradinę sąlygą

$$\tilde{y}(t, h)\big|_{t=t_0} = e_i, \tag{3.8}$$

yra tolydus tuose plokštumos t, h taškuose kaip ir funkcija $A(t, h)$. Todėl egzistuoja riba

$$\lim_{h \to 0} \tilde{y}(t, h) = \tilde{y}(t, 0). \tag{3.9}$$

Kai $h \neq 0$ funkcijos $y(t,h)$, $\tilde{y}(t,h)$ yra tos pačios sistemos sprendiniai, tenkinantys tą pačią pradinę sąlygą. Todėl jie sutampa ir

$$\lim_{h\to 0} y(t,h) = \tilde{y}(t,0).$$

Iš čia išplaukia, kad egzistuoja sprendinio x dalinė išvestinė pagal vektoriaus x_0 i-ąją koordinatę. Kartu egzistuoja išvestinė $\partial x/\partial x_0$. Iš (3.7), (3.8), (3.9) išplaukia, kad $\partial x/\partial x_0$ yra (3.3) sistemos fundamentalioji matrica, normuota taške $t = t_0$. Kadangi $x(t,t_0,x_0,\mu)$ yra tolydi aibėje $[\tau,T]\times V_\delta$ funkcija, tai šioje aibėje (3.3) sistemos koeficientų matrica taip pat yra tolydi kintamojo t ir parametrų t_0,x_0,μ atžvilgiu. Pagal 3.1 teoremos išvadą fundamentalioji matrica $\partial x/\partial x_0$ kintamojo t, pradinio momento t_0 ir parametrų t_0,x_0,μ atžvilgiu yra tolydi aibėje $[\tau,T]\times[\tau,T]\times V_\delta$. Todėl kintamojo t ir parametrų t_0,x_0,μ atžvilgiu ji yra tolydi aibėje $[\tau,T]\times V_\delta$, t.y. tolydi kiekvieno taško $(t,t_0,x_0,\mu)\in G_\mu$ aplinkoje.

Analogiškai įrodomas teoremos teiginys apie išvestinę $\partial x/\partial\mu$. Įrodysime išvestinės $\partial x/\partial t_0$ egzistavimą ir tolydumą. Tegu $x(t,t_0,x_0,\mu)$ yra (3.2) sistemos sprendinys, apibrėžtas maksimaliame sprendinio egzistavimo intervale $I(t_0,x_0,\mu)$. Pagal apibrėžimą

$$x(t_0,t_0,x_0,\mu) = x_0.$$

Be to, pakankamai mažoms $|h|$ reikšmėms

$$x(t_0+h,t_0+h,x(t_0+h,t_0,x_0,\mu),\mu) = x(t_0+h,t_0,x_0,\mu).$$

Todėl tokioms $|h|$ reikšmėms

$$x(t,t_0,x_0,\mu) = x(t,t_0+h,x(t_0+h,t_0,x_0,\mu),\mu).$$

Kadangi funkcija x ir jos išvestinės $\partial x/\partial x_0$, $\partial x/\partial\mu$ yra tolydžios, tai

$$\frac{\partial x}{\partial t_0}(t,t_0,x_0,\mu) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Big[x(t,t_0+h,x_0,\mu) - x(t,t_0,x_0,\mu)\Big] =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Big[x(t,t_0+h,x_0,\mu) - -x(t,t_0+h,x(t_0+h,t_0,x_0,\mu),\mu)\Big] =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Big[x(t,t_0,x(t_0,t_0,x_0,\mu),\mu) - x(t,t_0,x(t_0+h,t_0,x_0,\mu),\mu)\Big] =$$

$$= -\frac{\partial x}{\partial x_0}(t,t_0,x_0,\mu)\cdot\dot{x}(t_0,t_0,x_0,\mu) = -\frac{\partial x}{\partial x_0}(t,t_0,x_0,\mu)\cdot f(t_0,x_0,\mu).$$

Taigi išvestinė $\partial x/\partial t_0$ egzistuoja, yra tolydi, ir teisinga (3.5) formulė.

Išvestinės $\partial x/\partial t$ egzistavimas ir tolydumas išplaukia iš sprendinio apibrėžimo, funkcijos f tolydumo ir 3.1 teoremos. ▹

P a v y z d ž i a i:

1. Rasime lygties

$$\dot{x} = x^2 + 2\mu/t$$

sprendinio $x = x(t, \mu)$, tenkinančio pradinę sąlygą $x(1, \mu) = -1$, išvestinę parametro μ atžvilgiu taške $\mu = 0$.

Pagal 3.2 teoremą išvestinė $\partial x(t, \mu)/\partial \mu := y(t, \mu)$ yra variacinės lygties

$$\dot{y} = 2x(t, \mu)y + 2/t$$

sprendinys, tenkinantis pradinę sąlygą $y(1, \mu) = 0$. Todėl ieškoma išvestinė $y(t, 0)$ yra lygties

$$\dot{y} = 2x(t, 0)y + 2/t$$

sprendinys, tenkinantis pradinę sąlygą $y(1, 0) = 0$. Funkcija $x = x(t, 0)$ yra lygties

$$\dot{x} = x^2$$

sprendinys, tenkinantis pradinę sąlygą $x(1, 0) = -1$. Todėl $x(t, 0) = -1/t$. Taigi funkcija $y(t, 0)$ yra lygties

$$\dot{y} = 2(1 - y)/t$$

sprendinys, tenkinantis pradinę sąlygą $y(1, 0) = 0$. Atskyrę kintamuosius ir suintegravę pastarąją lygtį, gausime

$$y(t, 0) = 1 - C/t^2.$$

Iš pradinės sąlygos randame $C = 1$. Todėl ieškoma išvestinė

$$y(t, 0) = 1 - 1/t^2.$$

2. Koši uždavinio

$$\ddot{x} + 3x = 2\sin t + \mu\dot{x}^2, \quad x|_{t=t_0} = x_0, \quad \dot{x}|_{t=t_0} = x_1$$

sprendinys $x = x(t, t_0, x_0, x_1, \mu)$. Tegu $t_0 = 0$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$. Rasime šio sprendinio išvestinę[1] parametro μ atžvilgiu taške $\mu = 0$.

Tegu $\partial x(t, 0, 0, 1, \mu)/\partial \mu = y(t, \mu)$. Tada ieškoma išvestinė $y(t, 0)$ yra variacinės lygties

$$\ddot{y} + 3y = (\dot{x}(t, 0, 0, 1, 0))^2$$

[1] Lygties

$$\ddot{x} = f(t, x, \dot{x}, \mu)$$

sprendinio $x = x(t, t_0, x_0, x_1, \mu)$, tenkinančio pradines sąlygas $x\Big|_{t=t_0} = x_0$, $\dot{x}\Big|_{t=t_0} = x_1$, išvestinė $\partial x/\partial \mu$ yra variacinės lygties

$$\ddot{y} = f_x(t, x, \dot{x}, \mu)y + f_\mu(t, x, \dot{x}, \mu)$$

sprendinys taške $x = x(t, t_0, x_0, x_1, \mu)$, tenkinantis pradines sąlygas

$$y\Big|_{t=t_0} = 0, \quad \dot{y}\Big|_{t=t_0} = 0.$$

Analogiškas teiginys yra teisingas ir n-osios eilės lygčiai. Įrodymą galima rasti [6] knygoje.

sprendinys, tenkinantis pradines sąlygas

$$y\big|_{t=0} = 0, \quad \dot{y}\big|_{t=0} = 0.$$

Kai $\mu = 0$, turime Koši uždavinį

$$\ddot{x} + 3x = 2\sin t, \quad x\big|_{t=0} = 0, \quad \dot{x}\big|_{t=0} = 1.$$

Jo sprendinys $x = \sin t$. Taigi ieškoma išvestinė yra Koši uždavinio

$$\ddot{y} + 3y = \cos^2 t, \quad y\big|_{t=0} = 0, \quad \dot{y}\big|_{t=0} = 0$$

sprendinys. Pastarosios lygties dešinioji pusė

$$\cos^2 t = (1 + \cos 2t)/2.$$

Todėl jos sprendinį galima rasti neapibrėžtinių koeficientų metodu. Pareikalavę, kad jis tenkintų pradines sąlygas, gausime

$$y(t, 0) = 1/6 - 1/2\cos 2t + 1/3\cos\sqrt{3}t.$$

Įrodytą teoremą galima apibendrinti. Tiksliau yra teisinga tokia teorema.

3.3 **teorema.** *Tarkime, funkcija f srityje D_μ turi tolydžias išvestines iki k-osios eilės imtinai pagal x ir μ. Tada (3.2) sistemos sprendinys $x = x(t, t_0, x_0, \mu)$ turi srityje D_μ tolydžias išvestines iki k-osios eilės imtinai pagal x_0 ir μ.*

◃ Teoremą įrodysime matematinės indukcijos metodu. Kai $k = 1$, pastarosios teoremos teiginys išplaukia iš 3.2 teoremos. Tarkime teorema yra teisinga kokiai nors l reikšmei, $l < k$. Pagal 3.2 teoremą matricos $\partial x/\partial x_0$ ir $\partial x/\partial \mu$ yra sudarytos atitinkamai iš (3.3) ir (3.4) tiesinių sistemų sprendinių su fiksuotomis pradinėmis sąlygomis. Pagal indukcinę prielaidą sprendinys $x(t, t_0, x_0, \mu)$ ir išvestinės $\partial f/\partial x$ ir $\partial f/\partial \mu$ turi tolydžias išvestines iki l-osios eilės imtinai pagal x ir μ srityje D_μ. Todėl šių tiesinių sistemų koeficientai turi l-osios eilės tolydžias išvestines pagal x_0 ir μ srityje D_μ. Kartu galime tvirtinti, kad jų sprendiniai turi l-osios eilės tolydžias dalines išvestines pagal x_0 ir μ srityje D_μ. Tačiau tada (3.2) sistemos sprendiniai turi tolydžias išvestines iki $l + 1$ eilės imtinai, $\forall l : l < k$. Imdami $l = k - 1$ gausime, kad (3.2) sistemos sprendiniai turi tolydžias dalines išvestines pagal x_0 ir μ srityje D_μ iki k-osios eilės imtinai. ▹

I š v a d a. Matrica $\partial x/\partial x_0$ yra (3.3) sitemos fundamentalioji matrica, normuota taške $t = t_0$. Todėl Liuvilio formulę galima perrašyti taip:

$$\det\Big\{\frac{\partial x}{\partial x_0}(t, t_0, x_0, \mu)\Big\} = \exp\left\{\int_{t_0}^{t} \operatorname{Tr} f_x(s, x(s, t_0, x_0, \mu), \mu)\, ds\right\} \tag{3.10}$$

Tegu $x(t, t_0, x_0, \mu)$ yra (3.2) sistemos sprendinys fiksuotoms parametrų t_0 ir μ reikšmėms. Tada formulė

$$\varphi_t(x_0) = x(t, t_0, x_0, \mu)$$

apibrėžia fazinių taškų x_0 transformaciją φ_t į fazinę erdvę $\mathbb{R}^n$. Jeigu yra patenkintos 3.1 teoremos sąlygos, tai transformacija φ_t yra homeomorfizmas, o jeigu 3.2 teoremos tai – difeomorfizmas. Veikiant transformacijai φ_t tūrio elementas lygus

$$\Big|\det\Big\{\frac{\partial\varphi_t(x_0)}{\partial x_0}\Big\}\Big|\,dx_0.$$

Jeigu matricos f_x pėdsakas $\mathrm{Tr}\{f_x\} = 0$, tai

$$\det\Big\{\frac{\partial\varphi_t(x_0)}{\partial x_0}\Big\} = 1$$

ir transformacija φ_t išlaiko tūrį.

P a v y z d y s. Tegu $D \subset \mathbb{R}^{2n+1}$, $x, y \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ ir funkcija $E = E(t, x, y)$ yra dukart diferencijuojama srityje D pagal kintamuosius x ir y. Tada *Hamiltono* lygčių sistemą

$$\dot{x}_k = \frac{\partial E}{\partial y_k}, \quad \dot{y}_k = -\frac{\partial E}{\partial x_k}, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

atitinkančios matricos pėdsakas

$$\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{\partial^2 E}{\partial y_k \partial x_k} - \frac{\partial^2 E}{\partial x_k \partial y_k}\Big) = 0.$$

Todėl šią sistemą atitinkanti transformacija φ_t išlaiko tūrį.

3.2. SPRENDINIŲ LOKALUSIS STABILUMAS

Tegu funkcija $f : D_\mu \subset \mathbb{R}^{n+m+1} \to \mathbb{R}^n$ lokaliai tenkina Lipšico sąlygą kintamųjų x atžvilgiu srityje D_μ. Nagrinėsime sistemą

$$\dot{x} = f(t, x, \mu), \quad x \in \mathbb{R}^n,\ \mu \in \mathbb{R}^m,\ t \in \mathbb{R}. \tag{3.11}$$

Tarkime, kai $\mu = \mu_0$, pastaroji lygtis turi sprendinį $x = \varphi(t)$, $t \in [t_0, \infty)$. Fiksuokime pradinį laiko momentą t_0. Tegu $x = \varphi(t, x_0, \mu)$ yra (3.11) sistemos sprendiniai, tenkinantys pradinę sąlygą

$$\varphi(t_0, x_0, \mu) = x_0.$$

Spindulys $(t, \varphi(t_0), \mu_0)$, $t \in [t_0, \infty)$ priklauso sprendinio $x = \varphi(t, x_0, \mu)$ apibrėžimo sričiai G_μ. Pagal 3.1 teoremą kiekvienam $t_1 > t_0$ egzistuoja $\delta > 0$ toks, kad sprendinys $x = \varphi(t, x_0, \mu)$ yra tolygiai tolydus cilindre $[t_0, t_1] \times V_\delta$,

$$V_\delta = \{(x_0, \mu) : \|x_0 - \varphi(t_0)\| < \delta,\ \|\mu - \mu_0\| < \delta\}.$$

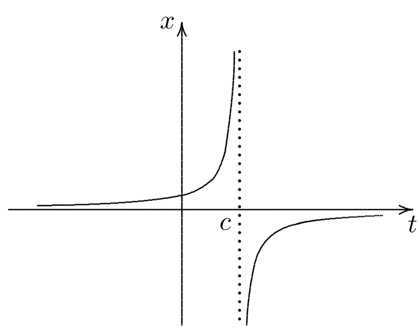
Kartu jis yra tolydus taške $(\varphi(t_0), \mu_0)$ pagal x_0 ir μ tolygiai $t \in [t_0, t_1]$ atžvilgiu. Pastarasis teiginys yra teisingas $\forall t_1 > t_0$. Tačiau paimti $t_1 = \infty$ negalima. Iš tikrųjų aibė

$$\{(t, x_0, \mu) : t \in [t_0, \infty),\ (x_0, \mu) \in V_\delta\}$$

gali nepriklausyti sričiai G_μ. Pavyzdžiui, lygtis

$$\dot{x} = x^2$$

turi trivialų sprendinį $x = \varphi(t) \equiv 0$, $t \in (-\infty, \infty)$ (šiuo atveju parametras μ yra fiksuotas). Pastarosios lygties sprendinys $x = (c - t)^{-1}$ yra apibrėžtas arba intervale $(-\infty, c)$, arba intervale (c, ∞) (žr. 3.1 pav.).



3.1 pav.

Pareikalavę, kad taške t_0 jis įgytų reikšmę x_0, gausime $c = x_0^{-1} + t_0$. Taigi

$$x(t, x_0) = \frac{1}{x_0^{-1} + t_0 - t}.$$

Tegu $x_0 > 0$. Tada kad ir kokią mažą x_0 reikšmę paimsime, sprendinio $x(t, x_0)$ negalėsime pratęsti į intervalo $(-\infty, c)$ išorę. Todėl aibė taškų

$$\{(t, x_0) : t \in [t_0, \infty),\ \|x_0\| < \delta\}$$

nepriklauso sprendinio $x(t, x_0)$ apibrėžimo sričiai G. Be to, sprendinys $x = \varphi(t, x_0, \mu)$ taške $(\varphi(t_0), \mu_0)$ gali nebūti tolygiai tolydus kintamojo $t \in [t_0, \infty)$ atžvilgiu (netgi tuo atveju, kai aibė

$$\{(t, x_0, \mu) : t \in [t_0, \infty),\ (x_0, \mu) \in V_\delta\} \subset G_\mu$$

). Pavyzdžiui, funkcija

$$x(t, x_0, \mu) = x_0 e^{(t-t_0)\mu}$$

yra lygties

$$\dot{x} = \mu x, \quad x, \mu \in \mathbb{R}$$

sprendinys, įgyjantis taške t_0 reikšmę x_0. Funkcija $\varphi(t) \equiv 0$ yra šios lygties trivialusis sprendinys, kai $\mu = \mu_0$. Tegu $\mu_0 > 0$ ir $t_1 > t_0$. Tada $\forall \varepsilon > 0$ egzistuoja toks skaičius $\delta > 0$, kad $\forall t \in [t_0, t_1]$ yra teisinga nelygybė

$$x_0 e^{\mu(t-t_0)} < \varepsilon,$$

jeigu tik

$$\|x_0\| < \delta, \quad \|\mu - \mu_0\| < \delta.$$

Tačiau jeigu $t \in [t_0, \infty)$, tai tokio įverčio nebus ir sprendinys $x(t, x_0, \mu)$ nebus tolygiai tolydus taške (x_0, μ_0), kai $t \in [t_0, \infty)$. Tuo atveju kai $\mu_0 < 0$, pastarasis įvertis yra teisingas $\forall t \in [t_0, \infty)$.

A p i b r ė ž i m a s. Tegu $x = \varphi(t), t \in [t_0, \infty)$ yra (3.11) sistemos sprendinys fiksuotai $\mu = \mu_0$ reikšmei. Sakysime, jis yra lokaliai stabilus, jeigu egzistuoja tokia taško $(\varphi(t_0), \mu_0)$ aplinka $V \subset \mathbb{R}^{n+m}$, kad

1. Aibė $[t_0, \infty) \times V \subset G_\mu$.

2. Funkcija $x = x(t, x_0, \mu)$ yra tolydi taške $(\varphi(t_0), \mu_0)$ pagal x_0 ir μ tolygiai $t \in [t_0, \infty)$ atžvilgiu.

Jeigu bent viena iš šių sąlygų yra nepatenkinta, tai sakysime, kad sprendinys $x = \varphi(t)$ nėra lokaliai stabilus.

P a v y z d y s. Lygties $\dot{x} = \mu x$ trivialusis sprendinys $x \equiv 0$, kai $\mu = \mu_0$, yra stabilus, jeigu $\mu_0 < 0$ ir nėra lokaliai stabilus, jeigu $\mu_0 > 0$.

Tegu $y = x - \varphi(t)$ ir $\nu = \mu - \mu_0$. Tada (3.11) sistemą galima perrašyti taip:

$$\dot{y} = F(t, y, \nu); \tag{3.12}$$

čia $F(t, y, \nu) = f(t, y + \varphi(t), \nu + \mu_0) - f(t, \varphi(t), \mu_0)$. Sprendinį $x = \varphi(t)$, $t \in [t_0, \infty)$, kai $\mu = \mu_0$ atitinka (3.12) sistemos sprendinys $y = 0$, $t \in [t_0, \infty)$, kai $\nu = 0$. Taigi (3.11) sistemos sprendinio $x = \varphi(t)$ duoto taško $(\varphi(t_0), \mu_0)$ aplinkoje tyrimas susivedė į (3.12) sistemos trivialiojo sprendinio taško $(0, 0)$ aplinkoje tyrimą. Šiuo atveju ką tik suformuluotą apibrėžimą galima performuluoti taip:

A p i b r ė ž i m a s. Tegu $y(t) = 0, t \in [t_0, \infty)$ yra (3.12) sistemos trivialusis sprendinys, kai $\nu = 0$ ir $y = y(t, y_0, \nu), t \in [t_0, \infty)$ yra šios sistemos sprendinys, tenkinantis pradinę sąlygą $y(t_0, y_0, \nu) = y_0$. Sakysime, trivialusis sprendinys yra lokaliai stabilus, jeigu $\forall \varepsilon > 0$ egzistuoja $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$ tokie, kad

$$\|y(t, y_0, \nu)\| < \varepsilon, \tag{3.13}$$

kai $\|y_0\| < \delta_1$, $\|\nu\| < \delta_2$.

P a s t a b a. Jeigu yra patenkinta (3.13) sąlyga ir funkcija F yra apibrėžta kokioje nors trivialiojo sprendinio aplinkoje, tai kiekvieną sprendinį $y(t, y_0, \nu)$ galima pratęsti į visą intervalą $[t_0, \infty)$.

Tarkime toliau, kad funkcija f srityje D_μ turi tolydžias dalines išvestines f_x ir f_μ. Pagal Teiloro formulę

$$F(t, y, \nu) = f_x(t, \varphi(t), \mu_0)y + f_\mu(t, \varphi(t), \mu_0)\nu + \theta(t, y, \nu);$$

čia funkcija θ ir jos dalinės išvestinės θ_y, θ_ν yra tolydžios srityje

$$U = \{(t, y, \nu) : t \in [t_0, \infty), \|y\| < \delta, \|\nu\| < \delta\},$$

jeigu tik δ yra pakankamai mažas teigiamas skaičius ir

$$\|\theta(t, y, \nu)\| = o(\|y\| + \|\nu\|),$$

kai $\|y\| \to 0$, $\|\nu\| \to 0$. Todėl (3.12) lygtį galima perrašyti taip:

$$\dot{y} = A(t)y + g(t, y) + h(t, y, \nu), \quad A(t) = f_x(t, \varphi(t), \mu_0); \tag{3.14}$$

čia funkcijos g, h bei jų dalinės išvestinės g_y, h_y, h_ν yra tolydžios srityje U funkcijos tokios, kad

$$\|h(t, y, \nu)\| \le M(t)\|\nu\|, \quad \|g(t, y)\| = o(\|y\|), \quad \forall t \in [t_0, \infty),$$

kai $\|y\| \to 0$.

Atmetę (3.14) sistemoje netiesinius narius, gausime tiesinę sistemą

$$\dot{y} = A(t)y. \tag{3.15}$$

Ji vadinama (3.14) sistemos *pirmuoju artiniu* ir sutampa su (3.11) sistemos variacijų sistema kintamojo x_0 atžvilgiu. Norint atsakyti į klausimą, ar (3.14) sistemos trivialusis sprendinys yra lokaliai stabilus, kartais pakanka ištirti tiesinę (3.15) sistemą.

3.4 **teorema.** *Tarkime, matrica $A(t) = A$ yra pastovioji ir jos tikrinių reikšmių realiosios dalys yra neigiamos. Be to, tegu*

$$\|g(t, y)\| \le \|y\|\omega(\|y\|), \quad \|h(t, y, \nu)\| \le M\|\nu\|, \quad \forall t \in [t_0, \infty).$$

čia $\omega(\delta) \to 0$, kai $\delta \to 0$, M – teigiama konstanta. Tada (3.14) *sistemos trivialusis sprendinys yra lokaliai stabilus.*

◁ Tegu $y(t) := y(t, y_0, \nu)$ yra (3.14) sistemos sprendinys, tenkinantis pradinę sąlygą $y(t_0) = y_0$. Pritaikę konstantų varijavimo metodą, galime įrodyti, kad jis yra integralinės lygčių sistemos

$$y(t) = e^{(t-t_0)A} y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}\big[g(s, y(s)) + h(s, y(s), \nu)\big]\, ds$$

sprendinys. Kadangi matricos A tikrinių reikšmių realiosios dalys yra neigiamos, tai egzistuoja tokios teigiamos konstantos K ir λ, kad

$$\|e^{tA}\| \le K e^{-t\lambda}, \quad t \ge t_0.$$

Pasinaudoję šia nelygybe, gausime

$$\|y(t)\| \le nKe^{-(t-t_0)\lambda}\|y_0\| + nK \int_{t_0}^{t} e^{-(t-s)\lambda}\big[\|g(s, y(s))\| + \|h(s, y(s), \nu)\|\big]\, ds.$$

Pagal teoremos sąlygą

$$\|h(t, y(t), \nu)\| \le M\|\nu\|, \quad \forall t \in [t_0, \infty).$$

Laisvai pasirenkame teigiamą skaičių $\rho < \lambda$. Tada egzistuoja toks teigiamas skaičius δ, kad

$$\|g(t, y(t))\| \le \rho\|y(t)\|/nK, \quad \forall t \in [t_0, \infty),$$

jeigu tik $\|y(t)\| < \delta$. Fiksuokime tokį δ. Tegu $\|y_0\| < \delta$. Tada $\|y(t)\| < \delta$ kokiame nors intervale $[t_0, t_1]$, $t_1 > t_0$. Kai $t \in [t_0, t_1]$, yra teisingas įvertis

$$\|y(t)\| \le nKe^{-\lambda(t-t_0)}\big[\|y_0\| + \lambda^{-1}M\|\nu\|(e^{\lambda(t-t_0)} - 1)\big] + \rho\int_{t_0}^{t} e^{-\lambda(t-s)}\|y(s)\|\, ds.$$

Pastarąją nelygybę galima perrašyti taip:

$$0 \le \psi(t) \le q(t) + \rho \int_{t_0}^{t} \psi(s)\, ds, \quad \forall t \in [t_0, t_1];$$

čia $\psi(t) = e^{\lambda(t-t_0)}\|y(t)\|$, $q(t) = a + be^{\lambda(t-t_0)}$, $a = nK(\|y_0\| - \lambda^{-1}M\|\nu\|)$, $b = \lambda^{-1}nKM\|\nu\|$. Pagal Gronuolo lemą

$$\psi(t) \le q(t) + \rho \int_{t_0}^{t} e^{\rho(t-s)} q(s)\, ds, \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Kartu yra teisinga nelygybė

$$\|y(t)\| \le \frac{\lambda b}{\lambda - \rho} + \Big(a - \frac{\rho b}{\lambda - \rho}\Big)e^{(\rho-\lambda)(t-t_0)}, \quad \forall t \in [t_0, t_1]. \tag{3.16}$$

Iš jos išplaukia, kad

$$\|y(t)\| \leq \max\Big\{a+b, \frac{\lambda b}{\lambda-\rho}\Big\}; \tag{3.17}$$

čia $a+b = nK\|y_0\|$, $b = nKM\lambda^{-1}\|\nu\|$.

Tarkime, $\|y_0\| < \delta/nK$, $|\nu| < \delta(\lambda-\rho)/nKM$. Įrodysime, kad (3.16), (3.17) nelygybės yra teisingos $\forall t \geq t_0$. Pakanka įrodyti, kad $\|y(t)\| \leq \delta$, $\forall t \geq t_0$. Kai $t \geq t_0$ ir t yra arti taško t_0, ši nelygybė yra akivaizdi, nes visada galime tarti, kad $nK > 1$. Jeigu šis teiginys yra neteisingas, tai egzistuoja toks taškas t^*, kad $\|y(t^*)\| = \delta$ ir $\|y(t)\| < \delta,\ \forall t \in [t_0, t^*)$. Intervale $[t_0, t^*]$ yra teisinga (3.16) nelygybė. Iš pastarosios nelygybės ir sąlygų $\|y_0\| < \delta/nK$, $\|\nu\| < \delta(\lambda-\rho)/nKM$ išplaukia, kad $\|y(t^*)\| < \delta$. Tačiau tai prieštarauja taško t^* apibrėžimui. Taigi padaryta prielaida yra neteisinga ir $\|y(t)\| \leq \delta$, $\forall t \geq t_0$. Kartu $\forall t \geq t_0$ yra teisingi (3.16), (3.17) įverčiai.

Laisvai pasirenkame skaičių $\varepsilon > 0$. Paimkime $\delta_1 = \delta/nK$, $\delta_2 = \delta(\lambda-\rho)/nK$, $\delta = \varepsilon$. Tada

$$\|y(t)\| := \|y(t, y_0, \nu)\| \leq \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0,$$

jeigu tik $\|y_0\| \leq \delta_1,\ \|\nu\| \leq \delta_2$. Teorema įrodyta. $\triangleright$

3.3. SPRENDINIŲ STABILUMAS PAGAL LIAPUNOVĄ

Tarkime, (3.11) sistemoje parametras μ yra fiksuotas. Tada ją galima perrašyti taip:

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (t, x)\in D \subset \mathbb{R}^{n+1}. \tag{3.18}$$

Be to, tegu funkcija f ir jos dalinė išvestinė f_x yra tolydžios srityje D. Pagal apibrėžimą (3.18) sistemos sprendinys bus lokaliai stabilus, jeigu jis bus tolygiai tolydus pradinių sąlygų atžvilgiu. Šiuo atveju lokalusis stabilumas vadinamas *stabilumu pagal Liapunovą.*. Tiksliau sakysime, kad (3.18) sistemos sprendinys $x = \varphi(t)$, apibrėžtas intervale $[0, \infty)$, yra *stabilus pagal Liapunovą,* jeigu $\forall\varepsilon > 0$ galima nurodyti tokį $\delta > 0$, kad bet kuris (3.18) sistemos sprendinys $x(t, x_0)$, tenkinantis sąlygą

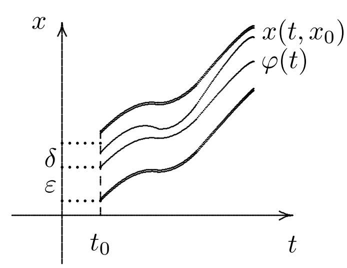
$$\|x(t_0, x_0) - \varphi(t_0)\| < \delta,$$

taip pat yra apibrėžtas intervale $[t_0, \infty)$ ir yra teisinga nelygybė

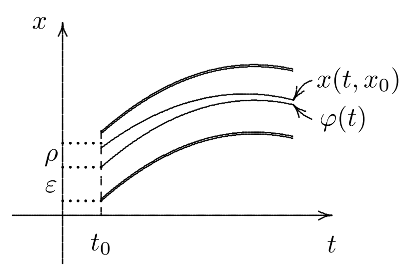
$$\|x(t, x_0) - \varphi(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t\geq t_0.$$

Jeigu bent viena iš šių sąlygų yra nepatenkinta, tai sakysime, kad sprendinys $x = \varphi(t)$ yra *nestabilus pagal Liapunovą.*

Kitais žodžiais tariant sprendinys $x = \varphi(t)$ yra stabilus pagal Liapunovą, jeigu bet kuris kitas sprendinys $x(t, x_0)$ pakankamai artimas sprendiniui $x = \varphi(t)$ pradiniu laiko momentu t_0, išlieka jam artimas bet kurio laiko momentu $t \geq t_0$ (žr. 3.2 paveikslėlį). Be to, skaičių δ visada galima imti mažesni už ε.



3.2 pav.



3.3 pav.

P a s t a b a. Iš pateikto apibrėžimo išplaukia, kad sprendinys $x = \varphi(t)$ bus nestabilus pagal Liapunovą, jeigu jo negalima pratęsti į visą intervalą $[t_0, \infty)$, arba kiekvienoje taško $\varphi(t_0)$ aplinkoje atsiras toks taškas x_0, kad sprendinio $x(t, x_0)$ negalima pratęsti į visą intervalą $[t_0, \infty)$.

Atkreipsime dėmesį dar į tai, kad iš sprendinio stabilumo neseka jo aprėžtumas ir atvirkščiai – iš sprendinio aprėžtumo neseka stabilumas.

P a v y z d ž i a i:

1. Netiesinės lygties

$$\dot{x} = \sin^2 x$$

sprendinys

$$x(t, x_0) = \begin{cases} \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x_0 + t_0 - t) + \pi k, & x_0 \neq \pi k, \\ \pi k, & x_0 = \pi k \end{cases}$$

yra aprėžtas. Tačiau trivialus sprendinys nėra stabilus, kai $t \to \infty$, nes $\forall x_0 \in (0, \pi)$ riba

$$\lim_{t\to\infty} x(t, x_0) = \pi.$$

2. Tiesinė nehomogeninė lygtis

$$\dot{x} = -x + t + 1$$

turi neaprėžtą sprendinį $x = t$. Bet kurį šios lygties sprendinį $x = x(t, x_0)$, tenkinantį sąlygą $x(0, x_0) = x_0$, galima išreikšti formule

$$x(t, x) = t + x_0 e^{-t}.$$

Iš jos išplaukia, kad neaprėžtas sprendinys $x = t$ yra stabilus (netgi asimptotiškai), kai $t \to +\infty$.

Sakysime, kad sprendinys $x = \varphi(t), t \geq t_0$ yra *asimptotiškai stabilus pagal Liapunovą*, jeigu jis yra stabilus pagal Liapunovą ir egzistuoja toks skaičius $\rho > 0$, kad $t \to \infty$ norma

$$\|x(t, x_0) - \varphi(t)\| \to 0,$$

jeigu tik $\|x_0 - \varphi(t_0)\| < \rho$.

Taigi sprendinys $x = \varphi(t)$ yra asimptotiškai stabilus pagal Liapunovą, jeigu pakankamai artimas jam pradiniu laiko momentu sprendinys $x = x(t, x_0)$ ne tik išlieka artimas bet kuriuo laiko momentu $t \geq t_0$, tačiau tolygiai artėja prie jo, kai $t \to \infty$ (žr. 3.3 pav.).

Tegu $y = x - \varphi$. Tada (3.18) sistemą galima perrašyti taip:

$$\dot{y} = f(t, y + \varphi) - f(t, \varphi).$$

Panaudoję Teiloro formule, gausime

$$\dot{y} = A(t)y + q(t, y); \tag{3.19}$$

čia $A(t) = f_x(t, \varphi(t)),\ q(t, y)$ – tolydi juostoje $\{(t, y) : t \geq t_0, \|y\| < \delta\}$ funkcija, tenkinanti sąlygą

$$\|q(t, y)\| = o(\|y\|), \quad \|y\| \to 0. \tag{3.20}$$

Taigi (3.18) sistemos sprendinio $x = \varphi(t)$ stabilumo tyrimas susiveda į (3.19) sistemos trivialaus sprendinio $y = 0$ stabilumo tyrimą.

Tarkime, matrica $A(t) \in \mathbb{R}^{n,n}$ yra tolydi intervale $[t_0, \infty)$ matrica. Atmetę (3.19) sistemoje netiesinius narius, gausime tiesinę homogeninę sistemą

$$\dot{y} = A(t)y.$$

Ji vadinama (3.19) sistemos pirmuoju artiniu. Pakeitę y į x, perrašysime pastarąją sistemą taip:

$$\dot{x} = A(t)x. \tag{3.21}$$

Tegu $x = \varphi(t),\, t \geq t_0$ yra (3.21) sistemos sprendinys ir $y = x - \varphi$. Tada

$$\dot{y} = A(t)(y + \varphi) - A(t)\varphi = A(t)y.$$

Funkcijos y atžvilgiu gavome tokią pačią sistemą. Be to, sprendinį $x = \varphi(t)$ atitinka trivialus sprendinys $y = 0$. Taigi (3.21) sistemos sprendinio $x = \varphi(t)$ stabilumo tyrimą suvedėme į tos pačios sistemos trivialaus sprendinio $y = 0$ stabilumo tyrimą. Kartu įrodėme, kad (3.21) sistemos visi sprendiniai (kartu su trivialiuoju sprendiniu) yra stabilūs, asimptotiškai stabilūs arba nestabilūs vienu metu. Analogiška situacija yra teisinga ir tiesinei nehomogeninei sistemai. Tiksliau galima įrodyti, kad funkcija $x = \varphi(t),\, t \geq t_0$ yra tiesinės nehomogeninės sistemos

$$\dot{x} = A(t)x + f(t)$$

stabilus, asimptotiškai stabilus arba nestabilus sprendinys, jeigu toks yra ją atitinkančios tiesinės homogeninės sistemos trivialusis sprendinys. Todėl galime kalbėti apie tiesinių sistemų stabilumą, asimptotinį stabilumą arba nestabilumą. Atkreipsime dėmesį į tai, kad tokia situacija yra galima tik tiesinėms sistemoms. Jeigu sistema yra netiesinė, tai vieni jos sprendiniai gali būti stabilus, o kiti – ne.

3.5 **teorema.** *Tiesinė homogeninė sistema yra stabili (pagal Liapunovą) tada ir tik tada, kai kuri nors šios sistemos fundamentalioji matrica yra aprėžta*

$\triangleleft$ Padauginę (3.21) sistemos fundamentaliąją matricą iš atitinkamos neišsigimusios pastoviosios matricos, gausime bet kurią kitą (3.21) sistemos fundamentaliąją matricą. Todėl, jeigu viena (3.21) sistemos fundamentalioji matrica yra aprėžta, tai yra aprėžtos ir visos šios sistemos fundamentaliosios matricos.

Tegu kokia nors (3.21) sistemos fundamentalioji matrica yra aprėžta. Tada normuota taške $t = t_0$ fundamentalioji matrica (pažymėkime ją $\Phi(t)$) taip pat yra aprėžta, t.y. egzistuoja toks teigiamas skaičius K, kad

$$\|\Phi(t)\| \leq K, \quad \forall t \geq t_0.$$

Tegu $x(t, x_0)$ yra toks (3.21) sistemos sprendinys, kad $x(t_0, x_0) = x_0$. Tada

$$x(t, x_0) = \Phi(t)x_0.$$

Šio sprendinio norma

$$\|x(t, x_0)\| \leq nK\|x_0\| < \varepsilon,$$

jeigu tik $\|x_0\| < \delta = \varepsilon/nK$. Todėl (3.21) sistema yra stabili.

Įrodysime atvirkštinį teiginį. Tegu

$$\Phi(t) = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$$

yra (3.21) sistemos fundamentalioji matrica, normuota taške $t = t_0$. Tada kiekvieną šios sistemos sprendinį $x(t, x_0)$, tenkinantį pradinę sąlygą

$$x(t_0, x_0) = x_0,$$

galima išreikšti formule

$$x(t, x_0) = \Phi(t)x_0.$$

Tarkime, (3.21) sistema yra stabili (pagal Liapunovą). Tada yra stabilus jos trivialus sprendinys, t.y. kievieną $\varepsilon > 0$ atitinka toks skaičius $\delta > 0$, kad

$$\|x(t, x_0)\| < \varepsilon,$$

jeigu tik

$$\|x_0\| < \delta.$$

Fiksuokime kokį nors $\varepsilon > 0$. Jį atitinka skaičius $\delta > 0$. Tegu $x(t, x_1), \dots, x(t, x_n)$ yra (3.21) sistemos sprendiniai tokie, kad $x(t_0, x_k) = x_k$; čia $x_k = \delta e_k/2$, e_k – koordinatinių ašių vienetiniai vektoriai. Tada

$$x(t, x_k) = \delta\Phi(t)e_k/2 = \delta\varphi_k(t)/2$$

ir yra teisingas įvertis

$$\|x(t, x_k)\| = \delta\|\varphi_k(t)\|/2\leq\varepsilon, \quad \forall t\geq t_0, k = 1, \dots, n.$$

Iš šių nelygybių išplaukia, kad fundamentaliosios matricos $\Phi(t)$ stulpeliai yra aprėžti. Tačiau tada matrica $\Phi(t)$ taip pat yra aprėžta. $\triangleright$

I š v a d a . Tegu tiesinė nehomogeninė sistema yra stabili. Tada arba visi jos sprendiniai yra aprėžti, arba visi sprendiniai yra neaprėžti.

3.6 **teorema.** *Tiesinė homogeninė sistema yra asimptotiškai stabili (pagal Liapunovą) tada ir tik tada, kai kuri nors šios sistemos fundamentalioji matrica* $\Phi(t)$ *tenkina sąlygą*

$$\|\Phi(t)\| \to 0, \tag{3.22}$$

kai $t \to \infty$.

$\triangleleft$ Tarkime, kuri nors (3.21) sistemos fundamentalioji matrica tenkina (3.22) sąlygą. Tada šią sąlygą tenkina ir normuota taške $t = t_0$ fundamentalioji matrica. Pažymėkime ją $\Phi(t)$.

Tegu $x = x(t, x_0)$ yra toks (3.21) sistemos sprendinys, kad $x(t_0, x_0) = x_0$. Tada jį galima išreikšti formule

$$x(t, x_0) = \Phi(t)x_0.$$

Šio sprendinio norma

$$\|x(t, x_0)\|\leq n\|\Phi(t)\| \cdot \|x_0\| \to 0, \quad \forall x_0 : \|x_0\| < \rho,$$

kai $t \to \infty$. Taigi (3.21) sistema yra asimptotiškai stabili.

Tarkime, $\forall x_0 : \|x_0\| < \rho$ sprendinio $x(t, x_0)$ norma $\|x(t, x_0)\| \to 0$, kai $t \to \infty$. Be to, tegu $x(t, x_1), \dots, x(t, x_n)$ yra tokie (3.21) sistemos sprendiniai, kad $x(t_0, x_k) = x_k$, $x_k = \rho e_k/2$. Tada

$$\|x(t, x_k)\| = \rho\|\varphi_k(t)\|/2 \to 0, \quad \forall k = 1, \dots, n,$$

kai $t \to \infty$. Iš čia išplaukia, kad $\|\varphi_k(t)\| \to 0$, kai $t \to \infty$, $\forall k = 1, \dots, n$. Kartu

$$\|\Phi(t)\| \to 0,$$

kai $t \to \infty$. $\triangleright$

Tarkime dabar, kad matrica A yra pastovioji ir $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ yra jos tikrinės reikšmės. Išskirsime tris galimus atvejus.

1. Tikrinių reikšmių $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ realios dalys $\operatorname{Re}\lambda_k < 0$, $\forall k = 1, \dots, n$.
2. Tikrinių reikšmių $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ realios dalys $\operatorname{Re}\lambda_k \leq 0$, $\forall k = 1, \dots, n$ ir egzistuoja bent viena tikrinė reikšmė λ_k tokia, kad $\operatorname{Re}\lambda_k = 0$.
3. Bent vienos tikrinės reikšmės $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ realioji dalis yra teigiama.

Pirmuoju atveju egzistuoja toks teigiamas skaičius λ, kad

$$\operatorname{Re}\lambda_k + \lambda < 0, \quad \forall k = 1, \dots, n.$$

Tegu $\Phi(t)$ yra tiesinės homogeninės sistemos

$$\dot{x} = Ax \tag{3.23}$$

fundamentalioji matrica. Tada (žr. (2.14) formulę) egzistuoja toks teigiamas skaičius K, kad

$$\|\Phi(t)\| \leq K e^{-(t-t_0)\lambda}, \quad \forall t \geq t_0.$$

Kadangi $\lambda > 0$, tai

$$\|\Phi(t)\| \leq K, \quad \forall t \geq t_0$$

ir

$$\|\Phi(t)\| \to 0,$$

kai $t \to \infty$. Iš čia išplaukia, kad (3.23) sistema yra asimptotiškai stabili.

Nagrinėjant antrąjį atvejį tikrines reikšmes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ patogu išskaidyti į dvi klases. Tegu tikrinių reikšmių $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ realiosios dalys yra neigiamos, o tikrinių reikšmių $\lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n$ realiosios dalys lygios nuliui. Be to, tegu Q yra tokia neišsigimusi matrica, kad

$$A = Q^{-1} J Q;$$

čia J – Žordano matrica. Tada

$$e^{tA} = Q e^{tJ} Q^{-1}$$

yra fundamentalioji matrica. Kartu matrica

$$\Phi(t) = e^{tA} Q = Q e^{tJ}$$

yra fundamentalioji. Prisiminę Žordano matricos struktūrą gausime, kad fundamentaliosios matricos $\Phi(t)$ stulpeliai

$$\varphi_k(t) = q_k(t)e^{\lambda_k t}, \quad k = 1, 2, \ldots, n;$$

čia $q_k(t)$ yra vektoriai, kurių komponentės yra $s_k - 1$ laipsnio polinomai, s_k – tikrinės reikšmės λ_k kartotinumas. Taigi

$$\|\varphi_k(t)\| \to 0, \quad \forall k = 1, \ldots, m,$$

kai $t \to \infty$. Kai $k = m + 1, \ldots, n$ tikrinės reikšmės λ_k yra grynai menamos. Tegu $\lambda_k = i\beta_k$. Tada

$$\varphi_k(t) = q_k(t)(\cos \beta_k t + i \sin \beta_k t)$$

Jeigu tikrinę reikšmę λ_k atitinkantis Žordano langelis yra diagonalus, t.y. visi elementarūs dalikliai yra paprasti, tai vektorius $q_k(t)$ yra pastovus ir

$$\|\varphi_k(t)\| \leq M, \quad \forall t \geq t_0.$$

Tuo atveju, kai tikrinę reikšmę λ_k atitinkantis Žordano langelis nėra diagonalus, t.y. tikrinę reikšmę λ_k atitinkantys elementarūs dalikliai yra kartotiniai, vektoriaus $q_k(t)$ komponentės yra $s_k - 1$ eilės polinomai. Taigi jeigu menamas tikrines reikšmes

$$\lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_n$$

atitinkantys elementarūs dalikliai yra paprasti, tai

$$\|\Phi(t)\| \leq M, \quad \forall t \geq t_0$$

ir pagal 3.5 teoremą (3.23) sistema yra stabili (tačiau nėra asimptotiškai stabili). Tuo atveju, kai bent viena tikrinę reikšmę λ_k atinkantys elementarūs dalikliai yra kartotiniai, tai fundamentalioji matrica Φ yra neaprėžta ir pagal 3.5 teoremą (3.23) sistema yra nestabili.

Išnagrinėsime trečią atvejį. Tarkime, egzistuoja tikrinė reikšmė λ_k tokia, kad

$$\operatorname{Re} \lambda_k > 0.$$

Šiuo atveju fundamentaliąją matricą $\Phi(t)$ galima apibrėžti taip, kad jos k-asis stulpelis

$$\varphi_k(t) = q_k(t)e^{\lambda_k t};$$

čia $q_k(t)$ arba pastovus vektorius, arba vektorius, kurio komponentės yra polinomai. Todėl

$$\|\varphi_k(t)\| \to \infty,$$

kai $t \to \infty$. Iš čia išplaukia, kad fundamentalioji matrica $\Phi(t)$ yra neaprėžta ir pagal 3.5 teoremą (3.23) sistema yra nestabili. Kartu galime tvirtinti, kad įrodyta tokia teorema.

3.7 **teorema.** *Tarkime, matrica A yra pastovi ir $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ yra jos tikrinės reikšmės. Tada:*

1. *Jeigu* $\operatorname{Re}\lambda_k < 0$, $\forall k = 1, \dots, n$, *tai* (3.23) *sistema yra asimptotiškai stabili.*
2. *Jeigu* $\operatorname{Re}\lambda_k \le 0$, $\forall k = 1, \dots, n$, *o grynai menamos ir nulinės tikrinės reikšmės yra paprastos arba turi paprastus elementarius daliklius, tai* (3.23) *sistema yra stabili.*
3. *Jeigu bent viena tikrinė reikšmė* λ_k *turi teigiamą realiąją dalį arba bent viena tikrinė reikšmė yra grynai menama ir jos elementarūs dalikliai yra kartotiniai, tai* (3.23) *sistema yra nestabili.*

Sakysime, matrica $A(t)$ yra *beveik pastovioji*, jeigu

$$A(t) = A + B(t) + C(t);$$

čia A yra pastovioji matrica, o matricos $B(t)$, $C(t)$ yra tolydžios intervale $[t_0, \infty)$ ir tenkina sąlygas:

$$\int_{t_0}^{\infty} \|B(t)\|\, dt \le M < \infty, \quad \|C(t)\| \to 0, \quad t \to \infty.$$

Atkreipsime dėmesį, kad šios sąlygos yra nepriklausomos. Tiksliau (žr. [7]) galima sukonstruoti tokią tolydžią neneigiamą funkciją f, kad

$$\int_{t_0}^{\infty} f(t)\, dt < M < \infty,$$

tačiau $f(t) \not\to 0$, kai $t \to \infty$. Ir atvirkščiai – galima sukonstruoti tokią tolydžią neneigiamą funkciją g, kad $g(t) \to 0$, kai $t \to \infty$, tačiau

$$\int_{t_0}^{\infty} g(t)\, dt = \infty.$$

Įrodant tiesinių sistemų su beveik pastovia matrica stabilumą bei asimptotinį stabilumą, naudosime vieną Gronuolo lemos variantą.

3.1 **lema. (Gronuolo-Belmano)** *Tegu funkcijos* f *ir* g *yra neneigiamos, kai* $t \ge t_0$, $g \in \mathrm{C}[t_0, \infty)$ *ir yra teisinga nelygybė*

$$f(t) \le a + \int_{t_0}^{t} g(t) f(t)\, dt;$$

čia a *– teigiama konstanta. Tada*

$$f(t) \le a \exp\Big\{ \int_{t_0}^{t} g(t)\, dt \Big\}.$$

Šios lemos įrodymą galima rasti [8] knygoje.

3.8 **teorema.** *Tarkime, tiesinė homogeninė sistema*

$$\dot{x} = Ax \tag{3.24}$$

yra stabili, kai $t \to \infty$. *Tada tiesinė homogeninė sistema*

$$\dot{x} = A(t)x, \tag{3.25}$$

su beveik pastovia matrica $A(t) = A + B(t)$, *taip pat yra stabili, kai* $t \to \infty$.

$\triangleleft$ Tegu $x = x(t), x(t_0) = x_0, t \geq t_0$ yra (3.25) sistemos sprendinys. Tada (žr. 2.25 formulę) yra teisinga tapatybė

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}B(s)x(s)\,ds.$$

Pagal teoremos sąlygą (3.24) sistema yra stabili. Todėl jos fundamentalioji matrica $e^{(t-t_0)A}$ yra aprėžta, t.y. egzistuoja tokia teigiama konstanta K, kad

$$\|e^{(t-t_0)A}\| \leq K, \quad \forall t \geq t_0.$$

Todėl

$$\|x(t)\| \leq nK\|x_0\| + nK\int\limits_{t_0}^{t} \|B(s)\|\|x(s)\|\,ds.$$

Pagal Gronuolo-Belmano lemą

$$\|x(t)\| \leq nK\|x_0\| \exp\Big\{nK\int\limits_{t_0}^{t} \|B(s)\|\,ds\Big\} \leq$$

$$\leq nK\|x_0\| \exp\Big\{nK\int\limits_{t_0}^{\infty} \|B(s)\|\,ds\Big\} \leq nK\|x_0\|e^{nKM} < \infty.$$

Iš šio įverčio išplaukia, kad (3.25) sistema yra stabili. $\triangleright$

P a v y z d y s. Tiesinę antrosios eilės lygtį

$$\ddot{x} + (a + b/t^2)x = 0, \quad a > 0, \quad t > t_0 > 0,$$

atitinka tiesinė homogeninė sistema

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -(a + b/t^2)x.$$

Pagal 3.8 teoremą ji yra stabili. Todėl visi nagrinėjamos lygties sprendiniai $x(t)$, kartu su jų išvestinėmis $\dot{x}(t)$, yra aprėžti intervale $[t_0, \infty)$.

3.9 **teorema.** *Tarkime, (3.24) sistema yra asimptotiškai stabili, kai* $t \to \infty$. *Tada tiesinė homogeninė sistema*

$$\dot{x} = A(t)x, \tag{3.26}$$

su beveik pastovia matrica $A(t) = A + B(t) + C(t)$, *taip pat yra asimptotiškai stabili, kai* $t \to \infty$.

◁ Tegu $x = x(t), x(t_0) = x_0, t \geq t_0$ yra (3.26) sistemos sprendinys. Tada (žr. 2.25 formulę) yra teisinga tapatybė

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}\big(B(s) + C(s)\big)x(s)\,ds. \tag{3.27}$$

Pagal teoremos sąlygą (3.24) sistema yra asimptotiškai stabili. Tai reiškia, kad matricos A tikrinių reikšmių realiosios dalys yra neigiamos. Todėl egzistuoja tokie teigiami skaičiai λ ir K, kad

$$\|e^{(t-t_0)A}\| \leq Ke^{-(t-t_0)\lambda}, \quad \forall t \geq t_0.$$

Kartu galime tvirtinti, kad

$$\|x(t)\| \leq nKe^{-(t-t_0)\lambda}\|x_0\| + nK\int_{t_0}^{t} e^{-(t-t_0)\lambda}\big(\|B(s)\| + \|C(s)\|\big)\|x(s)\|\,ds.$$

Tegu $\psi(t) = \|x(t)\|e^{(t-t_0)\lambda}$. Taip apibrėžtai funkcijai ψ yra teisinga nelygybė

$$\psi(t) \leq nK\|x_0\| + nK\int_{t_0}^{t}\big(\|B(s)\| + \|C(s)\|\big)\psi(s)\,ds.$$

Pagal Gronuolo-Belmano lemą

$$\psi(t) \leq nK\|x_0\|\exp nK\int_{t_0}^{t}\big(\|B(s)\| + \|C(s)\|\big)\,ds.$$

Todėl

$$\|x(t)\| \leq nK\|x_0\|e^{-(t-t_0)\lambda}e^{nKM}\exp nK\int_{t_0}^{t}\|C(s)\|\,ds.$$

Pagal Lopitalio taisyklę

$$\frac{1}{t-t_0}\lim_{t\to\infty}\int_{t_0}^{t}\|C(s)\|\,ds = \lim_{t\to\infty}\|C(t)\| = 0.$$

Laisvai pasirenkame skaičių $\varepsilon > 0$. Tada egzistuoja toks $t_1 > t_0$, kad

$$\int_{t_0}^{t} \|C(s)\| \, ds \leq \varepsilon(t - t_0), \quad \forall t \geq t_1.$$

Pasinaudoję šia nelygybe, gauname

$$\|x(t)\| \leq nK\|x_0\|e^{nKM}e^{-(t-t_0)(\lambda-\varepsilon nK)}, \quad \forall t \geq t_1.$$

Imkime skaičių ε tokį, kad $\lambda - \varepsilon nK > \rho > 0$. Tada

$$\|x(t)\| \leq nK\|x_0\|e^{nKM}e^{-(t-t_0)\rho} \to 0,$$

kai $t \to \infty$. Iš šios įverčio išplaukia, kad (3.26) sistema yra asimptotiškai stabili. $\triangleright$

P a s t a b a . 3.8 bei 3.9 teoremose pastoviąją matricą A pakeisti kintamąja matrica negalima. Pavyzdžiui, tiesinių lygčių

$$\dot{x} = -x/t, \quad \dot{x} = x/t, \quad t > 0$$

koeficientų $-1/t$ ir $1/t$ skirtumas $-2/t$ yra nykstanti, kai $t \to \infty$, funkcija. Tačiau pirmoji lygtis yra asimptotiškai stabili, kai $t \to \infty$. Jos bendrasis sprendinys $x = c/t$. Antroji lygtis yra nestabili, kai $t \to \infty$. Jos bendrasis sprendinys $x = ct$.

Tarkime dabar, kad (3.21) sistemoje matrica $A(t)$ yra ω-periodinė, $\omega > 0$. Šiame skyrelyje ją toliau žymėsime $P(t)$, o pačią sistemą perrašysime taip:

$$\dot{x} = P(t)x. \tag{3.28}$$

Pagal 2.14 teoremą (3.28) sistemos fundamentaliąją matricą galima išreikšti formule

$$\Phi(t) = B(t)e^{tA}; \tag{3.29}$$

čia $B(t)$ yra ω-periodinė, o A – pastovioji matricos. Tegu $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ yra matricos A tikrinės reikšmės. Priminsime, kad jos vadinamos (3.28) sistemos charakteristiniais rodikliais. Matricą A atitinka Žordano matrica J, t.y. egzistuoja tokia pastovioji neišsigimusi matrica Q, kad $A = QJQ^{-1}$; Iš čia ir (3.29) formulės išplaukia, kad matrica

$$\tilde{\Phi}(t) = \Phi(t)Q = B(t)Qe^{tJ} = \tilde{B}(t)e^{tJ}$$

taip pat yra (3.28) sistemos fundamentalioji matrica. Todėl visi 3.7 teoremos teiginiai išlieka teisingi, jeigu joje pastoviąją matricą A pakeisime ω-periodine matrica $P(t)$, o tikrines reikšmes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ charakteristiniais rodikliais $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Priminsime, kad charakteristiniai rodikliai

$$\lambda_k = \frac{1}{\omega} \operatorname{Ln} \mu_k, \quad k = 1, \ldots, n;$$

čia μ_k yra (3.28) sistemos multiplikatoriai, t.y. monodromijos matricos tikrinės reikšmės. Taigi yra teisinga tokia teorema.

3.10 **teorema.** *Tegu $P(t)$ yra ω-periodinė matrica ir $\mu_1, \dots, \mu_n$ yra* (3.28) *sistemos multiplikatoriai. Tada:*

1. *Jeigu $|\mu_k| < 1$, $\forall k = 1, \dots, n$, tai* (3.28) *sistema yra asimptotiškai stabili.*
2. *Jeigu $|\mu_k| \le 1$, $\forall k = 1, \dots, n$ ir $\forall k : |\mu_k| = 1$ monodromijos matricos tikrinės reikšmės μ_k yra paprastos arba jas atitinkantys elementarūs dalikliai yra paprasti, tai* (3.28) *sistema yra stabili (tačiau ne asimptotiškai stabili).*
3. *Jeigu bent viena monodromijos matricos tikrinė reikšmė μ_k moduliu didesnė už vienetą arba tikrinė reikšmė μ_k moduliu lygi vienetui ir ją atitinkantys elementarūs dalikliai yra kartotiniai, tai* (3.28) *sistema yra nestabili.*

P a v y z d y s. Tegu $p(t)$ yra ω-periodinė tolydi funkcija. Antrosios eilės tiesinę homogeninę lygtį

$$\ddot{x} + p(t)x = 0$$

atitinka tiesinė sistema

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -p(t)x.$$

Sakysime, kad lygtis yra *stabili, asiptotiškai stabili arba nestabili (pagal Liapunovą)*, jeigu tokia yra ją atitinkanti sistema. Nagrinėjamu atveju matrica

$$P(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -p(t) & 0 \end{pmatrix}.$$

Tegu $\Phi(t)$ – normuota taške $t = 0$ fundamentalioji matrica (žr. 2.7 skyrelį), t.y.

$$\Phi(0) = \begin{pmatrix} \varphi_1(0) & \varphi_2(0) \\ \dot{\varphi}_1(0) & \dot{\varphi}_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tada monodromijos matricos

$$\Phi(\omega) = \begin{pmatrix} \varphi_1(\omega) & \varphi_2(\omega) \\ \dot{\varphi}_1(\omega) & \dot{\varphi}_2(\omega) \end{pmatrix}$$

tikrinės reikšmės

$$\mu_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 - 1}, \quad a = \frac{1}{2}(\varphi_1(\omega) + \dot{\varphi}_2(\omega))$$

(žr. 78 puslapį). Jeigu $a^2 > 1$, tai vienas iš multiplikatorių μ_1, μ_2 moduliu didesnis už vienetą. Šiuo atveju sistema yra nestabili. Jeigu $a^2 < 1$, tai multiplikatoriai μ_1, μ_2 yra kompleksiškai jungtiniai ir $|\mu_1| = |\mu_2| = 1$. Šiuo atveju sistema yra stabili (tačiau ne asimptotiškai stabili). Jeigu $a^2 = 1$, tai multiplikatoriai μ_1 ir μ_2 sutampa ir reikia ištirti elementarius daliklius, t.y. išsiaiškinti ar matricos $\Phi(\omega)$ Žordano matrica yra diagonali ar ne.

3.4. NORMALIOSIOS SISTEMOS SPRENDINIŲ STABILUMAS PIRMOJO ARTINIO ATŽVILGIU

Tarkime, funkcija f tenkina 3.3 skyrelio sąlygas ir $x = \varphi(t)$ yra (3.18) sistemos sprendinys. Tada $y = 0$ yra trivialus (3.19) sistemos sprendinys. Be to, tegu (3.19) sistemoje matrica $A(t)$ yra pastovioji, t.y. $A(t) = A$. Tada pastarąją sistemą galima perrašyti taip:

$$\dot{y} = Ay + q(t, y); \tag{3.30}$$

čia q – tolydi funkcija, tenkinanti (3.20) sąlygą. Atmetę (3.30) sistemoje netiesinius narius, gausime jos pirmąjį artinį

$$\dot{y} = Ay. \tag{3.31}$$

Tai yra tiesinė homogeninė sistema su pastoviais koeficientais. Šiame skyrelyje įrodysime, kad (3.30) sistemos trivialusis sprendinys yra stabilus, asimptotiškai stabilus arba nestabilus tada ir tik tada, kai toks yra (3.31) sistemos trivialusis sprendinys.

3.11 **teorema. (Liapunovo)** *Tarkime, matricos A tikrinių reikšmių realiosios dalys yra neigiamos ir tolygiai $t \in [t_0, \infty)$ atžvilgiu yra patenkinta* (3.20) *sąlyga. Tada* (3.30) *sistemos trivialusis sprendinys yra asimptotiškai stabilus.*

$\lhd$ Tegu $y = y(t)$, $y(t_0) = y_0$ yra (3.30) sistemos sprendinys. Tada (žr. (2.25) formulę) yra teisinga tapatybė

$$y(t) = e^{(t-t_0)A} y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} q(s, y(s))\, ds.$$

Iš jos gauname

$$\|y(t)\| \leq n \|e^{(t-t_0)A}\| \cdot \|y_0\| + n \int\limits_{t_0}^{t} \|e^{(t-s)A}\| \cdot \|q(s, y(s))\|\, ds.$$

Kadangi matrcos A tikrinių reikšmių realiosios dalys yra neigiamos, tai egzistuoja tokie teigiami skaičiai K ir λ, kad

$$\|e^{tA}\| \leq K e^{-t\lambda}, \quad \forall t \geq 0.$$

(žr. 2.14 formulę). Iš pastarųjų dviejų nelygybių išplaukia, kad

$$\|y(t)\| \leq nK e^{-(t-t_0)\lambda} \|y_0\| + nK \int\limits_{t_0}^{t} e^{-(t-s)\lambda} \|q(s, y(s))\|\, ds.$$

Pagal teoremos sąlygą $\forall h > 0$ egzistuoja toks $\rho > 0$, kad

$$\|q(t, y)\| \leq \frac{h}{nK} \|y\|, \quad \forall t \in [t_0, \infty),$$

jeigu tik $\|y\|\leq\rho$.

Tegu $\|y_0\| < \rho$. Kadangi funkcija $y(t)$ yra tolydi, tai egzistuoja toks intervalas $[t_0, t_1]$, kad $\|y(t)\|\leq\rho, \forall t\in[t_0, t_1)$. Kartu tokiems t yra teisinga nelygybė.

$$\|y(t)\|\leq nKe^{-(t-t_0)\lambda}\|y_0\| + h\int\limits_{t_0}^{t} e^{-(t-s)\lambda}\|y(s)\|\,ds.$$

Pastarąją nelygybę galima perrašyti taip:

$$0\leq\varphi(t)\leq a + h\int\limits_{t_0}^{t}\varphi(s)\,ds;$$

čia $\varphi(t) = \|y(t)\|e^{(t-t_0)\lambda}$, $a = nK\|y_0\|$. Pagal Gronuolo lemą[2]

$$\varphi(t)\leq a + h\int\limits_{t_0}^{t} e^{h(t-s)}a\,ds = ae^{h(t-t_0)}.$$

Todėl

$$\|y(t)\|\leq ae^{-(\lambda-h)(t-t_0)}\leq nK\|y_0\|, \quad \forall t\in[t_0, t_1], \tag{3.32}$$

jeigu tik $h < \lambda$.

Laisvai pasirenkame skaičių $\varepsilon > 0$. Tegu $y_0 : \|y_0\| < \delta = \varepsilon/nK$. Jeigu reikia, skaičių K padidinkime tiek, kad $nK\geq 1$. Tada $\|y_0\| < \varepsilon$. Įrodysime, kad

$$\|y(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t\in[t_0, \infty).$$

Kai $t\in[t_0, t_1]$

$$\|y(t)\|\leq nK\|y_0\| < \varepsilon.$$

Todėl pakanka šią nelygybę įrodyti, kai $t > t_1$. Tarkime priešingai, kad ji yra neteisinga. Tada egzistuoja toks laiko momentas t^*, kad

$$\|y(t^*)\| = \varepsilon \quad \text{ir} \quad \|y(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t\in[t_0, t^*).$$

---

[2]

3.2 **lema.** *Tegu f, g yra tolydžios neneigiamos funkcijos intervale $\langle a, b\rangle$, $\lambda > 0$ ir yra teisinga nelygybė*

$$f(t) \leq g(t) + \lambda\left|\int\limits_{t_0}^{t} f(s)\,ds\right|, \quad \forall t_0, t \in \langle a, b\rangle.$$

Tada

$$f(t) \leq g(t) + \lambda\left|\int\limits_{t_0}^{t} e^{\lambda(t-s)}g(s)\,ds\right|, \quad \forall t \in \langle a, b\rangle.$$

Šios lemos įrodymą galima rasti [6] knygoje.

Norma $\|y(t)\|\leq\varepsilon$, $\forall t\in[t_0, t^*]$. Todėl segmente $[t_0, t^*]$ yra teisinga nelygybė

$$\|y(t)\|\leq nK\|y_0\| < \varepsilon, \quad \forall t\in[t_0, t^*].$$

(žr. (3.32) nelygybės išvedimą). Kartu yra teisinga nelygybė

$$\|y(t^*)\| < \varepsilon.$$

Gauta prieštara įrodo, kad padaryta prielaida yra neteisinga ir

$$\|y(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t\geq t_0,$$

jeigu tik $\|y_0\| < \delta$. Taigi (3.30) sistemos trivialusis sprendinys yra stabilus. Be to,

$$\|y(t)\|\leq nK\delta e^{-(\lambda-h)(t-t_0)} \to 0,$$

kai $\|y_0\| < \delta$ ir $t \to \infty$. Vadinasi, trivialusis sprendinys yra asimptotiškai stabilus. ▷

3.12 **teorema.** *Tarkime, matricos A tikrinių reikšmių aibėje yra tikrinės reikšmės su teigiama realiąja dalimi ir yra patenkinta* (3.20) *sąlyga. Tada* (3.30) *sistemos trivialusis sprendinys yra nestabilus.*

Šios teoremos įrodymą galima rasti [6] knygoje.

P a s t a b a. Jeigu matricos A kurios nors tikrinės reikšmės realioji dalis lygi nuliui, tai (3.30) sistemos trivialiojo sprendinio stabilumo klausimas lieka atviras.

3.5. PERIODINĖS SISTEMOS SPRENDINIŲ STABILUMAS PIRMOJO ARTINIO ATŽVILGIU

Tarkime, f yra ω-periodinė funkcija, tenkinanti 3.3 skyrelio sąlygas ir $x = \varphi(t)$ yra (3.18) sistemos ω-periodinis sprendinys. Be to, tegu $y = x - \varphi$. Tada (3.18) sistemą galima perrašyti taip:

$$\dot{y} = P(t)y + q(t, y); \tag{3.33}$$

čia matrica $P(t) = f_x(t, \varphi(t))$, bei funkcija q yra ω-periodinės, t.y.

$$P(t + \omega) = P(t), \quad q(t + \omega, y) = q(t, y).$$

Be to, funkcija q tenkina (3.20) sąlygą. Įrodysime, kad pastaroji sąlyga yra patenkinta tolygiai $t \in [t_0, \infty)$ atžvilgiu. Kadangi funkcija q yra tolydi, tai $\forall \varepsilon > 0$ galima nurodyti tokį $\delta > 0$, kad pakankamai mažoje taško t aplinkoje

$$\|q(t, y)\| < \varepsilon \|y\|,$$

jeigu tik $\|y\| < \delta$. Tegu $\{I_k\}$ yra atvirų intervalų sistema, dengianti segmentą $[t_0, t_0 + \omega]$. Pagal Borelio lemą iš šio denginio galima išrinkti baigtinį denginį $I_1, \ldots, I_N$. Kiekvieną intervalą I_k atitinka savas δ_k, t.y. $\|q(t, y)\| < \varepsilon \|y\|$, jeigu tik $\|y\| < \delta_k$, $t \in I_k$. Tegu $\delta = \min\{\delta_1, \ldots, \delta_N\}$. Tada

$$\|q(t, y)\| < \varepsilon \|y\|, \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \omega],$$

kai $\|y\| < \delta$. Kadangi funkcija q yra ω-periodinė, tai pastaroji nelygybė yra teisinga $\forall t \in [t_0, \infty)$.

Atmetę (3.33) sistemoje netiesinius narius, gausime pirmąjį šios sistemos artinį

$$\dot{y} = P(t)y. \tag{3.34}$$

Kadangi matrica $P(t)$ yra ω-periodinė, tai keitiniu

$$y = B(t)v$$

(3.34) sistemą galima suvesti į tiesinę homogeninę sistemą

$$\dot{v} = Av, \tag{3.35}$$

su pastoviąja matrica A. Čia $B(t)$ – neišsigimusi diferencijuojama matrica (ω arba 2ω-periodinė). Tiesiogiai galima įsitikinti, kad (3.33) sistema susiveda į 3.4 skyrelyje išnagrinėtą sistemą

$$\dot{v} = Av + g(t, v); \tag{3.36}$$

čia $A = B^{-1}(t)P(t)B(t) + B^{-1}(t)\dot{B}(t)$, $g(t, v) = B^{-1}(t)q(t, B(t)v)$. Akivaizdu, kad $\|v\| \to 0$ tada ir tik tada, kai $\|B(t)v\| \to 0$. Todėl

$$\frac{\|g(t, v)\|}{\|v\|} \le \frac{n\|B^{-1}(t)\| \cdot \|q(t, B(t)v)\|}{\|v\|} \le$$

$$\leq \frac{n^2\|B^{-1}(t)\| \cdot \|B(t)\| \cdot \|q(t, B(t)v)\|}{\|B(t)v\|} \rightrightarrows 0,$$

kai $\|v\| \to 0$. Kartu galime tvirtinti, kad (3.33) sistemos trivialiojo sprendinio stabilumo tyrimas susiveda į (3.36) sistemos trivialiojo sprendinio stabilumo tyrimą. Pastarosios sistemos trivialus sprendinys bus stabilus arba nestabilus, jeigu bus patenkintos 3.11, 3.12 teoremų sąlygos. Kadangi matricos A tikrinės reikšmės

$$\lambda_k = \frac{1}{\omega} \operatorname{Ln} \mu_k$$

(ω periodo atveju), tai yra teisinga tokia teorema.

3.13 **teorema.** *Jeigu visi multiplikatoriai* μ_k *moduliu mažesni už vienetą, tai* (3.33) *sistemos trivialusis sprendinys* $y = 0$ *yra asimptotiškai stabilus. Jeigu bent vienas iš multiplikatorių* μ_k *moduliu didesnis už vienetą, tai* (3.33) *sistemos trivialusis sprendinys* $y = 0$ *yra nestabilus.*

P a s t a b a. Jeigu bent vienas iš multiplikatorių μ_k moduliu lygus vienetui, tai (3.33) sistemos trivialiojo sprendinio $y = 0$ stabilumo klausimas lieka atviras.

3.6. AUTONOMINĖS SISTEMOS PUSIAUSVYROS TAŠKŲ IR PERIODINIŲ SPRENDINIŲ STABILUMAS PIRMOJO ARTINIO ATŽVILGIU

Tarkime, funkcija $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ yra tolydi srityje D ir taško $x^* \in D$ aplinkoje turi tolydžią išvestinę f_x. Be to, tegu $f(x^*) = 0$. Tada funkcija $x = x^*$ yra autonominės sistemos

$$\dot{x} = f(x). \tag{3.37}$$

sprendinys. Priminsime, kad toks autonominės sistemos sprendinys vadinamas pusiausvyros tašku.

Tegu $y = x - x^*$. Tada (3.37) sistemą galima perrašyti taip:

$$\dot{y} = Ay + q(y); \tag{3.38}$$

čia $A = f_x(x^*)$, q – tolydi taško $y = 0$ aplinkoje funkcija, tenkinanti sąlygą

$$\|q(y)\| = o(\|y\|), \quad \|y\| \to 0.$$

Taigi (3.37) sistemos pusiausvyros taško $x = x^*$ stabilumo tyrimas susivedė į (3.38) sistemos trivialiojo sprendinio $y = 0$ stabilumo tyrimą. Pastarosios sistemos trivialus sprendinys bus stabilus arba nestabilus, jeigu bus patenkintos 3.11 arba 3.12 teoremų sąlygos. Performulavę šias teoremas (3.38) sistemos atvejui, gausime tokį teiginį.

3.14 **teorema.** *Tegu x^* yra* (3.37) *sistemos pusiausvyros taškas ir matrica $A = f_x(x^*)$. Tada*

1. *Jeigu matricos A tikrinių reikšmių realiosios dalys yra neigiamos, tai pusiausvyros taškas x^* yra asimptotiškai stabilus.*

2. *Jeigu matricos A bent vienos tikrinės reikšmės realioji dalis yra teigiama, tai pusiausvyros taškas x^* yra nestabilus.*

P a s t a b a. Jeigu matricos A bent vienos tikrinės reikšmės realioji dalis lygi nuliui, tai pusiausvyros taško x^* stabilumo klausimas lieka atviras.

P a v y z d y s. Ištirsime sistemos

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = \cos(x_1 + x_2)$$

stabilumą pusiausvyros taškų aplinkoje. Pagal apibrėžimą taškas $x^* = (x_1^*, x_2^*)$ yra šios sistemos pusiausvyros taškas, jeigu jis yra lygčių sistemos

$$x_2 = 0, \quad \cos(x_1 + x_2) = 0$$

sprendinys. Išsprendę šią sistemą, gausime

$$x^* = (\pi/2 + \pi k, 0), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Nagrinėjamu atveju matrica

$$A = f_x(x^*) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^{k+1} & (-1)^{k+1} \end{pmatrix}.$$

Jos tikrinės reikšmės randamos iš lygties

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ (-1)^{k+1} & (-1)^{k+1} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Kai k lyginis, $\lambda_{1,2} = -1/2 \pm i\sqrt{3}/2$. Kai k nelyginis, $\lambda_{1,2} = 1/2 \pm \sqrt{5}/2$. Todėl lyginėms k reikšmėms pusiausvyros taškai yra asimptotiškai stabilūs, o nelyginėms k reikšmėms – nestabilūs.

Tarkime, $x = \varphi(t)$ yra (3.37) sistemos ω-periodinis sprendinys. Tada yra teisinga tapatybė

$$\dot{\varphi}(t) = f(\varphi(t)).$$

Diferencijuodami ją, gausime

$$\ddot{\varphi}(t) = f_x(\varphi(t))\dot{\varphi}(t).$$

Taigi $\dot{\varphi}(t)$ yra ω-periodinis tiesinės homogeninės sistemos

$$\dot{x} = P(t)x, \quad P(t) = f_x(\varphi(t)) \tag{3.39}$$

sprendinys. Pagal 2.15 teoremą vienas iš šios sistemos multiplikatorių lygus vienetui. Remiantis 3.10 teoremos antruoju teiginiu, galime tvirtinti, kad sprendinys $x = \varphi(t)$ yra nestabilus, jeigu bent vienas iš likusių multiplikatorių moduliu didesnis už vienetą. Pirmuoju 3.10 teoremos teiginiu tiesiogiai pasinaudoti negalima. Tačiau yra teisinga tokia teorema (įrodymą žr. [12] knygoje).

3.15 **teorema.** *Jeigu likę $n-1$ multiplikatoriai moduliu mažesni už vienetą, tai sprendinys $x = \varphi(t)$ yra stabilus.*

I š v a d a. Tegu $n = 2$ ir $x = \varphi(t)$ yra (3.37) sistemos periodinis sprendinys. Pagal (2.29) formulę (3.39) sistemos multiplikatorių sandauga

$$\mu_1\mu_2 = \exp\Big\{\int_0^{\omega} \sum_{i=1}^{2} p_{ii}(t)\,dt\Big\}.$$

Vienas iš multiplikatorių yra lygus vienetui. Tarkime, $\mu_1 = 1$. Tada

$$\mu_2 = \exp\Big\{\int_0^{\omega} \sum_{i=1}^{2} p_{ii}(t)\,dt\Big\}. \tag{3.40}$$

Jeigu integralas

$$I(\varphi(t)) = \int_0^{\omega} \sum_{i=1}^{2} p_{ii}(t)\,dt$$

yra teigiamas, tai $\mu_2 > 1$ ir sprendinys $x = \varphi(t)$ yra nestabilus. Jeigu integralas $I(\varphi(t))$ yra neigiamas, tai $\mu_2 < 1$ ir sprendinys $x = \varphi(t)$ yra stabilus.

3.7. AUTONOMINIŲ SISTEMŲ PLOKŠTUMOJE PUSIAUSVYROS TAŠKAI

Tegu Ω yra sritis plokštumoje $\mathbb{R}^2$, f – diferencijuojama srityje Ω vektorinė funkcija su komponentėmis f_1, f_2. Nagrinėsime autonominę sistemą

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \Omega. \tag{3.41}$$

Iš teoremos apie trajektorijų ištiesinimą išplaukia, kad visos sistemos pakankamai mažoje paprastojo taško aplinkoje yra difeomorfiškai ekvivalenčios. Tarkime, $x_0 \in \Omega$ yra (3.41) sistemos pusiausvyros taškas, t.y. $f(x_0) = 0$. Be to, tegu $x_0 = 0$. Priešingu atveju koordinačių pradžią perkeliame į tašką x_0. Išskleidę funkciją f Teiloro formule taško $x = 0$ aplinkoje, (3.41) sistemą perrašysime taip:

$$\dot{x} = Ax + q(x), \quad x \in \Omega; \tag{3.42}$$

čia $A = f_x(0) \in \mathbb{R}^{2,2}$ – pastovioji matrica su koeficientais $a_{ij} = \partial f_i(0)/\partial x_j$, q – vektorinė, tolydi taško $x = 0$ aplinkoje funkcija, tenkinanti sąlygą

$$q(x) \to 0, \quad \text{kai } |x| \to 0. \tag{3.43}$$

Atmetę (3.42) sistemoje narį $q(x)$, gausime (3.42) sistemos pirmąjį artinį

$$\dot{x} = Ax. \tag{3.44}$$

Jeigu matricos A determinantas $\det A \neq 0$ ir funkcija f tenkina aukščiau suformuluotas sąlygas, tai koordinačių pradžios taškas $x = 0$ yra izuoliotas (3.42) sistemos pusiausvyros taškas.

Tiesinė sistema $\dot{x} = Ax$ su $\det A \neq 0$ yra tiesiškai ekvivalenti vienai iš dešimties kanoninių sistemų (žr. 2.2 skyrelį). Jų faziniai portretai pavaizduoti 2.14 paveikslėlyje. Tiesines sistemas galima suskirstyti į keturias kokybiškai ekvivalenčių sistemų klases. Į pirmąją klasę patenka tokios sistemos, kurių pusiausvyros taškas yra stabilus židinys arba stabilus mazgas[3]. Į antrąją – visos sistemos, kurių pusiausvyros taškas yra balno taškas. Į trečiąją – visos sistemos, kurių pusiausvyros taškas yra nestabilus židinys, arba nestabilus mazgas. Ir į ketvirtąją – visos sistemos, kurių pusiausvyros taškas yra centro taškas. Netiesinių sistemų pusiausvyros taškus taip pat patogu suskirstyti į klases pagal tai, kaip elgiasi sistemos trajektorijos šio taško aplinkoje.

A p i b r ė ž i m a s. Sakysime, pusiausvyros taškas $x = 0$ yra (3.42) sistemos *traukos* taškas, jeigu egzistuoja toks skaičius $\delta > 0$, kad visi (3.42) sistemos sprendiniai $x = \varphi(t)$ yra apibrėžti $\forall t \geq 0$ arba $\forall t \leq 0$ ir $\varphi(t) \to 0$, kai $t \to \infty$ arba $t \to -\infty$, jeigu tik $|\varphi(0)| < \delta$. Traukos tašką vadinsime *židinio* tašku, jeigu visos trajektorijos $x = \varphi(t) \not\equiv 0$ yra spiralės. Židinio tašką vadinsime *taisyklingu* židinio tašku[4], jeigu

[3]Sakydami mazgo taškas čia turime omenyje arba taisyklingą mazgą, arba paprastą mazgą, arba išsigimusį mazgą.

[4]Tiesinę sistemą

$$\dot{x}_1 = \alpha x_1 + \beta x_2, \quad \dot{x}_2 = -\beta x_1 + \alpha x_2, \quad \alpha \neq 0, \ \beta \neq 0$$

polinėse koordinatėse $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$ galima perrašyti taip: $\dot{r} = \alpha r$, $\dot{\varphi} = -\beta$. Išsprendę kiekvienai trajektorijai, artėjančiai prie koordinačių pradžios, kai $t \to +\infty$ (arba $t \to -\infty$), reiškinys $t^{-1}|x(t)|$ artėja prie tam tikros konstantos c ir atvirkščiai, bet kuriai konstantai c egzistuoja toks netiesinės sistemos sprendinys $x = x(t)$, kad $t^{-1}|x(t)| \to c$, kai $t \to +\infty$ (arba $t \to -\infty$). Traukos tašką vadinsime *mazgo* tašku, jeigu visos trajektorijos $x = \varphi(t) \not\equiv 0$ turi liestinę taške $x = 0$, t.y. egzistuoja riba

$$\lim_{t\to\infty} \operatorname{arctg} \frac{\varphi_2(t)}{\varphi_1(t)} = \theta_0; \quad (\text{arba } t \to -\infty)$$

čia $\theta_0 \in (-\infty, \infty)$. Mazgo tašką vadinsime *taisyklingu mazgu*, jeigu kiekvienam $\theta_0 (\operatorname{mod} 2\pi)$ egzistuoja toks vienintelis sprendinys $x = \varphi(t)$, kad

$$\lim_{t\to\infty} \operatorname{arctg} \frac{\varphi_2(t)}{\varphi_1(t)} = \theta_0. \quad (\text{arba } t \to -\infty)$$

Priešingu atveju mazgo tašką vadinsime netaisyklingu mazgu.

A p i b r ė ž i m a s. Pusiausvyros tašką $x = 0$ vadinsime (3.42) sistemos *sukimosi* tašku, jeigu kiekvienoje jo aplinkoje yra uždara trajektorija, supanti šį tašką. Sukimosi tašką vadinsime centro tašku, jeigu kiekviena tokia trajektorija, išskyrus $x = 0$, yra uždara.

Egzistuoja pusiausvyros taškai, kurie nėra nei traukos taškai, nei sukimosi taškai ir traukos taškai, kurie nėra nei židiniai, nei mazgai. Pavyzdžiui, *balno taškas* nėra nei traukos taškas, nei sukimosi taškas. Jį galima apibrėžti kaip pusiausvyros tašką į kurį artėja tik baigtinis skaičius trajektorijų, kai $t \to \infty$ arba $t \to -\infty$.

Tiesinei sistemai $\dot{x} = Ax$, $\det A \neq 0$, pusiausvyros taškas $x = 0$ yra traukos taškas tada ir tik tada, kai matricos A tikrinių reikšmių realiosios dalys yra abi teigiamos arba abi neigiamos. Pusiausvyros taškas $x = 0$ yra sukimosi taškas (centras) tada ir tik tada, kai matricos A tikrinių reikšmių realiosios dalys lygios nuliui. Iš 3.11 teoremos išplaukia toks teiginys.

3.16 **teorema.** *Jeigu koordinačių pradžios taškas* $x = 0$ *yra* (3.44) *tiesinės sistemos traukos taškas, tai jis ir* (3.42) *netiesinės sistemos traukos taškas.*

Pasirodo, kad analogiškas teiginys yra teisingas ir tuo atveju, kai traukos taškas yra židinys. Tiksliau yra teisinga tokia teorema.

3.17 **teorema.** *Jeigu koordinačių pradžios taškas* $x = 0$ *yra* (3.44) *tiesinės sistemos židinio taškas, tai jis ir* (3.42) *netiesinės sistemos židinio taškas.*

$\lhd$ Taškas $x = 0$ yra (3.44) tiesinės sistemos židinio taškas, kai matricos A tikrinės reikšmės $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ yra kompleksinės ir $\alpha \neq 0$. Tarkime, matrica A turi kanoninį pavidalą, t.y.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

ją gausime, $r(t) = c_1 e^{\alpha t}$, $\varphi(t) = -\beta t + c_2$. Jeigu $\alpha < 0$ ir $\beta < 0$, tai $r(t) \to 0$, $\varphi(t) \to +\infty$, kai $t \to +\infty$. Be to, $\frac{\beta}{\alpha} \ln r(t) + \varphi(t) = c$, su tam tikra konstanta c. Ir atvirkščiai, bet kokiai konstantai c egzistuoja toks nagrinėjamos tiesinės sistemos sprendinys, kad $\frac{\beta}{\alpha} \ln r(t) + \varphi(t) = c$.

(priešingu atveju, neišsigimusios tiesinės transformacijos pagalba, suvedame ją į kanoninį pavidalą). Tada (3.42) sistemą galima užrašyti taip:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = & \alpha x_1 + \beta x_2 + f_1(x), \\ \dot{x}_2 = & -\beta x_1 + \alpha x_2 + f_2(x) \end{cases} \tag{3.45}$$

arba polinėse koordinatėse $x_1 = r\cos\varphi,\ x_2 = r\sin\varphi$,

$$\begin{cases} \dot{r} = & \alpha r + o(r), \\ r\dot{\varphi} = & -\beta r + o(r). \end{cases}$$

Jeigu $\alpha < 0$, tai iš pirmosios lygties gauname, kad $r \to 0$, $t \to +\infty$. Todėl

$$\dot{\varphi} = -\beta t + o(1),$$

kai $t \to +\infty$. Kartu galime tvirtinti, kad kiekviena (3.45) netiesinės sistemos trajektorijai, prasidedančiai pakankamai arti koordinačių pradžios,

$$\varphi(t) = -\beta t + o(t),$$

kai $t \to +\infty$. Iš čia išplaukia, kad $\varphi(t) \to \pm\infty$, kai $t \to +\infty$. Čia imame vieną iš ženklu $\pm$, priklausomai nuo to, koks yra β ženklas. Tačiau tai reiškia, kad bet kuri trajektorija, esanti pakankamai arti koordinačių pradžios ir nesanti pusiausvyros tašku $r = 0$, yra spiralė. $\triangleright$

Šioje teoremoje židinio tašką pakeisti į mazgo tašką negalima. Pavyzdžiui, netiesinė sistema

$$\dot{x}_1 = -x_1 - \frac{x_2}{\ln|x|}, \quad \dot{x}_2 = -x_2 + \frac{x_1}{\ln|x|}$$

tenkina visas skyrelio pradžioje suformuluotas sąlygas. Polinėse koordinatėse $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$ ją galima užrašyti taip:

$$\dot{r} = -r, \quad \dot{\varphi} = 1/\ln r, \quad r \neq 0.$$

Išsprendę pirmąją lygtį, gausime

$$r(t) = c_1 e^{-t}, \quad c_1 > 0.$$

Taigi, kai $t \to +\infty$, $r \to 0$ ir

$$\dot{\varphi} = 1/(\ln c_1 - t).$$

Šios lygties sprendinys

$$\varphi(t) = -\ln(t - \ln c_1) + c_2 \to -\infty,$$

kai $t \to +\infty$. Todėl koordinačių pradžios taškas $r = 0$ yra netiesinės sistemos židinio taškas. Tačiau ją atitinkančiai tiesinei sistemai

$$\dot{x}_1 = -x_1, \quad x_2 = -x_2,$$

koordinačių pradžios taškas yra taisyklingas mazgo taškas.

Tiesinės sistemos židinio taškas (kartu jis yra ir taisyklingas židinio taškas) nebūtinai yra netiesinės sistemos taisyklingas židinio taškas. Pavyzdžiui, netiesinė sistema

$$\dot{x}_1 = -x_1 + \frac{x_1}{\ln|x|}, \quad \dot{x}_2 = -x_1 - \frac{x_2}{\ln|x|}$$

tenkina skyrelio pradžioje suformuluotas sąlygas. Polinėse koordinatėse $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$ ją galima užrašyti taip:

$$\dot{r} = -r + \frac{r}{\ln r}, \quad \dot{\varphi} = -1.$$

Išsprendę pirmąją lygtį, gausime

$$r(t)(1 - \ln r(t)) = ce^{-t}.$$

Kadangi $r(t) \to 0$, kai $t \to +\infty$, tai $r(t)e^t \to 0$, kai $t \to +\infty$ ir nagrinėjamos netiesinės sistemos pusiausvyros taškas yra netaisyklingas židinio taškas.

Iš pateiktų pavyzdžių matome, kad nurodytų skyrelio pradžioje glodumo sąlygų funkcijai q nepakanka, kad tiesinės sistemos taisyklingas židinio (mazgo) taškas būtų ją atitinkančios netiesinės sistemos taisyklingu židinio (mazgo) tašku. Tarkime, ψ yra tolydi funkcija intervale $[0, a]$, tenkinanti sąlygas:

$$|q(x)| \le \psi(|x|); \quad \psi(r) = o(r), \text{ kai } r \to 0; \int\limits_0^a \frac{\psi(r)}{r^2}\,dr < \infty. \tag{3.46}$$

Tada yra teisinga tokia teorema.

3.18 **teorema.** *Jeigu funkcija q tenkina* (3.46) *sąlygas ir koordinačių pradžios taškas yra* (3.44) *tiesinės sistemos židinio taškas (taisyklingas mazgo taškas), tai jis yra ir netiesinės sistemos taisyklingas židinio taškas (taisyklingas mazgo taškas).*

P a s t a b a. Jeigu funkcija q tenkina sąlygą

$$q(x) = O(|x|^{1+\varepsilon}),$$

kai $|x| \to 0$, tai ji tenkina ir (3.46) sąlygas. Kartu tokiai funkcijai yra teisinga pastaroji teorema.

Tarkime toliau, kad koordinačių pradžios taškas yra (3.42) tiesinės sistemos centro taškas. Iš pradžių išnagrinėsime kelis pavyzdžius.

1. Netiesinė sistema

$$\dot{x}_1 = -x_2 - x_1|x|, \quad \dot{x}_2 = x_1 - x_2|x|$$

tenkina skyrelio pradžioje suformuluotas sąlygas. Polinėse koordinatėse $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$ ją galima užrašyti taip:

$$\dot{r} = -r^2, \quad \dot{\varphi} = 1.$$

Išsprendę šią sistemą, gausime, kad trajektorija, laiko momentu $t = 0$ einanti per tašką (r_0, t_0), $r_0 \neq 0$, apibrėžiama formule

$$r(t) = (t + r_0^{-1})^{-1}, \quad \varphi(t) = t + \varphi_0.$$

Todėl $r(t) \to 0$, kai $t \to +\infty$. Taigi koordinačių pradžios taškas yra netiesinės sistemos židinio taškas. Tačiau ją atitinkančiai tiesinei sistemai

$$\dot{x}_1 = -x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1$$

koordinačių pradžios taškas yra centro taškas.

2. Netiesinė sistema

$$\dot{x}_1 = -x_2 + x_1|x|^2 \sin \pi/|x|, \quad \dot{x}_2 = x_1 + x_2|x|^2 \sin \pi/|x|$$

tenkina skyrelio pradžioje suformuluotas sąlygas. Be to, šios sistemos dešinės pusės turi tolydžias dalines išvestines. Todėl tokia sistema tenkina vienaties teoremos sąlygas, t.y. $\forall x_0 \in \mathbb{R}^2$, $x_0 \neq 0$, egzistuoja vienintelis sprendinys, tenkinantis sąlygą $x(0) = x_0$.

Polinėse koordinatėse $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$ ją galima užrašyti taip:

$$\dot{r} = r^3 \sin \pi/r, \quad \dot{\varphi} = 1.$$

Iš pirmos lygties gauname, kad apskritimai $r(t) = 1/k$, $k = 1, 2, \ldots$ yra uždaros šios sistemos trajektorijos. Be to,

$$\dot{r} > 0, \quad \text{kai } r > 1, \text{arba } \frac{1}{2k+1} < r < \frac{1}{2k},$$

$$\dot{r} < 0, \quad \text{kai } \frac{1}{2k} < r < \frac{1}{2k-1},$$

$\forall k = 1, 2, \ldots$ Taigi visos trajektorijos, išskyrus apskritimus $r(t) = 1/k$, nėra uždaros ir nekerta šių apskritimų. Funkcijos r ir φ, apibrėžiančios neuždaras trajektorijas, yra monotoninės. Todėl jos vyniojasi apie apskritimus $r(t) = 1/k$, kai $t \to +\infty$ (arba $t \to -\infty$) ir $r(t) \to +\infty$, kai $t \to +\infty$, jeigu $r > 1$. Todėl koordinačių pradžios taškas yra sukimosi taškas.

Taigi, jeigu koordinačių pradžios taškas tiesinei sistemai yra sukimosi (centro) taškas, tai netiesinei sistemai jis yra židinys arba sukimosi taškas. Pasirodo, kad kitokių atvejų būti negali. Tiksliau yra teisinga tokia teorema.

3.19 **teorema.** *Tarkime, koordinačių pradžios taškas yra* (3.44) *tiesinės sistemos sukimosi (centro) taškas. Tada jis yra netiesinės sistemos sukimosi taškas arba židinys.*

Tarkime, koordinačių pradžios taškas yra (3.44) tiesinės sistemos netaisyklingas mazgo taškas. Be to, tegu ši sistema turi kanoninį pavidalą, t.y. matrica

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

ir $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$. Tada yra teisinga tokia teorema.

3.20 **teorema.** *1. Kiekviena* (3.42) *netiesinės sistemos trajektorija, einanti pakankamai arti koordinačių pradžios, artėja prie koordinačių pradžios kampu* $\varphi = 0, \pi/2, \pi,$ *arba* $3\pi/2$. *Be to, egzistuoja be galo daug trajektorijų, artėjančių į koordinačių pradžią kampu* $\varphi = 0$ *ir* π.

2. Egzistuoja bent viena trajektorija, artėjanti į koordinačių pradžią kampu $\varphi = \pi/2$ *ir kampu* $\varphi = 3\pi/2$.

3. Jeigu dalinės išvestinės q_{1x_1} *ir* g_{2x_1} *egzistuoja ir yra tolydžios kokioje nors koordinačių pradžios taško aplinkoje, tai egzistuoja lygiai po vieną trajektoriją, artėjančią į koordinačių pradžią kampu* $\varphi = \pi/2$ *ir* $\varphi = 3\pi/2$.

Tarkime, koordinačių pradžios taškas yra (3.44) tiesinės sistemos balno taškas. Be to, tegu ši sistema turi kanoninį pavidalą, t.y. matrica

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

ir $\lambda_1 <) < \lambda_2$. Tada yra teisinga tokia teorema.

3.21 **teorema.** *Egzistuoja bent po vieną* (3.42) *netiesinės sistemos trajektoriją, artėjančią į koordinačių pradžią kampu* $\varphi = 0$ *ir kampu* $\varphi = \pi$. *Be to, jeigu dalinės išvestinės* q_{1x_2} *ir* q_{2x_2} *egzistuoja ir yra tolydžios kokioje nors koordinačių pradžios taško aplinkoje, tai egzistuoja lygiai po vieną trajektoriją, artėjančią į koordinačių pradžią kampu* $\varphi = 0$ *ir* $\varphi = \pi$. *Visos kitos pakankamai artimos joms trajektorijos tolsta nuo jų, kai* $t \to +\infty$.

Šių teoremų įrodymą galima rasti [12] knygoje.

P a s t a b a. Jeigu (3.42) sistemoje matricos A determinantas lygus nuliui, tai įrodytais teiginiais pasinaudoti negalima. Pavyzdžiui, netiesinė sistema

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1^2$$

turi vienintelį pusiausvyros tašką $x_1 = 0, x_2 = 0$, o jos pirmasis artinys

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = 0$$

turi visą tiesę pusiausvyros taškų $x_2 = 0$.

Remiantis šiais teiginiais ir teorema apie trajektorijų ištiesinimą, galima galima nubrėžti (3.41) sistemos lokalų fazinį portretą visuose paprastuose ir izoliuotuose pusiausvyros taškuose. Tačiau tokios informacijos ne visada pakanka, jeigu norime nubrėžti globalų fazinį portretą. Pavyzdžiui,

3.?? pav.

3.?? paveikslėlyje parodyti du globalūs faziniai portretai nėra kokybiškai ekvivalentūs, nors kiekvieno taško aplinkoje jų lokalūs faziniai portretai yra kokybiškai ekvivalentūs. Tai susiję su tuo, kad tokių sistemų trajektorijų ribinių taškų aibės struktūra gali būti skirtinga.

3.8. AUTONOMINIŲ SISTEMŲ RIBINIAI TAŠKAI

Tarkime, funkcija $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ yra tolydi srityje D ir šioje srityje lokaliai tenkina Lipšico sąlygą kintamųjų x atžvilgiu. Tada per kiekvieną tašką $x_0 \in D$ eina lygiai viena autonominės sistemos

$$\dot{x} = f(x) \tag{3.47}$$

trajektorija. Kiekvieno jos taško padėtį fazinėje erdvėje nusako pradinis taškas x_0 ir laiko atkarpa $t - t_0$ (žr. 1.5 skyrelį), t.y. (3.47) sistemos sprendinį $x = x(t, t_0, x_0)$ galima užrašyti tokiu pavidalu

$$x = x(t - t_0, 0, x_0) := \varphi(t - t_0, x_0).$$

Tegu $t_0 = 0$. Tada pastarąjį sprendinį galima perrašyti taip:

$$x = \varphi(t, x_0), \quad t \geq 0.$$

A p i b r ė ž i m a s. Tegu $\gamma : x = \varphi(t, x_0)$, $t \geq 0$ yra (3.47) sistemos trajektorija. Tašką $q \in D$ vadinsime šios trajektorijos *ribiniu* tašku, jeigu egzistuoja tokia artėjančių į $+\infty$ seka $\{t_k\}$, kad $\varphi(t_k, x_0) \to q$, kai $k \to \infty$. Analogiškai apibrėžiamas ribinis taškas, kai $t \leq 0$. Trajektorijos γ ribiniai taškai yra vadinami ω-ribiniais taškais, jeigu trajektorija γ yra apibrėžta $\forall t \geq 0$ ir α-ribiniais taškais, jeigu trajektorija γ yra apibrėžta $\forall t \leq 0$. Trajektorijos γ visų ribinių taškų aibę žymėsime $\Omega(\gamma)$.

A p i b r ė ž i m a s. Sakysime, trajektorija $\gamma : x = \varphi(t, x_0)$, $t \geq 0 (t \leq 0)$ yra teigiamai (neigiamai) stabili pagal Lagranžą ir rašysime $\gamma \in L^+$ ($\gamma \in L^-$), jeigu egzistuoja toks kompaktas $K \subset D$, kad $\varphi(t, x_0) \in K$, visoms neneigiamoms (neteigiamoms) t reikšmėms, kurioms tik sprendinys $\varphi(t, x_0)$ gali būti apibrėžtas.

A p i b r ė ž i m a s. Uždarą trajektoriją γ vadinsime *ribiniu ciklu*, jeigu kiekvienas jos taškas yra ribinis bet kuriai trjektorijai einančiai per pakankamai artimą trajektorijai γ tašką.

Atkreipsime dėmesį į tai, kad ne bet kokia uždara trajektorija yra ribinis ciklas ir ne visi ribiniai ciklai elgiasi vienodai. Išskirsime tris skirtingas ribinių ciklų klases:

1. Ribinį ciklą γ vadinsime *stabiliu* jeigu kiekvienas jo taškas yra bet kurios pakankamai artimos trajektorijos ω-ribinis taškas. Kitais žodžiais tarint, kai $t \to +\infty$ visos pakankamai artimos trajektorijos apsivynioja apie γ iš abiejų pusių.

2. Ribinį ciklą γ vadinsime *nestabiliu*, jeigu kiekvienas jo taškas yra bet kurios pakankamai artimos trajektorijos α-ribinis taškas, t.y. kai $t \to +\infty$ visos pakankamai artimos trajektorijos nusivynioja nuo γ iš abiejų pusių.

3. Ribinį ciklą γ vadinsime *pusiaustabiliu*, jeigu kiekvienas jo taškas yra bet kurios pakankamai artimos trajektorijos, esančios vienoje γ pusėje, ω-ribinis taškas, o esančios kitoje γ pusėje – α-ribinis taškas. Tai reiškia, kad $t \to +\infty$ visos pakankamai artimos trajektorijos iš vienos pusės γ nusivynioja nuo jo, o iš kitos pusės jį apsivynioja.

P a v y z d y s. Nagrinėsime netiesinę autonominę sistemą

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = & \mu x_1 - x_2 - x_1 \cdot |x|^2, \\ \dot{x}_2 = & x_1 + \mu x_2 - x_2 \cdot |x|^2, \end{cases} \quad \mu \in (-\infty, \infty).$$

Polinėse koordinatėse

$$x_1 = r\cos\varphi, \quad x_2 = r\sin\varphi$$

šią sistemą galima perrašyti taip:

$$\begin{cases} \dot{r} = & r(\mu - r^2), \\ \dot{\varphi} = & 1. \end{cases}$$

Kiekvienai parametro $\mu \in (-\infty, \infty)$ reikšmei pastaroji sistema turi sprendinį

$$r = 0, \quad \varphi = t + c.$$

Kai $\mu = 0$, turime sprendinį

$$\frac{1}{2} r^{-2} = t + c.$$

Kai $\mu \neq 0$, šios sistemos sprendinys apibrėžiamas formule

$$\frac{1}{\mu} \ln \frac{r}{\sqrt{|r^2 - \mu|}} = t + c.$$

Be to, kai $\mu > 0$, sistema turi dar vieną sprendinį

$$r = \sqrt{\mu}.$$

Bet kuriai parametro μ reikšmei koordinačių pradžios taškas yra nagrinėjamos sistemos pusiausvyros taškas.

Tegu $\mu \leq 0$. Tada $\dot{r} < 0$, kai $r \neq 0$ ir $\dot{r} = 0$, kai $r = 0$. Šiuo atveju visos trajektorijos, išskyrus koordinačių pradžios tašką, yra spiralės ir kiekviena iš jų vyniojasi apie koordinačių pradžią, kai $t \to +\infty$.

Tegu $\mu > 0$. Tada $\dot{r} > 0$, kai $r \in (0, \sqrt{\mu})$ ir $\dot{r} < 0$, kai $r > \mu$. Todėl koordinačių pradžios taškas yra nestabilus židinys ir α-ribinis taškas bet kuriai kitai trajektorijai, esančiai skritulyje $r < \sqrt{\mu}$. Be to, visos šios trajektorijos vyniojasi apie apskritimą $r = \sqrt{\mu}$, kai $t \to +\infty$. Todėl šis apskritimas yra stabilus ribinis ciklas ir ω- ribinė aibė, bet kuriai trajektorijai išskyrus pusiausvyros tašką $r = 0$.

P a s t a b a. Taškas $\mu = 0$ yra nagrinėjamos sistemos bifurkacijos taškas. Atkreipsime dėmesį į tai, kad šios sistemos pirmojo artinio tikrinės reikšmės $\lambda_{1,2} = \mu \pm i$ tampa grynai menamomis, kai $\mu = 0$.

3.22 **teorema.** *Trajektoriją $\gamma \in L^+$ ($\gamma \in L^-$) galima pratęsti į visą pustiesę $t \geq 0$ ($t \leq 0$) ir pratęstos trajektorijos ribinių taškų aibė yra netuščia.*

$\lhd$ Tegu $[0, b)$ yra maksimalus iš dešines intervalas, kuriame trajektorija $\gamma : x = \varphi(t, x_0)$ gali būti apibrėžta. Pagal 1.5 teoremą yra galimi du atvejai: 1) $b < \infty$; 2) $b = \infty$. Pirmuoju atveju $\varphi(t, x_0) \to \partial D$, kai $t \to b - 0$. Tačiau $\varphi(t, x_0) \in K \subset D$,

$\forall t \in [0, b)$. Kadangi $\operatorname{dist}(K, \partial D) > 0$, tai pastarasis atvejis yra negalimas. Taigi $b = \infty$ ir trajektoriją γ galima pratęsti į visą pustiesę $t \geq 0$. Kartu galime tvirtinti, kad $\varphi(t, x_0) \subset K$, $\forall t \geq 0$. Kadangi K yra kompaktas, tai iš sekos $\{\varphi(t_k, x_0)\}$ galima išskirti konverguojantį posekį. Tai reiškia, kad ribinių taškų aibė $\Omega(\gamma)$ yra netuščia. Analogiškai nagrinėjamas atvejis, kai trajektorija $\gamma \in L^-$. $\triangleright$

3.23 **teorema.** *Tarkime, trajektorija $\gamma \in L^+$ ($\gamma \in L^-$). Tada jos ribinių taškų aibė $\Omega(\gamma)$ yra:*

1. *Kompaktinė.*
2. *Jungioji.*
3. *Invariantinė atvaizdžio φ_t atžvilgiu (žr. 1.5 skyrelį).*

$\triangleleft$ Išnagrinėsime atvejį, kai $\gamma \in L^+$. Atvejis, kai $\gamma \in L^-$ nagrinėjamas analogiškai. Iš pradžių įrodysime, kad aibė $\Omega(\gamma)$ yra uždara.

Laisvai pasirenkame tokią seką $\{q_k\}$, $q_k \in \Omega(\gamma)$, $k = 1, 2, \ldots$, kad $q_k \to q$, kai $k \to \infty$. Kadangi q_k yra trajektorijos γ ribinis taškas, tai egzistuoja tokia artėjančių į $+\infty$ laiko momentų seka $\{t_{kj}\}$, kad

$$\varphi_{kj} := \varphi(t_{kj}, x_0) \to q_k,$$

kai $j \to \infty$.

Laisvai pasirenkame skaičių $\varepsilon > 0$. Kiekvienam k galima nurodyti tokią indekso reikšmę $j = j(k)$ ir skaičių k_0, kad

$$|q_k - q| < \varepsilon, \quad |q_k - \varphi_{kj(k)}| < \varepsilon,$$

jeigu tik $k > k_0$. Be to, $j(k)$ galima parinkti taip, kad $j(k) \to \infty$, kai $k \to \infty$. Iš pastarųjų nelygybių išplaukia, kad

$$\varphi_{kj(k)} = \varphi(t_{kj(k)}, x_0) \to q,$$

kai $k \to \infty$. Taigi $q \in \Omega(\gamma)$.

Pagal teoremos sąlygą egzistuoja toks kompaktas K, kad $\gamma \subset K \subset D$. Iš čia išplaukia, kad trajektorijos γ ribinių taškų aibė $\Omega(\gamma)$ yra aprėžta. Kartu galime tvirtinti, kad $\Omega(\gamma)$ yra kompaktas.

Įrodysime antrąjį teoremos teiginį. Tarkime priešingai – aibė $\Omega(\gamma)$ nėra jungi. Tada ją galima išreikšti dviejų uždarų, netuščių ir nesikertančių aibių $\Omega_1(\gamma)$ ir $\Omega_2(\gamma)$ sąjunga. Tegu d yra atstumas tarp šių aibių. Kadangi $\Omega(\gamma)$ yra kompaktas, tai $d > 0$. Pagal aibės $\Omega(\gamma)$ apibrėžimą egzistuoja tokios artėjančios į $+\infty$ sekos $\{\tau_k\}$, $\{\sigma_k\}$, kad

$$\operatorname{dist}(\varphi(\tau_k, x_0), \Omega_1(\gamma)) < d/2, \quad \operatorname{dist}(\varphi(\sigma_k, x_0), \Omega_2(\gamma)) < d/2,$$

$\forall k = 1, 2, \ldots$ Nenusižengiant bendrumui galime tarti, kad $\tau_1 < \sigma_1 < \tau_2 < \sigma_2 < \ldots$ Kadangi funkcija φ yra tolydi kintamojo t atžvilgiu, tai $\forall k = 1, 2, \ldots$ egzistuoja toks laiko momentas $t_k \in (\tau_k, \sigma_k)$, kad

$$\operatorname{dist}(\varphi(t_k, x_0), \Omega_1(\gamma)) \geq d/2, \quad \operatorname{dist}(\varphi(t_k, x_0), \Omega_2(\gamma)) \geq d/2.$$

Iš sekos $\{\varphi(t_k, x_0)\}$ galima išskirti konverguojantį posekį. Tegu q yra šio posekio ribinis elementas. Pagal apibrėžimą $q \in \Omega(\gamma)$ išlieka teisingos pastarosios dvi nelygybės:

$$\operatorname{dist}(\varphi(q, x_0), \Omega_1(\gamma)) \geq d/2, \quad \operatorname{dist}(q, x_0), \Omega_2(\gamma)) \geq d/2.$$

Tačiau $q \in \Omega(\gamma) = \Omega_1(\gamma) \cup \Omega_2(\gamma)$. Todėl $q \in \Omega_1(\gamma)$ arba $q \in \Omega_2(\gamma)$. Gauta prieštara įrodo, kad aibė $\Omega(\gamma)$ yra jungioji.

Įrodysime trečiąjį teoremos teiginį. Tegu $q \in \Omega(\gamma)$. Reikia įrodyti, kad $\varphi(t, q) \in \Omega(\gamma)$ visoms t reikšmėms, kurioms $\varphi(t, q)$ yra apibrėžta. Kiekvienam fiksuotam t funkcija $\varphi(t, x_0)$ yra tolydi x_0 atžvilgiu. Todėl $\forall \varepsilon > 0$ egzistuoja toks $\delta > 0$, kad

$$|\varphi(t, p) - \varphi(t, q)| < \varepsilon,$$

jeigu tik $|p - q| < \delta$. Imkime artėjančių į nulį teigiamų skaičių seką $\{\varepsilon_k\}$. Ją atitinka teigiamų skaičių seka $\{\delta_k\}$. Taškas $q \in \Omega(\gamma)$. Todėl egzistuoja tokia artėjančių į $+\infty$ skaičių seka $\{t_k\}$, kad

$$\varphi(t_k, x_0) \to q,$$

kai $k \to \infty$. Imkime artėjančių į ∞ teigiamų skaičių seką N_k. Kiekvienam k galima nurodyti tokį skaičių N_k, kad

$$|\varphi(t_k, x_0) - q| < \delta_k,$$

jeigu tik $t_k > N_k$. Tokiems t_k

$$|\varphi(t_k, \varphi(t_k, x_0)) - \varphi(t_k, q)| < \varepsilon_k.$$

Tačiau

$$\varphi(t, \varphi(t_k, x_0)) = \varphi(t + t_k, x_0).$$

Todėl

$$|\varphi(t + t_k, x_0) - \varphi(t, q)| < \varepsilon_k.$$

Kadangi $t + t_k > t + N_k \to \infty$, kai $k \to \infty$, tai taškas $\varphi(t, q) \in \Omega(\gamma)$. Teorema įrodyta. $\triangleright$

Tegu $n = 1$. Tada (3.47) sistema yra to paties pavidalo paprastoji diferencialinė lygtis. Jos fazinė erdvė yra intervalas. Pusiausvyros taškai randami iš lygties $f(x) = 0$. Kitos trajektorijos yra intervalai, kurių ribiniai taškai yra arba pusiausvyros taškai, arba fazinės erdvės ribiniai taškai. Ribinių aibių, nesutampančių su pusiausvyros taškais, nėra.

Kai $n = 2$ ribinės aibės gali turėti sudėtingesnę struktūrą. Tačiau jas aprašo Puankare–Bendiksono teorija (žr. [11]). Kai $n > 2$ pilnos teorijos, aprašančios ribinės aibės struktūrą, šiuo metu nėra.

P a v y z d y s. Tegu $n = 2$. Nagrinėsime autonominę sistemą

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1), \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1). \end{aligned}$$

Polinėse koordinatėse $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$ ją galima perrašyti taip:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r(r^2-1), \\ \dot{\varphi} &= 1. \end{aligned}$$

Šioje sistemoje kintamieji atsiskiria ir gautos lygtis lengvai integruojamos. Pirmoji lygtis turi du atskirus sprendinius $r = 0$ ir $r = 1$. Kai $r_0 \in (0,1)$ sprendinys $r = r(t, r_0), t \in \mathbb{R}$ monotoniškai mažėja nuo 1 iki 0, o kai $r_0 > 1$ monotoniškai auga nuo 1 iki ∞. Antrosios lygties sprendinys $\varphi = t + \varphi_0$. Todėl visos trajektorijos, išskyrus uždaras trajektorijas $r = 0$ ir $r = 1$, yra spiralės. Jos nusivynioja nuo apskritimo $r = 1$. Jeigu $r_0 > 1$, tai trajektorijos artėja į begalybę, kai kampas $\varphi \to \infty$. Jeigu $r_0 < 1$, tai trajektorijos artėja į nulį, kai kampas $\varphi \to \infty$. Koordinačių pradžios taškas yra pusiausvyros ir kartu ω-ribinis taškas visoms trajektorijoms, kai $r_0 < 1$. Atkreipsime dėmesį į tai, kad koordinačių pradžios taškas yra asimptotiškai stabilus, nors nagrinėjamos sistemos tiesinės dalies matrica

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

turi grynai menamas tikrines reikšmes $\lambda_{1,2} = \pm i$. Kai $r_0 > 1$, ω-ribinių taškų aibė yra tuščia. Apskritimas $r = 1$ yra uždara trajektorija ir kartu α-ribinė aibė visoms kitoms trajektorijoms, išskyrus pusiausvyros taškus.

Tarkime toliau, kad $n = 2$. Nagrinėsime autonominę sistemą

$$\dot{x} = Ax + g(x); \tag{3.48}$$

čia $A \in \mathbb{R}^{2,2}$ – pastovioji matrica su kompleksinėmis tikrinėmis reikšmėmis $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, $\beta > 0$; vektorinė funkcija g, kartu su savo išvestine g_x, yra tolydžios taško x aplinkoje $B_\varepsilon(0) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < \varepsilon.\}$ Be to, tegu

$$g(x) \to 0, \tag{3.49}$$

kai $|x| \to 0$. Ištirsime (3.48) sistemos trajektorijas pakankamai mažoje taško $x = 0$ aplinkoje.

Tegu q_1, q_2 yra matricos A tikriniai vektoriai, atitinkantys tikrines reikšmes λ_1, λ_2 ir $Q = (q_1, q_2)$. Tada keitinys $x = Qy$ suveda (3.48) sistemą į paprastesnį pavidalą

$$\dot{y} = Jy + h(y);$$

čia $J = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2\}$, $h(y) = Q^{-1}g(Qy)$. Kadangi tikrinės reikšmės yra kompleksiškai jungtinės, o matricos A elementai yra realūs, tai tikriniai vektoriai taip pat yra kompleksiškai jungtiniai. Kartu galime tvirtinti, kad vektoriaus y koordinatės, o taip pat funkcijos h koordinatės yra kompleksiškai jungtinės. Todėl, jeigu norime pereiti prie realių sprendinių, turime padaryti dar vieną keitinį $y = Bu$; čia

$$B = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}.$$

Ryšys tarp kintamųjų $x =: (x_1, x_2)$ ir $u =: (u_1, u_2)$ apibrėžiamas formule

$$x = Qy = QBu = (q_1 + q_2, i(q_1 - q_2))u,$$

kurioje matrica QB yra realioji.

Polinėse koordinatėse

$$u_1 = r\cos\varphi, \quad u_2 = r\sin\varphi \quad (y_1 = re^{i\varphi},\, y_2 = re^{-i\varphi})$$

gausime sistemą

$$\dot r = \alpha r + R(r,\varphi), \quad \dot\varphi = \beta + r^{-1}\Phi(r,\varphi); \tag{3.50}$$

čia

$$R(r,\varphi) = \mathrm{Re}\{e^{-i\varphi}h_1(re^{i\varphi}, re^{-i\varphi})\}, \quad \Phi(r,\varphi) = \mathrm{Im}\{e^{-i\varphi}h_1(re^{i\varphi}, re^{-i\varphi})\}.$$

Iš (3.49) sąlygos išplaukia, kad

$$r^{-1}|h_1(re^{i\varphi}, re^{-i\varphi})| \to 0,$$

kai $r \to 0$. Todėl

$$r^{-1}R(r,\varphi) \to 0, \quad r^{-1}\Phi(r,\varphi) \to 0,$$

kai $r \to 0$. Be to, funkcijos R ir Φ yra tolydžios ir turi tolydžias dalines išvestines, kai $r \in [0,\varepsilon)$, $\varphi \in (-\infty,\infty)$ ir 2π-periodinės kintamojo φ atžvilgiu. Pakankamai mažiems ε reiškinys

$$|r^{-1}\Phi(r,\varphi)| < \beta/2.$$

Todėl (3.50) sistemoje galima eliminuoti kintamąjį t. Rezultate gausime paprastąją diferencialinę lygtį

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{\alpha r + R(r,\varphi)}{\beta + r^{-1}\Phi(r,\varphi)}.$$

Šią lygtį galima perrašyti taip:

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{\alpha}{\beta}r + \Psi(r,\varphi); \tag{3.51}$$

čia funkcija Ψ tenkina tokias pačias sąlygas kaip ir R.

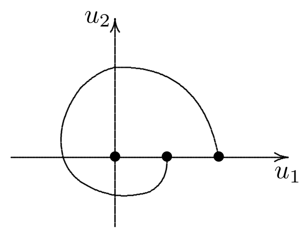
Kai t kinta nuo $-\infty$ iki $+\infty$, φ kinta nuo $-\infty$ iki $+\infty$ griežtai didėdamas. Todėl (3.50) sistemos trajektorijos sutampa su (3.51) lygties integralinėmis kreivėmis. Taigi, perėjimas nuo (3.50) sistemos prie (3.51) lygties reiškia tik perėjimą nuo vienos parametrizacijos prie kitos.

Ištirsime (3.51) lygties integralines kreives pakankami mažoje koordinačių pradžios taško aplinkoje. Tegu $r = r(\varphi, r_0)$ yra (3.51) lygties sprendinys, tenkinantys sąlygą $r(0, r_0) = r_0$. Kadangi (3.51) lygtis turi trivialų sprendinį $r = 0$, $\varphi \in (-\infty,\infty)$, tai (žr. 3.2 teoremą) egzistuoja toks $\delta > 0$, kad sprendinys $r = r(\varphi, r_0)$ yra tolydus ir turi tolydžias dalines išvestines, kai $r_0 \in [0,\delta)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Tokiems r_0 funkciją[5]

$$p(r_0) = r(2\pi, r_0)$$

[5] Taip apibrėžta funkcija vadinama *perėjimo* funkcija.

yra tolydi ir turi tolydžią išvestinę. Be to, $p(0) = 0$. Kintamųjų u_1, u_2 plokštumoje nubrėžkime integralinę kreivę išeinančia iš taško $r = r_0$, $\varphi = 0$ (žr. 3.4 pav.)



3.4 pav.

Šis paveikslėlis iliustruoja funkcijos p geometrinę prasmę.

Fiksuokime kokią nors reikšmę $r_0 < \delta$. Jeigu

$$p(r_0) = r_0, \tag{3.52}$$

tai per tašką $r = r_0$, $\varphi = 0$ eina uždara (3.50) sistemos trajektorija. Jeigu (3.52) sąlyga nepatenkinta, tai trajektorija yra neuždara. Pagal (3.10) formule

$$p'(r_0) = \frac{dr(2\pi, r_0)}{dr_0} = \exp\Big\{\int\limits_0^{2\pi}\Big[\frac{\alpha}{\beta} + \Psi_r(r(\varphi, r_0), \varphi)\Big]\,d\varphi\Big\}.$$

Kadangi $r^{-1}\Psi(r, \varphi) \to 0$, kai $r \to 0$, tai

$$p'(0) = e^{2\pi\alpha/\beta}. \tag{3.53}$$

Iš šios formulės išplaukia, kad neigiamiems α ir $r_0 < \delta$ išvestinė $p'(r_0) < a < 1$. Pagal Lagranžo formulę

$$p(r_0) = p'(\theta r_0)r_0 < ar_0, \quad \theta \in [0, 1].$$

Tegu $r_1 = p(r_0)$. Kadangi $r_1 < r_0$, tai galime apibrėžti $r_2 = p(r_1)$. Be to, $r_2 < ar_1$. Taip tęsdami toliau gausime rekurentinę formulę

$$r_k = p(r_{k-1}), \quad \forall k = 1, 2, \ldots$$

Be to, $r_k < ar_{k-1}$. Kartu yra teisinga nelygybė

$$r_k < a^k r_0. \tag{3.54}$$

Įrodysime, kad

$$r_k = r(2\pi k, r_0), \quad \forall k = 1, 2, \ldots \tag{3.55}$$

Kai $k = 1$ ši formulė išplaukia iš r_1 apibrėžimo. Tarkime, kad ji yra teisinga, kai $k = l$, t.y. $r_l = r(2\pi l, r_0)$. Įrodysime, kad ji yra teisinga, kai $k = l + 1$. Kadangi (3.51) lygties dešinioji pusė yra ω-periodinė kintamojo φ atžvilgiu, tai funkcijos

$$r = r(\varphi, r_l), \quad r = r(\varphi + 2\pi l, r_0), \quad \varphi \geq 0,$$

yra šios lygties sprendiniai. Pagal indukcinę prielaidą taške $\varphi = 0$ jų reikšmės sutampa:

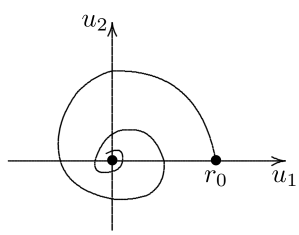
$$r(0, r_l) = r_l = r(2\pi l, r_0).$$

Todėl šie sprendiniai sutampa $\forall \varphi \geq 0$. Imdami $\varphi = 2\pi$, gausime

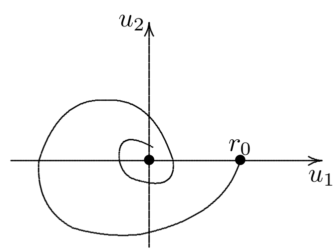
$$r_{l+1} = r(2\pi, r_l) = r(2\pi(l+1), r_0).$$

Taigi (3.55) formulė yra teisinga.

Iš (3.54) nelygybės išplaukia, kad $r_k \to 0$, kai $k \to \infty$. Todėl trajektorijos yra spiralės, artėjančios į koordinačių pradžią, kai $\varphi \to \infty$ ($t \to \infty$). Šiuo atveju koordinačių pradžios taškas yra stabilus židinys (žr. 3.5 pav.).



3.5 pav.



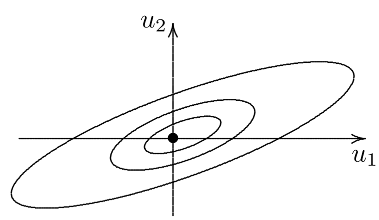
3.6 pav.

Jeigu $\alpha > 0$, tai (3.51) lygtyje pakeitę φ į $-\varphi$, gausime tokią pačią lygtį su $\alpha < 0$. Todėl teigiamoms α reikšmėms trajektorijos yra spiralės nusivyniojančios nuo koordinačių pradžios, kai $\varphi \to \infty$. Šiuo atveju koordinačių pradžios taškas yra nestabilus židinys (žr. 3.6 pav.)

Jeigu $\alpha = 0$, t.y. $p'(0) = 1$, tai reikalingas papildomas funkcijos p tyrimas. Atskiru atveju funkcija p gali būti pastovi, pakankamai mažiems r_0, t.y.

$$p(r_0) = r_0, \quad \forall r_0 \in [0, \delta).$$

Tada pakankamai mažoje koordinačių pradžios taško aplinkoje visos trajektorijos yra uždaros, o visi sprendiniai periodiniai. Šiuo atveju koordinačių pradžios taškas yra centras (žr. 3.7 pav.).



3.7 pav.

Bendru atveju tyrimas yra sudėtingesnis (žr., pavyzdžiui [6]). Tačiau atlikę baigtinį skaičių operacijų, su funkcijos q skleidinio koeficientais, galima įrodyti, kad pusiausvyros taškas yra arba centras, arba židinys. Šių dviejų atvejų išskyrimo uždavinys vadinamas centro ir židinio problema.

P a v y z d y s. Nagrinėsime autonominę sistemą

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - x_2 - x_1^2 x_2 - x_1^3. \end{cases}$$

Jos tiesinės dalies matrica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Matricos A tikrinės reikšmės $\lambda_{1,2} = \pm i$. Jas atitinkantys tikriniai vektoriai

$$q_1 = \mathrm{colon}(-(i+1)/2, 1), \quad q_2 = \mathrm{colon}((i-1)/2, 1).$$

Ryšis tarp kintamųjų x ir u yra apibrėžiamas formulėmis:

$$x_1 = -u_1 + u_2, \quad x_2 = 2u_1.$$

Perėję nuo kintamųjų x prie kintamųjų u, gausime sistemą

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = -u_2 - (u_1 - u_2)^2(u_1 + u_2)/2, \\ \dot{u}_2 = u_1 - (u_1 - u_2)^2(u_1 + u_2)/2. \end{cases}$$

Polinėse koordinatėse $u_1 = r\cos\varphi$, $u_2 = r\sin\varphi$ šią sistemą galima perrašyti taip:

$$\begin{cases} \dot{r} = -\frac{1}{2}r^3\cos^2 2\varphi, \\ \dot{\varphi} = 1 - \frac{1}{2}r^2(1 - \sin 2\varphi)\cos 2\varphi. \end{cases}$$

Eliminavę kintamąjį t, gausime lygtį

$$\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{1}{2}r^3\cos^2 2\varphi + o(r^5). \tag{3.56}$$

Tegu $r = r(\varphi, r_0)$ yra šios lygties sprendinys, tenkinantis pradinę sąlygą

$$r(0, r_0) = r_0.$$

Pakankamai mažiems r_0 yra teisinga Teiloro formulė

$$r(\varphi, r_0) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\varphi) r_0^k;$$

čia a_k yra 2π-periodinės funkcijos. Tiksliau tai yra polinomai nuo $\cos\varphi$ ir $\sin\varphi$. Be to, $r(\varphi, 0) \equiv 0$. Todėl $a_0(\varphi) = 0$. Iš pradinės sąlygos

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(0) r_0^k = r_0,$$

gauname

$$a_1(0) = 1, \quad a_k(0) = 0, \quad \forall k = 2, 3, \ldots$$

Įstatę taip apibrėžtą funkciją į (3.56) lygtį ir sulyginę koeficientus prie vienodų r_0 laipsnių, gausime

$$a_2'(\varphi) = 0 \Longrightarrow a_2(\varphi) = 0,$$

$$a_3'(\varphi) = -\frac{1}{2}\cos^2 2\varphi \Longrightarrow a_3(\varphi) = -\frac{1}{2}\int\limits_0^{\varphi} \cos^2 2\varphi \, d\varphi.$$

Pagal apibrėžimą

$$p(r_0) = r(2\pi, r_0) = r_0 + a_3(2\pi) r_0^3 + o(r_0^3).$$

Kadangi $a_3(2\pi) < 0$, tai pakankamai mažiems r_0 yra teisinga nelygybė

$$p(r_0) < r_0 + \frac{1}{2} a_3(2\pi) r_0^3 < r_0.$$

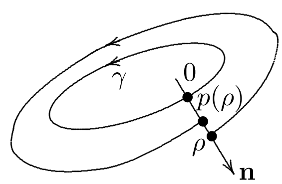
Iš jos išplaukia, kad integralinių kreivių ir pusašės $\varphi = 0, r \geq 0$ sankirtos taškai artėja prie koordinačių pradžios, kai $\varphi \to \infty$. Taigi nagrinėjamos sistemos pusiausvyros taškas yra stabilus židinys (žr. 3.5 pav.).

3.9. RIBINIAI CIKLAI PLOKŠTUMOJE

Tarkime, $n = 2$. Nagrinėsime autonominę sistemą

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in D \subset \mathbb{R}^2, \tag{3.57}$$

$f \in \mathrm{C}^1(D)$. Tegu γ yra (3.57) sistemos uždara trajektorija ir $\omega > 0$ yra jos mažiausias periodas. Laisvai pasirenkame tašką $x_0 \in \gamma$. Tegu $\mathbf{n}$ yra trajektorijos γ išorinis normalės vektorius taške x_0. Nenusižengiant bendrumai galime tarti, kad $x_0 = 0$ (priešingu atveju koordinačių pradžią perkeliame į tašką x_0). Nubrėžkime atkarpą lygiagrečią vektoriui $\mathbf{n}$ ir einančią per koordinačių pradžią. Pakankamai mažoje koordinačių pradžios taško aplinkoje kiekvieną šios atkarpos tašką x vienareikšmiškai apibrėžia parametras ρ. Jis lygus $|x|$, jeigu taškas x yra trajektorijos γ išorėje ir $-|x|$, jeigu – viduje. Tašką $x = 0$ atitinka reikšmė $\rho = 0$ (žr. 3.8 pav.).



3.8 pav.

Per kiekvieną tašką $\rho\mathbf{n} \in D$ eina lygiai viena (3.57) sistemos trajektorija γ_ρ. Ją apibrėžia sprendinys $x = \varphi(t, \rho\mathbf{n})$ (uždarą trajektoriją γ apibrėžia sprendinys $x = \varphi(t, 0)$). Fiksuokime parametrą ρ ir kintamųjų t bei p atžvilgiu sudarykime lygčių sistemą

$$\Phi(t, p, \rho) := \varphi(t, \rho\mathbf{n}) - p\mathbf{n} = 0. \tag{3.58}$$

Įrodysime pagalbinę lemą.

3.3 **lema.** *Kiekvienai moduliu pakankamai mažai ρ reikšmei egzistuoja vienintelis tolydžiai diferencijuojamas* (3.58) *sistemos sprendinys*

$$t = t(\rho), \quad p = p(\rho),$$

tenkinantis sąlygą $t(0) = \omega, \quad p(0) = 0$. *Be to,*

$$p'(0) = e^{I(\varphi(t,0))}; \tag{3.59}$$

čia

$$I(\varphi(t,0)) = \int_0^\omega \operatorname{Tr} f_x(\varphi(t,0))\, dt.$$

$\triangleleft$ Funkcija $x = \varphi(t, 0)$ yra ω-periodinis (3.57) sistemos sprendinys. Pagal 3.2 teoremą pakankamai mažoje taško $t = \omega$, $\rho = 0$ aplinkoje funkcija $x = \varphi(t, \rho\mathbf{n})$ yra tolydžiai diferencijuojama. Todėl pakankamai mažoje taško $t = \omega$, $p = 0$, $\rho = 0$ aplinkoje funkcija Φ taip pat yra tolydžiai diferencijuojama. Be to,

$$\Phi(\omega, 0, 0) = \varphi(\omega, 0) = 0.$$

Jakobianas

$$J = \det\{\Phi_t, \Phi_p\} = \det\{\varphi_t, -\mathbf{n}\} = \det\{f(\varphi(t, \rho\mathbf{n})), -\mathbf{n}\}.$$

Jo reikšmė taške $(\omega, 0, 0)$ lygi

$$\det\{f(0), -\mathbf{n}\} \neq 0,$$

nes vektoriai $f(0)$ ir $\mathbf{n}$ yra ortogonalūs. Pagal neišreikštinės funkcijos teoremą pakankamai mažoms moduliu ρ reikšmėms (3.58) sistema turi vienintelį tolydžiai diferencijuojamą sprendinį

$$t = t(\rho), \quad p = p(\rho),$$

tenkinantį sąlygą $t(0) = \omega$, $p(0) = 0$.

Įrodysime (3.59) formulę. Pakankamai mažoms moduliu ρ reikšmėms yra teisinga tapatybė

$$\Phi(t(\rho), p(\rho), \rho) = 0.$$

Diferencijuodami ją, gausime dviejų tiesinių lygčių su dviejomis nežinomomis funkcijom p' ir t' sistemą

$$\Phi_t t'(\rho) + \Phi_p p'(\rho) = -\Phi_\rho;$$

čia išvestinės Φ_t, Φ_p ir Φ_ρ skaičiuojamos taške $(t(\rho), p(\rho), \rho)$. Pagal Kramerio formulę

$$p'(\rho) = \frac{\det\{\Phi_t, -\Phi_\rho\}}{\det\{\Phi_t, \Phi_p\}}.$$

Remiantis (3.5) formule

$$\varphi_t(t, x_0) = \varphi_{x_0}(t, x_0) f(x_0).$$

Todėl

$$p'(\rho) = \frac{\det\{\varphi_{x_0}(t(\rho), \rho\mathbf{n}) f(\rho\mathbf{n}), -\varphi_{x_0}(t(\rho), \rho\mathbf{n})\mathbf{n}\}}{\det\{f(\varphi(t(\rho), \rho\mathbf{n})), -\mathbf{n}\}} =$$

$$= \frac{\det\{\varphi_{x_0}(t(\rho), \rho\mathbf{n})\} \cdot \det\{f(\rho\mathbf{n}), -\mathbf{n}\}}{\det\{f(\varphi(t(\rho), \rho\mathbf{n})), -\mathbf{n}\}}.$$

Kai $\rho = 0$, reiškinys $\varphi(t(0), 0) = \varphi(\omega, 0) = 0$. Todėl išvestinė

$$p'(0) = \det\{\varphi_{x_0}(\omega, 0)\}.$$

Pagal (3.10) formulę

$$\det\{\varphi_{x_0}(\omega, 0)\} = \exp\Big\{\int_0^\omega \operatorname{Tr} f_x(\varphi(t, 0))\, dt\Big\}.$$

Iš čia gauname, kad funkcijos p išvestinė taške $\rho = 0$ skaičiuojama pagal (3.59) formulę. $\triangleright$

P a s t a b a. Lemoje įrodoma, kad kiekviena trajektorija, kertanti normalę $\mathbf{n}$ taške $\rho\mathbf{n}$ laiko momentu $t = 0$, vėl ją kerta taške $p(\rho)\mathbf{n}$ laiko momentu $t = t(\rho)$, jeigu tik skaičius ρ moduliu yra pakankamai mažas. Be to, tokiems ρ funkcija $x = \varphi(t, \rho\mathbf{n})$ yra tolydi ρ atžvilgiu. Kadangi taškas $\varphi(t, 0)$ daro pilną apviją išilgai trajektorijos γ, kai t kinta nuo 0 iki ω, tai taškas $\varphi(t, \rho\mathbf{n})$ daro pilną apviją išilgai trajektorijos γ_ρ, kai t kinta nuo 0 iki $t(\rho)$, išlikdamas pakankamai mažoje trajektorijos γ aplinkoje.

Šiame skyrelyje apibrėžta funkcija p vadinama *perėjimo* funkcija (sulyginkite su funkcija p apibrėžta 3.8 skyrelyje). Periodinį (3.57) sistemos sprendinį $x = \varphi(t, 0)$ atitinka multiplikatorius $\mu_1 = 1$. Pagal (3.40) formulę, antrasis šio sprendinio multiplikatorius

$$\mu_2 = p'(0) = e^{I(\varphi(t,0))}.$$

3.24 **teorema.** *Trajektorija γ yra stabilus ribinis ciklas, jeigu $I(\varphi(t, 0)) < 0$, ir nestabilus ribinis ciklas, jeigu $I(\varphi(t, 0)) > 0$.*

$\triangleleft$ Tarkime iš pradžių, kad $I(\varphi(t, 0)) < 0$. Tada $p'(0) = e^{I(\varphi(t,0))} < 1$. Kadangi išvestinė p' yra tolydi, tai egzistuoja toks skaičius $\delta > 0$, kad $p'(\rho) < a < 1$, jeigu tik $|\rho| < \delta$. Be to, $p(0) = 0$. Pagal Lagranžo formulę yra teisinga nelygybė

$$|p(\rho)| = |p'(\theta\rho)\rho| < a\rho, \quad \forall\rho : |\rho| < \delta,\ 0 \le \theta \le 1.$$

Fiksuokime $\rho_0 : |\rho_0| < \delta$. Dėl apibrėžtumo tarkime, kad $\rho_0 > 0$ (kai $\rho_0 < 0$ įrodymas yra analogiškas). Kadangi trajektorijos nesikerta, tai $\rho_1 = p(\rho_0) > 0$ ir $\rho_1 < \delta$. Todėl galime apibrėžti $\rho_2 = p(\rho_1)$. Dėl tos pačios priežasties $\rho_2 > 0$. Be to, $\rho_2 < a\rho_1 < \delta$. Taip tęsdami toliau gausime seką $\rho_k = p(\rho_{k-1})$, $\rho_k > 0$, $\rho_k < a\rho_{k-1}$, $\forall k = 1, 2, \ldots$ Iš čia gauname, kad $\rho_k \to 0$, kai $k \to \infty$. Įrodysime, kad

$$\rho_k\mathbf{n} = \varphi(t_k, \rho_0\mathbf{n}); \tag{3.60}$$

čia $t_k = \sum\limits_{i=0}^{k-1} t(\rho_i)$.

Kai $k = 1$, turime

$$\rho_1\mathbf{n} = p(\rho_0)\mathbf{n} = \varphi(t(\rho_0), \rho_0\mathbf{n}) = \varphi(t_1, \rho_0\mathbf{n}).$$

Tarkime, (3.60) formulė yra teisinga, kai $k = l$. Įrodysime, kad ji yra teisinga, kai $k = l + 1$. Pagal apibrėžimą

$$\rho_{l+1}\mathbf{n} = \varphi(t(\rho_l), \rho_l\mathbf{n}).$$

Pagal indukcinę prielaidą

$$\rho_l\mathbf{n} = \varphi(t_l, \rho_0\mathbf{n}).$$

Todėl

$$\rho_{l+1}\mathbf{n} = \varphi(t(\rho_l), \varphi(t_l, \rho_0\mathbf{n})) = \varphi(t_l + t(\rho_l), \rho_0\mathbf{n}) + \varphi(t_{l+1}, \rho_0\mathbf{n}).$$

Kadangi $t(0) = \omega$ ir funkcija $t = t(\rho)$ yra tolydi, tai $t_k \to \infty$, kai $k \to \infty$. Taigi koordinačių pradžios taškas yra ω-ribinis taškas trajektorijai γ_{ρ_0}. Remiantis 3.23 teoremos 3 punktu galime tvirtinti, kad visa trajektorija γ yra trajektorijos γ_{ρ_0} ω-ribinė aibė, t.y. $\gamma \subset \Omega(\gamma_{\rho_0})$.

Parodysime, kad $\gamma = \Omega(\gamma_{\rho_0})$. Tarkime priešingai, kad $\gamma \neq \Omega(\gamma_{\rho_0})$. Tada aibėje $\Omega(\gamma_{\rho_0})$ egzistuoja toks taškas q, kad $\operatorname{dist}\{q, \gamma\} = d > 0$. Kadangi $\rho_0 < \delta$, tai trajektorijos γ_{ρ_0} lankas, esantis tarp dviejų gretimų susikirtimų su normale, yra kiek norima mažoje trajektorijos γ aplinkoje, jeigu tik δ yra pakankamai mažas skaičius. Kadangi $\rho_k < \delta, \forall k$, tai galime tvirtinti, kad pakankamai mažam δ visa trajektorija γ_{ρ_0} yra kiek norima mažoje trajektorijos γ aplinkoje. Todėl taškas q nėra trajektorijos γ_{ρ_0} ω-ribinis taškas. Gauta prieštara įrodo, kad $d = 0$, t.y. $q \in \gamma$ ir $\gamma = \Omega(\gamma_{\rho_0})$. Kartu įrodėme, kad γ yra ω-ribinė aibė bet kokiai trajektorijai, kertančiai normalę $\mathbf{n}$ pakankamai arti koordinačių pradžios taško. Įrodysime, kad γ yra ω-ribinė aibė bet kokiai trajektorijai, einančiai per pakankamai artimą trajektorijai γ tašką.

Laisvai pasirenkame tašką x_0, pakankamai artimą trajektorijai γ. Tegu $\gamma_0 : x = \varphi(t, x_0)$ yra trajektorija, einanti per tašką x_0. Funkcija $x = \varphi(t, x_0)$ yra tolydi pagal x_0, tolygiai kintamojo $t \in [0, \omega]$ atžvilgiu. Be to, trajektorija γ eina per koordinačių pradžią. Todėl trajektorija γ_0 kirs normalę $\mathbf{n}$ pakankamai arti koordinačių pradžios. Tačiau tada, kaip jau įrodyta, trajektorija γ yra trajektorijos γ_0 ω-ribinė aibė .

Išnagrinėsime atvejį, kai $I(\varphi(t, 0)) > 0$. Tegu $t = -\tau$. Tada (3.57) sistemą galima perrašyti taip:

$$dx/d\tau = -f(x).$$

Trajektoriją γ atitiks ω-periodinis sprendinys $x = \varphi(-\tau, 0)$. Integralas

$$I(\varphi(-\tau, 0)) = -\int_0^{\omega} \operatorname{Tr} f_x(\varphi(-\tau, 0))\, d\tau = \int_0^{-\omega} \operatorname{Tr} f_x(\varphi(t, 0))\, dt =$$

$$= \int_{\omega}^{0} \operatorname{Tr} f_x(\varphi(t, 0))\, dt = -I(\varphi(t, 0)) < 0.$$

Todėl galime tvirtinti, kad γ yra ω-ribinė aibė bet kokiai trajektorijai γ_0, jeigu tik ji eina per tašką, pakankamai artimą trajektorijai γ. Grįžę prie kintamojo t gausime, kad γ yra α-ribinė aibė bet kokiai trajektorijai γ_0, jeigu tik ji eina per tašką, pakankamai artimą trajektorijai γ. ▷

P a v y z d y s. Sistema (žr. 3.8 skyrelį)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1), \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1). \end{cases}$$

turi uždarą trajektoriją $\gamma : x_1^2 + x_2^2 = 1$. Ją atitinka 2π-periodinis sprendinys. Nagrinėjamu atveju funkcijos f_x pėdsakas

$$\operatorname{Tr} f_x(x) = 4(x_1^2 + x_2^2) - 2.$$

Trajektorijos γ taškuose integralas

$$I(\gamma) = \int_0^{2\pi} \big(4(x_1^2 + x_2^2) - 2\big)\, dt = 4\pi > 0.$$

Todėl trajektorija γ yra nestabilus ribinis ciklas.

Atkreipsime dėmesį į tai, kad (3.8) skyrelyje šį rezultatą gavome integruodami sistemą. Įrodytoji teorema leidžia neintegruojant sistemos nustatyti kokia yra jos uždara trajektorija.

P a s t a b a. Teorema išlieka teisinga ir tuo atveju, jeigu normalę $\mathbf{n}$ pakeisime bet kokiu vienetiniu vektoriumi, kuris nagrinėjamame taške neliečia trajektorijos γ.

Praeitame skyrelyje išskyrėme tris ribinių ciklų klases: stabilius, nestabilius ir pusiaustabilius ribinius ciklus. Pasirodo, kad plokštumoje kitokių ribinių ciklų nėra. Tiksliau yra teisinga tokia teorema.

3.25 **teorema.** *Tegu γ yra (3.57) autonominės sistemos ribinis ciklas. Tada visos trajektorijos, prasidedančios pakankamai arti γ, viniojasi apie γ arba, kai $t \to +\infty$, arba, kai $t \to -\infty$.*

Šios teoremos įrodymas išplaukia iš 3.24 teoremos įrodymo.

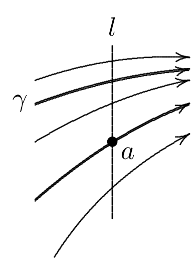
Bendru autonominės sistemos ribinių ciklų radimo metodu nėra. Suformuluosime vieną kriterijų, leidžianti nustatyti autonominės sistemos ribinio ciklo egzistavimą.

3.26 **teorema.** *Tegu $\gamma : x = \varphi(t),\ t \geq t_0$ yra teigiamai stabili pagal Lagranžą trajektorija ir $\Omega(\gamma)$ yra jos ω-ribinė aibė. Be to, tegu aibėje $\Omega(\gamma)$ nėra (3.57) sistemos pusiausvyros taškų. Tada aibė $\Omega(\gamma)$ yra uždara trajektorija ir yra galimi du atvejai:*

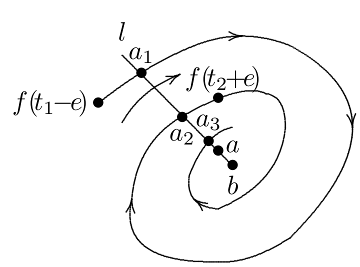
1. *Jeigu trajektorija γ yra uždara, tai $\gamma = \Omega(\gamma)$.*
2. *Jeigu γ nėra uždara trajektorija, tai ji vyniojasi apie $\Omega(\gamma)$, kai $t \to +\infty$.*

$\triangleleft$ Jeigu trajektorija γ yra uždara, tai jos ω-ribinių taškų aibė sutampa su γ ir teorema įrodyta.

Tarkime, trajektorija γ nėra uždara. Tada jos ω-ribinių taškų aibė $\Omega(\gamma)$ yra netuščia. Tegu $a \in \Omega(\gamma)$. Per tašką a brėžiame kokią nors atkarpą l, kuri yra nelygiagreti vektoriui $f(a)$ (pagal teoremos sąlygą $f(a) \neq 0$). Atkarpą l parinkime tiek mažą, kad visos trajektorijos, kertančios ją, turėtų tą pačią kryptį kaip ir trajektorija, einanti per tašką a (žr. 3.9 pav.).



3.9 pav.



3.10 pav.

Kadangi $a \in \Omega(\gamma)$ ir trajektorija γ nėra uždara, tai yra be galo gaug atkarpos l ir trajektorijos γ sankirtos taškų. Tegu $a_1 = \varphi(t_1)$ ir $a_2 = \varphi(t_2)$, $t_1 < t_2$ yra du gretimi taškai, kuriose trajektorija γ kerta atkarpą l. Tada dalis trajektorijos $\gamma : x = \varphi(t)$, $t \in [t_1, t_2]$ kartu su atkarpa $\overline{a_1, a_2}$ yra uždara kreivė (žr. 3.10 pav.). Ši kreivė dalina plokštumą į dvį dalis: išorinę ir vidinę. Pažymėkime raide Q_i vidinę, o raide Q_e išorinę sritį. Pakankamai mažam $\varepsilon > 0$ taškai $\varphi(t_1 - \varepsilon)$ ir $\varphi(t_2 + \varepsilon)$ yra skirtingose šios kreivės pusėse. Per atkarpos $\overline{a_1, a_2}$ taškus visos trajektorijos įeina iš srities Q_e į sritį Q_i. Todėl nei viena trajektorija negali per atkarpą $\overline{a_1, a_2}$ palikti sritį Q_i. Be to, ji negali kirsti ir trajektorijos γ dalies, jungiančios taškus a_1 ir a_2 (nes trajektorijos nesikerta). Kadangi ši trajektorijos dalis kerta atkarpą l tik savo galuose, tai vienas atkarpos l galas yra srityje Q_i, o kitas srityje Q_e. Pažymėkime raide b tą atkarpos l galą, kuris yra srityje Q_i. Kai $t > t_2 + \varepsilon$ trajektorijos γ taškai $\varphi(t)$ yra srityje Q_i ir negali kirsti atkarpos $\overline{a_1, a_2}$. Todėl taškas a nepriklauso atkarpai $\overline{a_1, a_2}$. Tačiau tada jis priklauso atkarpai $\overline{a_2, b}$.

Tegu $t = t_3$ yra tokia kintamojo t reikšmė, kuriai trajektorija $x = \varphi(t),\ t > t_2$ kerta pirmą kartą atkarpa l ir $a_3 = \varphi(t_3)$ yra jų sankirtos taškas. Analogiškai galima įrodyti, kad $a_3 \in \overline{a_2, b}$. Tęsdami tokius samprotavimus, gausime seką taškų

$$a_1 = \varphi(t_1),\ a_2 = \varphi(t_2),\ \ldots,\ a_k = \varphi(t_k),\ \ldots$$

Įrodysime, kad seka $t_k \to +\infty$, kai $k \to \infty$. Tarkime priešingai, seka $\{t_k\}$ yra aprėžta, t.y. egzistuoja toks teigiamas skaičius T, kad $t_k < T$, $\forall k = 1, 2, \ldots$ ir

$$\lim_{k\to\infty} t_k = T.$$

Tada

$$f(\varphi(T)) = \varphi'(T) = \lim_{k\to\infty} \frac{\varphi(T) - \varphi(t_k)}{T - t_k}.$$

Tačiau pastaroji lygybė yra negalima, nes vektorius $\varphi(T) - \varphi(t_k)$ yra lygiagretus atkarpai l. Gauta prieštara įrodo, kad

$$\lim_{k\to\infty} t_k = +\infty.$$

Kartu galime tvirtinti, kad trajektorija γ kerta atkarpą l tik taškuose $a_1 = \varphi(t_1)$, $a_2 = \varphi(t_2), \ldots, a_k = \varphi(t_k), \ldots$ Be to, seka a_k yra monotoninė ir aprėžta. Todėl trajektorija γ turi vienintelį ω-ribinį tašką. Pažymėkime jį raide a^*. Tačiau taškas a taip pat yra trajektorija γ ω-ribinis taškas. Vadinas $a = a^*$.

Įrodysime, kad taškas a nėra ω-ribinis taškas kurios nors kitos trajektorijos γ^*. Tarkime priešingai, taškas a yra ω ribinis taškas trajektorijos γ^*. Tada kiekvienas trajektorijos γ taškas yra ω-ribinis trajektorijos γ^* taškas. Atskiru atveju taškas a_1 taip pat yra ω-ribinis trajektorijos γ^* taškas. Kadangi a_1 nėra (3.57) sistemos pusiausvyros taškas, tai trajektorijos γ^* ir atkarpos l sankirtos taškai

$$a_1^*,\ a_2^*,\ \ldots,\ a_k^*,\ \ldots$$

sudaro monotoninę seką, konverguojančią į tašką a_1 ir kitų ω-ribinių taškų trajektorija γ^* atkarpoje l neturi. Tačiau tai prieštarauja tam, kad visi taškai $a_k \in \gamma$ ir yra ω-ribiniai trajektorijos γ^* taškai. Taigi neuždara trajektorija, kurios ω-ribinių taškų aibėje nėra pusiausvyros taškų, pati negali būti ω-ribinė aibė. Kartu galime tvirtinti, kad aibė $\Omega(\gamma)$ yra uždara trajektorija ir trajektorija γ vyniojasi aplink ją kaip spiralė. $\triangleright$

I š v a d a. Jeigu kokiai nors trajektorijai priklauso bent vienas jos ω arba α-ribinis taškas, tai ši trajektorija yra uždara arba yra pusiausvyros taškas.

Nagrinėjant realius uždavinius svarbiausios yra tos ribinės aibės, kurios pritraukia trajektorijas, t.y. tokios ribinės aibės, kai bet kuri trajektorija, esanti tam tikroje traukos srityje, didėjant t artėja prie ribinės aibės. Tokios ribinės aibės vadinamos *atraktoriais.* Atraktoriais gali būti pusiausvyros taškai arba ribiniai ciklai.

Jeigu sritis $D \in R^2$ yra uždara ir joje yra tik baigtinis skaičius (3.57) sistemos pusiausvyros taškų, tai galima gauti bet kurios trajektorijos ribinės aibės pilną charakteristiką (žr. [5]) ir nubrėžti (3.57) sistemos globalų fazinį portretą uždaroje srityje D. Paprastai autonominės sistemos fazinis portretas brėžiamas izoklinių metodu arba žinant sitemos tikslų sprendinį, arba skaitiniais metodais.

P a s t a b a. Kai $n \geq 3$ autonominių sistemų ribinių aibių struktūra iki galo dar nėra ištirta. Netgi nėra ištirti visi galimi atraktoriai. Yra žinoma, kad be įprastų atraktorių, tokių kaip pusiausvyros taškai, ribiniai ciklai arba k-mačiai torai, egzistuoja dar taip vadinami *keisti atraktoriai.* Tai yra aprėžtos, pritraukiančios ribinės aibės, sudėtingos struktūros. Fazinės trajektorijos čia yra begalinės, niekur nesikertančios, trajektorijos. Be to, kai $t \to +\infty$ šios trajektorijos nepalieka tam tikros uždaros srities ir neartėja prie įprastų atraktorių. Keisti atraktoriai iš esmės skiriasi nuo įprastų. Kai $n \leq 2$, keisti atraktoriai neegzistuoja. Įprastų atraktorių fazinės trajektorijos yra stabilios pagal Liapunovą. Keistų atraktorių fazinės trajektorijos yra eksponentiškai nestabilios pagal Liapunovą. Netiesinių svyravimų teorijoje tokį įprastą atraktorių kaip ribinį ciklą atitinka periodinis svyravimas, o keistą atraktorių atitinka chaotiniai auto svyravimai. Jų aprašymui naudojami terminai "determinuotas chaosas," "stochastinė dinamika" ir t.t.

3.10. UŽDAVINIAI

1. Izokliniu metodu nubrėžkite netiesinės sistemos

   $\dot{x}_1 = x_1 x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1^2 - x_2^2$

   fazinį portretą.

2. Raskite netiesinių sistemų pirmuosius artinius.

   a) $\dot{x}_1 = x_1 + x_1^2 + x_1 x_2^2, \quad \dot{x}_2 = x_2 + x_2^{3/2};$

   b) $\dot{x}_1 = x_1^3, \quad \dot{x}_2 = x_2 + x_2 \sin x_1;$

   c) $\dot{x}_1 = x_1^2 e^{x_2}, \quad \dot{x}_2 = x_2(e^{x_1 - 1});$

   d) $\dot{x}_1 = e^{x_1 + x_2}, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + x_1 x_2.$

3. Parodykite, kad netiesinės sistemos

   $$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2); \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^3, \\ \dot{x}_2 = x_2 + x_2 \sin x_1 \end{cases}$$

   turi tą patį pirmąjį artinį, tačiau jų faziniai portretai kokybiškai neekvivalentūs.

4. Nubrėžkite netiesinių sistemų ir jų pirmųjų artinių fazinius portretus.

   a) $\dot{x}_1 = x_1^2, \quad \dot{x}_2 = x_2;$

   b) $\dot{x}_1 = x_1(x_1 + 2x_2), \quad \dot{x}_2 = x_2(2x_1 + x_2);$

   c) $\dot{x}_1 = x_1(x_1 - 2x_2), \quad \dot{x}_2 = x_2(2x_1 - x_2).$

5. Įrodykite, kad netiesinei sistemai

   $\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1^3$

   koordinačių pradžios taškas yra stabilus, tačiau nėra asimptotiškai stabilus. Nubrėžkite fazinį portretą.

6. Nubrėžkite netiesinės sistemos

   $\dot{x}_1 = 2x_1 - x_1^2, \quad \dot{x}_2 = -x_2 + x_1 x_2$

   fazinį portretą.

7. Raskite sistemos

   $\dot{r} = r(r-1)(r-2), \quad \dot{\varphi} = 1$

   ribinius ciklus.

8. Raskite sistemos

   $\dot{r} = r(r-1)^2, \quad \dot{\varphi} = 1$

   ribinius ciklus.

9. Parodykite, kad netiesinė sistema

   $\dot{x}_1 = x_1^2 - x_2^3, \quad \dot{x}_2 = x_1^2(x_1^2 - x_2^3)$

   turi visą kreivę pusiausvyros taškų.

10. Įrodykyte, kad netiesinė sistema

$$\dot{x}_1 = 1 - x_1 x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1$$

neturi ribinių ciklų.

11. Raskite sistemų pusiausvyros taškus. Nubrėžkite jų aplinkoje lokalius fazinius portretus.

a) $\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -ax_2 - b\sin x_1;$

b) $\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -a(1 - x_1^2)x_2 - bx_1;$

čia $a \geq 0$, $b > 0$.

12. Raskite sistemos

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad \dot{x}_2 = -x_1 + (1 - x_1^2 - x_2^2)$$

periodinius sprendinius.

N u r o d y m a s. Įrodykite, kad kiekvienoje uždaroje trajektorijoje

$$\int (1 - x_1^2 - x_2^2)\, dt = 0.$$

Todėl, jeigu $1 - x_1^2 - x_2^2 \not\equiv 0$, tai reiškinys $1 - x_1^2 - x_2^2$ trajektorijoje keičia ženklą.

13. Tegu f – lyginė dalimis tolydi funkcija, o g nelyginė C^1 klasės funkcija tokia, kad $g(x) > 0$, kai $x > 0$. Be to, tegu

$$F(x) = \int_0^x f(s)\, ds, \quad G(x) = \int_0^x g(s)\, ds,$$

F – monotoniškai didėjanti funkcija ir egzizstuoja toks teigiamas skaičius a, kad $F(x) < 0$, kai $x \in (0, a)$ ir $F(x) > 0$, kai $x > a$. Tarkime toliau, kad $F(x) \to \infty$ ir $G(x) \to \infty$, kai $x \to \infty$. Įrodykite, kad paprastoji diferencialinė lygtis

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0$$

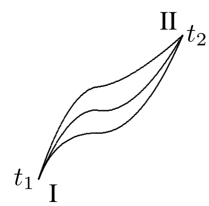
turi vienintelį netrivialų periodinį sprendinį ir jis yra stabilus.

4 SKYRIUS

Matematiniai modeliai

4.1. HAMILTONO PRINCIPAS. PAVYZDŽIAI

Įvairių fizikos ir mechanikos uždavinių matematinius modelius galima sudaryti remiantis tuo pačiu variaciniu principu. Jo esmė yra tokia. Tegu T yra kinėtinė, o P – potencinė nagrinėjamos sistemos energija. Be to, tegu laiko momentu t_1 sistema yra I padėtyje, o laiko momentu t_2 – II padėtyje. Perėjimas iš I padėties į II yra galimas skirtingais keliais (žr. 4.1 pav.).



4.1 pav.

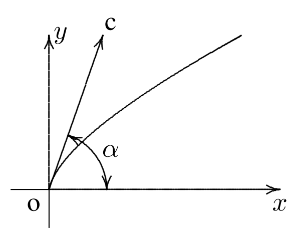
Tačiau realiame procese, veikiant potencinėms jėgoms, integralas

$$I = \int_{t_1}^{t_2} (T - P)\, dt$$

įgyja stacionarią (žr. [2]) reikšmę. Šis variacinis principas vadinamas *Hamiltono* principu. Kartais stacionari reikšmė yra mažiausia integralo reikšmė. Todėl Hamiltono principas dar yra vadinamas *mažiausio veiksmo* principu.

Išnagrinėsime kelis pavyzdžius.

1. Materialus taškas metamas kampu α (žr. 4.2 pav.) pradiniu greičiu $\mathbf{c}$. Rasti šio taško trajektoriją.



4.2 pav.

Tarkime, taško trajektoriją galima apibrėžti lygtimis

$$y = y(t), \quad x = x(t).$$

Tada taško kinetinė energija

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2),$$

o potencinė energija

$$P = mgh = mgy.$$

Remdamiesi Hamiltono principu, sudarome funkcionalą

$$I(x,y) = \int_{t_1}^{t_2} \Big(\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy\Big)\, dt.$$

Šį funkcionalą atitinka Oilerio lygtys:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = 0, \qquad \frac{d}{dt}(m\dot{y}) + mg = 0.$$

Perrašysime jas taip:

$$\ddot{x} = 0, \qquad \ddot{y} = -g.$$

Bendrieji šių lygčių integralai:

$$x = C_1 t + C_2, \qquad y = -\frac{g}{2}t^2 + C_3 t + C_4.$$

Pagal prielaidą $x(0) = 0,\ y(0) = 0$. Todėl $C_2 = C_4 = 0$. Be to,

$$\dot{x}(0) = c\cos\alpha, \quad \dot{y}(0) = c\sin\alpha, \quad c = |\mathbf{c}|.$$

Todėl

$$C_1 = c\cos\alpha, \qquad C_2 = c\sin\alpha.$$

Taigi nagrinėjamojo taško trajektoriją galima aprašyti lygtimis:

$$x = ct\cos\alpha, \qquad y = -\frac{g}{2}t^2 + ct\sin\alpha.$$

2. Išvesti planetų judėjimo dėsnius. Tegu M yra Saulės masė, m – planetos masė. Pagal visuotinį traukos dėsnį abi masės veikia viena kitą jėga

$$F = -\gamma\frac{Mm}{r^2}.$$

Veikiant šiai jėgai, potencinė energija

$$P = -\gamma\frac{Mm}{r}, \qquad F = -\frac{dP}{dr}.$$

Pažymėkime $\gamma M = k$. Tada $P = -\dfrac{km}{r}$. Planetos kinetinė energija

$$T = \frac{m}{2}\mathbf{v}^2 = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2).$$

Nagrinėjant šį uždavinį, patogu įvesti polines koordinates:

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi.$$

Polinėse koordinatėse

$$T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2).$$

Remdamiesi Hamiltono principu, sudarome funkcionalą

$$I(r,\varphi) = \int_{t_1}^{t_2} \Big[\frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \frac{km}{r}\Big]\, dt.$$

Šį funkcionalą atitinka Oilerio lygtys:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{r}) + \frac{km}{r^2} - mr\dot{\varphi}^2 = 0, \qquad \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\varphi}) = 0.$$

Antrosios lygties bendrasis integralas

$$r^2\dot{\varphi} = C.$$

Rasime pirmosios lygties bendrąjį integralą. Padauginę pirmąją lygtį iš $\dot{r}$, o antrąją iš $\dot{\varphi}$, perrašysime jas taip:

$$r\ddot{r} - r\dot{r}\dot{\varphi}^2 + \frac{k}{r^2}\dot{r} = 0.$$

$$2r\dot{r}\dot{\varphi}^2 + r^2\dot{\varphi}\ddot{\varphi} = 0.$$

Sudėję šias lygtys gausime,

$$\dot{r}\ddot{r} + r\dot{r}\dot{\varphi}^2 + r^2\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + \frac{k}{r^2}\dot{r} = 0.$$

Pastebėsime, kad kairioji pastarosios lygties pusė yra pilnasis diferencialas. Todėl ją galima perrašyti taip:

$$\frac{d}{dt}\Big[\frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{k}{r}\Big] = 0.$$

Suintegravę šią lygtį, gausime antrąjį Oilerio lygčių integralą

$$\frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{k}{r} = C_1.$$

Suintegravę pirmąjį integralą nuo t_1 iki t_2, gausime

$$\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} r^2\dot{\varphi}\, dt = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} r^2\, d\varphi = \frac{1}{2}C(t_2 - t_1).$$

Tai yra antrasis Keplerio dėsnis. Jis teigia, kad planetos skrieja aplink Saulę taip, kad spindulys, jungiantis planetą su Saule, per vienodą laiko tarpą apibrėžią vienodą plotą.

Išreiškę iš pirmojo integralo $\dot{\varphi}$ ir įstatę į antrąjį, gausime

$$\frac{1}{2}\Big(\dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2}\Big) - \frac{k}{r} = C_1.$$

Perrašysime šią lygtį taip:

$$\frac{dr}{\sqrt{2C_1 + \frac{2k}{r} - \frac{C^2}{r^2}}} = dt = \frac{r^2}{C} d\varphi.$$

Šios lygties bendrasis integralas

$$\arccos\left\{\frac{C^2 - kr}{r\sqrt{k^2 + 2C_1C^2}}\right\} = \varphi - C_2.$$

Perrašysime jį taip:

$$r = \frac{C^2}{k + \sqrt{k^2 + 2C_1C^2}\cos(\varphi - C_2)}.$$

Tai yra elipsės lygtis polinėse koordinatėse. Kai $C_2 = 0$, gausime, kad elipsės ašis yra tiesėje $\varphi = 0$. Pažymėkime

$$p = \frac{C^2}{k}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 + 2\frac{C_1C^2}{k^2}}.$$

Tada elipsės lygtį galima užrašyti taip:

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}.$$

Tai yra pirmasis Keplerio dėsnis. Jis teigia, kad planeta skrieja aplink Saulę elipse, kurios viename iš židinių yra Saulė.

Elipsės pusašės

$$a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2} = -\frac{k}{2C_1}, \quad C_1 < 0, \quad b = \sqrt{pa} = \frac{C}{\sqrt{-2C_1}}.$$

Tegu T yra laikas, per kurį planeta apskrieja aplink Saulę. Tada elipsės plotas

$$\pi ab = \frac{1}{2}CT.$$

Iš šių formulių lengvai galima išvesti, kad

$$T^2 = 4\pi^2 a^3 \frac{1}{k}.$$

Tai yra trečiasis Keplerio dėsnis. Jis teigia, kad laiko kvadratas, per kurį planeta apskrieja aplink Saulę, yra proporcingas didžiosios pusašės kubui.

4.2. EKOLOGINIAI MODELIAI

Ką tik gimę gyvi organizmai (gyvūnai, daugialąsčiai augalai ar mikroorganizmai) iš karto patenka į gana sudėtingą sąveika su juos supančia aplinka ir kitų rūšių gyvais organizmais. Be to, jie patys veikia juos supančią aplinką bei kitus gyvus organizmus, keisdami ir vieną ir kitą tam tikra linkme. Ekologija nagrinėja visus šiuos veiksnius visumoje.

Visumą gyvų organizmų, kartu su juos supančia aplinka bei sąveika tarp jų, vadinsime *ekosistema*, o pačius organizmus – *individais*. Grupę vienos rūšies individų, užimančių konkrečią teritoriją ir dauginimosi procese perduodančių genetinę informaciją savo palikuonims, vadinsime *populiacija*. Modeliuojant kokią nors ekosistemą individai populiacijose paprastai skirstomi į grupes pagal tam tikras savybes, apibrėžiančias jų išlikimą, dauginimasį ir t.t. Kiekvienoje tokioje grupėje individai privalo turėti panašias savybes, lemiančias jų vystymąsį populiacijoje ir ekosistemoje. Jeigu grupių skaičius yra baigtinis, tai populiaciją (populiacijas) kiekvienu laiko momentu t galima apibrėžti n-mačiu vektoriumi

$$x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t));$$

čia n – grupių skaičius, o $x_i(t)$ yra i-tos grupės dydis (individų skaičius užimamos teritorijos vienete) laiko momentu t, arba kokia nors kita kiekybinė charakteristika. Visos populiacijos dydis

$$p(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i(t).$$

Požymiai pagal kuriuos individai populiacijose gali būti skirstomi į grupes gali turėti tolydžią struktūrą. Pavyzdžiui amžius, svoris ir t.t. Šiuo atveju populiacija yra apibrėžiama tam tikra tankio funkcija. Tarkime, populiacijos individų amžių a laiko momentu t apibrėžia tankio funkcija $\rho(a,t)$. Tai reiškia, kad bet kokioms parametrų $a_1 \le a_2$ reikšmėms individų amžiaus $a \in [a_1, a_2]$ skaičius populiacijoje laiko momentu t lygus

$$p(a_1, a_2, t) = \int_{a_1}^{a_2} \rho(a,t)\, da.$$

Visų individų skaičius populiacijoje laiko momentu t lygus

$$p(t) = \int_{0}^{\infty} \rho(a,t)\, da.$$

Gimstamumą populiacijoje nusako naujų palikuonių atsiradimas per laiko vienetą. Dažnai naudojama santykinio gimstamumo sąvoka. Ją nusako naujai gimusių per laiko vienetą ir visų populiacijos individų santykis. Mirtingumą populiacijoje nusako žuvusių individų skaičius per laiko vienetą. Dažnai naudojama santykinio mirtingumo sąvoka. Ją nusako mirusių individų per laiko vienetą ir visų populiacijos individų santykis.

Populiacijos individų augimo dinamikos modeliai sudaromi iš *balanso* lygties

$$p(t + \Delta t) = p(t) + g(t, \Delta t) - q(t, \Delta t) + h(t, \Delta t); \tag{4.1}$$

čia $p(t)$ – populiacijos individų skaičius laiko momentu t, $g(t, \Delta t)$ – gimusių individų laiko intervale $[t, t + \Delta t]$ skaičius, $q(t, \Delta t)$ – mirusių individų laiko intervale $[t, t + \Delta t]$ skaičius, $h(t, \Delta t,)$ – atvykusių ar išvykusių (dėl migracijos) individų laiko intervale $[t, t + \Delta t]$ skaičius. Bendru atveju reiškiniai g, q ir h priklauso nuo sistemos resursų r, fizinių gyvenimo sąlygų, vidinių populiacijos charakteristikų (amžiaus ir genetinės sudėties) ir nuo sąveikos su kitomis įeinančiomis į ekosistemą populiacijomis. Atkreipsime dėmesį į tai, kad gyvenimo sąlygų, resursų ir vidiniai populiacijos charakteristikų pasikeitimai veikia gimstamumą, mirtingumą bei migraciją tik po tam tikro laiko. Todėl būtina atsižvelgti į ekosistemos priešistoriją.

Sudarant ekologinius modelius neįmanoma iš karto atsižvelgti į visus faktorius, veikiančius populiaciją. Todėl esminiais paprastai laikomi vienas arba keli faktoriai. Pavyzdžiui, tegu neesminiais yra laikomi vidiniai populiacijos charakteristikų pasikeitimai bei priešistorija. Be to, tegu individų gyvenimo sąlygos yra stacionarios (gimimo, mirimo ir individų migracijos greičiai nepriklauso nuo laiko t). Tada

$$g(t, \Delta t, p, r) = g(p, r) \cdot \Delta t,$$

$$q(t, \Delta t, p, r) = q(p, r) \cdot \Delta t,$$

$$h(t, \Delta t.p, r) = h(p, r) \cdot \Delta t.$$

Šiuo atveju ekosisitemos su n populiacijomis ir m resursais dinamikos lygtis galima užrašyti taip:

$$\begin{cases} p_i(t + \Delta t) = p_i(t) + \big[g_i(p, r) - q_i(p, r) + h_i(p, r)\big]\Delta t, \\ r_j(t + \Delta t) = r_j(t) + d_j(p, r)\Delta t; \end{cases} \tag{4.2}$$

čia $p_i(t)$ yra i-os populiacijos individų skaičius laiko momentu t, $r_j(t)$ yra j-ojo resurso kiekis laiko momentu t, d_j yra j-ojo resurso kitimo greitis, $p = (p_1, \dots, p_n)$, $r = (r_1, \dots, r_m)$. Jeigu populiacijų kitimas yra tolydus, tai (4.2) sistemą galima perrašyti taip:

$$\begin{cases} \dot{p}_i(t) = g_i(p, r) - q_i(p, r) + h_i(p, r), \\ \dot{r}_j(t) = d_j(p, r). \end{cases} \tag{4.3}$$

Nagrinėjant (4.3) sistemą kartais patogu pereiti prie santykinių koeficientų:

$$g_i \to g_i/p_i, \quad q_i \to q_i/p_i, \quad h_i \to h_i/p_i.$$

Tada turime sistemą

$$\begin{cases} \dot{p}_i(t) = p_i\big[g_i(p, r) - q_i(p, r) + h_i(p, r)\big], \\ \dot{r}_j(t) = d_j(p, r). \end{cases} \tag{4.4}$$

Jeigu ekosistemoje resursų yra neribotas skaičius, tai (4.2) – (4.4) sistemose antrąją grupę lygčių galima atmesti. Šiuo atveju kiekvienai individų populiacijai yra įvedami tam tikri parametrai, nusakantys didžiausią individų skaičių duotoje aplinkoje ir jais, pirmoje lygčių grupėje yra pakeičiamas vektorius r.

P a s t a b a . Sudarant ekosistemų dinamikos modelius kartais norima ištirti ne pačių populiacijų dinamiką, o jų tankių dinamiką. Šiuo atveju lygčių išvedimas yra analogiškas. Reikia tik vietoje populiacijos balanso lygties sudaryti populiacijos tankio balanso lygtį

$$\rho(t + \Delta t) = \rho(t) + g(t, \Delta t) - q(t, \Delta t) + h(t, \Delta t); \tag{4.5}$$

čia $\rho(t)$ – populiacijos tankis laiko momentu t, $g(t, \Delta t)$ – gimusių individų laiko intervale $[t, t + \Delta t]$ tankis, $q(t, \Delta t)$ – mirusių individų laiko intervale $[t, t + \Delta t]$ tankis, $h(t, \Delta t,)$ – atvykusių ar išvykusių (dėl migracijos) individų laiko intervale $[t, t + \Delta t]$ tankis.

P a v y z d ž i a i :

1. Tegu $p(t)$ yra kokios nors proceso populiacijos dydis laiko momentu t (pvz. žemės gyventojų, lydekų ežere, atomų radioaktyvioje medžiagoje ir t.t.). Tada $\dot{p}(t)$ yra šios populiacijos kitimo greitis laiko momentu t, o $\dot{p}(t)/p(t)$ – santykinis kitimo greitis. Pastarasis yra laiko t ir populiacijos p funkcija, t.y.

$$\frac{\dot{p}(t)}{p(t)} = f(t, p). \tag{4.6}$$

Uždaroje sistemoje

$$f(t, p) = g(t, p) - q(t, p);$$

čia $g(t, p)$ – santykinis gimimo, o $q(t, p)$ – santykinis mirimo greičiai. Jeigu funkcijos g ir q yra žinomos, tai nagrinėjamos populiacijos dinamiką aprašo (4.6) lygties sprendinys $p = p(t)$. Tarkime, laiko momentu $t = t_0$ populiacija yra žinoma, t.y.

$$p(t_0) = p_0. \tag{4.7}$$

Tada nagrinėjamas populiacijos uždavinys susiveda į tokį Koši uždavinį: rasti diferencijuojamą intervale $[t_0, \infty)$ funkciją $p = p(t)$, kuri tenkintų (4.6) lygtį ir (4.7) pradinę sąlygą.

Paprasčiausiu atveju, kai populiacijos santykinis kitimo greitis yra pastovus, t.y.

$$f(t, p) = k = const, \quad \forall (t, p) \in \mathbb{R}^2,$$

(4.6) lygtį galima perrašyti taip:

$$\frac{\dot{p}(t)}{p(t)} = k \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d}{dt} \ln |p(t)| = k.$$

Suintegravę šią lygtį, gausime

$$\ln |p(t)| = kt + \ln |C| \quad \Longleftrightarrow \quad p(t) = Ce^{kt}.$$

Konstanta C randama iš (4.7) sąlygos, t.y.

$$p(t_0) = p_0 = Ce^{kt_0}.$$

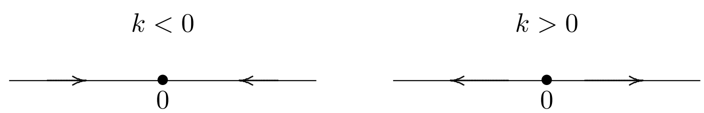
Todėl nagrinėjamos populiacijos evoliucija aprašoma lygtimi

$$p(t) = p_0 e^{k(t-t_0)}. \tag{4.8}$$

P a s t a b a. Iš (4.8) formulės išvedimo išplaukia, kad $\forall p_0 \in \mathbb{R}$ Koši uždavinys

$$\dot{p}(t) = kp(t), \quad p(t_0) = p_0$$

turi vienintelį sprendinį. Be to, sprendinys $p(t) \to \infty$ (neaprėžtai auga), kai $t \to \infty$, jeigu $k > 0$ ir $p(t) \to 0$ (nyksta), kai $t \to \infty$, jeigu $k < 0$. Šį modelį atitinkantis fazinis portretas pavaizduotas 4.15 paveikslėlyje.



4.15 pav.

Atvejis, kai funkcija f yra pastovi aprašo dvi skirtingas situacijas: populiacija p neaprėžtai didėja arba nyksta. Dažniausiai abu šie modeliai yra nerealūs. Pavyzdžiui, neaprėžtai didėjanti populiacija yra galima tik tokioje aplinkoje, kurios resursai yra neaprėžti. Norint sustabdyti neaprėžtą augimą, galima įvesti atraktorių $p^* > 0$, t.y. tarti, kad egzistuoja tokia ribinė populiacija p^*, kad

$$f(t,p) \leq 0, \quad \text{kai} \quad p \geq p^*.$$

Funkcijų, tenkinančių šią sąlygą, yra be galo daug. Paprasčiausia iš jų yra tiesinė funkcija

$$f(t,p) = \alpha - kp = k(p^* - p), \quad p \in \mathbb{R};$$

čia k – teigiama konstanta, $\alpha = kp^*$. Įstatę taip apibrėžtą funkciją f į (4.6) lygtį, perrašysime ją taip

$$\frac{\dot{p}}{p} = k(p^* - p). \tag{4.9}$$

Pastaroji lygtis yra vadinama *aprėžto augimo* lygtimi. Atskyrę joje kintamuosius, gausime

$$\frac{dp}{k(p^* - p)p} = dt, \quad p \neq 0, p \neq p^*.$$

Reiškinys

$$\frac{1}{(p^* - p)p} = \Big(\frac{1}{p} + \frac{1}{p^* - p}\Big)\frac{1}{p^*}.$$

Todėl

$$\frac{1}{k}\int \frac{dp}{(p^* - p)p} = \frac{1}{kp^*}\Big(\ln|p| - \ln|p - p^*|\Big) = \ln\Big|\frac{p}{p - p^*}\Big|^{1/p^*k}$$

ir yra teisinga formulė

$$\Big|\frac{p}{p - p^*}\Big|^{1/p^*k} = Ce^t. \tag{4.10}$$

Kai $t = t_0$, populiacija $p(t_0) = p_0$. Tarkime, $p_0 \neq 0$ ir $p_0 \neq p^*$. Tada

$$\Big|\frac{p_0}{p_0 - p^*}\Big|^{1/p^*k} = Ce^{t_0}$$

ir pastarąją formulę galima perrašyti taip

$$\Big|\frac{p(t)}{p_0}\Big| = \Big|\frac{p(t) - p^*}{p_0 - p^*}\Big| e^{(t-t_0)kp^*}.$$

Iš (4.10) formulės išplaukia, kad $p(t) \neq 0$ ir $p(t) \neq p^*, \forall t \geq t_0$. Todėl reiškiniai $p(t)/p_0$ ir $(p(t) - p^*)/(p_0 - p^*)$ yra teigiami ir modulio ženklų galime nerašyti

$$\frac{p(t)}{p_0} = \frac{p(t) - p^*}{p_0 - p^*} e^{(t-t_0)kp^*}.$$

Išsprendę šią lygtį p atžvilgiu, gausime

$$p(t) = \frac{p^* p_0}{p_0 + (p^* - p_0)e^{-kp^*(t-t_0)}}, \quad \forall t \in R, \tag{4.11}$$

Taigi, jeigu $p_0 \neq 0$ ir $p_0 \neq p^*$, tai funkcija p, apibrėžta (4.11) formule, yra vienintelis Koši uždavinio

$$\dot{p} = kp(p^* - p), \quad p(t_0) = p_0$$

sprendinys. Kai $p_0 \in (0, p^*)$, taip apibrėžta funkcija p yra didėjanti, o kai $p_0 > p^*$ – mažėjanti. Be to, kai $t \to \infty$, $p(t) \to p^*$. Funkcijos p antroji išvestinė

$$\ddot{p}(t) = \frac{d}{dt}\big(kp(p^* - p)\big) = k\dot{p}(p^* - 2p) = k^2 p(p^* - p)(p^* - 2p).$$

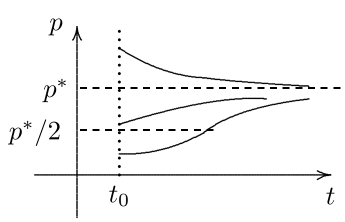
Iš čia gauname, kad

$$\ddot{p} > 0, \quad \text{kai} \quad p \in (0, p^*/2) \cup (p^*, +\infty)$$

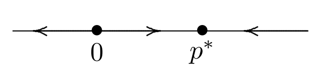
ir

$$\ddot{p} < 0, \quad \text{kai} \quad p \in (p^*/2, p^*).$$

Aprėžto augimo lygties integralinių kreivių kokybinis vaizdas, priklausomai nuo pradinės reikšmės p_0, ir fazinis portretas pavaizduoti 4.16, 4.17 paveikslėliuose.



4.16 pav.



4.17 pav.

2. Analogiškai nagrinėjamas sudėtingesnis dviejų populiacijų sąveikos modelis. Tegu $p_1(t)$ yra kokios nors rūšies aukų, o $p_2(t)$ – grobuonių populiacijos (pvz. kiškiai

– lapės). Tada kiekviena populiacija turi tenkinti "augimo lygtį," kurios dešinioji pusė turi priklausyti ir nuo priešingos populiacijos, t.y.

$$\dot{p}_1/p_1 = f_1(t, p_1, p_2), \quad \dot{p}_2/p_2 = f_2(t, p_1, p_2), \tag{4.12}$$

Taigi gavome dviejų susijusių pirmosios eilės diferencialinių lygčių sistemą. Tarkime, kad grobuonis maitinasi tik aukomis, o aukų maistas yra neribotas. Toks dviejų populiacijų modelis vadinasi *Räuber–Beute* modeliu. Išskirsime du galimus šio modelio atvejus.

Tarkime, kai grobuonių nėra, aukų populiacijos santykinis augimo greitis pastovus, o kai grobuonys yra, šis greitis mažėja proporcingai grobuonių skaičiui, t.y.

$$f_1(t, p_1, p_2) = \alpha_1 - \nu_2 p_2 = \nu_2(p_2^* - p_2), \quad \nu_2, p_2^* > 0;$$

čia ν_2, p_2^* – teigiamos konstantos, $\alpha_1 = \nu_2 p_2^*$. Be to, tegu grobuonių populiacijos santykinis nykimo greitis yra pastovus, kai nėra aukų, o, kai aukos yra, grobuonių populiacijos santykinis augimo greitis yra proporcingas aukų skaičiui, t.y.

$$f_2(t, p_1, p_2) = \nu_1 p_1 - \alpha_2 = \nu_1(p_1 - p_1^*);$$

čia ν_1, p_1^* – teigiamos konstantos, $\alpha_2 = \nu_1 p_1^*$. Tada (4.12) lygčių sistemą galima perrašyti taip

$$\dot{p}_1 = \nu_2(p_2^* - p_2)p_1, \quad \dot{p}_2 = \nu_1(p_1 - p_1^*)p_2. \tag{4.13}$$

Pastaroji sistema vadinama *Voltera–Lotka* lygčių sistema. Ji turi du pusiausvyros taškus: $(0, 0)$ ir (p_1^*, p_2^*). Linearizavę sistemą šių taškų aplinkose, gausime dvi matricas

$$f_p(0,0) = \begin{pmatrix} \nu_2 p_2^* & 0 \\ 0 & -\nu_1 p_1^* \end{pmatrix}, \qquad f_p(p_1^*, p_2^*) = \begin{pmatrix} 0 & -\nu_2 p_1^* \\ \nu_1 p_2^* & 0 \end{pmatrix}$$

Pirmosios matricos tikrinės reikšmės $\lambda_1 = \nu_2 p_2^* > 0, \lambda_2 = -\nu_1 p_1^* < 0$ yra nelygios nuliui ir skirtingų ženklų. Pagal 3.14 teoremą ją atitinkantis pusiausvyros taškas $(0, 0)$ yra nestabilus (balno taškas). Ašys p_1 ir p_2 yra jo separatrisės. Be to, ašis p_2 yra stabili. Antrosios matricos tikrinės reikšmės $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\nu_2\nu_1 p_1^* p_2^*}$ yra grynai menamos. Todėl čia reikalingas papildomas tyrimas.

Padauginę pirmąją (4.13) sistemos lygtį iš ν_1, o antrąją iš ν_2 ir gautus reiškinius sudėję, gausime lygtį

$$\nu_1\dot{p}_1 + \nu_2\dot{p}_2 = \nu_2\nu_1 p_2^* p_1 - \nu_2\nu_1 p_1^* p_2.$$

Kai $p_1 \neq 0$ ir $p_2 \neq 0$ (4.13) sistemos lygtis galima perrašyti taip:

$$\nu_2 p_2 = \nu_2 p_2^* - \frac{\dot{p}_1}{p_1}, \quad \nu_1 p_1 = \nu_1 p_1^* + \frac{\dot{p}_2}{p_2}.$$

Todėl reiškinys

$$\nu_1\dot{p}_1 + \nu_2\dot{p}_2 = \nu_2 p_2^*\Big(\nu_1 p_1^* + \frac{\dot{p}_2}{p_2}\Big) - \nu_1 p_1^*\Big(\nu_2 p_2^* - \frac{\dot{p}_1}{p_1}\Big).$$

Suprastinę vienodus narius, gausime lygtį

$$\nu_1 \dot{p}_1 + \nu_2 \dot{p}_2 = \nu_1 p_1^* \frac{\dot{p}_1}{p_1} + \nu_2 p_2^* \frac{\dot{p}_2}{p_2}.$$

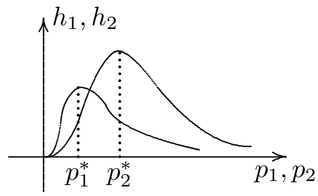
Jos bendrąjį integralą

$$\nu_1 p_1 + \nu_2 p_2 = \nu_1 p_1^* \ln p_1 + \nu_2 p_2^* \ln p_2 - \ln c$$

galima perrašyti taip:

$$h_1(p_1) \cdot h_2(p_2) = c;$$

čia $h_1(p_1) = p_1^{\nu_1 p_1^*} e^{-\nu_1 p_1}$, $h_2(p_2) = p_2^{\nu_2 p_2^*} e^{-\nu_2 p_2}$, c – laisva konstanta. Funkcijos h_1, h_2 yra to paties pavidalo. Intervale $(0, \infty)$ jos yra teigiamos ir turi vienintelį maksimumą taškuose p_1^*, p_2^* (žr. 4.18 pav.).



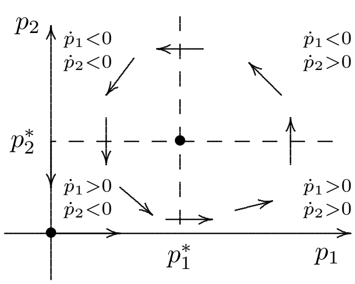
4.18 pav.

Todėl šių funkcijų sandauga

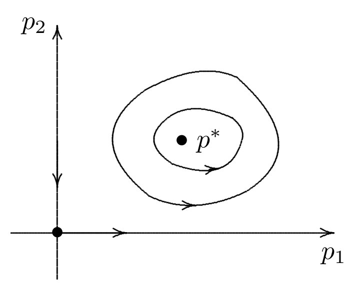
$$H(p) = h_1(p_1) \cdot h_2(p_2), \quad p_1 > 0,\, p_2 > 0$$

taip pat yra teigiama ir turi vienintelį maksimumą taške $p^* = (p_1^*, p_2^*)$. Be to, jeigu bent vienas iš kintamųjų p_1, p_2 artėja į 0 arba į ∞, tai $H(p) \to 0$. Iš čia išplaukia, kad funkcijos H lygio kreivės, apibrėžtos lygtimi $H(p) = c$, yra uždaros kreivės, supančios tašką p^*. Tačiau šios kreivės yra (4.13) sistemos trajektorijos. Taigi taškas p^* yra šios sistemos centro taškas.

Voltera–Lotka lygčių sistemos krypčių laukas pavaizduotas 4.19, o fazinis portretas – 4.20 paveikslėliuose.



4.19 pav.



4.20 pav.

Iš bendros teorijos žinoma, kad uždaras trajektorijas atitinkančius sprendinius galima pratęsti į visą realių skaičių ašį ir gauti sprendiniai yra periodinės funkcijos, t.y. egzistuoja toks teigiamas skaičius ω, kad

$$p(t + \omega) = p(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Tai reiškia, kad kiekviena iš populiacijų p_1, p_2 periodiškai svyruoja. Tiksliau, jeigu plėšrūnų yra pakankamai mažai ($p_2 < p_2^*$), tai aukų skaičius didėja, nepriklausomai nuo to ar plėšrūnų daugėja ar mažėja. Tačiau kai plėšrūnų skaičius yra pakankamai didelis ($p_2 > p_2^*$), tai aukų skaičius mažėja. Analogiška situacija yra ir su aukomis. Jeigu aukų skaičius yra pakankamai mažas ($p_1 < p_1^*$), tai plėšrūnų skaičius mažėja, nepriklausomai nuo to ar aukų daugėja ar mažėja. Tačiau kai aukų skaičius yra pakankamai didelis ($p_1 > p_1^*$), tai plėšrūnų skaičius auga.

Voltera–Lotka sistemą galima modifikuoti taip, kad aukų populiacijos augimas nebūtų pastovus tuo atveju, kai grobuonių nėra. Pagal analogiją su aprėžto augimo lygtimi sudarome sistemą

$$\dot{p}_1 = (\alpha_1 - \nu_1 p_2 - \gamma_1 p_1)p_1, \quad \dot{p}_2 = (\nu_2 p_1 - \alpha_2 - \gamma_2 p_2)p_2; \tag{4.14}$$

čia $\alpha_1, \alpha_2, \nu_1, \nu_2, \gamma_1, \gamma_2$ – teigiamos konstantos. Pastarosios sistemos pusiausvyros taškai $(0,0),\ (0, -\alpha_2/\gamma_2),\ (\alpha_1/\gamma_1, 0),\ (p_1^*, p_2^*)$ yra algebginių lygčių sistemos

$$\begin{cases} (\alpha_1 - \nu_1 p_2 - \gamma_1 p_1)p_1 = 0, \\ (\nu_2 p_1 - \alpha_2 - \gamma_2 p_2)p_2 = 0 \end{cases}$$

sprendiniai. Trečiasis taškas neturi biologinės prasmės ir čia jo nenagrinėsime. Ketvirtasis taškas su koordinatėmis

$$p_1^* = \frac{\alpha_1\gamma_2 + \alpha_2\nu_1}{\gamma_1\gamma_2 + \nu_1\nu_2}, \quad p_2^* = \frac{\alpha_1\nu_2 - \alpha_2\gamma_1}{\gamma_1\gamma_2 + \nu_1\nu_2}$$

yra tiesių

$$l_1 : \alpha_1 - \nu_1 p_2 - \gamma_1 p_1 = 0, \quad l_2 : \nu_2 p_1 - \alpha_2 - \gamma_2 p_2 = 0$$

sankirtos taškas. Jis turi biologinę prasmę tik tuo atveju, kai $\alpha_1\nu_2 - \alpha_2\gamma_1 \geq 0$. Atkreipsime dėmesį į tai, kad tiesės l_1 taškuose $\dot{p}_1 = 0$, t.y. krypties vektoriai yra lygiagretūs p_2 ašiai, o tiesės l_2 taškuose $\dot{p}_2 = 0$, t.y. krypties vektoriai yra lygiagretūs p_1 ašiai.

Linearizavę (4.14) sistemą taško $p = (p_1, p_2)$ aplinkoje, gausime matricą

$$A(p) = \begin{pmatrix} \alpha_1 - \nu_1 p_2 - 2\gamma_1 p_1 & -\nu_1 p_1 \\ \nu_2 p_2 & \nu_2 p_1 - \alpha_2 - 2\gamma_2 p_2 \end{pmatrix}.$$

Imdami p pusiausvyros taškus, gausime matricas

$$A(0,0) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & -\alpha_2 \end{pmatrix}, \quad A\Big(0, -\frac{\alpha_2}{\gamma_2}\Big) = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \dfrac{\nu_1\alpha_2}{\gamma_2} & 0 \\ -\dfrac{\nu_2\alpha_2}{\gamma_2} & \alpha_2 \end{pmatrix},$$

$$A\Big(\frac{\alpha_1}{\gamma_1}, 0\Big) = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & -\dfrac{\nu_1\alpha_1}{\gamma_1} \\ 0 & \dfrac{\nu_2\alpha_1}{\gamma_1} - \alpha_2 \end{pmatrix}, \quad A(p_1^*, p_2^*) = \begin{pmatrix} -\gamma_1 p_1^* & -\nu_1 p_1^* \\ \nu_2 p_2^* & -\gamma_2 p_2^* \end{pmatrix}.$$

Matricos $A(0,0)$ viena iš tikrinių reikšmių yra teigiama, o kita neigiama. Matricos $A(0, -\alpha_2/\gamma_2)$ abi tikrinės reikšmės yra teigiamos. Todėl pusiausvyros taškai $(0,0)$

ir $(0, -\alpha_2/\gamma_2)$ yra nestabilūs. Matricos $A(\alpha_1/\gamma_1, 0)$ tikrinės reikšmės $\lambda_1 = -\alpha_1$, $\lambda_2 = \nu_2\alpha_1/\gamma_1 - \alpha_2$. Todėl pusiausvyros taškas $(\alpha_1/\gamma_1, 0)$ yra asimptotiškai stabilūs, kai $\lambda_2 < 0$ ir nestabilus, kai $\lambda_2 > 0$. Matricos $A(p_1^*, p_2^*)$ tikrinės reikšmės

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(\gamma_1 p_1^* + \gamma_2 p_2^*) \pm \sqrt{(\gamma_1 p_1^* + \gamma_2 p_2^*)^2 - 4p_1^* p_2^*(\gamma_1\gamma_2 + \nu_1\nu_2)}}{2}. \tag{4.15}$$

Tiesių l_1, l_2 padėtį p_1, p_2 plokštumoje nusako keturi parametrai: jų sankirtos taškų koordinatės p_1^*, p_2^* ir krypties koeficientai $k_1 = -\gamma_1/\nu_1 < 0$, $k_2 = \nu_2/\gamma_2 > 0$. Taigi du parametrai γ_1 ir γ_2 yra laisvi. Tegu

$$p_1^* = \frac{r}{\gamma_1}\cos\varphi, \quad p_2^* = \frac{r}{\gamma_2}\sin\varphi, \quad r > 0, \quad \varphi \in (0, \pi/2).$$

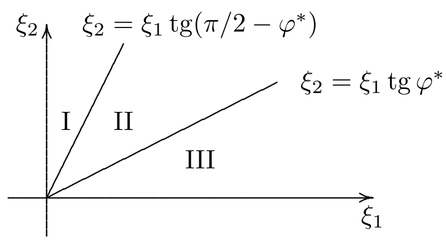
Tada reiškinys

$$D = (\gamma_1 p_1^* + \gamma_2 p_2^*)^2 - 4p_1^* p_2^*(\gamma_1\gamma_2 + \nu_1\nu_2) = r^2\big(1 - (1 - 2k_2/k_1)\sin 2\varphi\big).$$

Jis yra teigiamas, kai $\varphi \in (0, \varphi^*) \cup (\pi/2 - \varphi^*, \pi/2)$ ir neigiamas, kai $\varphi \in (\varphi^*, \pi/2 - \varphi^*)$, $\varphi^* = \frac{1}{2}\arcsin\big(1/(1 - 2k_2/k_1)\big)$. Tegu $\xi_1 = p_1^*\gamma_1$, $\xi_2 = p_2^*\gamma_2$. Tiesės

$$\xi_2 = \xi_1 \operatorname{tg}\varphi^*, \quad \xi_2 = \xi_1 \operatorname{tg}(\pi/2 - \varphi^*)$$

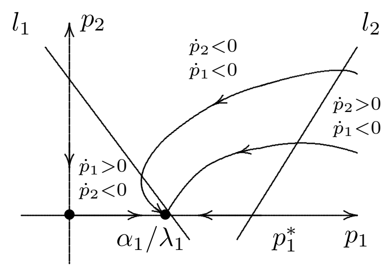
dalina pirmąjį plokštumos ξ_1, ξ_2 ketvirtį į tris sektorius (žr. 4.20 pav.).



4.20 pav.

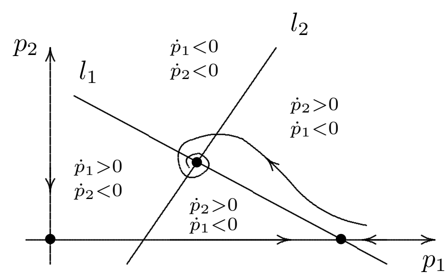
Jeigu taškas (ξ_1, ξ_2) patenka į I arba į III sektorių, tai $D > 0$ ir tikrinės reikšmės $\lambda_{1,2}$ yra realios. Be to, iš (4.15) formulės išplaukia, kad abi jos yra neigiamos. Todėl tokioms ξ_1, ξ_2 reikšmėms pusiausvyros taškas p_1^*, p_2^* yra asimptotiškai stabilus (mazgo taškas). Jeigu taškas (ξ_1, ξ_2) patenka į II sektorių, tai $D < 0$ ir tikrinės reikšmės $\lambda_{1,2}$ yra kompleksiškai jungtinės. Be to, iš (4.15) formulės išplaukia, kad jų realiosios dalys yra neigiamos. Todėl tokioms ξ_1, ξ_2 reikšmėms pusiausvyros taškas p_1^*, p_2^* yra asimptotiškai stabilus (židinys). Jeigu tiesės l_1, l_2 kertasi pirmame ketvirtyje, t.y. $\alpha_1\nu_2 - \alpha_2\gamma_1 > 0$, tai tikrinių reikšmių $\lambda_{1,2}$ realiosios dalys yra neigiamos. Šiuo atveju pusiausvyros taškas (ξ_1, ξ_2) yra asimptotiškai stabilus.

Jeigu tiesės l_1 ir l_2 pirmame ketvirtyje nesikerta, tai (4.14) sistemos fazinis portretas pavaizduotas 4.21 paveikslėlyje.



4.21 pav.

Jeigu tiesės l_1, l_2 kertasi pirmame ketvirtyje ir tikrinės reikšmės $\lambda_{1,2}$ yra kompleksiškai jungtinės, tai (4.14) sistemos fazinis portretas pavaizduotas 4.22 paveikslėlyje



1.22 pav.

Iš atlikto tyrimo išplaukia, kad net nežymus Voltera—Lotka lygčių sistemos modifikavimas gali iššaukti esminį šios sistemos fazinio portreto pokytį. Iš tikrųjų (4.14) sistema jau neturi centro taško ir jos trajektorijos nėra uždaros. Tai yra charakteringa centrų savybė. Sakoma, kad centrai yra struktūriškai nestabilūs (žr. [4]). Kita galimybė atsirasti uždaroms trajektorijoms (periodiniams svyravimams), yra "ribinis ciklas." Ribiniai ciklai yra struktūriškai stabilūs. Jie neturi tendencijos išnykti, nežymiai deformuojant sistemą. Pateiksime pavyzdį sistemos kurioje, tinkamai parinkus parametrų reikšmes, egzistuoja ribinis ciklas.

3. *Cholingo—Tenerio modelis.* Tarkime, kai grobuonių nėra aukų santikynis augimo greitis $\dot{p}_1/p_1$ lygus $\alpha_1 - \gamma_1 p_1$, o kai grobuonys yra, šis greitis mažėja proporcingai jų skaičiui, t.y. dydžiu $\nu_1 p_2$. Bendru atveju proporcingumo koeficientas nėra pastovus ir priklauso nuo aukų skaičiaus. Iš tikrųjų, realiame gyvenime sotūs grobuonys aukų nežudo. Todėl kuo daugiau yra aukų, tuo santykinai mažiau jų reikia nužudyti vienam grobuoniui, kad pasisotintų. Taigi galime tarti, kad proporcingumo koeficientas ν_1 yra mažėjanti kintamojo p_1 funkcija. Be to, pagal biologinę prasmę, ji yra teigiama. Apibrėžkime ją taip:

$$\nu_1(p_1) = \frac{k}{d + p_1};$$

čia k ir d – teigiamos konstantos.

Vienam grobuoniui išgyventi reikalingas tam tikras aukų skaičius. Tarkime, šis skaičius lygus a. Tada aukų populiacija p_1 gali išmaitinti p_1/a grobuonių. Taigi grobuonių populiacija p_2 neturi viršyti šio kritinio skaičiaus. Tarkime toliau, kad grobuonių populiacijos santykinis augimo greitis $\dot{p}_2/p_2$ didėja, kai $p_2 < p_1/a$ ir mažėja, kai $p_2 > p_1/a$. Tiksliau tegu šis greitis lygus $\alpha_2(1 - ap_2/p_1)$, α_2 – teigiama konstanta. Tada populiacijų p_1, p_2 kitimo dinamiką apibrėžia lygtys:

$$\dot{p}_1 = \big(\alpha_1 - \gamma_1 p_1 - \nu_1(p_1)p_2\big)p_1, \quad \dot{p}_2 = \alpha_2\big(1 - ap_2/p_1\big)p_2. \tag{4.16}$$

Tegu

$$l_1 : \alpha_1 - \gamma_1 p_1 - \nu_1(p_1)p_2 = 0, \quad l_2 : p_1 - ap_2 = 0.$$

Kreivė l_1 yra parabolė, kurios šakos nukreiptos žemyn, o viršūnės koordinatės

$$\bar{p}_1 = \frac{1}{2}\big(\alpha_1/\gamma_1 - d\big), \quad \bar{p}_2 = \frac{\gamma_1}{4k}\big(\alpha_1/\gamma_1 + d\big)^2 > 0.$$

Ji kerta ašį p_1 taškuose $(-d, 0)$, $(\alpha_1/\gamma_1, 0)$. Kreivė l_2 yra tiesė, einanti per koordinačių pradžią, su krypties koeficientu $1/a$. Pirmame ketvirtyje

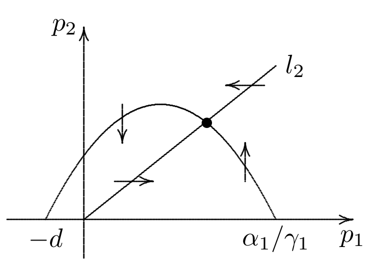
$$p_1 > 0, p_2 > 0$$

yra vienintelis šių kreivių sankirtos taškas (p_1^*, p_2^*). Jo koordinatės

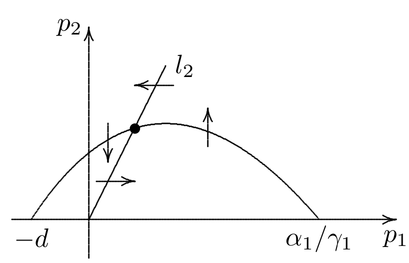
$$p_1^* = \frac{1}{2}\big(\alpha_1/\gamma_1 - d - k/a\gamma_1\big)p_1 + \frac{1}{2}\sqrt{\big(\alpha_1/\gamma_1 - d - k/a\gamma_1\big)^2 + 4d\alpha_1/\gamma_1},$$

$$p_2^* = \frac{1}{2a}\big(\alpha_1/\gamma_1 - d - k/a\gamma_1\big)p_1 + \frac{1}{2a}\sqrt{\big(\alpha_1/\gamma_1 - d - k/a\gamma_1\big)^2 + 4d\alpha_1/\gamma_1}.$$

Atvejai, kai $p_1^* > \bar{p}_1$ ir $p_1^* < \bar{p}_1$ pavaizduoti 4.23 ir 4.24 paveikslėliuose.



4.23 pav.



4.24 pav.

Atkreipsime dėmesį, kad parabolės l_1 taškuose $\dot{p}_1 = 0$, o tiesės l_2 taškuose $\dot{p}_2 = 0$.

Vietoje kintamųjų p_1, p_2 apibrėžkime naujus kintamuosius

$$x_1 = p_1/p_1^*, \quad x_2 = p_2/p_2^*.$$

Tada (4.16) sistemą galima perrašyti taip:

$$\dot{x}_1 = \big(\alpha_1 - \gamma_1^* x_1 - \frac{k/a}{d^* + x_1}x_2\big)x_1, \quad \dot{x}_2 = \alpha_2(1 - x_2/x_1)x_2; \tag{4.17}$$

čia $\gamma_1^* = \gamma_1 p_1^*$, $d^* = d/p_1^*$. Po tokios transformacijos kreivės l_1, l_2 pereis į kreives

$$l_1^* : \alpha_1 - \gamma_1^* x_1 - \frac{k/a}{d^* + x_1} x_2 = 0, \quad l_2^* : x_2 = x_1.$$

Parabolė l_1^* kerta koordinačių ašį x_1 taškuose $(-d^*, 0)$ ir $(\alpha_1/\gamma^*, 0)$. Jos viršūnės koordinatės

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{2}\big(\alpha_1/\gamma_1^* - d^*\big), \quad \bar{x}_2 = \frac{a\gamma_1^*}{4k}\big(\alpha_1/\gamma_1^* + d^*\big)^2 > 0.$$

Parabolės l_1^* ir tiesės l_2^* sankirtos taškas $x^* = (1,1)$ yra vienintelis (4.17) sistemos pusiausvyros taškas su teigiamomis koordinatėmis.

Linearizavę (4.17) sistemą taško $x = (x_1, x_2)$ aplinkoje, gausime matricą

$$A(x) = \begin{pmatrix} \alpha_1 - 2\gamma_1^* x_1 - \frac{k/a}{d^*+x_1} x_2 + \frac{k/a}{(d^*+x_1)^2} x_1 x_2 & -\frac{k/a}{d^*+x_1} x_1 \\ \alpha_2 x_2^2 / x_1^2 & \alpha_2 - 2\alpha_2 x_2/x_1 \end{pmatrix}.$$

Pusiausvyros taške x^* matrica

$$A(x^*) = \begin{pmatrix} -\gamma_1^* + \frac{k/a}{(d^*+1)^2} & -\frac{k/a}{d^*+1} \\ \alpha_2 & -\alpha_2 \end{pmatrix}.$$

Šios matricos determinantas

$$\det\{A(x^*)\} = \alpha_1\Big(\gamma_1^* - \frac{k/a}{(d^*+1)^2} + \frac{k/a}{d^*+1}\Big) = \alpha_1\Big(\gamma_1^* + \frac{k/a}{(d^*+1)^2}\cdot d^*\Big) > 0.$$

Todėl pusiausvyros taškas x^* nėra balno taškas (žr. 2.2?? skyrelį ir 3.11?? ir 3.12?? teoremas). Matricos $A(x^*)$ pėdsakas

$$\operatorname{Tr} A(x^*) = -\gamma_1^* + \frac{k/a}{(d^*+1)^2} - \alpha_2$$

gali įgyti kaip teigiamas, taip ir neigiamas reikšmes. Todėl pusiausvyros taškas x^* gali būti arba mazgas, arba centras, arba židinys. Jeigu matricos $A(x^*)$ pėdsakas yra teigiamas, tai pusiausvyros taškas x^* yra nestabilus, o jeigu neigiamas, tai – stabilus. Matricos $A(x^*)$ tikrinės reikšmės

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}\big(q + \alpha_2\big) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\big(q+\alpha_2\big)^2 - 4\alpha_2 q r};$$

čia $q = \gamma_1^* - k/a(d^*+1)^2$, $r = k/a(d^*+1)$. Matricos $A(x^*)$ pėdsakas

$$\operatorname{Tr} A(x^*) = \lambda_1 + \lambda_2 = -(q + \alpha_2) > 0,$$

jeigu $\alpha_2 < -q$. Kadangi parametras α_2 yra teigiamas, tai pastaroji nelygybė turi prasmę tik tuo atveju, kai $q < 0$. Tačiau šią nelygybę galima perrašyti taip: $(\alpha_1/\gamma_1^* - d^*)/2 > 1$. Kartu galime tvirtinti, kad nelygybė $q < 0$ yra teisinga tada ir tik tada, kai pusiausvyros taškas x^* yra kairiau parabolės l_1^* viršūnės. Taigi nelygybė $\operatorname{Tr} A(x^*) > 0$ yra teisinga tik tuo atveju, kai pusiausvyros taškas x^* yra kairiau parabolės l_1^* viršūnės taško $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ (žr. 4.23 pav.) ir $\alpha_2 < -q$.

Reiškinys

$$\big(\operatorname{Tr} A(x^*)\big)^2 - 4 \det A(x^*) = (q + \alpha_2)^2 - 4\alpha_2 q r < 0,$$

jeigu

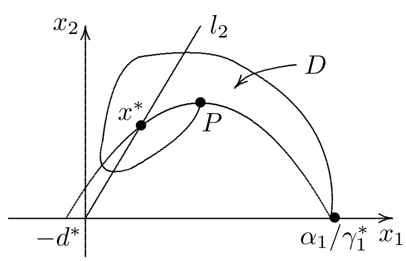
$$\alpha_2 \in \big(q + 2r - \sqrt{(q+2r)^2 - q^2}, q + 2r + \sqrt{(q+2r)^2 - q^2}\big).$$

Kadangi $q+2r-\sqrt{(q+2r)^2-q^2} < -q$, tai pastarasis intervalas yra netuščias. Kartu galime tvirtinti, kad egzistuoja tokios α_2 reikšmės, kurioms tikrinės reikšmės $\lambda_{1,2}$ yra kompleksinės ir kurių realiosios dalys yra teigiamos. Prie tokių parametro α_2 reikšmių pusiausvyros taškas x^* yra nestabilus židinys.

Tegu φ_t yra (4.17) sistemos evoliucijos operatorius. Tada trajektorija

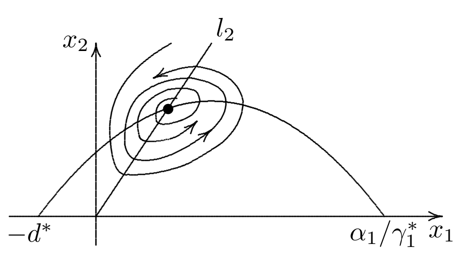
$$x = \varphi_t(\alpha_1/\gamma_1^*, 0), \quad t > 0$$

apeina pusiausvyros tašką x^* ir kerta parabolę l_1^* taške P (žr. 4.25 pav.).



4.25 pav.

Aibė D, esanti tarp šios trajektorijos ir parabolės l_1^* lanko, jungiančio taškus P ir $(\alpha_1/\gamma_1^*, 0)$ yra teigiamas invariantas. Tai reiškia, kad taškas $\varphi_t(x_0) \in D, \forall t \geq 0$, jeigu tik taškas $x_0 \in D$. Tarkime toliau, kad pusiausvyros taškas x^* yra nestabilus židinys. Tada egzistuoja tokia šio taško aplinka $U \subset D$, kad aibė $D \setminus U$ yra teigiamas invariantas. Tačiau šioje aibėje pusiausvyros taškų nėra. Todėl, pagal 3.26 teoremą, aibėje D/U egzistuoja ribinis ciklas (žr. 4.26 pav.).



4.26 pav.

4. *Konkuruojančios populiacijos.* Tarkime, dviejų konkuruojančių[1] populiacijų dinamikos lygtis galima užrašyti taip:

$$\dot{p}_i/p_i = f_i(p), \quad i = 1, 2; \tag{4.18}$$

čia p_i yra i-oji populiacija, o $f_i = g_i - m_i$ – jos santykinis augimo greitis. Konkuruojančių populiacijų sąveiką nusako tam tikros sąlygos, kurias turi tenkinti funkcijos f_i. Šių sąlygų pasirinkimą apsprendžia keliami uždaviniai. Norint atlikti teorinį tyrimą ir išanalizuoti visus galimus ekosistemos dinamikos variantus reikalaujama, kad funkcijos f_i tenkintų tam tikras bendras, turinčias biologinę prasmę, sąlygas (žr. pavyzdžiui [16]). Nagrinėjant realią ekosistemą funkcijos f_i yra konkretizuojamos. Tiksliau apibrėžiamos parametriniu pavidalu (į jas įeinantys parametrai dažniausiai turi tam tikrą biologinę prasmę). Yra žinoma gana daug tokių konkrečių konkuruojančių populiacijų modelių (žr.[16]). Vieną iš tokių modelių išnagrinėsime čia.

Tegu dvi panašios gyvūnų populiacijas p_1, p_2 konkuruoja tarpusavyje ir užima tam tikrą teritoriją, kurios resursai baigtiniai. Tada yra galimos keturios skirtingos jų konkurencijos baigtys:

1. Pirmoji populiacija išgyvena, o antroji išnyksta.
2. Antroji populiacija išgyvena, o pirmoji išnyksta.
3. Abi populiacijos išgyvena.
4. Abi populiacijos išnyksta.

Kiekvieną tokią baigtį atitinka pusiausvyros taškas. Todėl populiacijas p_1, p_2 modeliuojančios dinamikos lygtys turi turėti keturis izoliuotus pusiausvyros taškus. Taigi jos turi būti netiesinės. Išnagrinėsime vieną iš paprasčiausių dviejų konkuruojančių tarpusavyje populiacijų modelį.

Tarkime, kai nėra vidinės bei išorinės konkurencijos populiacijų p_1, p_2 santykiniai augimo greičiai $\dot{p}_1/p_1$, $\dot{p}_2/p_2$ yra pastovūs, o kai konkurencija yra, šie greičiai mažėja proporcingai populiacijų individų skaičiui. Tada populiacijų p_1, p_2 kitimą galima aprašyti netiesine sistema

$$\dot{p}_1 = (\alpha_1 - \gamma_1 p_1 - \nu_1 p_2)p_1, \quad \dot{p}_2 = (\alpha_2 - \nu_2 p_1 - \gamma_2 p_2)p_2; \tag{4.19}$$

čia $\alpha_1, \alpha_2, \nu_1, \nu_2, \gamma_1, \gamma_2$ – teigiami parametrai. Parametras α_i apibrėžia populiacijos p_i santykinį augimo greitį, kai nėra konkurencijos. Parametrai γ_i ir ν_i apibrėžia šio greičio mažėjimą, kai yra vidinė bei išorinė konkurencija.

Pastarosios sistemos pusiausvyros taškai $(0,0)$, $(0, \alpha_2/\gamma_2)$, $(\alpha_1/\gamma_1, 0)$, (p_1^*, p_2^*) yra algebginių lygčių sistemos

$$\begin{cases} (\alpha_1 - \gamma_1 p_1 - \nu_1 p_2)p_1 = 0, \\ (\alpha_2 - \nu_2 p_1 - \gamma_2 p_2)p_2 = 0 \end{cases}$$

[1]Terminas "konkurencija" gali turėti daug skirtingų aspektų. Jų čia nenagrinėsime. Sakydami, kad dvi populiacijos konkuruoja tarpusavyje, turėsime omenyje tai, kad kurios nors vienos populiacijos kitimas iššaukia priešingą kitos populiacijos kitimą.

sprendiniai. Ketvirtasis taškas su koordinatėmis

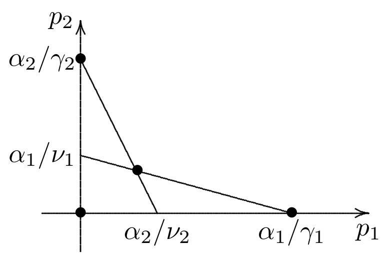
$$p_1^* = \frac{\alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\nu_1}{\gamma_1\gamma_2 - \nu_1\nu_2}, \quad p_2^* = \frac{\alpha_2\gamma_1 - \alpha_1\nu_2}{\gamma_1\gamma_2 - \nu_1\nu_2} \tag{4.20}$$

yra tiesių

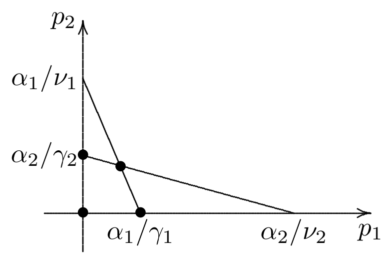
$$l_1 : \alpha_1 - \gamma_1 p_1 - \nu_1 p_2 = 0, \quad l_2 : \alpha_2 - \nu_2 p_1 - \gamma_2 p_2 = 0$$

sankirtos taškas. Tarkime, kad toks taškas yra vienintelis. Atkreipsime dėmesį į tai, kad tiesės l_1 taškuose $\dot{p}_1 = 0$, t.y. krypties vektoriai yra lygiagretūs p_2 ašiai, o tiesės l_2 taškuose $\dot{p}_2 = 0$, t.y. krypties vektoriai yra lygiagretūs p_1 ašiai.

Konkurentinėje kovoje abi populiacijos gali išgyventi tik tuo atveju, jeigu (4.19) sistema turi pusiausvyros tašką su abiem teigiamom koordinatėm. Pirmojo pusiausvyros taško abi koordinatės lygios nuliui. Antrojo ir trečiojo pusiausvyros taškų viena koordinatė lygi nuliui. Todėl abi populiacijos gali išgyventi tik tuo atveju, kai ketvirtojo taško koordinatės yra teigiamos, t.y. kai tiesės l_1, l_2 kertasi pirmame ketvirtyje (žr. 4.27, 4.28 pav.).



1.27 pav.



1.28 pav.

Iš (4.20) formulių matome, kad $p_1^* > 0$ ir $p_2^* > 0$, jeigu

$$\alpha_1\gamma_2 < \alpha_2\nu_1, \ \alpha_2\gamma_1 < \alpha_1\nu_2 \ \text{ir} \gamma_1\gamma_2 < \nu_1\nu_2$$

arba

$$\alpha_1\gamma_2 > \alpha_2\nu_1, \ \alpha_2\gamma_1 > \alpha_1\nu_2 \ \text{ir} \gamma_1\gamma_2 > \nu_1\nu_2.$$

Šios sąlygos apibrėžia tiesių l_1, l_2 tarpusavio padėtį plokštumoje. Todėl pakanka išnagrinėti atvejį, kai yra patenkinta kuri nors viena iš šių sąlygų. Tarkime, patenkinta pirmoji sąlyga (žr. 4.27 pav.).

Linearizavę (4.14) sistemą taško $p = (p_1, p_2)$ aplinkoje, gausime matricą

$$A(p) = \begin{pmatrix} \alpha_1 - \nu_1 p_2 - 2\gamma_1 p_1 & -\nu_1 p_1 \\ -\nu_2 p_2 & \alpha_2 - \nu_2 p_1 - 2\gamma_2 p_2 \end{pmatrix}.$$

Imdami p pusiausvyros taškus, gausime matricas

$$A(0,0) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}, \quad A\Big(0, \frac{\alpha_2}{\gamma_2}\Big) = \begin{pmatrix} \alpha_1 - \dfrac{\nu_1\alpha_2}{\gamma_2} & 0 \\ -\dfrac{\nu_2\alpha_2}{\gamma_2} & -\alpha_2 \end{pmatrix},$$

$$A\Big(\frac{\alpha_1}{\gamma_1},0\Big) = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & -\dfrac{\nu_1\alpha_1}{\gamma_1} \\ 0 & \alpha_2 - \dfrac{\nu_2\alpha_1}{\gamma_1} \end{pmatrix}, \quad A(p_1^*,p_2^*) = \begin{pmatrix} -\gamma_1 p_1^* & -\nu_1 p_1^* \\ -\nu_2 p_2^* & -\gamma_2 p_2^* \end{pmatrix}.$$

Matricos $A(0,0)$ tikrinės reikšmės $\lambda_1 = \alpha_1$, $\lambda_2 = \alpha_2$ yra teigiamos. Todėl pusiausvyros taškas $(0,0)$ yra nestabilus. Matricos $A(0,\alpha_2/\gamma_2)$ tikrinės reikšmės $\lambda_1 = -\alpha_2$, $\lambda_2 = (\alpha_1\gamma_2 - \nu_1\alpha_2)/\gamma_2$ yra neigiamos. Matricos $A(\alpha_1/\gamma_1, 0)$ tikrinės reikšmės $\lambda_1 = -\alpha_1$, $\lambda_2 = (\alpha_2\gamma_1 - \nu_2\alpha_1)/\gamma_1$ taip pat yra neigiamos. Todėl pusiausvyros taškas $(0,\alpha_2/\gamma_2)$ ir $(\alpha_1/\gamma_1, 0)$ yra asimptotiškai stabilus. Matricos $A(p_1^*, p_2^*)$ tikrinės reikšmės

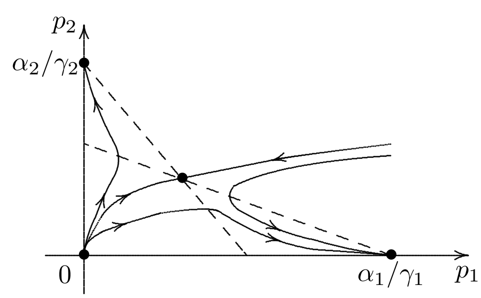
$$\lambda_{1,2} = \frac{-(\gamma_2 p_2^* + \gamma_1 p_1^*) \pm \sqrt{(\gamma_2 p_2^* + \gamma_1 p_1^*)^2 - 4p_1^* p_2^*(\gamma_1\gamma_2 - \nu_1\nu_2)}}{2}.$$

Kadangi $\gamma_1\gamma_2 - \nu_1\nu_2 < 0$, tai reiškinys

$$(\gamma_2 p_2^* + \gamma_1 p_1^*)^2 - 4p_1^* p_2^*(\gamma_1\gamma_2 - \nu_1\nu_2) > (\gamma_2 p_2^* + \gamma_1 p_1^*)^2.$$

Iš čia išplaukia, kad tikrinės reikšmės $\lambda_{1,2}$ yra skirtingų ženklų. Todėl pusiausvyros taškas (p_1^*, p_2^*) yra nestabilus (balno taškas).

Iš atlikto tyrimo matome, kad abiejų populiacijų išnykimas yra negalimas, nes $t \to \infty$ nėra nei vienos trajektorijos, kuri įeitų į koordinačių pradžią. Abiejų populiacijų išgyvenimas yra labai retas reiškinys, nes $t \to \infty$ į balno tašką įeina tik dvi trajektorijos (separatrisės). Visos likusios trajektorijos įeina į pusiausvyros tašką $(0, \alpha_2/\gamma_2)$ arba į pusiausvyros tašką $(\alpha_1/\gamma_1, 0)$. Jeigu trajektorija įeina į pirmąjį iš šių taškų, tai išnyksta populiacija p_1, o jeigu į antrąjį, tai populiacija p_2. Todėl galima tvirtinti, kad konkuruojant dviem populiacijom viena iš jų išnyksta. Fazinis (4.19) sistemos portretas pavaizduotas 4.29 paveikslėlyje.



4.29 pav.

LITERATŪRA

[1] H. Amann Paprastosios diferencialinės lygtys. Berlin; New York : de Gruyter, 1983 —497p. vok.

[2] A. Ambrazevičius Matematinės fizikos lygtys. Vilnius: Aldorija 1996 —380p.

[3] V. Arnoldas Paprastosios diferencialinės lygtys. M.: Nauka, 1975 —240p.

[4] V. Arnoldas Matematiniai klasikinės mechanikos metodai. M.: Nauka, 1979 — ???p.

[5] N. Bautinas, E. Leontevičius Sistemų plokštumoje kokybiniai tyrimo metodai ir būdai. M.: Nauka, 1976 —???p.

[6] J. Bibikovas Bendras paprastųjų diferencialinių lygčių kursas. L.: LVU, 1981 —232p.

[7] B.Gelbaum, J. Olmsted Kontrpavyzdžiai analizėje. M.: Mir, 1967 —252p. rus.

[8] B. Demidovičius Matematinės stabilumo teorijos paskaitos. M.: Nauka, 1967 — 472p.

[9] F.R. Gantmacheris Matricų teorija M., 1967 —???p.

[10] P. Golokvosčius Bendras paprastųjų diferencialinių lygčių kursas. V.: VVU, 1999 — 700p.

[11] P. Hartmanas, Paprastosios diferencialinės lygtys. - M.: Mir, 1970. - 720p. rus.

[12] A. Kodingtonas, N. Levinsonas Paprastųjų diferencialinių lygčių teorija. - M.: I*L 1958. - 476p. rus.

[13] L. A. Liusternikas, V. I. Sobolevas Funkcinės analizės elementai. - M.: Nauka, 1968. - 520p. rus.

[14] P.I. Lizorkinas Diferencialinių ir integralinių lygčių kursas su papildomais analizės skyriais. - M.: Nauka, 1981, 384 p. rus.

[15] I.G.Petrovskis Paprastųjų diferencialinių lygčių paskaitos. - M.: MGU, 1984, 296 p. rus.

[16] R.A. Poluektovas, J.A Pichas, I.A. Švitovas Dinaminiai ekologinių sistemų modeliai. - L.: Gidrometeoizdat, 1980, 288 p. rus.

[17] L.S. Pontriaginas Paprastosios diferencialinės lygtys. - M.: Nauka, 1982, 332 p. rus.

[18] V.K. Romanko Diferencialinių lygčių ir variacinio skaičiavimo kursas. - M-P.: Fizmatlit, 2000, 344 p. rus.