ALGIRDAS AMBRAZEVIČIUS

# FUNKCIJŲ ERDVĖS

Vilnius
2012

# TURINYS

# 1 SKYRIUS

## Sumuojamu funkcijų erdvės

### 1.1. APIBRŽIMAS IR PAGRINDINĖS SAVYBĖS

Tegu $\Omega$ yra sitis erdvėje $\mathbb{R}^n$, $p > 0$. Raide $\mathrm{L_p}(\Omega)$ žymėsime išmatuojamų srityje $\Omega$ funkcijų $u = u(x), x \in \Omega$ aibę tokiu, kad integralas[1]

$$\int\limits_{\Omega} |u(x)|^p \, dx < \infty.$$

Pakeitę funkcijos $u \in \mathrm{L_p}(\Omega)$ reikšmes kokioje nors nulinio mato taškų aibėje gausime funkciją, su kuria šis integralas įgyja tą pačią reikšmę. Todėl visas tokias funkcijas mes galime laikyti ekvivalenčiomis ir žymėti ta pačia raide $u$.

Jeigu $u \in \mathrm{L_p}(\Omega)$ ir $c \in \mathbb{R}$ arba $\mathbb{C}$, tai $cu \in \mathrm{L_p}(\Omega)$ . Be to, jeigu $u, v \in \mathrm{L_p}(\Omega)$, tai $u + v \in \mathrm{L_p}(\Omega)$ . Paskutinis teiginys išplaukia iš nelygybės

$$|a + b|^p \leq 2^p(|a|^p + |b|^p),$$

kuri yra teisinga su bet kokiais realiais skaičiais $a$ ir $b$. Taigi aibė $\mathrm{L_p}(\Omega)$ yra tiesinė. Skaičių

$$\|u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} = \Big(\int\limits_{\Omega} |u(x)|^p \, dx\Big)^{1/p}, \quad p \geq 1$$

vadinsime funkcijos $u \in \mathrm{L_p}(\Omega)$ norma. Taip apibrėžta norma tenkina visas normos apibrėžimo sąlygas:

1. $\|u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} \geq 0$ ir $\|u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} = 0$ tada ir tik tada, kai $u = 0$.
2. $\|cu\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} = c\|u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}, \quad \forall c \in \mathbb{C}$ ar $\mathbb{R}$.
3. $\|u + v\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} \leq \|u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} + \|v\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}$.

Paskutinė nelygybė vadinama Minkovskio nelygybe (žr. 1.2 skyrelį).

Jeigu $p \in (0, 1)$ aibė $\mathrm{L_p}(\Omega)$ nėra normuojama. Tačiau joje galima apibrėžti metrika

$$\rho(u, v) = \int\limits_{\Omega} |u(x) - v(x)|^p \, dx.$$

Sakysime išmatuojama srityje $\Omega$ funkcija $u$ yra iš esmės aprėžta šioje srityje, jeigu $|u(x)| \leq const$ beveik su visais $x \in \Omega$. Visų tokių funkcijų aibę žymėsime $\mathrm{L}_\infty(\Omega)$, o tikslų apatinį tokių konstantų rėžį $\operatorname{vrai\,sup}_{x\in\Omega} |u(x)|$ arba $\operatorname{ess\,sup}_{x\in\Omega} |u(x)|$. Skaičių

$$\|u\|_{\mathrm{L}_\infty(\Omega)} = \operatorname*{vrai\,sup}_{x\in\Omega} |u(x)|$$

[1] Funkcijos $|u|^p$ išmatuojamumas seka iš funkcijos $u$ išmatuojamumo.

vadinsime funkcijos $u \in \mathrm{L}_\infty(\Omega)$ norma. Tiesiogiai galima įsitikinti, kad taip apibrėžta norma tenkina visas normos apibrėžimo sąlygas.

Skaičių $p \in (1, \infty)$ atitinka skaičius $q \in (1, \infty)$ apibrėžtas formule

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Nagrinėjant erdvės $\mathrm{L_p}(\Omega)$ savybes lygiagrečiai patogu nagrinėti to paties tipo erdvę $\mathrm{L_q}(\Omega)$. Funkcijoms $u \in \mathrm{L_p}(\Omega)$, $v \in \mathrm{L_q}(\Omega)$ yra teisinga Helderio nelygybė (žr. 1.2 skyrelį)

$$\int\limits_\Omega |u(x)v(x)|\,dx \leq \|u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} \|u\|_{\mathrm{L_q}(\Omega)}.$$

Kai $p = 2$ erdvė $\mathrm{L}_2(\Omega)$ yra Hilberto erdvė. Joje skaliarinę sandaugą galima apibrėžti taip:

$$(u, v)_{\mathrm{L}_2(\Omega)} = \int\limits_\Omega u(x)\overline{v(x)}\,dx.$$

Funkcijoms iš erdvės $\mathrm{L}_2(\Omega)$ yra teisinga Schwarco nelygybė

$$|(u, v)_{\mathrm{L}_2(\Omega)}| \leq \|u\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)} \|v\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)}.$$

Ji išplaukia iš Helderio nelygybės.

**1.1 lema.** *Išmatuojama funkcija $u$ priklauso erdvei $\mathrm{L_p}(\Omega)$ tada ir tik tada, kai*

$$\sup\Big\{ \int\limits_\Omega |u(x)|v(x)\,dx : v(x) \geq 0, x \in \Omega, \|v\|_{\mathrm{L_q}(\Omega)} \leq 1 \Big\}$$

*yra baigtinis ir tada šis supremumas yra ekvivalentus $\|u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}$.*

Su visais $p > 0$ erdvė $\mathrm{L_p}(\Omega)$ yra pilna. Kai $p \in [1, \infty]$ erdvė $\mathrm{L_p}(\Omega)$ yra Banacho erdvė. Kai $p \in (1, \infty)$ erdė $\mathrm{L_p}(\Omega)$ yra separabili (t.y joje egzistuoja skaiti visur tiršta aibė). Erdvė $\mathrm{L}_\infty(\Omega)$ nėra separabili. Erdvė $\mathrm{C}(\overline{\Omega})$ yra erdvės $\mathrm{L}_\infty(\Omega)$ poerdvis. Erdvė $\mathrm{C}(\overline{\Omega})$ yra separabili, jeigu sritis $\Omega$ yra aprėžta.

## 1.2. KAI KURIOS DAŽNAI VARTOJAMOS NELYGYBĖS

1. Tegu $p > 1$. Tada $\forall a, b \in \mathbb{R}^1$ yra teisinga *Jungo nelygybė*:

$$|ab| \le \frac{1}{p}|a|^p + \frac{1}{p'}|b|^{p'}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1. \tag{1.1}$$

Iš jos lengvai išvedama nelygybė

$$|ab| \le \frac{\varepsilon}{p}|a|^p + \frac{\varepsilon^{-p'/p}}{p'}|b|^{p'}, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

kuri, kai $p = 2$, virsta tokia:

$$|ab| \le \frac{\varepsilon}{2}|a|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}|b|^2, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

2. Tegu $p > 1$. Tada $\forall u \in \mathrm{L_p}(\Omega)$, $\forall v \in \mathrm{L_q}(\Omega)$ yra teisinga *Helderio nelygybė*:

$$\Big|\int\limits_\Omega u(x)v(x)\,dx\Big| \le \|u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}\|v\|_{\mathrm{L_q}(\Omega)}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{1.2}$$

Pastaroji nelygybė išlieka teisinga, kai $p = 1, q = \infty$. Taikant matematinės indukcijos metodą, Jungo ir Helderio nelygybes galima apibendrinti. Tiksliau, yra teisingos tokios nelygybės:

$$|a_1 \cdot \ldots \cdot a_N| \le \sum_{i=1}^N \frac{1}{p_i}|a_i|^{p_i}, \quad \Big|\int\limits_\Omega u_1 \cdot \ldots \cdot u_N\,dx\Big| \le \prod_{i=1}^N \|u_i\|_{\mathrm{L_{p_i}}(\Omega)};$$

čia $a_i \in \mathbb{R}^1$, $u_i \in \mathrm{L_{p_i}}(\Omega)$, $p_i > 1$, $\forall i = 1, 2, \ldots, N$ ir $\sum\limits_{i=1}^N \frac{1}{p_i} = 1$.

Jeigu $p > 0, q > 0, 1/p + 1/q = 1/r$ ir $u \in \mathrm{L_p}(\Omega)$, $v \in \mathrm{L_q}(\Omega)$, tai $uv \in \mathrm{L_r}(\Omega)$ ir yra teisinga nelygybė

$$\|uv\|_{\mathrm{L_r}(\Omega)} \le \|u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}\|v\|_{\mathrm{L_q}(\Omega)}.$$

3. Tegu $p \ge 1$. Tada $\forall u, v \in \mathrm{L_p}(\Omega)$ yra teisinga *Minkovskio nelygybė*:

$$\|u + v\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} \le \|u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} + \|v\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}. \tag{1.3}$$

4. Tegu $\Omega$ yra aprėžta sritis erdvėje $\mathbb{R}^n$. Tada $\forall y \in \mathbb{R}^n$ yra teisinga nelygybė

$$\int\limits_\Omega |x - y|^{-\varepsilon}\,dx \le |S_1|\frac{(2d)^{n-\varepsilon}}{n - \varepsilon}, \quad 0 \le \varepsilon < n; \tag{1.4}$$

čia $d = \operatorname{diam}\Omega$.

5. Tegu $1 \le p < \infty$, $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$ ir $f$ – apibrėžta, mačioji aibėje $X \times Y$ funkcija. Tada yra teisinga *Minkovskio nelygybė kartotiniams integralams*

$$\Big(\int\limits_X \Big|\int\limits_Y f(x,y)\,dy\Big|^p\,dx\Big)^{1/p} \le \int\limits_Y \Big(\int\limits_X |f(x,y)|^p\,dx\Big)^{1/p}\,dy, \tag{1.5}$$

jeigu tik integralas (1.5) nelygybės dešinėje yra baigtinis.

Šią nelygybę įrodysime, kai abu integralai yra baigtiniai. Pažymėkime

$$F(x) = \Big|\int\limits_Y f(x,y)\,dy\Big|.$$

Tada

$$\int\limits_X F^p(x)\,dx \le \int\limits_X F^{p-1}(x)\int\limits_Y |f(x,y)|\,dydx =$$

$$= \int\limits_Y \int\limits_X |f(x,y)|F^{p-1}(x)\,dxdy \le$$

$$\le \int\limits_Y \Big(\int\limits_X |f(x,y)|^p\,dx\Big)^{1/p}\Big(\int\limits_X F^p(x)\,dx\Big)^{1/p'}\,dy.$$

Įvertindami pastarąjį integralą, pasinaudojome Helderio nelygybe. Suprastinę kairiąją ir dešiniąją gautos nelygybės puses, iš

$$\Big(\int\limits_X F^p(x)\,dx\Big)^{1/p'}$$

gausime (1.5) nelygybę.

6. Tegu $f$ yra pustiesėje $t > 0$ diferencijuojama funkcija ir jos išvestinė $f' \in \mathrm{L_p}(\mathbb{R}^1_+)$, $p > 1$. Tada yra teisinga *Hardžio nelygybė*

$$I \equiv \int\limits_0^\infty t^{-p}|f(t) - f(0)|^p\,dt \le \Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p \int\limits_0^\infty |f'(t)|^p\,dt. \tag{1.6}$$

Pagal Niutono–Leibnico formulę

$$t^{-1}(f(t) - f(0)) = t^{-1}\int\limits_0^t f'(\tau)\,d\tau = \int\limits_0^1 f'(st)\,ds.$$

Todėl

$$I = \int\limits_0^\infty \Big|\int\limits_0^1 f'(st)\,ds\Big|^p\,dt.$$

Pagal Minkovskio nelygybę

$$I^{1/p} \le \int\limits_0^1 \Big( \int\limits_0^\infty |f'(st)|^p \, dt \Big)^{1/p} ds = \int\limits_0^1 s^{-1/p} \, ds \Big( \int\limits_0^\infty |f'(t)|^p \, dt \Big)^{1/p}.$$

Apskaičiavę integralą nuo $s^{-1/p}$ ir pakėlę abi gautos nelygybės puses laipsniu $p$, gausime (1.6) nelygybę.

**1.1 teorema** (Interpoliacinė nelygybė). *Tegu* $1 \le p < q < r$ *ir skaičius* $\theta \in (0,1)$ *yra tokie, kad*

$$\frac{1}{q} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{r}.$$

*Tada jeigu* $u \in \mathrm{L_p}(\Omega) \cap \mathrm{L_r}(\Omega)$, *tai* $u \in \mathrm{L_q}(\Omega)$ *ir*

$$\|u\|_{\mathrm{L_q}(\Omega)} \le \|u\|^{\theta}_{\mathrm{L_p}(\Omega)} \|u\|^{1-\theta}_{\mathrm{L_r}(\Omega)}.$$

**1.2 teorema.** *Tegu* $\Omega$ *yra aprėžta sritis erdvėje* $\mathbb{R}^n$ *ir* $1 \le p \le q \le \infty$. *Tada jeigu* $u \in \mathrm{L_q}(\Omega)$, *tai* $u \in \mathrm{L_p}(\Omega)$ *ir yra teisinga nelygybė*

$$\|u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} \le |\Omega|^{1/p-1/q} \|u\|_{\mathrm{L_q}(\Omega)}.$$

# 2 SKYRIUS

# Apibendrintosios išvestinės ir Sobolevo erdvės

Klasikinėje dalinių išvestinių lygčių teorijoje nagrinėjamų lygčių sprendiniai yra ieškomi pakankamai glodžių funkcijų klasėje. Tačiau praktikškai dažnai susiduriama su tokiomis lygtimis, kurios negali turėti glodžių sprendinių, nors aprašo paprastus ir dažnai gamtoje pasitaikančius reiškinius. Pavyzdžiui, bangavimo lygtis

$$u_{tt} - a^2(x)u_{xx} = 0$$

su trūkiu koeficientu $a$ aprašo nevienalytės stygos svyravimą. Akivaizdu, kad tokios lygties sprendinys negali turėti tolydžių antrosios eilės išvestinių.

Iš pateikto pavyzdžio matome, kad nagrinėjant tokias dalinių išvestinių lygtis jų sprendiniams reikia suteikti kitą, platesnę prasmę. Tiksliau, sprendinių reikia ieškoti platesnėje funkcijų klasėje, kuriai priklausytų ir trūkios funkcijos. Kartu ši funkcijų klasė neturi būti labai plati. Ją reikia parinkti taip, kad apibendrintasis sprendinys būtų vienintelis. Be to, trūkios funkcijos neturi klasikinių išvestinių. Todėl reikia įvesti kitą (apibendrintą) išvestinės sąvoką.

Įvairūs apibendrintos išvestinės apibrėžimo variantai buvo siūlomi jau trečiame šio amžiaus dešimtmetyje. Tačiau tik ketvirto dešimtmečio pabaigoje S. L. Sobolevas įvedė apibendrintosios išvestinės sąvoką, kuri šiuo metu visuotinai priimta; apibrėžė funkcijų erdves $\mathrm{W}^{\mathrm{k}}_{\mathrm{p}}(\Omega)$, $\mathring{\mathrm{W}}^{\mathrm{k}}_{\mathrm{p}}(\Omega)$ ir nustatė pagrindinius tokių erdvių sąryšius. Erdvės $\mathrm{W}^{\mathrm{k}}_{\mathrm{p}}(\Omega)$, $\mathring{\mathrm{W}}^{\mathrm{k}}_{\mathrm{p}}(\Omega)$ plačiai naudojamos šiuolaikinių diferencialinių dalinių išvestinių lygčių teorijoje.

## 2.1. VIDUTINĖS FUNKCIJOS. JŲ SAVYBĖS

Tegu $\Omega$ yra sritis erdvėje $\mathbb{R}^n$, $u$ – sumuojama srityje $\Omega$ funkcija. Prilyginę ją nuliui srities $\Omega$ išorėje, gausime funkciją (ją žymėsime ta pačia raide), apibrėžtą visoje erdvėje $\mathbb{R}^n$. Kiekvienai tokiai funkcijai sukonstruosime vidutinių funkcijų seką, kurios elementai yra glodžios ir tam tikra prasme artimos $u$ funkcijos.

Tegu $\omega \in \mathrm{C}^\infty[0,\infty)$, $\omega(t) > 0$, $\forall t \in [0,1)$ ir $\omega(t) = 0$, $\forall\ t \in [1,\infty)$. Apibrėžkime funkcijų seką

$$\omega_\rho(x) = c\rho^{-n}\omega(\rho^{-2}|x|^2), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \rho > 0;$$

čia $c$ – teigiama konstanta. Integralas

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega_\rho(x)\,dx = c\rho^{-n}\int\limits_{|x|<\rho} \omega(\rho^{-2}|x|^2)\,dx =$$

$$= c\rho^{-n}|S_1|\int\limits_0^\rho \omega(\rho^{-2}|r|^2)r^{n-1}\,dr = c|S_1|\int\limits_0^1 \omega(t^2)t^{n-1}\,dt > 0$$

ir nepriklauso nuo parametro $\rho$. Parinkime konstantą $c$ taip, kad

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega_\rho(x)\,dx = 1, \quad \forall \rho > 0. \tag{2.1}$$

Su kiekvienu $\rho > 0$ funkcija $\omega_\rho \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ ir

$$\omega_\rho(x) > 0, \quad \text{kai} \quad |x| < \rho,$$

$$\omega_\rho(x) = 0, \quad \text{kai} \quad |x| \geq \rho.$$

Funkcija

$$u_\rho(x) = \int \omega_\rho(x-y)u(y)\,dy \tag{2.2}$$

yra vadinama funkcijos $u$ *vidutine funkcija*. Šioje formulėje specialiai nenurodėme integravimo srities. Kartais taip darysime ir ateityje. Galima manyti, kad integravimo sritis yra $\Omega$ arba net visa erdvė $\mathbb{R}^n$. Tačiau iš tikrųjų integravimo sritis yra

$$\Omega \cap \{y \in \mathbb{R}^n : |x-y| < \rho\},$$

nes funkcija $u$ yra lygi nuliui srities $\Omega$ išorėje, o funkcija $\omega_\rho(x-y) = 0$, kai $|x-y| \geq \rho$.

Išnagrinėsime pagrindines tokių funkcijų savybes.

1. Funkcija $\omega_\rho \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Be to, (2.2) formulėje integravimo sritis yra baigtinė. Todėl vidutinė funkcija $u_\rho \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ ir ją galima diferencijuoti po integralo ženklu:

$$D^\alpha u_\rho(x) = \int D_x^\alpha \omega_\rho(x-y)u(y)\,dy. \tag{2.3}$$

2. Tegu $x \in \mathbb{R}^n : \mathrm{dist}\{x, \Omega\} \geq \rho$. Tada (2.2) formulėje pointegralinis reiškinys lygus nuliui ir vidutinė funkcija $u_\rho(x) = 0$.

3. Tegu $u \in \mathrm{L_p}(\Omega),\ p \in [1, \infty]$. Tada

$$\|u_\rho\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} \leq \|u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}. \tag{2.4}$$

$\triangleleft$ Funkcija $\omega_\rho$ yra neneigiama. Todėl

$$|u_\rho(x)| \leq \int \omega_\rho(x-y)|u(y)|\,dy. \tag{2.5}$$

Kai $p = \infty$, (2.4) įvertis tiesiogiai išplaukia iš (2.5) nelygybės ir (2.1) formulės. Kai $p = 1$, šitas įvertis gaunamas integruojant (2.5) nelygybę sritimi $\Omega$. Tegu $p \in (1, \infty)$. Šiuo atveju

$$\omega_\rho(x-y)|u(y)| = \omega_\rho^{1/p'}(x-y)\omega_\rho^{1/p}(x-y)|u(y)|, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Pritaikę tokiai funkcijų sandaugai Helderio nelygybę bei (2.1) formulę gausime

$$|u_\rho(x)| \leq \left( \int \omega_\rho(x-y)|u(y)|^p\,dy \right)^{1/p}.$$

Pakėlę abi šios nelygybės puses $p$ laipsniu ir suintegravę sritimi $\Omega$, perrašysime gautą nelygybę taip:

$$\int\limits_\Omega |u_\rho(x)|^p\,dx \leq \int\limits_\Omega \int \omega_\rho(x-y)|u(y)|^p\,dydx.$$

Paskutinio integralo pointegralinė funkcija yra neneigiama. Todėl galime keisti integravimo tvarką. Be to,

$$\int \omega_\rho(x-y)\,dx \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega_\rho(x-y)\,dx = 1.$$

Taigi

$$\int\limits_\Omega |u_\rho(x)|^p\,dx \leq \int\limits_\Omega |u(y)|^p\,dx.$$

Iš šio įverčio išplaukia (2.4) nelygybė. $\triangleright$

4. Tegu $u \in \mathrm{L_p}(\Omega),\ p \in [1,\infty)$. Tada

$$\|u_\rho - u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} \to 0, \tag{2.6}$$

kai $\rho \to 0$.

$\triangleleft$ Pasinaudoję (2.1) formule, įvertinsime skirtumą

$$|u_\rho(x) - u(x)| = \left| \int \omega_\rho(x-y)\big(u(y)-u(x)\big)\,dy \right| \leq$$

$$\leq \int \omega_\rho(x-y)|u(y)-u(x)|\,dy. \tag{2.7}$$

Tegu $p > 1$. Pakartoję (2.4) nelygybės išvedimą, gausime

$$\int\limits_\Omega |u_\rho(x) - u(x)|^p\,dx \leq \int\limits_\Omega \int \omega_\rho(x-y)|u(y)-u(x)|^p\,dydx \leq$$

$$\leq \sup_{|z|<\rho} \|u(x+z) - u(x)\|^p_{\mathrm{L_p}(\Omega)}. \tag{2.8}$$

Toks pats įvertis yra teisingas ir kai $p = 1$. Tik, jį išvedant, nereikia taikyti Helderio nelygybės.

Iš (2.8) nelygybės išplaukia

$$\|u_\rho - u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} \le \sup_{|z|<\rho} \|u(x+z) - u(x)\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}.$$

Funkcija $u \in \mathrm{L_p}(\Omega)$. Todėl ji yra tolydi $\mathrm{L_p}$ prasme[1], t.y.

$$\sup_{|z|<\rho} \|u(x+z) - u(x)\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} \le \varepsilon(\rho)$$

ir $\varepsilon(\rho) \to 0$, kai $\rho \to 0$. Taigi

$$\|u_\rho - u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} \to 0, \quad \text{kai} \quad \rho \to 0. \triangleright$$

P a s t a b a. Kai $p = \infty$, tokios savybės nėra. Be galo diferencijuojamų funkcijų $u_\rho$ sekos riba erdvės $\mathrm{L}_\infty(\Omega)$ normoje yra tolydi funkcija. Jeigu $u \in \mathrm{C}(\overline{\Omega})$, tai natūralu tikėtis, kad $u_\rho \rightrightarrows u$ srityje $\overline{\Omega}$, kai $\rho \to 0$. Tačiau šita savybė bus teisinga tik tuo atveju, jei funkciją $u$ pratęsime į platesnę sritį išlaikydami glodumą. Pratęsę ją nuliu į srities $\Omega$ išorę, bendru atveju gausime trūkią funkciją. Todėl funkcijų $u \in \mathrm{C}(\Omega)$ vidutines funkcijas $u_\rho(x)$ nagrinėsime tik tokiems $x \in \Omega$, kuriems $\operatorname{dist}\{x, \partial\Omega\} > \rho$. Šiuo atveju (2.2) formulė išlieka teisinga nepriklausomai nuo funkcijos $u$ pratęsimo į platesnę sritį.

5. Tarkime, funkcija $u \in \mathrm{C}(\Omega)$. Tada

$$u_\rho(x) \rightrightarrows u(x), \quad \forall \Omega' : \overline{\Omega'} \subset \Omega.$$

$\triangleleft$ Tegu $\Omega' \subset \Omega$ yra bet kokia griežtai vidinė sritis. Tada iš (2.7) nelygybės ir (2.1) formulės išplaukia

$$\sup_{x\in\Omega'} |u_\rho(x) - u(x)| \le \sup_{x\in\Omega'} \sup_{|z|<\rho} |u(x+z) - u(x)| \to 0,$$

kai $\rho \to 0$. $\triangleright$

I š v a d a. Jeigu funkcija $u$ yra tolydi ir finiti srityje $\Omega$, tai

$$u_\rho(x) \rightrightarrows u(x), \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Įrodysime du teiginius.

**2.1 teorema.** *Aibė* $\mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$ *yra tiršta erdvėje* $\mathrm{L_p}(\Omega)$, $\forall p \in [1, \infty)$.

$\triangleleft$ Tegu $u \in \mathrm{L_p}(\Omega)$. Tada $\forall \varepsilon > 0$ egzistuoja tokia griežtai vidinė sritis $\Omega' \subset \Omega$, kad

$$\|u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega\setminus\Omega')} \le \varepsilon/2.$$

[1]Šio teiginio įrodymą galima rasti [?] knygoje.

Apibrėžkime funkcijų seką

$$u^\varepsilon(x) = \begin{cases} u(x), & x \in \Omega', \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega'. \end{cases}$$

Akivaizdu, kad

$$\|u^\varepsilon - u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} \leq \varepsilon/2.$$

Pakankamai mažiems $\rho > 0$ funkcija $u_\rho^\varepsilon \in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$. Pagal 4 vidutinių funkcijų savybę $u_\rho^\varepsilon \to u^\varepsilon$ erdvėje $\mathrm{L_p}(\Omega)$, kai $\rho \to 0$. Pasirinkime tokį skaičių $\rho$, kad

$$\|u_\rho^\varepsilon - u^\varepsilon\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} \leq \varepsilon/2.$$

Tada

$$\|u_\rho^\varepsilon - u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} \leq \|u_\rho^\varepsilon - u^\varepsilon\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} + \|u^\varepsilon - u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} \leq \varepsilon.$$

Taigi bet kokios funkcijos $u \in \mathrm{L_p}(\Omega)$ pakankamai mažoje aplinkoje yra funkcija iš erdvės $\mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$. $\triangleright$

2.2 teorema. *Tarkime, funkcija* $u \in \mathrm{L_{loc}}(\Omega)$ *ir integralas*

$$\int\limits_\Omega u\eta\, dx \ = 0, \quad \forall \eta \in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega).$$

*Tada* $u(x) = 0$ *b.v.* $x \in \Omega$.

$\triangleleft$ Tegu $\eta$ yra bet kokia aprėžta, mati ir finiti srityje $\Omega$ funkcija. Parodysime, kad

$$\int\limits_\Omega u\eta\, dx \ = 0.$$

Pakankamai mažiems $\rho$ funkcija $\eta_\rho \in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$. Pagal teoremos sąlygą

$$\int\limits_\Omega u\eta_\rho\, dx = 0. \tag{2.9}$$

Kadangi $\eta_\rho \to \eta$ erdvėje $\mathrm{L}(\Omega)$, kai $\rho \to 0$, tai egzistuoja tokia artėjančių į nulį teigiamų skaičių seka $\{\rho_k\}$, kad $\eta_{\rho_k}(x) \to \eta(x)$ b.v. $x \in \Omega$. Pagal 3 vidutinių funkcijų savybę

$$|\eta_{\rho_k}(x)| \leq |\eta(x)|$$

b.v. $x \in \Omega$. Todėl b.v. $x \in \Omega$

$$|u(x)\eta_{\rho_k}(x)| \leq |u(x)\eta(x)|.$$

Šios nelygybės dešinėje yra sumuojama srityje $\Omega$ funkcija. Todėl galime pasinaudoti Lebego teorema ir (2.9) formulėje pereiti prie ribos po integralo ženklu. Taigi

$$\int\limits_\Omega u\eta\, dx = 0;$$

čia $\eta$ – bet kokia aprėžta, mati ir finiti srityje $\Omega$ funkcija. Imkime šioje formulėje

$$\eta(x) = \begin{cases} \operatorname{sign} u(x), & x \in \Omega', \\ 0, & x \in \Omega \setminus \Omega'; \end{cases}$$

čia $\Omega' \subset \Omega$ – bet kokia griežtai vidinė sritis. Tada

$$\int_{\Omega'} |u(x)|\, dx = 0.$$

Iš šios lygybės išplaukia, kad $u(x) = 0$ b.v. $x \in \Omega'$. Kadangi sritį $\Omega' \subset \Omega$ pasirinkome laisvai, tai $u(x) = 0$ b.v. $x \in \Omega$. $\triangleright$

## 2.2. KOMPAKTIŠKUMO KRITERIJUS ERDVĖSE $\mathrm{L_p}(\Omega)$

Tegu $\Omega$ yra aprėžta erdvėje $\mathbb{R}^n$ sritis. Išvesdami kompaktiškumo kriterijų erdvėje $\mathrm{L_p}(\Omega)$, remsimės Hausdorfo ir Arcelà teoremomis:

2.3 teorema (Hausdorfo). *Tegu* $\mathrm{X}$ *– metrinė erdvė ir aibė* $K \subset \mathrm{X}$.

1. *Tam, kad aibė* $K$ *būtų sąlyginis kompaktas erdvėje* $\mathrm{X}$ *būtina, o jeigu* $\mathrm{X}$ *pilna erdvė, tai ir pakankama, kad* $\forall \varepsilon > 0$ *aibei* $K$ *egzistuotų baigtinis* $\varepsilon$ *tinklas.*
2. *Tegu* $\mathrm{X}$ *– pilna metrinė erdvė. Tada aibė* $K$ *yra sąlyginis kompaktas erdvėje* $\mathrm{X}$, *jeigu* $\forall \varepsilon > 0$ *aibei* $K$ *egzistuoja sąlygiškai kompaktinis* $\varepsilon$ *tinklas.*

2.4 teorema (Arcelà). *Aibė* $U$ *yra sąlyginis kompaktas erdvėje* $\mathrm{C}(\overline{\Omega})$ *tada ir tik tada, kai ji yra aprėžta, t.y.*

$$\sup_{u\in U}\|u\|_{\mathrm{C}(\overline{\Omega})} \le M,$$

*ir vienodai tolydi, t.y.*

$$\sup_{u\in U}\sup_{|z|<h}\|u(x+z)-u(x)\|_{\mathrm{C}(\overline{\Omega})} \to 0, \quad \text{kai } h \to 0.$$

Pagal Arcelà teoremą aibė $U$ yra sąlyginis kompaktas erdvėje $\mathrm{C}(\overline{\Omega})$ tada ir tik tada, kai:

1. Aibė $U$ yra aprėžta, t.y.

$$\sup_{u\in U}\|u\|_{\mathrm{C}(\overline{\Omega})} \le M.$$

2. Aibė $U$ yra vienodai tolydi, t.y.

$$\sup_{u\in U}\sup_{|z|<h}\|u(x+z)-u(x)\|_{\mathrm{C}(\overline{\Omega})} \to 0,$$

kai $h \to 0$.

Analogiškas teiginys yra teisingas ir erdvėse $\mathrm{L_p}(\Omega)$.

2.5 teorema. *Tegu* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *yra aprėžta sritis,* $p \in [1,\infty)$ *ir* $U \subset \mathrm{L_p}(\Omega)$. *Aibė* $U$ *yra sąlyginis kompaktas erdvėje* $\mathrm{L_p}(\Omega)$ *tada ir tik tada, kai:*

1. *Aibė* $U$ *yra aprėžta, t.y.*

$$\sup_{u\in U}\|u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} \le M.$$

2. *Aibė* $U$ *yra vienodai tolydi, t.y.*

$$\sup_{u\in U}\sup_{|z|<h}\|u(x+z)-u(x)\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} \to 0,$$

*kai* $h \to 0$.

$\triangleleft$ Tarkime, aibė $U$ yra sąlyginis kompaktas. Tada ji yra aprėžta. Jeigu aibė $U$ būtų neaprėžta, tai egzistuotų tokia funkcijų $u_n \in U$ seka, kad $\|u_n\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} \geq n$. Tačiau tai neįmanoma, nes iš tokios sekos negalima išskirti konverguojančio posekio.

Įrodysime, kad aibė $U$ yra vienodai tolydi. Fiksuokime skaičių $\varepsilon > 0$. Pagal Hausdorfo teoremą aibei $U$ egzistuoja baigtinis $\varepsilon/4$ tinklas

$$u_1, u_2, \ldots, u_N.$$

Kiekviena iš funkcijų $u_i \in \mathrm{L_p}(\Omega)$. Todėl ji yra tolydi $\mathrm{L_p}$ prasme, t.y.

$$\sup_{|z|<h} \|u_i(x+z) - u_i(x)\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} \to 0, \quad \forall i = 1, 2, \ldots, N,$$

kai $h \to 0$. Kartu egzistuoja toks skaičius $h > 0$, kad

$$\sup_{i=1,\ldots,N} \sup_{|z|<h} \|u_i(x+z) - u_i(x)\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} \leq \varepsilon/2.$$

Antra vertus, kiekvienai funkcijai $u \in U$ egzistuoja toks elementas $u_i$, kad

$$\|u - u_i\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} \leq \varepsilon/4.$$

Pagal Minkovskio nelygybę

$$\sup_{u\in U} \sup_{|z|<h} \|u(x+z) - u(x)\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} \leq \sup_{u\in U} \sup_{|z|<h} \|u(x+z) - u_i(x+z)\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} +$$

$$+ \sup_{i=1,\ldots,N} \sup_{|z|<h} \|u_i(x+z) - u_i(x)\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} + \sup_{u\in U} \sup_{|z|<h} \|u_i(x) - u(x)\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} \leq \varepsilon.$$

Taigi aibė $U$ yra vienodai tolydi.

Dabar tarkime, aibė $U$ yra aprėžta ir vienodai tolydi. Įrodysime, kad ji yra sąlyginis kompaktas erdvėje $\mathrm{L_p}(\Omega)$. Su kiekvienu fiksuotu $\rho > 0$ aibė

$$U_\rho = \{u_\rho : u \in U\}$$

yra sąlyginis kompaktas erdvėje $\mathrm{C}(\overline{\Omega})$. Iš tikrųjų

$$\sup_{u_\rho \in U_\rho} \sup_{x\in\Omega} |u_\rho(x)| = \sup_{u\in U} \sup_{x\in\Omega} \left| \int \omega_\rho(x-y) u(y)\, dy \right| \leq$$

$$\leq \|\omega_\rho\|_{\mathrm{L_{p'}}(\Omega)} \sup_{u\in U} \|u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} \leq C(\rho) M$$

ir

$$\sup_{u_\rho \in U_\rho} \sup_{|z|<h} \sup_{x\in\Omega} |u_\rho(x+z) - u_\rho(x)| =$$

$$= \sup_{u\in U} \sup_{|z|<h} \sup_{x\in\Omega} \left| \int \big[\omega_\rho(x+z-y) - \omega_\rho(x-y)\big] u(y)\, dy \right| \leq$$

$$\leq \sup_{x\in\Omega} \sup_{|z|<h} \|\omega_\rho(x+z-y) - \omega_\rho(x-y)\|_{\mathrm{L_{p'}}(\Omega)} \sup_{u\in U} \|u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} \leq$$

$$\leq M|\Omega|^{1/p'} \sup_{x,y\in\Omega} \sup_{|z|<h} |\omega_\rho(x+z-y) - \omega_\rho(x-y)| \to 0,$$

kai $h \to 0$. Kartu aibė $U_\rho$ yra sąlyginis kompaktas ir erdvėje $\mathrm{L_p}(\Omega)$ (nes kiekviena seka, konverguojanti erdvėje $\mathrm{C}(\overline{\Omega})$, konverguoja ir erdvėje $\mathrm{L_p}(\Omega)$). Be to,

$$\sup_{u\in U} \|u_\rho(x) - u(x)\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} \leq \sup_{u\in U} \sup_{|z|<h} \|u(x+z) - u(x)\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} \leq \varepsilon(\rho);$$

čia $\varepsilon(\rho) \to 0$, kai $\rho \to 0$. Vadinasi, aibė $U_\rho$ yra $\varepsilon(\rho)$ tinklas aibei $U$. Pagal Hausdorfo teoremą aibė $U$ yra sąlyginis kompaktas erdvėje $\mathrm{L_p}(\Omega)$. ▷

Analogiškas teiginys yra teisingas ir neaprėžtos srities atveju. Tiksliau, yra teisinga tokia teorema.

**2.6 teorema.** *Tegu $\Omega$ yra neaprėžta sritis ir $1 < p < \infty$. Aibė $U$ yra sąlyginis kompaktas erdvėje $\mathrm{L_p}(\Omega)$ tada ir tik tada, kai tenkinamos abi 2.5 teoremos sąlygos ir*

$$\sup_{u\in U} \|u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega\setminus B_R)} \leq \delta(R);$$

*čia $\delta(R) \to 0$, kai $R \to \infty$.*

## 2.3. APIBENDRINTOSIOS IŠVESTINĖS IR JŲ SAVYBĖS

Tegu $u$ ir $\eta$ yra glodžios srityje $\Omega$ funkcijos, iš kurių bent viena yra finiti. Tada yra teisinga integravimo dalimis formulė

$$\int_\Omega u\eta_{x_k}\,dx = -\int_\Omega u_{x_k}\eta\,dx. \tag{2.10}$$

Remiantis šia formule, įvedama viena iš pagrindinių šiuolaikinės matematinės fizikos sąvokų – apibendrintoji išvestinė.

A p i b r ė ž i m a s. Tegu $u, v \in \mathrm{L}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Funkcija $v$ yra funkcijos $u$ *apibendrintoji išvestinė* srityje $\Omega$ kintamojo $x_k$ atžvilgiu, jeigu

$$\int_\Omega u\eta_{x_k}\,dx = -\int_\Omega v\eta\,dx, \quad \forall\eta \in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega). \tag{2.11}$$

Kaip ir klasikiniu atveju, funkcijos $u$ apibendrintą išvestinę žymėsime $u_{x_k}$. Toks žymėjimas neturėtų kelti painiavos, nes jei funkcija $u$ turi klasikinę išvestinę, tai ji tenkina (2.10) integravimo dalimis formulę, kartu ir (2.11) tapatybę. Vadinasi, jeigu egzistuoja funkcijos $u$ klasikinė išvestinė, tai egzistuoja ir jos apibendrinta išvestinė ir jos abi sutampa.

Analogiškai apibrėžiamos bet kurios eilės apibendrintos išvestinės.

A p i b r ė ž i m a s. Tegu $u, v \in \mathrm{L}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – fiksuotas multiindeksas ir

$$\int_\Omega u\,D^\alpha\,\eta\,dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega v\eta\,dx, \quad \forall\eta \in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega). \tag{2.12}$$

Tada $v := D^\alpha\,u$ yra funkcijos $u$ *apibendrinta išvestinė* srityje $\Omega$.

Apibendrintoms išvestinėms galioja didelė dalis (tačiau ne visos!) klasikinių išvestinių savybių. Paminėsime kai kurias iš jų.

1. Apibendrintos išvestinės apibrėžimas yra korektiškas. Tiksliau, jeigu $v = D^\alpha\,u$ srityje $\Omega$, tai $v = D^\alpha\,u$ kiekvienoje srityje $\Omega' \subset \Omega$. Norint tuo įsitikinti, pakanka (2.12) integralinėje tapatybėje paimti funkciją $\eta$, kurios $\operatorname{supp}\eta \subset \Omega'$.

2. Tarkime, srityje $\Omega$ egzistuoja funkcijų $u$ ir $v$ apibendrintos išvestinės $D^\alpha\,u$ ir $D^\alpha\,v$. Tada egzistuoja ir jų tiesinio darinio $c_1u + c_2v$ apibendrinta išvestinė $D^\alpha(c_1u + c_2v)$ ir teisinga formulė

   $$D^\alpha(c_1u + c_2v) = c_1\,D^\alpha\,u + c_2\,D^\alpha\,v.$$

   Ši formulė tiesiogiai išplaukia iš apibendrintos išvestinės apibrėžimo.

3. Jeigu srityje $\Omega$ egzistuoja funkcijos $u$ apibendrinta išvestinė $D^\alpha\,u$, tai ji yra vienintelė. Įrodysime tai. Tegu $v_1 = D^\alpha\,u$ ir $v_2 = D^\alpha\,u$ yra funkcijos

$u$ apibendrintos išvestinės srityje $\Omega$. Tada funkcija $v = v_1 - v_2$ tenkina integralinę tapatybę

$$\int\limits_{\Omega} v(x)\eta(x)\,dx = 0, \quad \forall \eta \in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega)\,.$$

Pagal 2.2 teoremą $v(x) = 0$ b.v. $x \in \Omega$. Taigi $v_1 = v_2$.

4. Tarkime, srityje $\Omega$ egzistuoja funkcijos $u$ apibendrinta išvestinė $v = D^\alpha u$ ir funkcijos $v$ apibendrinta išvestinė $w = D^\beta v$. Tada srityje $\Omega$ egzistuoja funkcijos $u$ apibendrinta išvestinė $D^{\alpha+\beta} u$ ir ji sutampa su $w$. Iš tikrųjų

$$\int\limits_{\Omega} u\, D^{\alpha+\beta}\, \eta\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_{\Omega} v\, D^\beta\, \eta\, dx = (-1)^{|\alpha+\beta|} \int\limits_{\Omega} w\eta\, dx.$$

Taigi $w = D^{\alpha+\beta} u$.

5. Bet kokioje griežtai vidinėje srityje $\Omega' \subset \Omega$ pakankamai mažiems $\rho$ galima keisti vietomis vidurkinimo ir diferencijavimo operacijų tvarką. Įrodysime tai. Tegu $v = D^\alpha u$ yra funkcijos $u$ apibendrinta išvestinė srityje $\Omega$, $\delta = \mathrm{dist}\{\Omega', \partial\Omega\}$, $x \in \Omega'$ ir $\rho < \delta$. Kintamųjų $y$ atžvilgiu funkcija $\omega_\rho(x-y) \in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$. Be to,

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\omega_\rho(x-y) = -\frac{\partial}{\partial y_k}\omega_\rho(x-y), \quad \forall k = 1, 2, \dots, n.$$

Todėl

$$D^\alpha u_\rho(x) = \int D_x^\alpha\, \omega_\rho(x-y)u(y)\,dy =$$

$$= (-1)^{|\alpha|}\int D_y^\alpha\, \omega_\rho(x-y)u(y)\,dy = \int \omega_\rho(x-y)v(y)\,dy = v_\rho(x).$$

Taigi

$$v_\rho(x) = D^\alpha u_\rho(x). \tag{2.13}$$

P a s t a b a. Kadangi funkcijos $v_\rho$ ir $u_\rho$ yra glodžios, tai (2.13) formulėje išvestinė $D^\alpha$ yra klasikinė.

Tegu funkcijos $u$ apibendrinta išvestinė $D^\alpha u \in \mathrm{L_p}(\Omega),\ 1 \le p < \infty$. Tada iš (2.13) formulės ir 4 vidutinių funkcijų savybės išplaukia, kad

$$D^\alpha u_\rho = \big(D^\alpha u\big)_\rho \to D^\alpha u, \tag{2.14}$$

erdvėje $\mathrm{L_p}(\Omega'),\ \forall \Omega' :\ \overline{\Omega'} \subset \Omega$, kai $\rho \to 0$.

6. Dviejų funkcijų sandaugos apibendrintai išvestinei galioja įprasta formulė. Tiksliau, jeigu srityje $\Omega$ egzistuoja funkcijų $u, v$ apibendrintos išvestinės

$u_{x_i}$, $v_{x_i}$ ir reiškinys $u_{x_i}v + uv_{x_i}$ yra lokaliai sumuojama srityje $\Omega$ funkcija, tai egzistuoja sandaugos $uv$ apibendrinta išvestinė $(uv)_{x_i}$ ir teisinga formulė

$$(uv)_{x_i} = u_{x_i}v + uv_{x_i}. \tag{2.15}$$

Dėl paprastumo šį teiginį įrodysime, kai funkcijos $u, v, u_{x_i}$ ir $v_{x_i}$ yra lokaliai kvadratu integruojamos srityje $\Omega$. Laisvai pasirenkame $\eta \in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$. Tada

$$\int\limits_\Omega u_\rho v_\rho \eta_{x_i}\, dx = -\int\limits_\Omega \big(u_{\rho x i} v_\rho + u_\rho v_{\rho x_i}\big)\eta\, dx, \quad \forall \rho > 0. \tag{2.16}$$

Be to,

$$u_\rho \to u, \quad v_\rho \to v, \quad u_{\rho x_i} \to u_{x_i}, \quad v_{\rho x_i} \to v_{x_i}$$

erdvėje $\mathrm{L}_2(\Omega')$, $\forall \Omega' : \ \overline{\Omega'} \subset \Omega$, kai $\rho \to 0$. Remiantis 3 vidutinių funkcijų savybe, (2.16) tapatybėje galima pereiti prie ribos. Taigi

$$\int\limits_\Omega uv\eta_{x_i}\, dx = -\int\limits_\Omega \big(u_{xi}v + uv_{x_i}\big)\eta\, dx$$

ir teisinga (2.15) formulė.

Suformuluosime kitą apibendrintos išvestinės apibrėžimą ir įrodysime, kad abu apibrėžimai yra ekvivalentūs.

A p i b r ė ž i m a s. Tegu funkcijos $u$ ir $v \in \mathrm{L}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Sakysime, funkcija $v$ yra funkcijos $u$ apibendrinta išvestinė srityje $\Omega$ ir rašysime $v = D^\alpha u$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – fiksuotas multiindeksas, $|\alpha| = k$, jeigu egzistuoja tokia seka $\{u_m\} \subset \mathrm{C}^{\mathrm{k}}(\Omega)$, kad

$$u_m \to u, \ D^\alpha u_m \to v$$

erdvėje[1] $\mathrm{L}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, kai $m \to \infty$.

Tegu $v = D^\alpha u$ pagal pastarąjį apibrėžimą. Tada $\forall m = 1, 2, \dots$ yra teisinga integravimo dalimis formulė:

$$\int\limits_\Omega u_m\, D^\alpha\, \eta\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega D^\alpha\, u_m \eta\, dx, \quad \forall \eta \in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega). \tag{2.17}$$

Perėję šioje formulėje prie ribos, kai $m \to \infty$, gausime, kad funkcijos $u$ ir $v$ tenkina (2.12) tapatybę, t.y. $v = D^\alpha u$ pagal pirmąjį apibrėžimą.

Tegu $v = D^\alpha u$ pagal pirmąjį apibrėžimą. Tada $\forall\ \rho > 0$ vidutinės funkcijos $u_\rho \in \mathrm{C}^\infty(\Omega)$ ir

$$u_\rho \to u, \ D^\alpha u_\rho = \big(D^\alpha u\big)_\rho \to D^\alpha u$$

erdvėje $\mathrm{L}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, kai $\rho \to 0$. Vadinasi, $v = D^\alpha u$ pagal antrąjį apibrėžimą.

[1]Sakysime, seka $\{u_m\}$ konverguoja į funkciją $u$ erdvėje $\mathrm{L}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, jeigu $u_m \to u$ erdvėje $\mathrm{L}(\Omega')$, kai $m \to \infty$; čia $\Omega'$ – bet kokia griežtai vidinė sritis.

**2.7 teorema.** *Tarkime, $\forall m = 1, 2, \dots$ funkcija $u_m$ srityje $\Omega$ turi apibendrintą išvestinę $D^\alpha u_m$ ir*

$$u_m \to u, \qquad D^\alpha u_m \to v$$

*erdvėje $\mathrm{L}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, kai $m \to \infty$. Tada srityje $\Omega$ egzistuoja funkcijos $u$ apibendrinta išvestinė $D^\alpha u$ ir ji lygi $v$.*

Norint įrodyti šią teoremą, pakanka (2.17) formulėje pereiti prie ribos, kai $m \to \infty$.

P a s t a b a. Teorema išlieka teisinga ir tuo atveju, kai sekos $\{u_m\}$ ir $\{D^\alpha u_m\}$ konverguoja silpnai, t.y. pakanka reikalauti, kad $\forall \eta \in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$

$$\int\limits_\Omega u_m \eta \, dx \to \int\limits_\Omega u \eta \, dx, \qquad \int\limits_\Omega D^\alpha u_m \eta \, dx \to \int\limits_\Omega v \eta \, dx,$$

kai $m \to \infty$.

Tarkime, srityje $\Omega$ egzistuoja funkcijos $u$ pirmos eilės apibendrintos išvestinės $u_{x_i}, \forall i = 1, 2, \dots, n$, ir $y = y(x)$ – $\mathrm{C}^1$ klasės difeomorfizmas, transformuojantis sritį $\Omega$ į sritį $\widetilde{\Omega}$. Įrodysime, kad funkcija $\tilde{u}(y) = u(x(y))$ srityje $\widetilde{\Omega}$ turi pirmosios eilės apibendrintas išvestines ir jos skaičiuojamos pagal įprastas formules. Pagal antrą apibendrintos išvestinės apibrėžimą egzistuoja tokia seka $\{u_m\} \subset \mathrm{C}^1(\Omega)$, kad

$$u_m \to u, \qquad u_{m x_i} \to u_{x_i}$$

erdvėje $\mathrm{L}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, kai $m \to \infty$. Tegu $\tilde{u}_m(y) = u_m(x(y))$. Tada

$$\tilde{u}_m \in \mathrm{C}^1(\widetilde{\Omega}), \quad \tilde{u}_{m y_k} = \sum_{i=1}^n u_{m x_i} \frac{\partial x_i}{\partial y_k}$$

ir

$$\tilde{u}_m \to \tilde{u}, \qquad \tilde{u}_{m y_k} \to \sum_{i=1}^n u_{x_i} \frac{\partial x_i}{\partial y_k}$$

erdvėje $\mathrm{L}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, kai $m \to \infty$. Pagal 2.7 teoremą srityje $\widetilde{\Omega}$ egzistuoja funkcijos $\tilde{u}$ pirmosios eilės apibendrintos išvestinės $\tilde{u}_{y_k}$ ir yra teisingos įprastos formulės

$$\tilde{u}_{y_k} = \sum_{i=1}^n u_{x_i} \frac{\partial x_i}{\partial y_k}, \ \forall k = 1, 2, \dots, n.$$

Analogiškas teiginys teisingas ir aukštesniųjų eilių apibendrintoms išvestinėms.

Priminsime vieną paprastą faktą iš analizės: diferencijuojama funkcija, kurios visos pirmosios eilės išvestinės lygios nuliui, yra konstanta. Ši savybė yra teisinga ir apibendrintoms išvestinėms. Čia įrodysime bendresnį teiginį.

**2.8 teorema.** *Tarkime, funkcija $u$ srityje $\Omega$ turi visas $k$-osios eilės apibendrintas išvestines ir jos visos lygios nuliui. Tada funkcija $u$ yra $(k-1)$-ojo laipsnio polinomas srityje $\Omega$.*

◁ Pagal teoremos sąlygą $\forall\Omega' : \overline{\Omega'} \subset \Omega$ ir pakankamai mažiems $\rho$ teisinga lygybė

$$D^\alpha u_\rho = \big(D^\alpha u\big)_\rho = 0, \quad |\alpha| = k.$$

Kadangi $u_\rho$ yra glodi funkcija ir visos jos $k$-osios eilės išvestinės lygios nuliui, tai

$$u_\rho(x) = P^{(\rho)}(x);$$

čia $P^{(\rho)}$ yra $(k-1)$-ojo laipsnio polinomas. Pagal 3 vidutinių funkcijų savybę

$$\|P^{(\rho)}\|_{\mathrm{L}(\Omega')} = \|u_\rho\|_{\mathrm{L}(\Omega')} \leq \|u\|_{\mathrm{L}(\Omega')}.$$

Iš čia išplaukia, kad aibė $\big\{P^{(\rho)}\big\}_{\rho>0}$ aprėžta. Kartu ji yra kompaktinė, nes $(k-1)$-ojo laipsnio polinomų aibė yra baigtinio matavimo erdvė. Todėl iš jos galima išskirti posekį

$$u_{\rho_k}(x) = P^{(\rho_k)}(x),$$

konverguojantį erdvėje $\mathrm{L}(\Omega')$. Tarkime, $(k-1)$-ojo laipsnio polinomas $P(x)$ yra šio posekio ribinis elementas. Pagal 4 vidutinių funkcijų savybę

$$u_{\rho_k}(x) \to u(x).$$

Taigi $u(x) = P(x)$ srityje $\Omega'$. Kadangi sritį $\Omega' \subset \Omega$ pasirinkome laisvai, tai

$$u(x) = P(x)$$

srityje $\Omega$. ▷

## 2.4. APIBENDRINTOSIOS IŠVESTINĖS IR ABSOLIUČIAI TOLYDŽIOS FUNKCIJOS

Apibendrintos ir klasikinės išvestinės sąvokos iš esmės skiriasi. Tai susiję su tuo, kad apibendrinta išvestinė turi integralinį pobūdį. Priminsime, kad apibendrinta išvestinė – tai lokaliai sumuojama funkcija. Tačiau sumuojama funkcija yra apibrėžiama nulinio mato taškų aibės tikslumu ir į ją reikia žiūrėti kaip į ekvivalenčių funkcijų klasę. Todėl toliau kalbėdami apie taškines funkcijų savybes, pavyzdžiui, tolydumą, turėsime omenyje, kad funkcijos ekvivalentiškumo klasėje galima išrinkti atstovą, turintį nurodytą savybę. Be to, visą ekvivalentiškumo klasę, kaip ir konkretų jos atstovą, žymėsime ta pačia raide.

Nagrinėjant funkciją $u$, turinčią tam tikros eilės apibendrintas išvestines, sumuojamas laipsniu $p$ srityje $\Omega$, svarbu žinoti, kokį glodumą ji gali įgyti, jos reikšmes kaip nors pakeitus nulinio mato taškų aibėje. Atsakymas čia priklauso nuo srities $\Omega$ matavimo, apibendrintų išvestinių eilės ir nuo rodiklio $p$. Tokie teiginiai (įdėjimo teoremos) bus nagrinėjami vėliau. O dabar ištirsime daug paprastesnį klausimą. Tiksliau, parodysime, kad pirmos eilės apibendrintų išvestinių egzistavimas susijęs su absoliutaus tolydumo sąvoka.

**2.9 teorema.** *Tegu $n = 1$. Tada:*

1. *Jeigu $u$ yra absoliučiai tolydi segmente $[a, b]$ funkcija, tai intervale $(a, b)$ egzistuoja jos apibendrinta išvestinė $u_x \in \mathrm{L}(a, b)$ ir ji b.v. $x \in (a, b)$ sutampa su klasikine išvestine.*

2. *Jeigu $u \in \mathrm{L}(a, b)$ ir intervale $(a, b)$ egzistuoja apibendrinta išvestinė $u_x \in \mathrm{L}(a, b)$, tai funkcija $u$ yra absoliučiai tolydi segmente $[a, b]$ ir yra teisinga formulė*

$$u(x) = u(a) + \int_a^x u_y(y)\, dy;$$

*čia $u_y$ – apibendrinta išvestinė.*

$\triangleleft$ Tarkime, funkcija $u$ yra absoliučiai tolydi segmente $[a, b]$. Tada b.v. $x \in (a, b)$ egzistuoja klasikinė išvestinė $u_x$ ir ji yra sumuojama intervale $(a, b)$. Kiekvienai funkcijai $\eta \in \mathrm{C}_0^\infty(a, b)$ funkcija $u\eta$ yra absoliučiai tolydi. Todėl b.v. $x \in (a, b)$ egzistuoja klasikinė išvestinė

$$(u\eta)_x = u_x\eta + u\eta_x$$

ir

$$\int_a^b (u_x\eta + u\eta_x)\, dx = 0.$$

Iš šios integralinės tapatybės išplaukia, kad $u_x$ yra funkcijos $u$ apibendrinta išvestinė.

Tarkime, funkcija $v \in \mathrm{L}(a,b)$ yra funkcijos $u$ apibendrinta išvestinė. Tada funkcija

$$w(x) = \int\limits_a^x v(y)\,dy$$

yra absoliučiai tolydi. Pagal pirmą teoremos teiginį ji intervale $(a,b)$ turi apibendrintą išvestinę $w_x = v$. Tačiau $(u-w)_x = 0$ ir pagal 2.8 teoremą $u(x) - w(x) = \mathrm{const}$. Iš čia išplaukia, kad funkcija $u$ yra absoliučiai tolydi ir $\mathrm{const} = u(a)$. Kadangi apibendrinta išvestinė $u_x = v$, tai

$$u(x) = u(a) + \int\limits_a^x u_y(y)\,dy. \triangleright$$

P a s t a b a. Jeigu tolydi funkcija $u$ turi klasikinę išvestinę b.v. $x \in (a,b)$, bet nėra absoliučiai tolydi, tai intervale $(a,b)$ apibendrintos išvestinės ji neturi. Taigi iš klasikinės išvestinės egzistavimo b.v. $x \in (a,b)$ dar neseka apibendrintos išvestinės egzistavimas intervale $(a,b)$.

Išnagrinėsime kelių kintamųjų atvejį.

2.10 teorema. *Tarkime, $n > 1$ ir srityje $\Omega$ funkcija $u$ turi apibendrintą išvestinę $u_{x_i}$. Tada $u$ yra absoliučiai tolydi funkcija kintamojo $x_i$ atžvilgiu, b.v. likusiems kintamiesiems $x_i' = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ ir yra teisinga Niutono–Leibnico formulė*

$$u(x + he_i) - u(x) = \int\limits_{x_i}^{x_i+h} \frac{d}{d\tau} u(x_1, \dots, x_{i-1}, \tau, x_{i+1}, \dots, x_n)\,d\tau;$$

*čia $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, o integravimo rėžiai yra tokie, kad atkarpa $(x, x + he_i)$ guli srityje $\Omega$.*

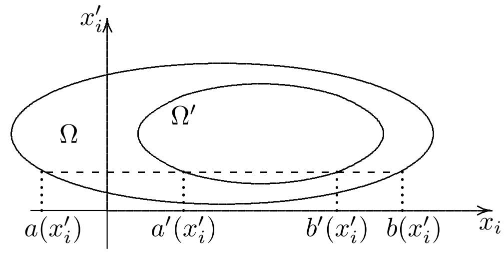
$\triangleleft$ Tegu $\Omega' \subset \Omega$ yra bet kokia griežtai vidinė sritis. Pagal 4 vidutinių funkcijų savybę

$$\|u_\rho - u\|_{\mathrm{L}(\Omega')} \to 0, \quad \|u_{\rho x_i} - u_{x_i}\|_{\mathrm{L}(\Omega')} \to 0,$$

kai $\rho \to 0$. Kartu b.v. $x_i'$ integralai

$$\int\limits_{a'(x_i')}^{b'(x_i')} |u_\rho - u|\,dx_i \to 0, \qquad \int\limits_{a'(x_i')}^{b'(x_i')} |u_{\rho x_i} - u_{x_i}|\,dx_i \to 0;$$

čia intervalai $(a'(x_i'), b'(x_i'))$ yra tiesių, lygiagrečių su $x_i$ ašimi, ir srities $\Omega'$ sankirta (žr. 2.1 pav.).



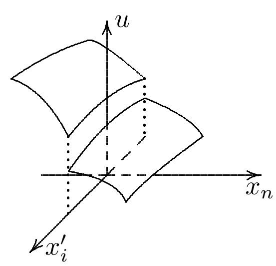

2.1 pav.

Pagal antrą apibendrintų išvestinių apibrėžimą tokiems $x_i'$ funkcija $u$ turi apibendrintą išvestinę $u_{x_i}$ intervale $(a'(x_i'), b'(x_i'))$. Kartu šiame intervale funkcija $u$ yra absoliučiai tolydi kintamojo $x_i$ atžvilgiu ir yra teisinga Niutono–Leibnico formulė

$$u(x + he_i) - u(x) = \int\limits_{x_i}^{x_i+h} \frac{d}{d\tau} u(x_1, \dots, x_{i-1}, \tau, x_{i+1}, \dots, x_n)\, d\tau.$$

Kadangi sritį $\Omega'$ pasirinkome laisvai, tai galime tvirtinti, kad funkcija $u$ b.v. $x_i'$ yra absoliučiai tolydi intervale $(a(x_i'), b(x_i'))$ ir šiame intervale yra teisinga Niutono–Leibnico formulė. $\triangleright$

I š v a d a. Tegu funkcija $u$ srityje $\Omega$ turi pirmos eilės apibendrintas išvestines $u_{x_i}, \forall i = 1, 2, \dots, n$. Tada ji negali turėti trūkio $(n-1)$-mačiame paviršiuje. Pavyzdžiui, jeigu funkcija $u$ turi trūkį hiperplokštumoje $x_n = 0$, tai ji neturi apibendrintos išvestinės $u_{x_n}$ (žr. 2.2 pav.).

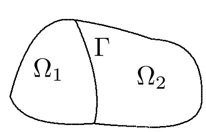



2.2 pav.

Tačiau kai $i \neq n$, apibendrintos išvestinės $u_{x_i}$ gali egzistuoti.

P a v y z d ž i a i:

1. Tarkime, glodus paviršius $\Gamma$ dalija sritį $\Omega$ į dvi dalis $\Omega_1$, $\Omega_2$. Be to, tegu funkcija $u \in C(\overline{\Omega})$ ir kiekvienoje iš sričių $\overline{\Omega}_1$, $\overline{\Omega}_2$ yra diferencijuojama (žr. 2.3 pav.).




2.3 pav.

Parodysime, kad srityje $\Omega$ egzistuoja funkcijos $u$ apibendrintos išvestinės $u_{x_i}$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$. Kadangi $u \in \mathrm{C}^1(\overline{\Omega}_k)$, $k = 1, 2$, tai $\forall \eta \in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$ yra teisinga integralinė tapatybė

$$\int\limits_{\Omega_k} u\eta_{x_i}\,dx = -\int\limits_{\Omega_k} u_{x_i}\eta\,dx + \int\limits_{\partial\Omega_k} u\eta\cos(\mathbf{n}_k, x_i)dS_k; \tag{2.18}$$

čia $\mathbf{n}_k$ – paviršiaus $S_k = \partial\Omega_k$ vienetinis normalės vektorius, išorinis srities $\Omega_k$ atžvilgiu. Imkime (2.18) tapatybėje $k = 1$, po to $k = 2$ ir gautas tapatybes sudėkime. Turėdami omenyje, kad

$$\eta(x) = 0, \forall x \in S = \partial\Omega, \quad \text{ir} \quad \mathbf{n}_1(x) = -\mathbf{n}_2(x), \forall x \in \Gamma,$$

rezultatą perrašysime taip:

$$\int\limits_{\Omega} u\eta_{x_i}\,dx = -\int\limits_{\Omega} u_{x_i}\eta\,dx, \quad \forall \eta \in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega).$$

Pagal pirmą apibendrintos išvestinės apibrėžimą funkcija $u$ turi srityje $\Omega$ apibendrintą išvestinę $u_{x_i}$ ir kiekvienoje iš sričių $\Omega_k, k = 1, 2$, ji sutampa su klasikine išvestine $u_{x_i}$.

2. Tegu $u(x) = |x|^\alpha$, $\alpha > 1 - n$, $B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$. Parodysime, kad funkcija $u$ rutulyje $B$ turi pirmos eilės apibendrintas išvestines ir jos randamos pagal įprastą formulę

$$u_{x_i} = \alpha x_i |x|^{\alpha - 2}.$$

Kiekvienam $h > 0$ apibrėžkime seką funkcijų

$$u_{(h)}(x) = \begin{cases} |x|^\alpha, & |x| > h, \\ h^\alpha, & |x| \le h. \end{cases}$$

Funkcija $u_{(h)}$ rutulyje $B$ turi pirmosios eilės apibendrintas išvestines (žr. 1 pavyzdį) ir

$$u_{(h)x_i}(x) = \begin{cases} \alpha x_i |x|^{\alpha-2}, & |x| > h, \\ 0, & |x| < h. \end{cases}$$

Be to,

$$\|u_{(h)} - u\|_{\mathrm{L}(B)} = \int\limits_{|x|<h} \big| |x|^\alpha - h^\alpha \big|\,dx \le Ch^{\alpha+n} \to 0,$$

$$\|u_{(h)x_i} - \alpha x_i|x|^{\alpha-2}\|_{\mathrm{L}(B)} = \int\limits_{|x|<h} \big|\alpha x_i |x|^{\alpha-2}\big|\,dx \le$$

$$\le |\alpha| \int\limits_{|x|<h} |x|^{\alpha-1}\,dx = |\alpha||\mathrm{S}_1| \int\limits_0^h r^{\alpha+n-2}dr = \frac{|\alpha||S_1|h^{\alpha+n-1}}{\alpha+n-1} \to 0,$$

kai $h \to 0$. Pagal 2.7 teoremą rutulyje $B$ egzistuoja funkcijos $u = |x|^\alpha$ pirmos eilės apibendrintos išvestinės $u_{x_i} = \alpha x_i |x|^{\alpha-2}$.

P a s t a b a. Akivaizdu, kad neigiamiems $\alpha$ rutulyje $B$ funkcija $u$ nėra diferencijuojama. Net jeigu kokiu nors būdu pakeisime jos reikšmes nulinio mato taškų aibėje, vis tiek gausime funkciją, kuri bus ne tik netolydi, bet ir neaprėžta.

3. Tarkime, funkcijos $\varphi$ ir $\psi$ yra sumuojamos intervale $(0,1)$, bet ne absoliučiai tolydžios. Tada iš 2.10 teoremos išplaukia, kad funkcija

$$u(x_1, x_2) = \varphi(x_1) + \psi(x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Omega = (0,1) \times (0,1)$$

neturi pirmos eilės apibendrintų išvestinių srityje $\Omega$. Tačiau

$$\int\limits_\Omega u\eta_{x_1x_2}\, dx = \int\limits_\Omega (\varphi\eta_{x_1})_{x_2}\, dx + \int\limits_\Omega (\psi\eta_{x_2})_{x_1}\, dx =$$

$$= 0 = \int\limits_\Omega 0 \cdot \eta\, dx, \qquad \forall \eta \in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega).$$

Todėl srityje $\Omega$ egzistuoja funkcijos $u$ apibendrinta išvestinė $u_{x_1x_2}$ ir ji lygi nuliui.

Iš šio pavyzdžio matome, kad funkcija $u$ gali turėti aukštesnių eilių apibendrintas išvestines, neturėdama žemesnių eilių apibendrintų išvestinių.

## 2.5. ERDVĖS $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ IR $\mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$

Aibę funkcijų $u \in \mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega)$, $p \in [1, \infty]$, kurios turi apibendrintas išvestines

$$D^\alpha u \in \mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega), \quad \forall \alpha : |\alpha| \le k,$$

žymėsime $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$. Aibė $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ yra tiesinė. Joje galima apibrėžti normą

$$\|u\|_{\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \le k} \| D^\alpha u\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega)}. \tag{2.19}$$

Tiesiogiai galima įsitikinti, kad taip apibrėžta norma tenkina visas normos apibrėžimo sąlygas. Priminsime, kad

$$\|u\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega)} = \Big( \int\limits_\Omega |u|^p \, dx \Big)^{1/p},$$

kai $p < \infty$, o

$$\|u\|_{\mathrm{L}_\infty(\Omega)} = \operatorname{vrai} \sup_{x \in \Omega} |u(x)|.$$

Aibė $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ su taip apibrėžta norma yra normuota erdvė. Erdvėje $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ galima įvesti ir kitą ekvivalenčią normą (ją žymėsime tuo pačiu normos ženklu)

$$\|u\|_{\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)} = \Big( \int\limits_\Omega \sum_{|\alpha| \le k} | D^\alpha u|^p \, dx \Big)^{1/p}. \tag{2.20}$$

Kiekvienu konkrečiu atveju naudosime tą normą, kuri bus patogesnė. Kai $k = 0$, erdvė $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ yra $\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega)$.

Erdvė $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ yra Banacho erdvė. Įrodysime tai. Pagal Banacho erdvės apibrėžimą reikia įrodyti, kad erdvė $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ yra pilna. Tarkime, seka $\{u_m\}$ yra fundamentali erdvėje $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$. Tada $\forall \alpha : |\alpha| \le k$ seka $\{D^\alpha u_m\}$ yra fundamentali erdvėje $\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega)$, t.y.

$$\|u_m - u_{m'}\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega)} \to 0, \quad \| D^\alpha u_m - D^\alpha u_{m'}\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega)} \to 0,$$

kai $m$ ir $m' \to \infty$. Kadangi erdvė $\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega)$ yra pilna, tai egzistuoja tokios funkcijos $u, \omega_\alpha \in \mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega)$, kad

$$\|u_m - u\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega)} \to 0, \quad \| D^\alpha u_m - \omega_\alpha\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega)} \to 0,$$

kai $m \to \infty$. Pagal 2.7 teoremą srityje $\Omega$ egzistuoja funkcijos $u$ apibendrintos išvestinės

$$D^\alpha u = \omega_\alpha \in \mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega),$$

t.y. $u \in \mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$, ir seka $\{u_m\}$ konverguoja į $u$ erdvėje $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$. Taigi erdvėje $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ kiekviena fundamentali seka konverguoja.

Erdvė $\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$ yra separabili, kai $p \in [1, \infty)$, ir refleksyvi, kai $p \in (1, \infty)$. Šių teiginių įrodymas remiasi tuo, kad atitinkamiems $p$ erdvė $\mathrm{L}_\mathrm{p}(\Omega)$ yra separabili ir refleksyvi ir erdvę $\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$ galima sutapatinti su erdvių $\mathrm{L}_\mathrm{p}(\Omega)$ baigtinės tiesioginės sandaugos poerdviu (žr. [**?**], [**?**]).

Kai $p = 2$, erdvė $\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$ yra Hilberto erdvė. Skaliarinę sandaugą joje galima apibrėžti taip:

$$(u, v)_{\mathrm{W}_2^\mathrm{k}(\Omega)} = \int\limits_\Omega \sum_{|\alpha| \leq k} D^\alpha\, u \overline{D^\alpha\, v}\, dx.$$

Jeigu $\mathrm{W}_2^\mathrm{k}(\Omega)$ yra realiųjų funkcijų erdvė, tai brukšnys nerašomas. Dažnai Hilberto erdvę $\mathrm{W}_2^\mathrm{k}(\Omega)$ ir ją atitinkantį poerdvį $\mathring{\mathrm{W}}_2^\mathrm{k}(\Omega)$ žymi $\mathrm{H}^\mathrm{k}(\Omega)$ ir $\mathring{\mathrm{H}}^\mathrm{k}(\Omega)$.

2.11 teorema. *Tegu* $u \in \mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$ *ir* $f$ *yra* $\mathrm{C}^\mathrm{k}$ *klasės difeomorfizmas, transformuojantis sritį* $\Omega$ *į sritį* $\widetilde{\Omega}$. *Tada funkcija* $v = u \circ f^{-1} \in \mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\widetilde{\Omega})$ *ir*

$$C_1 \|u\|_{\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)} \leq \|v\|_{\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\widetilde{\Omega})} \leq C_2 \|u\|_{\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)};$$

*čia* $C_1$ *ir* $C_2$ *– teigiamos konstantos, priklausančios tik nuo funkcijų* $f$ *ir* $f^{-1}$ *normų erdvėse* $\mathrm{C}^\mathrm{k}(\Omega)$ *ir* $\mathrm{C}^\mathrm{k}(\widetilde{\Omega})$.

Šitos teoremos įrodymas išplaukia iš apibendrintų išvestinių savybių.

Erdves $\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$ galima apibrėžti ir tuo atveju, jeigu vietoje „plokščios“ srities $\Omega$ imsime pakankamai glodžią $n$-matę daugdarą $S$. Pavyzdžiui, tegu $n$-matė daugdara $S$ yra lygi sumai baigtinio skaičiaus $n$-mačių daugdarų $S_i, i = 1, \ldots, N$, ir kiekvieną daugdarą $S_i$ galima $\mathrm{C}^\mathrm{k}$ klasės difeomorfizmu $f_i$ transformuoti į sritį $\Omega_i \subset \mathbb{R}^n$. Sakysime, funkcija $u \in \mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(S)$, jeigu

$$u \circ f_i^{-1} \in \mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega_i), \quad \forall i = 1, \ldots, N.$$

Normą erdvėje $\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(S)$ galima apibrėžti taip:

$$\|u\|_{\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(S)} = \sum_{i=1}^N \|u \circ f_i^{-1}\|_{\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega_i)}.$$

Erdvėje $\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$ išskirsime poerdvį $\mathring{\mathrm{W}}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$. Sakysime, funkcija $u$ iš erdvės $\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$ priklauso poerdviui $\mathring{\mathrm{W}}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$, jeigu egzistuoja seka $\{u_m\} \subset \mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$, konverguojanti į $u$ erdvėje $\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$. Taigi

$$\mathring{\mathrm{W}}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega) = \overline{\mathbf{C}_0^\infty(\Omega)}^{\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)}.$$

Erdvės $\mathring{\mathrm{W}}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$ elementai turi keletą svarbių savybių. Tarkime, funkcija $u \in \mathring{\mathrm{W}}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$. Tada egzistuoja seka $\{u_m\} \subset \mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$, konverguojanti į $u$ erdvėje $\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$. Funkcijas $u$ ir $u_m, m = 1, 2, \ldots$ pratęsime nuliu į $\mathbb{R}^n \backslash \Omega$. Kiekvienam $\alpha$, $|\alpha| \leq k$, apibrėžkime funkciją

$$\omega_\alpha(x) = \begin{cases} D^\alpha\, u(x), & x \in \Omega, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \backslash \Omega. \end{cases}$$

Akivaizdu, kad bet kokioje srityje $Q \supset \Omega$ funkcijos $u$ ir $\omega_\alpha \in \mathrm{L}_{\mathrm{p}}(Q)$. Be to, $\forall m = 1, 2, \dots$ funkcijos $u_m \in \mathrm{C}_0^\infty(Q)$ ir

$$\|u_m - u\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(Q)} = \|u_m - u\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega)} \to 0,$$

$$\| D^\alpha u_m - \omega_\alpha\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(Q)} = \| D^\alpha u_m - D^\alpha u\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega)} \to 0,$$

kai $m \to \infty$. Pagal 2.7 teoremą $u \in \mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(Q)$.

Tegu funkcija $u \in \mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$. Pratęskime ją nuliu į srities $\Omega$ išorę ir gautą funkciją pažymėkime ta pačia raide $u$. Įrodysime, kad vidutinės funkcijos $u_\rho \to u$ erdvėje $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$, kai $\rho \to 0$. Funkcija $u \in \mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(Q)$, $\forall Q : \overline{\Omega} \subset Q$. Kadangi $\Omega \subset Q$ yra griežtai vidinė sritis, tai pakankamai mažiems $\rho > 0$ srityje $\Omega$ galima sukeisti diferencijavimo ir vidurkinimo operacijų tvarką. Todėl

$$D^\alpha u_\rho = (D^\alpha u)_\rho \to D^\alpha u, \quad \forall \alpha : |\alpha| \le k,$$

erdvėje $\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega)$, kai $\rho \to 0$. Pagal apibrėžimą tai reiškia, kad $u_\rho \to u$ erdvėje $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$, kai $\rho \to 0$.

P a s t a b a. Jeigu funkcija $u \in \mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ pratęsime nuliu į $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$, tai gausime funkciją, kuri srityje $Q \supset \Omega$ gali ir neturėti apibendrintų išvestinių. Norint tuo įsitikinti pakanka pastebėti, kad funkcija $u \in \mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$, pratęsta nuliu į srities $\Omega$ išorę, gali turėti trūkį $n-1$ matavimo paviršiuje. Tai reiškia, kad ne kiekviena funkcija $u \in \mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ priklauso poerdviui $\mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$. Taigi $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega) \ne \mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$. Išimtį sudaro atvejis $\Omega = \mathbb{R}^n$.

**2.12 teorema.** *Tegu $\Omega = \mathbb{R}^n$. Tada erdvės $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ ir $\mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ sutampa.*

$\triangleleft$ Savaime aišku, kad $\mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega) \subset \mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$. Įrodysime, kad bet kokia funkcija $u \in \mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ priklauso ir poerdviui $\mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$. Laisvai pasirenkame funkciją $u \in \mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$. Apibrėžkime funkcijų seką

$$u^R(x) = u(x)\zeta\left(|x|/R\right);$$

čia: $R$ yra teigiamas parametras, $\zeta(t)$ – be galo diferencijuojama intervale $[0, \infty)$ funkcija, lygi 1, kai $t \in [0, 1]$, monotoniškai mažėja, kai $t \in [1, 2]$, ir lygi nuliui, kai $t \ge 2$. Akivaizdu, kad funkcijos $u$ ir $u_R$ rutulyje $B_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$ sutampa. Be to, reiškinio $\zeta(|x|/R)$ išvestinės yra tolygiai aprėžtos parametro $R$ atžvilgiu. Todėl $\forall \alpha,\ |\alpha| \le k$, yra teisingas įvertis

$$\| D^\alpha u^R - D^\alpha u\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega)} = \| D^\alpha u^R - D^\alpha u\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega \setminus B_R)} \le$$

$$\le C \sum_{|\beta| \le |\alpha|} \| D^\beta u\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega \setminus B_R)}; \tag{2.21}$$

čia konstanta $C$ nepriklauso nuo konkrečios funkcijos $u \in \mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ pasirinkimo. K-dangi $\|u\|_{\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)} < \infty$, tai reiškinys dešiniojoje (2.21) nelygybės pusėje artėja į nulį, kai $R \to \infty$. Kartu

$$\| D^\alpha u^R - D^\alpha u\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega)} \le \varepsilon(R) \to 0,$$

kai $R \to \infty$. Seka $\{(u^R)_\rho\} \subset \mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$ ir konverguoja į $u$ erdvėje $\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$, kai $R \to \infty,\ \rho \to 0$. Tai reiškia, kad $u \in \mathring{\mathrm{W}}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$. ▷

Kiekvienai funkcijai $u \in \mathring{\mathrm{W}}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$ ir $v \in \mathrm{W}_{\mathrm{p}'}^\mathrm{k}(\Omega)$ yra teisinga integravimo dalimis formulė

$$\int_\Omega u\, D^\alpha\, v\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v\, D^\alpha\, u\, dx, \quad \forall \alpha : |\alpha| \le k. \tag{2.22}$$

Iš tikrųjų $\forall u \in \mathring{\mathrm{W}}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$ egzistuoja seka $\{u_m\} \subset \mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$, konverguojanti į $u$ erdvėje $\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$ . Pagal pirmą apibendrintos išvestinės apibrėžimą $\forall u_m$ yra teisinga tapatybė

$$\int_\Omega u_m\, D^\alpha\, v\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v\, D^\alpha\, u_m\, dx.$$

Perėję prie ribos, kai $m \to \infty$, gausime (2.22) formulę. Poerdvio $\mathring{\mathrm{W}}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$ pakeisti visa erdve $\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$ čia negalima. Tuo galima lengvai įsitikinti. Tegu $k = 1$, funkcijos $u, v \in \mathrm{C}^1(\overline{\Omega})$ ir $S = \partial\Omega$ – dalimis glodus paviršius. Tada yra teisinga *integravimo dalimis formulė*

$$\int_\Omega u v_{x_i}\, dx = -\int_\Omega u_{x_i} v\, dx + \int_S uv \cos(\mathbf{n}, x_i)\, dS;$$

čia bendru atveju integralas paviršiumi $S$ nelygus nuliui. Ši formulė išlieka teisinga, jeigu $u \in \mathrm{W}_\mathrm{p}^1(\Omega)$, $v \in \mathrm{W}_{\mathrm{p}'}^1(\Omega)$ ir sritis $\Omega$ yra tokia, kad erdvė $\mathrm{C}^1(\overline{\Omega})$ yra tiršta erdvėse $\mathrm{W}_\mathrm{p}^1(\Omega)$ ir $\mathrm{W}_{\mathrm{p}'}^1(\Omega)$. Jeigu funkcija $u \in \mathring{\mathrm{W}}_\mathrm{p}^1(\Omega)$, tai integralas paviršiumi $S$ yra lygus nuliui ir galima sakyti, kad funkcija $u$ paviršiuje $S$ yra „lygi nuliui“. Analogiška situacija yra ir erdvės $\mathring{\mathrm{W}}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$ atveju. Tarkime, $u \in \mathring{\mathrm{W}}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$. Tada galima sakyti, kad paviršiuje $S$ ji yra „lygi nuliui“ kartu su visomis savo apibendrintomis išvestinėmis iki $(k-1)$-os eilės imtinai.

Įrodysime dar vieną svarbią poerdvio $\mathring{\mathrm{W}}_\mathrm{p}^1(\Omega)$ elementų savybę.

2.13 teorema (Frydrichso nelygybė). *Tegu $\Omega$ yra aprėžta erdvėje $\mathbb{R}^n$ sritis. Tada $\forall u \in \mathring{\mathrm{W}}_\mathrm{p}^1(\Omega)$ yra teisinga nelygybė*

$$\|u\|_{\mathrm{L}_\mathrm{p}(\Omega)} \le d\|u_x\|_{\mathrm{L}_\mathrm{p}(\Omega)}; \tag{2.23}$$

*čia $d$ yra srities $\Omega$ diametras.*

◁ Aibė $\mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$ yra tiršta erdvėje $\mathring{\mathrm{W}}_\mathrm{p}^1(\Omega)$. Todėl (2.23) nelygybę pakanka įrodyti $\forall u \in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$. Laisvai pasirenkame funkciją $u \in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$. Pratęskime ją nuliu į srities $\Omega$ išorę, o gautą funkciją pažymėkime ta pačia raide u. Tada $u \in \mathrm{C}_0^\infty(Q),\ \forall Q \supset \Omega$.

Tegu $Q$ yra kubas, kurio briauna $d$. Pasukus koordinates ir perkėlus jų pradžią, visada galima pasiekti, kad

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < x_i < d,\ \forall i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Todėl iš karto tarkime, kad sritis

$$\Omega \subset Q = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < x_i < d, \ \forall i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Pagal Niutono–Leibnico formulę

$$u(x) = \int\limits_0^{x_n} \frac{\partial u(x_n', t)}{\partial t}\, dt, \quad x_n' = (x_1, \ldots, x_{n-1}).$$

Pasinaudoję Helderio nelygybe įvertinsime funkcijos $u$ modulį

$$|u(x)| \leq \int\limits_0^{x_n} \left| \frac{\partial u(x_n', t)}{\partial t} \right| dt \leq \int\limits_0^{d} \left| \frac{\partial u(x_n', t)}{\partial t} \right| dt \leq$$

$$\leq \left( \int\limits_0^d dt \right)^{1/p'} \left( \int\limits_0^d \left| \frac{\partial u(x_n', t)}{\partial t} \right|^p dt \right)^{1/p} = d^{1/p'} \left( \int\limits_0^d \left| \frac{\partial u(x_n', t)}{\partial t} \right|^p dt \right)^{1/p}.$$

Iš šio įverčio išplaukia nelygybė

$$\int\limits_Q |u(x)|^p\, dx \leq d^{p/p'+1} \int\limits_Q |u_{x_n}(x)|^p\, dx = d^{p/p'+1} \int\limits_\Omega |u_{x_n}(x)|^p\, dx,$$

kuri yra ekvivalenti nelygybei

$$\|u\|_{\mathrm{L}_\mathrm{p}(\Omega)} \leq d \|u_{x_n}\|_{\mathrm{L}_\mathrm{p}(\Omega)}.$$

Pakeitę funkcijos $u$ išvestinę $u_{x_n}$ gradientu $u_x$, gausime (2.23) nelygybę. $\triangleright$

Teoremą įrodėme tarę, kad $p > 1$. Kai $p = 1$, teorema išlieka teisinga. Šiuo atveju įrodymas yra beveik toks pats. Nereikia tik taikyti Helderio nelygybės.

P a s t a b a. Įrodant Frydrichso nelygybę, reikalavimas $u \in \mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^{1}(\Omega)$ yra esminis. Poerdvio $\mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^{1}(\Omega)$ pakeisti visa erdve $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{1}(\Omega)$ negalima. Tuo lengvai galima įsitikinti imant $u \equiv 1$.

Pasinaudojus Frydrichso nelygybe, funkcijos $u \in \mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ žemesnių eilių išvestinių normas galima įvertinti aukštesnių eilių išvestinių normomis erdvėje $\mathrm{L}_\mathrm{p}(\Omega)$. Pavyzdžiui, kai $k = 2$,

$$\|u_{x_i}\|_{\mathrm{L}_\mathrm{p}(\Omega)} \leq d \|u_{x_i x_n}\|_{\mathrm{L}_\mathrm{p}(\Omega)}, \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n.$$

Todėl erdvėje $\mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ galima įvesti normą

$$\|u\|_{\mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha|=k} \| D^\alpha u\|^p_{\mathrm{L}_\mathrm{p}(\Omega)} \right)^{1/p}, \tag{2.24}$$

ekvivalenčią normai erdvėje $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ (žr. 2.20 formulę).

## 2.6. FUNKCIJŲ IŠ ERDVĖS $\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$ PRATĘSIMAS

Nagrinėjant erdves $\mathring{\mathrm{W}}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$, srities $\Omega$ forma neturi jokios įtakos. Kiekvieną erdvės $\mathring{\mathrm{W}}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$ elementą galima pratęsti nuliu į $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ ir nagrinėti kaip erdvės $\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(Q)$ elementą bet kokioje standartinėje srityje $Q \supset \Omega$, pavyzdžiui, rutulyje arba kube. Sudėtingesnė situacija yra erdvės $\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$ atveju. Tiksliau, funkciją $u \in \mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$ ne visada galima pratęsti į $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ išlaikant ,,glodumą“. Tai priklauso nuo srities $\Omega$. Pavyzdžiui, jeigu plokštumoje įvesime polines kordinates

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta,$$

tai funkcija $u = \theta$ srityje

$$\Omega = \{(x, y) : 1 < \rho < 2, 0 < \theta < 2\pi\}$$

bus sumuojama ir turės joje sumuojamas apibendrintas išvestines. Tačiau ji nebus absoliučiai tolydi tiesių $x = \mathrm{const} > 0$ atkarpose, kertančiose sritį $\Omega$, ir todėl (žr. 2.10 teoremą) neturės apibendrintų pirmosios eilės išvestinių srityje

$$\tilde{\Omega} = \{(x, y) : 1 < \rho < 2, 0 \leq \theta < 2\pi\}.$$

Būtinų ir pakankamų sąlygų, kada erdvės $\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$ elementus būtų galima pratęsti į platesnę sritį išlaikant ,,glodumą“, nėra. Kai srities $\Omega$ paviršius $S$ yra pakankamai glodus, tokį pratęsimą sukonstruoti galima. Čia pateiksime konstrukciją, kuri remiasi erdvės $\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$ elementų aproksimacija aibės $\mathrm{C}^\infty(\overline{\Omega})$ elementais. Kaip matome iš ką tik išnagrinėto pavyzdžio, tokia aproksimacija ne visada galima. Išskirsime gana plačią klasę sričių, kai tokia aproksimacija galima.

**2.14 teorema.** *Tegu $\Omega$ yra aprėžta, žvaigždinė*[1] *atžvilgiu kurio nors savo vidinio taško sritis. Tada aibė $\mathrm{C}^\infty(\overline{\Omega})$ yra tiršta erdvėje $\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$.*

$\triangleleft$ Tarkime, sritis $\Omega$ yra žvaigždinė kurio nors savo vidinio taško atžvilgiu. Tegu šis taškas yra koordinačių pradžioje. Priešingu atveju koordinačių pradžią reikia perkelti į tą tašką.

Laisvai pasirenkame funkciją $u \in \mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$. Tegu $u^{(\lambda)}(x) = u(\lambda x)$, $\lambda \in (0, 1)$. Tada funkcija $u^\lambda \in \mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$, $\forall \lambda \in (0, 1)$. Kadangi funkcija $u \in \mathrm{L}_\mathrm{p}(\Omega)$ yra tolydi $\mathrm{L}_\mathrm{p}$ prasme, tai

$$\|u - u^{(\lambda)}\|_{\mathrm{L}_\mathrm{p}(\Omega)} = \|u(x) - u(\lambda x)\|_{\mathrm{L}_\mathrm{p}(\Omega)} \to 0,$$

kai $\lambda \to 1$. Dėl tos pačios priežasties $\forall \alpha : |\alpha| \leq k$

$$\| D^\alpha u - D^\alpha u^{(\lambda)}\|_{\mathrm{L}_\mathrm{p}(\Omega)} = \| D^\alpha u - \lambda^{|\alpha|}(D^\alpha u)^{(\lambda)}\|_{\mathrm{L}_\mathrm{p}(\Omega)} \leq$$

[1] Sritis $\Omega$ yra *žvaigždinė* atžvilgiu kurio nors savo vidinio taško, jeigu bet kuris spindulys, išeinantis iš to taško, kerta srities paviršių tik viename taške.

$$\leq \| D^\alpha u - (D^\alpha u)^{(\lambda)} \|_{\mathrm{L}_\mathrm{p}(\Omega)} + (1 - \lambda^{|\alpha|}) \| (D^\alpha u)^{(\lambda)} \|_{\mathrm{L}_\mathrm{p}(\Omega)} \to 0,$$

kai $\lambda \to 1$. Vadinasi, seka $\{u^{(\lambda)}\}$ konverguoja į funkciją $u$ erdvėje $\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$, kai $\lambda \to 1$.

Akivaizdu, kad $\forall\lambda \in (0,1)$, sritis $\lambda\Omega \subset \Omega$. Todėl vidutinės funkcijos $(u^{(\lambda)})_\rho \in \mathrm{C}^\infty(\overline{\Omega})$ ir, kai $\rho \to 0$, konverguoja į funkciją $u^{(\lambda)}$ erdvėje $\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$. Tačiau tada iš sekos $\{(u^{(\lambda)})_\rho\}$ galima išrinkti posekį $\{(u^{(\lambda)})_{\rho_\lambda}\}$, konverguojantį į funkciją $u$ erdvėje $\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$. Vadinasi, aibė $\mathrm{C}^\infty(\overline{\Omega})$ yra tiršta erdvėje $\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$. ▷

I š v a d a. Tegu sritis $\Omega$ yra pusrutulis $B^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1, x_n > 0\}$ ir funkcija $u$ lygi nuliui, kai $|x| > 1 - \varepsilon$. Tada anksčiau pateiktoje konstrukcijoje posekį $\{(u^{(\lambda)})_{\rho_\lambda}\}$ galima parinkti taip, kad kiekviena iš funkcijų $(u^{(\lambda)})_{\rho_\lambda}$ būtų lygi nuliui, kai $|x| > 1 - \varepsilon/2$.

Ištirsime erdvės $\mathrm{W}_\mathrm{p}^1(\Omega)$ atvejį.

2.15 teorema. *Tegu $\Omega$ yra aprėžta sritis, $S = \partial\Omega$ – $\mathrm{C}^1$ klasės paviršius ir $\mathrm{Q} \supset \overline{\Omega}$. Tada egzistuoja tiesinis aprėžtas pratęsimo operatorius*

$$\Pi : \mathrm{W}_\mathrm{p}^1(\Omega) \to \mathring{\mathrm{W}}_\mathrm{p}^1(Q).$$

*Be to, jeigu $u \in \mathrm{W}_\mathrm{p}^1(\Omega)$ ir $v = \Pi u$, tai $v(x) = u(x)$, kai $x \in \Omega$.*

◁ Įrodymą išskaidysime į tris etapus.

1. Tarkime, $\Omega = B^+, u \in \mathrm{W}_\mathrm{p}^1(B^+)$ ir funkcija $u$ lygi nuliui pussferės

$$S^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1, x_n > 0\}$$

aplinkoje. Lyginiu būdu pratęsę funkciją $u$ į pusrutulį $B^-$, gausime funkciją

$$v(x) = \begin{cases} u(x), & x \in B^+, \\ u(x'_n, -x_n), & x \in B^-. \end{cases}$$

Parodysime, kad funkcija $v \in \mathring{\mathrm{W}}_\mathrm{p}^1(B)$. Remiantis 2.14 teoremos išvada, egzistuoja tokia seka $\{u_m\} \subset \mathrm{C}^\infty(B^+)$, konverguojanti į $u$ erdvėje $\mathring{\mathrm{W}}_\mathrm{p}^1(B^+)$, kad $\forall m = 1, 2, \ldots$, funkcija $u_m$ lygi nuliui pussferės $S^+$ aplinkoje. Kiekvieną funkciją $u_m$ lyginiu būdu pratęskime į pusrutulį $B^-$. Pratęstos funkcijos

$$v_m(x) = \begin{cases} u_m(x), & x \in B^+, \\ u_m(x'_n, -x_n), & x \in B^-, \end{cases}$$

yra finičios ir tolydžios visame rutulyje $B$. Pusrutuliuose $B^+$ ir $B^-$ jos yra be galo diferencijuojamos. Todėl $v_m \in \mathring{\mathrm{W}}_\mathrm{p}^1(B)$ (žr. 2.4 skyrelio 1 pavyzdį) ir

$$\|v_m\|_{\mathrm{W}_\mathrm{p}^1(B)} = 2^{1/p} \|u_m\|_{\mathrm{W}_\mathrm{p}^1(B^+)}. \tag{2.25}$$

Be to,

$$\|v_m - v\|_{\mathrm{L}_\mathrm{p}(B)} \to 0, \quad \|v_{mx_i} - \omega_i\|_{\mathrm{L}_\mathrm{p}(B)} \to 0,$$

kai $m \to \infty$. Čia

$$\omega_i(x) = \begin{cases} u_{x_i}(x), & x \in B^+, i = 1, 2, \dots, n, \\ u_{x_i}(x'_n, -x_n), & x \in B^-, i = 1, 2, \dots, n-1, \\ -u_{x_n}(x'_n, -x_n), & x \in B^-, i = n. \end{cases}$$

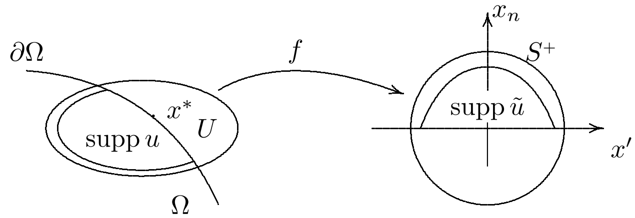
Remiantis 2.7 teorema, rutulyje $B$ egzistuoja funkcijos $v$ apibendrintos išvestinės $v_{x_i} = \omega_i$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$, ir $v \in \mathring{\mathrm{W}}^1_{\mathrm{p}}(B)$. Kadangi

$$\|v_m - v\|_{\mathrm{W}^1_{\mathrm{p}}(B)} \to 0,$$

kai $m \to \infty$, tai (2.25) lygybėje galima pereiti prie ribos. Taigi

$$\|v\|_{\mathrm{W}^1_{\mathrm{p}}(B)} = 2^{1/p} \|u\|_{\mathrm{W}^1_{\mathrm{p}}(B^+)}.$$

2. Tarkime, taškas $x^* \in \partial\Omega$, $U$ – taško $x^*$ aplinka, $u \in \mathrm{W}^1_{\mathrm{p}}(\Omega)$, aibė $\overline{\Omega} \cup \overline{U} \subset Q$ ir $\operatorname{supp} u \subset U$. Be to, tegu egzistuoja toks difeomorfizmas $f : U \to B$, kuris sritį $\Omega \cap U$ atvaizduoja į pusrutulį $B^+$, o paviršių $\partial\Omega \cap U$ į skritulį $\{x : |x| = 1, x_n = 0\}$ (žr. 2.4 pav.).




2.4 pav

Tada funkcija $\tilde{u} = u \circ f^{-1} \in \mathrm{W}^1_{\mathrm{p}}(B^+)$ ir pussferės $S^+$ aplinkoje lygi nuliui. Kadangi funkcija $\tilde{u}$ tenkina 1 punkto sąlygas, tai ją galima pratęsti į pusrutulį $B^-$. Pratęsta funkcija $\tilde{v} \in \mathring{\mathrm{W}}^1_{\mathrm{p}}(B)$. Apibrėšime funkciją $v = \tilde{v} \circ f$. Akivaizdu, kad $v \in \mathring{\mathrm{W}}^1_{\mathrm{p}}(U)$. Funkciją $v$ pratęsime nuliu į $\mathbb{R}^n \setminus U$ ir pratęstą funkciją pažymėsime ta pačia raide $v$. Tada funkcija $v \in \mathring{\mathrm{W}}^1_{\mathrm{p}}(Q)$. Be to, $v(x) = u(x)$, $\forall x \in \Omega$ ir

$$\|v\|_{\mathrm{W}^1_{\mathrm{p}}(Q)} \leq C \|u\|_{\mathrm{W}^1_{\mathrm{p}}(\Omega)};$$

čia konstanta $C$ priklauso tik nuo funkcijų $f$ ir $f^{-1}$ normų erdvėje $\mathrm{C}^1$.

3. Išnagrinėsime bendrąjį atvejį. Kadangi $\Omega$ yra aprėžta sritis ir $S$ yra $\mathrm{C}^1$ klasės paviršius, tai egzistuoja baigtinis skaičius tokių atvirų aibių $U_1, \dots, U_N$, kad:

1) $\Omega \subset \bigcup\limits_{i=1}^{N} U_i \subset Q$.

2) Aibė $\overline{U}_i \subset \Omega$ arba $U_i$ tenkina 2 punkto sąlygas, $i = 1, 2, \dots, N$.

Tegu $\{\zeta_i(x)\}_{i=1}^N$ yra vieneto skaidinys (žr. teoremą apie vieneto skaidinį), atitinkantis aibių sistemą $U_1, U_2, .., U_N$. Kitais žodžiais tariant, $\zeta_i \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp}\zeta_i \subset U_i$, $\forall i = 1, 2, \ldots, N$, ir

$$\sum_{i=1}^N \zeta_i(x) = 1, \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Tada

$$u(x) = \sum_{i=1}^N u_i(x);$$

čia $u_i(x) = u(x)\zeta_i(x)$. Laisvai pasirenkame kokią nors funkciją $u_i$. Jeigu aibė $\overline{U}_i \subset \Omega$, tai funkcija $u_i \in \mathring{\mathrm{W}}_\mathrm{p}^1(\Omega)$. Pratęsę ją nuliu į $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$, gausime funkciją $v_i \in \mathring{\mathrm{W}}_\mathrm{p}^1(Q)$. Tuo atveju, kai aibių $U_i$ ir $\partial\Omega$ sankirta yra netuščia, aibė $U_i$ tenkina 2 punkto sąlygas. Todėl egzistuoja tokia funkcija $v_i \in \mathring{\mathrm{W}}_\mathrm{p}^1(Q)$, kad $v_i(x) = u_i(x)$, $\forall x \in \Omega$, ir yra teisingas įvertis

$$\|v_i\|_{\mathrm{W}_\mathrm{p}^1(Q)} \le C\|u_i\|_{\mathrm{W}_\mathrm{p}^1(\Omega)}. \tag{2.26}$$

Dabar pratęsimo operatorių $\Pi$ galima apibrėžti taip:

$$\Pi u := v = \sum_{i=1}^N v_i.$$

Šioje sumoje kiekviena funkcija $v_i \in \mathring{\mathrm{W}}_\mathrm{p}^1(Q)$. Todėl ir funkcija $v \in \mathring{\mathrm{W}}_\mathrm{p}^1(Q)$. Be to, $v(x) = u(x)$, $\forall x \in \Omega$, ir yra teisingas įvertis

$$\|v\|_{\mathrm{W}_\mathrm{p}^1(Q)} \le C\|u\|_{\mathrm{W}_\mathrm{p}^1(\Omega)}; \tag{2.27}$$

čia konstanta $C$ priklauso tik nuo $p$, $\Omega$ ir $Q$. $\triangleright$

P a s t a b a. Iš šios teoremos įrodymo išplaukia, kad kartu su (2.27) yra teisingas įvertis

$$\|v\|_{\mathrm{L}_\mathrm{p}(Q)} \le C\|u\|_{\mathrm{L}_\mathrm{p}(\Omega)};$$

čia konstanta $C$ priklauso tik nuo $p$, $\Omega$ ir $Q$. Be to, jeigu $u \in \mathrm{L}_\mathrm{p}(\Omega)$, $u_{x_i} \in \mathrm{L}_\mathrm{q}(\Omega)$, $q > p$ ir sritis $\Omega$ yra klasės $\mathrm{C}^1$, tai remiantis Frydrichso nelygybe galima įrodyti, kad $u \in \mathrm{L}_\mathrm{q}(\Omega)$. Kartu galime tvirtinti, kad $u \in \mathrm{W}_\mathrm{q}^1(\Omega)$.

Tarkime, kad $\Omega$ yra neaprėžta sritis ir egzistuoja tokia atvirų aibių sistema $\{U_i\}_{i=1}^\infty$, kad:

1. $\Omega \subset \bigcup_{i=1}^\infty U_i \subset \mathrm{Q}$.

2. Aibė $\overline{U}_i \subset \Omega$ arba yra tokia pati kaip 2.15 teoremos įrodymo 2 dalyje, $i = 1, 2, \ldots$

3. Difeomorfizmų $f_i : U_i \to B$ ir $f_i^{-1} : B \to U_i$ normos erdvėse $\mathrm{C}^1(U_i)$ ir $\mathrm{C}^1(B)$ neviršija kokios nors konstantos, bendros visoms $U_i$.

4. Aibių sistemos $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ kartotinumas yra baigtinis, t.y. kiekvienas taškas $x \in \Omega$ priklauso ne daugiau kaip $N$ aibėms $U_i$, ir skaičius $N$ nepriklauso nuo taško $x$.

Tada 2.15 teoremoje pateikta pratęsimo konstrukcija tinka ir neaprėžtos srities atveju. Tiksliau, yra teisinga teorema.

2.16 teorema. *Tegu $\Omega$ yra neaprėžta erdvėje $\mathbb{R}^n$ sritis, tenkinanti anksčiau išvardytas sąlygas. Tada egzistuoja tiesinis aprėžtas pratęsimo operatorius*

$$\Pi : \mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{1}(\Omega) \to \mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^{1}(Q).$$

*Be to, jeigu $u \in \mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{1}(\Omega)$ ir $v = \Pi u$, tai $v(x) = u(x)$, kai $x \in \Omega$.*

Analogiškos teoremos yra teisingos ir erdvėms $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$, kai $k > 1$. Išnagrinėsime aprėžtos srities atvejį.

2.17 teorema. *Tegu $\Omega$ yra aprėžta sritis, $S = \partial\Omega$ – $\mathrm{C}^{\mathrm{k}}$ klasės paviršius ir $\overline{\Omega} \subset \mathrm{Q}$. Tada egzistuoja tiesinis aprėžtas pratęsimo operatorius*

$$\Pi : \mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega) \to \mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(Q).$$

*Be to, jeigu $u \in \mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ ir $v = \Pi u$, tai $v(x) = u(x)$, kai $x \in \Omega$, ir*

$$\|v\|_{\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(Q)} \leq C\|u\|_{\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)}; \tag{2.28}$$

*čia konstanta $C$ priklauso tik nuo $p$, $k$, $\Omega$ ir $Q$.*

$\triangleleft$ Tarkime, $\Omega = B^+$, o $u$ – pakankamai glodi pusrutulyje $B^+$ funkcija, lygi nuliui kokioje nors pakankamai mažoje pussferės $S^+$ aplinkoje. Apibrėžkime funkciją

$$v(x) = \begin{cases} u(x), & x \in B^+, \\ \sum\limits_{j=0}^{k} \alpha_j u(x_n', -2^{-j} x_n), & x \in B^-; \end{cases}$$

čia $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ yra lygčių sistemos

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j (-2^{-j})^m = 1, \quad m = 0, 1, \ldots, k,$$

sprendinys (pastaroji sistema turi vienintelį sprendinį, nes jos determinantas nelygus nuliui). Taip apibrėžta funkcija $v \in \mathrm{C}^{\mathrm{k}}(B)$, $\operatorname{supp} v \subset B$ ir

$$\|v\|_{\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(B)} \leq C\|u\|_{\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(B^+)}.$$

Konstanta $C$ priklauso tik nuo $p$ ir $k$. Kaip ir 2.15 teoremoje, galima parodyti, kad tokį pratęsimą galima atlikti $\forall u \in \mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(B^+)$. Tolesnis įrodymas yra analogiškas 2.15 teoremos įrodymui ir remiasi vieneto skaidiniu bei 2.11 teorema. $\triangleright$

I š v a d a. Jeigu sritis $\Omega$ yra tokia, kad erdvės $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ elementus galima pratęsti į platesnę sritį išlaikant ,,glodumą" ir (2.28) įvertį, tai aibė $\mathrm{C}^\infty(\overline{\Omega})$ yra tiršta erdvėje $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$.

P a s t a b a. Reikalavimas, kad $S$ būtų $\mathrm{C}^{\mathrm{k}}$ klasės paviršius, susijęs tik su teoremoje panaudota pratęsimo konstrukcija. Yra kitos funkcijų $u \in \mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ pratęsimo konstrukcijos, išlaikančios glodumą. Pavyzdžiui, galima reikalauti, kad sritis $\Omega$ tenkintų vadinamąją *minimalaus glodumo* sąlygą.

Tegu $\varphi : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^1$ yra funkcija, tenkinanti Lipšico sąlygą

$$|\varphi(x') - \varphi(\bar{x}')| \le M|x' - \bar{x}'|, \quad \forall x', \bar{x}' \in \mathbb{R}^{n-1}$$

su Lipšico konstanta $M$ ir

$$\Omega = \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > \varphi(x')\}, \quad x' = (x_1, \dots, x_{n-1}).$$

Sritį, kurią gausime pasukę arba pastūmę $\Omega$, vadinsime *specialiąja lipšicine* sritimi.

A p i b r ė ž i m a s. Tegu $\Omega$ yra atvira erdvėje $\mathbb{R}^n$ aibė, $S = \partial\Omega$. Sakysime, paviršius $S$ yra *minimaliai glodus*, jeigu egzistuoja seka atvirų aibių

$$U_1, U_2, \dots, U_n, \dots, \quad \Omega \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$$

ir tokie skaičiai $\varepsilon > 0$, $M > 0$, $N \in \mathbb{N}$, kad:

1. Jeigu $x \in S$, tai $B_\varepsilon(x) \subset U_i$ su tam tikru indeksu $i$.

2. Sistemos $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ kartotinumas neviršija $N$.

3. Kiekvienam $i$ egzistuoja *specialioji lipšicinė* sritis $\Omega_i$, su tokia Lipšico konstanta $M_i \le M$, kad
$$U_i \cap \Omega = U_i \cap \Omega_i.$$

Taigi 2.17 teorema išlieka teisinga daug platesnei sričių klasei. Šiai klasei gali būti priskirtos sritys, kurių kraštinių taškų aibė yra *minimaliai glodi*. Apytiksliai tokias sritis galima apibūdinti kaip sritis, kurių kraštinių taškų aibė yra paviršius, tenkinantis Lipšico sąlygą. Akivaizdu, kad paviršius $S$ turi *minimalų glodumą*, jeigu $S$ yra $\mathrm{C}^1$ klasės paviršius. Be to, jeigu $\Omega$ yra aprėžta arba iškila sritis, tai pakanka baigtinio skaičiaus atvirų aibių $U_i$.

## 2.7. UŽDAVINIAI

1. Tegu $u, v \in \mathrm{L}_2(\Omega)$ ir bent viena iš šių funkcijų yra finiti. Įrodykite, kad pakankamai mažiems $\rho > 0$ yra teisinga formulė

$$\int_\Omega u_\rho(x)v(x)\,dx = \int_\Omega u(x)v_\rho(x)\,dx. \tag{2.29}$$

2. Tegu $u^+ = \max\{u, 0\}$, $u^- = \min\{u, 0\}$, $u \in \mathrm{W}_1^1(\Omega)$ ($\Rightarrow u = u^+ + u^-$, $|u| = u^+ - u^-$). Įrodykite, kad $u^+, u^-, |u| \in \mathrm{W}_1^1(\Omega)$.

   Nurodymas. Pasinaudokite pirmuoju apibendrintos išvestinės apibrėžimu.

3. Tegu $f \in \mathrm{L}_\infty(\mathbb{R})$ yra dalimis glodi funkcija, $u \in \mathrm{W}_1^1(\Omega)$. Įrodykite, kad $f \circ u \in \mathrm{W}_1^1(\Omega)$ ir

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f \circ u) = \begin{cases} f'(u)u_{x_i}, & u \notin E, \\ 0, & u \in E; \end{cases}$$

   čia $E$ – aibė taškų, kuriuose funkcija $f$ nėra glodi.

   Nurodymas. Pasinaudokite 2 uždaviniu.

4. Tegu $\partial\Omega$ yra $\mathrm{C}^1$ klasės paviršius, funkcija $u \in \mathrm{L_p}(\Omega)$, o jos apibendrintos išvestinės $u_{x_i} \in \mathrm{L_q}(\Omega), \forall i = 1, 2, \ldots, n$, $q > p$. Įrodykite, kad $u \in \mathrm{W}_\mathrm{q}^1(\Omega)$.

   Nurodymas. Pasinaudokite Frydrichso nelygybe.

# 3 SKYRIUS

# Erdvių $\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}$ įdėjimo teoremos

Sakysime, normuota erdvė $B_1$ *įsideda* į normuotą erdvę $B_2$, jeigu kiekvienas elementas $u \in B_1$ priklauso erdvei $B_2$ ir

$$\|u\|_{B_2} \leq C\|u\|_{B_1};$$

čia konstanta $C$ nepriklauso nuo konkretaus elemento $u$. Erdvės $B_1$ į erdvę $B_2$ įdėjimo operatoriumi vadinsime tokį operatorių, kuris kiekvienam elementui $u \in B_1$ priskiria jį patį, bet kaip erdvės $B_2$ elementą. Taigi erdvės $B_1$ įdėjimas į erdvę $B_2$ yra ekvivalentus įdėjimo operatoriaus aprėžtumui. Be to, jeigu kiekviena aprėžta aibė erdvėje $B_1$ yra sąlyginis kompaktas erdvėje $B_2$, tai sakysime, kad erdvė $B_1$ kompaktiškai įsideda į erdvę $B_2$, o įdėjimo operatorius yra visiškai tolydus.

Kai kurios erdvių $\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$ įdėjimo teoremos gaunamos tiesiogiai iš jų apibrėžimo. Pavyzdžiui, erdvė $\mathring{\mathrm{W}}_\mathrm{p}^1(\Omega)$ įsideda į erdvę $\mathrm{L}_\mathrm{p}(\Omega)$. Tačiau nėra akivaizdu, kad aprėžtos srities atveju erdvė $\mathring{\mathrm{W}}_\mathrm{p}^1(\Omega)$ kompaktiškai įsideda į erdvę $\mathrm{L}_\mathrm{p}(\Omega)$ arba į erdvę $\mathrm{C}(\overline{\Omega})$, jeigu $p > n$. Analogiški teiginiai yra teisingi erdvėms $\mathrm{W}_\mathrm{q}^\mathrm{r}(\Omega)$ ir $\mathrm{C}^\mathrm{m}(\overline{\Omega})$. Pavyzdžiui, jeigu $r < k$, tai erdvė $\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$ įsideda į erdvę $\mathrm{W}_\mathrm{q}^\mathrm{r}(\Omega)$ tam tikriems $q > p$ ir, kuo didesnis yra skirtumas $k - r$, tuo platesnis rodiklio $q$ pasirinkimas. Be to, jeigu $(k - m)p > n$, tai erdvė $\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$ kompaktiškai įsideda į erdvę $\mathrm{C}^\mathrm{m}(\overline{\Omega})$. Tokius ir panašius teiginius nagrinėsime šiame skyriuje. Šiame skyriuje taip pat nagrinėsime ir funkcijų $u \in \mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$ „pėdsakus“ $(n-1)$-mačiuose paviršiuose. Parodysime, kad tai yra nauji objektai, kuriuos galima traktuoti kaip aibę funkcijų, turinčių trupmeninės eilės išvestines.

## 3.1. INTEGRALINIAI OPERATORIAI SU SILPNA YPATUMA

Tegu $\Omega$ yra aprėžta erdvėje $\mathbb{R}^n$ sritis, $k(x,y)$ – tolydi, kai $x \neq y$, ir aprėžta funkcija, $x, y \in \Omega,\ \alpha \in (0,n),\ v \in \mathrm{L}_\mathrm{p}(\Omega)$,

$$K\,v(x) = \int\limits_\Omega \frac{k(x,y)}{|x-y|^\alpha} v(y)\,dy, \quad x \in \Omega. \tag{3.1}$$

Taip apibrėžtas operatorius $K$ yra vadinamas *integraliniu operatoriumi su silpna ypatuma.*

3.1 teorema. *Tegu $\alpha < n/p'$, $1/p + 1/p' = 1$. Tada $K$ yra visiškai tolydus operatorius, veikiantis iš erdvės $\mathrm{L}_\mathrm{p}(\Omega)$ į erdvę $\mathrm{C}(\overline{\Omega})$.*

◁ Tegu $p < \infty$, $v \in L_p(\Omega)$, $u = K\,v$ ir $r = |x-y|$. Pagal teoremos sąlygą funkcija $k$ yra aprėžta. Todėl egzistuoja tokia konstanta $C$, kad

$$|u(x)| \le C \int\limits_\Omega r^{-\alpha}|v(y)|\,dy \le C\|r^{-\alpha}\|_{L_{p'}(\Omega)}\|v\|_{L_p(\Omega)}$$

(įvertindami integralą sritimi $\Omega$ pasinaudojome Helderio nelygybe). Integralas

$$\int\limits_\Omega r^{-\alpha}\,dy \le |S_1|\frac{(\operatorname{diam}\Omega)^{n-\alpha}}{n-\alpha}$$

(žr. 1.2 skyrelį). Todėl

$$|u(x)| \le C_1(\operatorname{diam}\Omega)^{n/p'-\alpha}\|v\|_{L_p(\Omega)}, \quad \forall x \in \overline{\Omega},$$

ir

$$\sup_{x\in\Omega}|u(x)| \le C_1(\operatorname{diam}\Omega)^{n/p'-\alpha}\|v\|_{L_p(\Omega)}. \tag{3.2}$$

Įrodysime, kad $u \in C(\overline{\Omega})$. Laisvai pasirinkime skaičių $\delta > 0$. Tada

$$u(x) = \int\limits_{\Omega\cap B_\delta(x)} r^{-\alpha}k(x,y)v(y)\,dy + \int\limits_{\Omega\setminus B_\delta(x)} r^{-\alpha}k(x,y)v(y)\,dy. \tag{3.3}$$

Kadangi

$$\int\limits_{\Omega\cap B_\delta(x)} r^{-\alpha}\,dy \le |S_1|\frac{\delta^{n-\alpha}}{n-\alpha},$$

tai pirmąjį integralą (3.3) formulėje galima įvertinti taip:

$$\left|\int\limits_{\Omega\cap B_\delta(x)} r^{-\alpha}k(x,y)v(y)\,dy\right| \le C_1\delta^{n/p'-\alpha}\|v\|_{L_p(\Omega)} \to 0, \tag{3.4}$$

kai $\delta \to 0$. Antrasis integralas (3.3) formulėje yra tolydi kintamųjų $x$ funkcija. Todėl funkcija $u$ yra tolydi kaip tolygiai konverguojančių tolydžių funkcijų riba.

Reiškinys

$$|u(x+z)-u(x)| \le \int\limits_\Omega \left|\frac{k(x+z,y)}{|x+z-y|^\alpha} - \frac{k(x,y)}{|x-y|^\alpha}\right||v(y)|\,dy \le I_1+I_2+I_3;$$

čia

$$\begin{aligned} I_1 &= \int\limits_{\Omega\cap B_\delta(x)} \left|\frac{k(x+z,y)}{|x+z-y|^\alpha}\right||v(y)|\,dy, \\ I_2 &= \int\limits_{\Omega\cap B_\delta(x)} \left|\frac{k(x,y)}{|x-y|^\alpha}\right||v(y)|\,dy, \\ I_3 &= \int\limits_{\Omega\setminus B_\delta(x)} \left|\frac{k(x+z,y)}{|x+z-y|^\alpha} - \frac{k(x,y)}{|x-y|^\alpha}\right||v(y)|\,dy. \end{aligned}$$

Integralas

$$I_1 \le C_1 \delta^{n/p'-\alpha} \|v\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}$$

(žr. (3.4) nelygybę). Jeigu taškas $x+z$ yra pakankamai arti taško $x$, tai $B_\delta(x) \subset B_{2\delta}(x+z)$ ir

$$I_2 \le C_1 (2\delta)^{n/p'-\alpha} \|v\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}.$$

Srityje $\Omega \setminus B_\delta(x)$ funkcija $\dfrac{k(x,y)}{|x-y|^\alpha}$ yra tolydi. Todėl

$$I_3 \le \varepsilon(|z|, \delta) \|v\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)};$$

čia $\varepsilon(t,\delta) \to 0$, kai $t \to 0$. Iš šių įverčių išplaukia, kad

$$|u(x+z) - u(x)| \le \big(C_1 \delta^{n/p'-\alpha} + C_1 (2\delta)^{n/p'-\alpha} + \varepsilon(|z|,\delta)\big) \|v\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}.$$

Laisvai pasirenkame skaičių $\varepsilon > 0$. Fiksuokime tokį $\delta > 0$, kad

$$C_1 \delta^{n/p'-\alpha} + C_1 (2\delta)^{n/p'-\alpha} \le \varepsilon/2$$

(tai padaryti galima, nes $n - \alpha p' > 0$). Kadangi $\varepsilon(t,\delta) \to 0$, kai $t \to 0$, tai egzistuoja toks skaičius $h > 0$, kad $\varepsilon(|z|,\delta) \le \varepsilon/2,\ \forall z : |z| < h$. Tačiau tada

$$\sup_{|z|<h} \sup_{x \in \Omega} |u(x+z) - u(x)| \le \varepsilon \|v\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}. \tag{3.5}$$

Tegu aibė $V \subset \mathrm{L_p}(\Omega)$ yra aprėžta ir

$$U = \{u = K\,v : v \in V\}.$$

Iš (3.2) ir (3.5) įverčių išplaukia, kad aibė $U$ erdvėje $\mathrm{C}(\overline{\Omega})$ yra aprėžta ir vienodai tolydi. Pagal Arcel$\Delta$a teoremą aibė $U$ yra sąlyginis kompaktas erdvėje $\mathrm{C}(\overline{\Omega})$. Taigi operatorius

$$K : \mathrm{L_p}(\Omega) \to \mathrm{C}(\overline{\Omega})$$

yra visiškai tolydus.

Kai $p = \infty$, teoremos įrodymas yra analogiškas. Netgi paprastesnis, nes nereikia taikyti Helderio nelygybės. $\triangleright$

Tegu $s \le n$ yra sveikasis teigiamas skaičius, $\Omega_s$ – srities $\Omega$ sankirta su plokštuma $\mathbb{R}^s$. Kai $s = n$, sritis $\Omega_n = \Omega$. Priminsime, kad sritis – tai netuščia, atvira, susijusi aibė. Todėl aibė $\Omega_s$ yra atvira. Tarkime, kad ji yra netuščia.

**3.2 teorema.** *Tegu $n/p' \le \alpha < n/p' + s/p$. Tada $K$ yra visiškai tolydus operatorius, veikiantis iš erdvės $\mathrm{L_p}(\Omega)$ į erdvę $\mathrm{L_q}(\Omega_s)$. Čia $q$ bet koks teigiamas skaičius, tenkinantis nelygybę $\alpha < n/p' + s/q$.*

$\triangleleft$ Atskirai išnagrinėsime du atvejus: $p \le q$ ir $p > q$. Tegu $p \le q$. Tokios $p$ ir $q$ reikšmės yra galimos, nes $\alpha < n/p' + s/p$. Kartu egzistuoja toks skaičius $\beta > 0$, kad

$$\alpha + 2\beta = n/p' + s/q.$$

Todėl reiškinį $r^{-\alpha}|v|$ galime perrašyti taip:

$$r^{-\alpha}|v| = r^{-s/q+\beta}|v|^{p/q}r^{-n/p'+\beta}|v|^{1-p/q}. \tag{3.6}$$

Tegu $v \in \mathrm{L_p}(\Omega)$ . Įrodysime, kad $r^{-\alpha}|v|$ yra sumuojama aibėje $\Omega_s \times \Omega$ funkcija. Pagal Jungo nelygybę (imame $p_1 = q$, $p_2 = p'$, $p_3 = qp/(q-p)$)

$$r^{-\alpha}|v| \le \frac{1}{q}r^{-s+\beta q}|v|^p + \frac{1}{p'}r^{-n+\beta p'} + \frac{q-p}{qp}|v|^p.$$

Pakanka įrodyti, kad kiekvienas iš reiškinių šios nelygybės dešinėje yra sumuojamas aibėje $\Omega_s \times \Omega$. Akivaizdu, kad trečiasis reiškinys yra sumuojama srityje $\Omega$ funkcija. Integralas

$$\int\limits_\Omega r^{-n+\beta p'}\,dy \le C(\operatorname{diam}\Omega)^{\beta p'} < \infty. \tag{3.7}$$

Todėl antrasis reiškinys taip pat yra sumuojama aibėje $\Omega_s \times \Omega$ funkcija. Integralas

$$\int\limits_{\Omega_s} r^{-s+\beta q}\,dx \le C(\operatorname{diam}\Omega_s)^{\beta q} < \infty. \tag{3.8}$$

Todėl

$$\int\limits_{\Omega_s\times\Omega} r^{-s+\beta q}|v(y)|^p\,dydx = \int\limits_\Omega |v(y)|^p\Big(\int\limits_{\Omega_s} r^{-s+\beta q}\,dx\Big)\,dy \le$$

$$\le C(\operatorname{diam}\Omega_s)^{\beta q}\|v\|^p_{\mathrm{L_p}(\Omega)} < \infty \tag{3.9}$$

(čia pasinaudojome Tonelio teorema). Taigi funkcija $r^{-s+\beta q}|v|^p$ yra sumuojama aibėje $\Omega\times\Omega_s$. Kartu funkcijos $r^{-\alpha}|v|$ ir $kr^{-\alpha}|v|$ yra sumuojamos aibėje $\Omega\times\Omega_s$. Pagal Fubinio teoremą funkcija

$$u(x) = \int\limits_\Omega \frac{k(x,y)}{r^\alpha}v(y)\,dy$$

yra sumuojama aibėje $\Omega_s$. Įrodysime, kad $u \in \mathrm{L_q}(\Omega_s)$. Priminsime, kad funkcija $k$ yra aprėžta. Todėl

$$|u(x)| \le C\int\limits_\Omega r^{-\alpha}|v(y)|\,dy.$$

Perrašysime šią nelygybę taip:

$$|u(x)| \le C\int\limits_\Omega r^{-s/q+\beta}|v(y)|^{p/q}\,r^{-n/p'+\beta}|v(y)|^{1-p/q}\,dy.$$

(žr. (3.6) formulę). Pagal Helderio nelygybę

$$|u(x)| \le C\Big(\int\limits_\Omega r^{-s+\beta q}|v(y)|^p\,dy\Big)^{1/q}\Big(\int\limits_\Omega r^{-n+\beta p'}\,dy\Big)^{1/p'}\Big(\int\limits_\Omega |v(y)|^p\,dy\Big)^{\frac{q-p}{qp}}.$$

(imame $p_1 = q$, $p_2 = p'$, $p_3 = qp/(q-p)$). Kairiąją ir dešiniąją šios nelygybės puses keliame $q$ laipsniu ir integruojame sritimi $\Omega_s$. Pasinaudoję (3.7), (3.8) ir (3.9) nelygybėmis, gausime

$$\int\limits_{\Omega_s} |u(x)|^q \, dx \leq C^q (\operatorname{diam} \Omega_s)^{\beta q} (\operatorname{diam} \Omega)^{\beta q} \|v\|^q_{\mathrm{L_p}(\Omega)}.$$

Kartu yra teisinga nelygybė

$$\|u\|_{\mathrm{L_q}(\Omega_s)} \leq C (\operatorname{diam} \Omega_s)^{\beta} (\operatorname{diam} \Omega)^{\beta} \|v\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}. \tag{3.10}$$

Tarkime, $V$ yra aprėžta erdvėje $\mathrm{L_p}(\Omega)$ aibė, t.y. egzistuoja toks teigiamas skaičius $M$, kad

$$\|v\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} \leq M, \quad \forall v \in V.$$

Iš (3.10) įverčio išplaukia, kad aibė

$$U = \{u = K\, v : v \in V\}$$

yra aprėžta. Parodysime, kad ji yra vienodai tolydi.

Laisvai pasirinkime skaičių $\varepsilon > 0$. Pagal Minkovskio nelygybę

$$\|u(x+z) - u(x)\|_{\mathrm{L_q}(\Omega_s)} \leq \|u_1\|_{\mathrm{L_q}(\Omega_s)} + \|u_2\|_{\mathrm{L_q}(\Omega_s)} + \|u_3\|_{\mathrm{L_q}(\Omega_s)};$$

čia:

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \int\limits_{\Omega \cap B_\delta(x)} \Big| \frac{k(x+z,y)}{|x+z-y|^\alpha} \Big| |v(y)| \, dy, \\ u_2(x) &= \int\limits_{\Omega \cap B_\delta(x)} \Big| \frac{k(x,y)}{|x-y|^\alpha} \Big| |v(y)| \, dy, \\ u_3(x) &= \int\limits_{\Omega \setminus B_\delta(x)} \Big| \frac{k(x+z,y)}{|x+z-y|^\alpha} - \frac{k(x,y)}{|x-y|^\alpha} \Big| |v(y)| \, dy, \end{aligned}$$

$\delta$ – bet koks teigiamas skaičius. Integralus $u_1$ ir $u_2$ galima įvertinti visiškai taip pat kaip ir integralą $u$ :

$$\begin{aligned} \|u_1\|_{\mathrm{L_q}(\Omega_s)} &\leq C (\operatorname{diam} \Omega_s)^{\beta} (2\delta)^{\beta} \|v\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}, \\ \|u_2\|_{\mathrm{L_q}(\Omega_s)} &\leq C (\operatorname{diam} \Omega_s)^{\beta} \delta^{\beta} \|v\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Fiksuokime tokį skaičių $\delta > 0$, kad

$$\|u_1\|_{\mathrm{L_q}(\Omega_s)} + \|u_2\|_{\mathrm{L_q}(\Omega_s)} \leq C (\operatorname{diam} \Omega_s)^{\beta} \big((2\delta)^{\beta} + \delta^{\beta}\big) M \leq \varepsilon/2.$$

Srityje $\Omega \setminus B_\delta(x)$ funkcija $\dfrac{k(x,y)}{|x-y|^\alpha}$ yra tolydi. Todėl

$$\|u_3\|_{\mathrm{L_q}(\Omega_s)} \leq \varepsilon(|z|, \delta) \|v\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} \leq \varepsilon(|z|, \delta) M, \quad \forall z \in B_\delta(x);$$

čia $\varepsilon(t,\delta) \to 0$, kai $t \to 0$.

Fiksuokime tokį skaičių $h > 0$, kad

$$\varepsilon(|z|,\delta)M \le \varepsilon/2, \quad \forall z : |z| < h.$$

Tada

$$\|u(x+z) - u(x)\|_{\mathrm{L_q}(\Omega_s)} \le \varepsilon, \quad \forall z, v : |z| < h,\ v \in V.$$

Taigi aibė $U$ yra vienodai tolydi. Pagal 2.5 teoremą aibė $U$ yra sąlyginis kompaktas erdvėje $\mathrm{L_q}(\Omega_s)$, o operatorius

$$K : \mathrm{L_p}(\Omega) \to \mathrm{L_q}(\Omega_s)$$

yra visiškai tolydus.

Tegu dabar $q < p$. Imkime tokį skaičių $r \ge p$, kad $\alpha < n/p' + s/r$. Pagal Helderio nelygybę

$$\|u\|_{\mathrm{L_q}(\Omega_s)} \le |\Omega_s|^{\frac{r-q}{rq}} \Big( \int\limits_{\Omega_s} |u(x)|^r \, dx \Big)^{1/r}.$$

Kadangi $r \ge p$, tai (žr. (3.10) įvertį)

$$\|u\|_{\mathrm{L_r}(\Omega_s)} \le C(\operatorname{diam}\Omega_s)^\beta (\operatorname{diam}\Omega)^\beta \|v\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}.$$

Todėl

$$\|u\|_{\mathrm{L_q}(\Omega_s)} \le C|\Omega_s|^{\frac{r-q}{rq}} (\operatorname{diam}\Omega_s)^\beta (\operatorname{diam}\Omega)^\beta \|v\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}.$$

Tolesnis įrodymas yra analogiškas atvejui $q \ge p$. ▷

P a s t a b a. Iš teoremos įrodymo išplaukia, kad bet kokiam fiksuotam $z \in \mathbb{R}^n$ ir visiems pakankamai mažiems $t > 0$ yra teisinga nelygybė:

$$\|u(x+tz) - u(x)\|_{\mathrm{L_q}(\Omega_s)} \le \varepsilon(t) \|v\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)};$$

čia $\varepsilon(t) \to 0$, kai $t \to 0$.

Funkcija

$$k_i(x,y) = \frac{1}{|S_1|} \frac{x_i - y_i}{|x-y|}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

yra tolydi, kai $x \ne y$, ir aprėžta $\forall x, y \in \Omega$. Todėl operatorius $K_i$, apibrėžtas formule

$$K_i\, v(x) = \int\limits_\Omega \frac{k_i(x,y)}{|x-y|^{n-1}} v(y)\, dy = \frac{1}{|S_1|} \int\limits_\Omega \frac{x_i - y_i}{|x-y|^n} v(y)\, dy, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

yra operatorius su silpna ypatuma ($\alpha = n - 1$). Visi suformuluoti 3.1 ir 3.2 teoremose teiginiai išlieka teisingi ir operatoriui $K_i$. Tiksliau, yra teisinga tokia teorema.

3.3 teorema. *Tegu $\Omega$ yra aprėžta erdvėje $\mathbb{R}^n$ sritis. Tada:*

1. *Operatorius*
$$K_i : \mathrm{L_p}(\Omega) \to \mathrm{C}(\overline{\Omega})$$
*yra visiškai tolydus, kai* $p > n$.

2. *Kai* $1 \leq p \leq n$ *ir* $n - p < s \leq n$, $q \geq 1$, *operatorius*
$$K_i : \mathrm{L_p}(\Omega) \to \mathrm{L_q}(\Omega_s)$$
*yra visiškai tolydus, jeigu*
$$1 - \frac{n}{p} + \frac{s}{q} > 0.$$

Rodiklis $q^*$ :
$$1 - \frac{n}{p} + \frac{s}{q^*} = 0 \tag{3.11}$$
vadinamas ***ribiniu***. Jeigu 3.3 teoremoje $q = q^*$, tai operatorius
$$K_i : \mathrm{L_p}(\Omega) \to \mathrm{L_{q^*}}(\Omega_s)$$
nėra visiškai tolydus. Tačiau galima įrodyti, kad jis yra aprėžtas. Tiksliau, yra teisinga tokia teorema.

**3.4 teorema.** *Tegu* $1 < p < n$, $n - p < s \leq n$. *Tada operatorius*
$$K_i : \mathrm{L_p}(\Omega) \to \mathrm{L_{q^*}}(\Omega_s)$$
*yra aprėžtas.*

Šios teoremos neįrodinėsime. Paminėsime tik, kad jos įrodymas remiasi įverčiu
$$\|u\|_{\mathrm{L_q}(\Omega_s)} \leq C\|v\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}; \tag{3.12}$$
čia
$$u(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{v(y)}{|x-y|^\alpha}\, dy, \quad \alpha < n,$$
$q > p$, $s/q = \alpha - n/p' > 0$. Šio įverčio įrodymą galima rasti [**?**] knygoje, kai $s = n = 1$, [**?**] knygoje, kai $s = n \geq 1$, ir [**?**] knygoje, kai $s \leq n$, $n \geq 1$.

## 3.2. FUNKCIJŲ $u \in \mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^{1}(\Omega)$ INTEGRALINĖ IŠRAIŠKA

Tegu $\Omega$ yra aprėžta sritis, $S = \partial\Omega$ – dalimis glodus paviršius. Tada $\forall u \in \mathrm{C}^2(\overline{\Omega})$ ir $\forall x \in \Omega$ yra teisinga integralinė išraiška

$$
\begin{aligned}
u(x) = & -\int_{\Omega} E(x-y)\Delta u(y)\,dy + \\
& + \int_{S} \Big( E(x-y)\frac{\partial u(y)}{\partial \mathbf{n}_y} - u(y)\frac{\partial E(x-y)}{\partial \mathbf{n}_y} \Big)\, dS_y;
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

čia

$$
E(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|S_1|(n-2)|x|^{n-2}}, & kain > 2, \\ \dfrac{1}{|S_1|}\ln\dfrac{1}{|x|}, & kain = 2, \end{cases}
$$

yra *singuliarusis* Laplaso lygties sprendinys (žr. [**?**]). Jeigu funkcija $u$ yra finiti, tai (3.13) formulėje integralas paviršiumi $S$ yra lygus nuliui. Šiuo atveju

$$
u(x) = -\int_{\Omega} E(x-y)\Delta u(y)\,dy. \tag{3.14}
$$

Funkcija $E$ turi pirmos eilės apibendrintas išvestines

$$
\frac{\partial E(x)}{\partial x_i} = -\frac{1}{|S_1|}x_i|x|^{-n}, \quad \forall i = 1,2,\dots,n.
$$

Kai $n > 2$, šį teiginį įrodėme 2.4 skyrelyje (kai $n = 2$, įrodymas yra analogiškas). Pagal apibendrintos išvestinės apibrėžimą $\forall u \in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$ yra teisinga integralinė tapatybė

$$
-\int_{\Omega} E(x-y)\Delta u(y)\,dy = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{|S_1|}\int_{\Omega}\frac{x_i-y_i}{|x-y|^n}u_{y_i}(y)\,dy.
$$

Todėl (3.14) formulę galime perrašyti taip:

$$
u(x) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{|S_1|}\int_{\Omega}\frac{x_i-y_i}{|x-y|^n}u_{y_i}(y)\,dy. \tag{3.15}
$$

3.1 lema. *Kiekvienai funkcijai $u \in \mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^{1}(\Omega)$ yra teisinga (3.15) formulė (lygybė čia suprantama kaip lygybė erdvėje $\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega)$, t.y. kairioji pusė lygi dešiniajai b.v. $x \in \Omega$).*

◁ Laisvai pasirenkame funkciją $u \in \mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^{1}(\Omega)$. Pagal poerdvio $\mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^{1}(\Omega)$ apibrėžimą egzistuoja seka $\{u_m\} \subset \mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$, konverguojanti į $u$ erdvėje $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{1}(\Omega)$.

Kiekvienai funkcijai $u_m$ yra teisinga (3.15) formulė, t.y.

$$u_m(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|S_1|} \int\limits_{\Omega} \frac{x_i - y_i}{|x-y|^n} u_{my_i}(y)\, dy.$$

Perrašykime šią formulę taip:

$$u_m = \sum_{i=1}^{n} K_i\, D_i\, u_m; \tag{3.16}$$

čia: $D_i$ – diferencijavimo operatorius pagal kintamąjį $y_i$, o

$$K_i\, v = \frac{1}{|S_1|} \int\limits_{\Omega} \frac{x_i - y_i}{|x-y|^n} v(y)\, dy, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

yra integralinis operatorius su silpna ypatuma (žr. 3.1 skyrelį). Pagal 3.3 teoremą $K_i$ yra visiškai tolydus operatorius, veikiantis iš erdvės $\mathrm{L}_\mathrm{p}(\Omega)$ į erdvę $\mathrm{L}_\mathrm{p}(\Omega)$ (imame $s = n, q = p$). Be to, $D_i$ yra tolydus operatorius, veikiantis iš erdvės $\mathring{\mathrm{W}}^1_{\mathrm{p}}(\Omega)$ į erdvę $\mathrm{L}_\mathrm{p}(\Omega)$. Todėl (3.16) formulėje galima pereiti prie ribos, kai $m \to \infty$. Taigi

$$u = \sum_{i=i}^{n} K_i\, D_i\, u, \quad \forall u \in \mathring{\mathrm{W}}^1_{\mathrm{p}}(\Omega)\,. \tag{3.17}$$

Kartu $\forall u \in \mathring{\mathrm{W}}^1_{\mathrm{p}}(\Omega)$ yra teisinga (3.15) formulė. ▹

## 3.3. ERDVIŲ $\mathrm{W}_\mathrm{p}^1(\Omega)$ ĮDĖJIMO TEOREMOS

Šiame skyrelyje suformuluosime ir įrodysime pagrindines erdvių $\mathrm{W}_\mathrm{p}^1(\Omega)$ įdėjimo teoremas. Iš pradžių išnagrinėsime erdvės $\mathring{\mathrm{W}}_\mathrm{p}^1(\Omega)$ atvejį.

3.5 teorema. *Tegu $\Omega$ yra aprėžta erdvėje $\mathbb{R}^n$ sritis ir $p > n$. Tada erdvė $\mathring{\mathrm{W}}_\mathrm{p}^1(\Omega)$ įsideda į erdvę $\mathrm{C}(\overline{\Omega})$ ir įdėjimo operatorius yra visiškai tolydus.*

◁ Kiekvienai funkcijai $u \in \mathring{\mathrm{W}}_\mathrm{p}^1(\Omega)$ yra teisinga (3.17) formulė

$$u = \sum_{i=1}^n K_i\, D_i\, u.$$

Akivaizdu, kad operatorius $D_i : \mathring{\mathrm{W}}_\mathrm{p}^1(\Omega) \to \mathrm{L}_\mathrm{p}(\Omega)$, $i = 1, 2, \dots, n$, yra tolydus. Be to, pagal 3.3 teoremą integralinis operatorius

$$K_i : \mathrm{L}_\mathrm{p}(\Omega) \to \mathrm{C}(\overline{\Omega}), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

yra visiškai tolydus. Todėl operatorius

$$K_i\, D_i : \mathring{\mathrm{W}}_\mathrm{p}^1(\Omega) \to \mathrm{C}(\overline{\Omega}) \quad \forall i = 1, 2, \dots, n,$$

kartu ir operatorius

$$K = \sum_{i=1}^n K_i\, D_i$$

yra visiškai tolydūs. ▷

P a s t a b a. Ši teorema teigia, kad kiekvienos funkcijos $u \in \mathring{\mathrm{W}}_\mathrm{p}^1(\Omega)$ ekvivalentiškumo klasėje yra funkcija $u \in \mathrm{C}(\overline{\Omega})$ ir teisingas įvertis

$$\|u\|_{\mathrm{C}(\overline{\Omega})} \le C\|u\|_{\mathring{\mathrm{W}}_\mathrm{p}^1(\Omega)}; \tag{3.18}$$

čia konstanta $C$ nepriklauso nuo konkretaus elemento $u$. Be to, kiekviena aprėžta aibė erdvėje $\mathring{\mathrm{W}}_\mathrm{p}^1(\Omega)$ yra sąlyginis kompaktas erdvėje $\mathrm{C}(\overline{\Omega})$.

Šią teoremą galima patikslinti. Funkcija $u \in \mathring{\mathrm{W}}_\mathrm{p}^1(\Omega)$ yra ne tik tolydi, bet ir priklauso Helderio klasei su tam tikru rodikliu $\alpha$.

3.6 teorema. *Tegu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ yra aprėžta sritis, $p > n$, $\alpha \le 1 - n/p$. Tada erdvė $\mathring{\mathrm{W}}_\mathrm{p}^1(\Omega)$ įsideda į erdvę $\mathrm{C}^\alpha(\overline{\Omega})$ ir*

$$|u(x) - u(y)| \le C\|u_x\|_{\mathrm{L}_\mathrm{p}(\Omega)}|x - y|^\alpha, \quad \forall x, y \in \overline{\Omega}. \tag{3.19}$$

*Be to, kai $\alpha < 1 - n/p$, įdėjimo operatorius yra visiškai tolydus.*

◁ Tegu funkcija $u \in \mathring{\mathrm{W}}_\mathrm{p}^1(\Omega)$. Pratęskime ją nuliu į srities $\Omega$ išorę ir gautą funkciją pažymėkime ta pačia raide $u$. Tada $u \in \mathring{\mathrm{W}}_\mathrm{p}^1(Q)$; čia $Q \supset \overline{\Omega}$ – bet kokia standartinė sritis. Imkime $Q$ rutulį, kurio spindulys yra pakankamai didelis.

Laisvai pasirinkime taškus $x, y \in \overline{\Omega}$. Skirtumas

$$|u(x) - u(y)| \le |u(x) - \tilde{u}_\rho(x)| + |u(y) - \tilde{u}_\rho(x)| \le I_1 + I_2;$$

čia

$$I_1 = \frac{1}{|B_\rho|} \int\limits_{B_\rho(x)} |u(x) - u(z)|\, dz, \quad I_2 = \frac{1}{|B_\rho|} \int\limits_{B_\rho(x)} |u(y) - u(z)|\, dz,$$

o funkcija

$$\tilde{u}_\rho(x) = \frac{1}{|B_\rho|} \int\limits_{B_\rho(x)} u(z)\, dz$$

yra funkcijos $u$ vidutinė reikšmė rutulyje $B_\rho(x)$, $\rho = |x - y|$.

Tegu $z \in B_\rho(x)$, $\omega = \dfrac{z - x}{|z - x|} \in S_1(x)$, $t = |z - x|$. Tada b.v. $\omega \in S_1(x)$ funkcija $u$ yra absoliučiai tolydi spindulyje $\{z \in \mathbb{R}^n : z = x + t\omega, t \ge 0\}$. Pagal Niutono–Leibnico formulę

$$|u(x) - u(z)| = |u(x) - u(x + t\omega)| = \Big| \int\limits_0^t \frac{d}{d\tau} u(x + \tau\omega)\, d\tau \Big| =$$

$$= \Big| \int\limits_0^t \sum_{i=1}^n u_i(x + \tau\omega)\omega_i\, d\tau \Big| \le \int\limits_0^t |\nabla u(x + \tau\omega)|\, d\tau;$$

čia $u_i(x) = \partial u(x)/\partial x_i$, $\nabla u = (u_1, \dots, u_n)$, $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$. Todėl

$$I_1 \le \frac{1}{|B_\rho|} \int\limits_{B_\rho(x)} \int\limits_0^t |\nabla u(x + \tau\omega)|\, d\tau dz =$$

$$= \frac{1}{|B_\rho|} \int\limits_0^\rho \int\limits_{S_1(x)} \Big( \int\limits_0^t |\nabla u(x + \tau\omega)|\, d\tau \Big) t^{n-1}\, d\omega dt \le$$

$$\le \frac{1}{|B_\rho|} \int\limits_0^\rho \int\limits_{S_1(x)} \Big( \int\limits_0^\rho |\nabla u(x + \tau\omega)|\, d\tau \Big) t^{n-1}\, d\omega dt =$$

$$= \frac{\rho^n}{n|B_\rho|} \int\limits_0^\rho \int\limits_{S_1(x)} |\nabla u(x + \tau\omega)|\, d\omega d\tau \le$$

$$\le \frac{\rho^n}{n|B_\rho|} \Big( \int\limits_0^\rho \int\limits_{S_1(x)} |\nabla u(x + \tau\omega)|^p \tau^{n-1}\, d\omega d\tau \Big)^{1/p} \Big( \int\limits_0^\rho \int\limits_{S_1(x)} \tau^{-\frac{n-1}{p-1}}\, d\tau d\omega \Big)^{1/p'} =$$

$$= \frac{\rho^n}{n|B_\rho|}\Big(\int\limits_{B_\rho(x)} |u_z(z)|^p\,dz\Big)^{1/p}|S_1|^{1/p'}\left(\frac{\rho^{-\frac{n-1}{p-1}+1}}{-\frac{n-1}{p-1}+1}\right)^{1/p'} =$$

$$= C\rho^{(p-n)/p}\Big(\int\limits_{B_\rho(x)\cap\Omega} |u_z(z)|^p\,dz\Big)^{1/p} \le C\rho^{(p-n)/p}\Big(\int\limits_{\Omega} |u_z(z)|^p\,dz\Big)^{1/p}.$$

Rutulys $B_\rho(x) \subset B_{2\rho}(y)$. Todėl

$$I_2 \le \frac{1}{|B_\rho|}\int\limits_{B_{2\rho}(y)} |u(y)-u(z)|\,dz.$$

Toliau įvertinimas yra visiškai toks pats kaip integralo $I_1$ atveju, t.y.

$$I_2 \le C(2\rho)^{(p-n)/p}\Big(\int\limits_{\Omega} |u_z(z)|^p\,dz\Big)^{1/p}.$$

Pasinaudoję šiais integralų $I_1$, $I_2$ įverčiais, gausime

$$|u(x)-u(y)| \le I_1 + I_2 \le C\|u_z\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}|x-y|^{1-n/p}.$$

Iš šio įverčio išplaukia, kad erdvė $\mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^1(\Omega)$ įsideda į erdvę $\mathrm{C}^{1-\mathrm{n/p}}(\overline{\Omega})$.

Jeigu $\beta > \alpha$, tai erdvė $\mathrm{C}^\beta(\overline{\Omega})$ kompaktiškai įsideda į erdvę $\mathrm{C}^\alpha(\overline{\Omega})$. Todėl, kai $\alpha < 1 - n/p$, erdvė $\mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^1(\Omega)$ kompaktiškai įsideda į erdvę $\mathrm{C}^\alpha(\overline{\Omega})$. ▹

3.7 teorema. *Tegu $\Omega_s$ yra srities $\Omega$ ir erdvės $\mathbb{R}^s$ sankirta, $s > n-p$, $1 \le p \le n$ ir $s/q \ge n/p - 1$. Tada erdvė $\mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^1(\Omega)$ įsideda į erdvę $\mathrm{L_q}(\Omega_s)$. Be to, kai $s/q > n/p - 1$, įdėjimo operatorius yra visiškai tolydūs.*

◃ Išnagrinėsime atvejį, kai $s/q > n/p - 1$. Pagal 3.3 teoremą operatorius

$$K_i : \mathrm{L_p}(\Omega) \to \mathrm{L_q}(\Omega_s), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

yra visiškai tolydus. Todėl operatorius

$$K_i\,D_i : \mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^1(\Omega) \to \mathrm{L_q}(\Omega_s), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

kartu ir operatorius

$$K = \sum_{i=1}^n K_i\,D_i : \mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^1(\Omega) \to \mathrm{L_q}(\Omega_s)$$

yra visiškai tolydus.

Atvejis $s/q = n/p - 1$ nagrinėjamas analogiškai. Reikia tik pasinaudoti 3.4 teorema. ▹

P a s t a b a. Iš šios teoremos išplaukia, kad kiekvienos funkcijos $u \in \mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^1(\Omega)$ ekvivalentiškumo klasėje yra funkcija $u \in \mathrm{L_q}(\Omega_s)$ ir

$$\|u\|_{\mathrm{L_q}(\Omega_s)} \le C\|u\|_{\mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^1(\Omega)}; \tag{3.20}$$

čia konstanta $C$ nepriklauso nuo konkretaus elemento $u \in \mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^1(\Omega)$. Be to, jeigu $s/q > n/p-1$, tai kiekviena aprėžta aibė erdvėje $\mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^1(\Omega)$ yra sąlyginis kompaktas erdvėje $\mathrm{L}_{\mathrm{q}}(\Omega_s)$.

I š v a d o s:

1. Remiantis įverčiais, gautais įrodant 3.1 ir 3.2 teoremas, galima tvirtinti, kad (3.18) ir (3.20) nelygybėse konstanta $C$ priklauso tik nuo $\Omega$ ir $\Omega_s$ diametrų, tačiau nepriklauso nuo jų geometrinių savybių.

2. Jeigu (3.7) teoremoje paimsime $s = n$ ir $p = q$, tai gausime, kad erdvė $\mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^1(\Omega)$ įsideda į erdvę $\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega)$ ir įdėjimo operatorius yra visiškai tolydus.

**3.8 teorema.** *Tegu $\Omega$ yra aprėžta erdvėje $\mathbb{R}^n$ sritis, $S = \partial\Omega$ – $\mathrm{C}^1$ klasės paviršius. Tada:*

1. *Jeigu $p > n$, tai erdvė $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^1(\Omega)$ įsideda į erdvę $\mathrm{C}(\overline{\Omega})$ ir įdėjimo operatorius yra visiškai tolydus.*

2. *Jeigu $s > n-p$, $1 \le p \le n$ ir $s/q \ge n/p - 1$, tai erdvė $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^1(\Omega)$ įsideda į erdvę $\mathrm{L}_{\mathrm{q}}(\Omega_s)$. Be to, jeigu $s/q > n/p - 1$, tai įdėjimo operatorius yra visiškai tolydus.*

$\triangleleft$ Tegu $Q$ yra tokia aprėžta sritis (galima imti, pavyzdžiui, pakankamai didelio spindulio rutulį), kad $\overline{\Omega} \subset Q$. Kiekvieną funkciją $u \in \mathrm{W}_{\mathrm{p}}^1(\Omega)$, išlaikydami glodumą, pratęskime į sritį $Q$ (žr. 2.15 teoremą). Tiksliau, konstruojame pratęsimo operatorių $\Pi$, kuris kiekvienai funkcijai $u \in \mathrm{W}_{\mathrm{p}}^1(\Omega)$ priskiria tokią funkciją $v = \Pi u \in \mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^1(Q)$, kad

$$\|v\|_{\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^1(Q)} \le C\|u\|_{\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^1(\Omega)}, \quad v\big|_{\Omega} = u.$$

Tarkime, patenkintos pirmo teoremos punkto sąlygos ir $U \subset \mathrm{W}_{\mathrm{p}}^1(\Omega)$ yra aprėžta aibė. Tada aibė $\Pi U$ yra aprėžta erdvėje $\mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^1(Q)$. Pagal 3.5 teoremą aibė $\Pi U$ yra sąlyginis kompaktas erdvėje $\mathrm{C}(\overline{Q})$. Kartu aibė $V = \Pi U\big|_{\Omega}$ yra sąlyginis kompaktas erdvėje $\mathrm{C}(\overline{\Omega})$. Taigi erdvė $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^1(\Omega)$ įsideda į erdvę $\mathrm{C}(\overline{\Omega})$ ir įdėjimo operatorius yra visiškai tolydus. Antrasis teoremos teiginys įrodomas analogiškai. $\triangleright$

P a s t a b a. Šioje teoremoje įrodyta, kad esant atitinkamoms sąlygoms yra teisingos nelygybės:

$$\|u\|_{\mathrm{C}(\overline{\Omega})} \le C\|u\|_{\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^1(\Omega)}, \quad \forall u \in \mathrm{W}_{\mathrm{p}}^1(\Omega), \tag{3.21}$$

$$\|u\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{q}}(\Omega_s)} \le C\|u\|_{\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^1(\Omega)}, \quad \forall u \in \mathrm{W}_{\mathrm{p}}^1(\Omega)\,. \tag{3.22}$$

Atkreipsime dėmesį į tai, kad šiose nelygybėse normos $\|\cdot\|_{\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^1(\Omega)}$ negalima pakeisti norma $\|\cdot\|_{\mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^1(\Omega)}$. Be to, skirtingai nuo (3.18) ir (3.20) nelygybių, konstanta $C$ čia priklauso ne tik nuo srities diametro, bet ir nuo jo paviršiaus geometrinių savybių (tiksliau, nuo operatoriaus $\Pi$ normos).

Pirmąjį 3.8 teoremos teiginį galima patikslinti.

**3.9 teorema.** *Tegu $p > n$, $\alpha \le 1 - n/p$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ yra aprėžta sritis, $S = \partial\Omega$ – $C^1$ klasės paviršius. Tada erdvė $W^1_p(\Omega)$ įsideda į erdvę $C^\alpha(\overline{\Omega})$ ir, kai $\alpha < 1 - n/p$, įdėjimo operatorius yra visiškai tolydus.*

Šios teoremos įrodymas yra visiškai toks pats kaip pirmojo 3.8 teoremos teiginio. Tik erdvę C reikia pakeisti erdve $C^\alpha$ ir remtis ne 3.5, o 3.6 teorema.

Įdėjimo teoremos yra teisingos ir neaprėžtos srities atveju.

**3.10 teorema.** *Tegu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ yra neaprėžta sritis, tenkinanti 2.16 teoremos sąlygas. Tada:*

1. *Jeigu $p > n$, tai erdvė $W^1_p(\Omega)$ įsideda į erdvę $C(\overline{\Omega})$.*
2. *Jeigu $p > n$, $\alpha \le 1 - n/p$, tai erdvė $W^1_p(\Omega)$ įsideda į erdvę $C^\alpha(\overline{\Omega})$.*
3. *Jeigu $s > n - p$, $p \ge 1$, $p \le q < \infty$ ir $s/q \ge n/p - 1$, tai erdvė $W^1_p(\Omega)$ įsideda į erdvę $L_q(\Omega_s)$.*

$\triangleleft$ Tegu $u \in W^1_p(\Omega)$. Išlaikydami glodumą pratęskime funkciją $u$ į srities $\Omega$ išorę ir gautą funkciją pažymėkime ta pačia raide. Tada pagal 2.16 teoremą

$$\|u\|_{W^1_p(\mathbb{R}^n)} \le \tilde{C}\|u\|_{W^1_p(\Omega)};$$

čia konstanta $\tilde{C}$ nepriklauso nuo konkrečios funkcijos $u$.

Tegu $U_1, U_2, \dots, U_n, \dots$ yra kartotinumo $N$ atvirų aibių (pavyzdžiui, rutulių) sistema, dengianti visą erdvę $\mathbb{R}^n$, $\Omega_s = \Omega \cap \mathbb{R}^s$, $U^s_k = U_k \cap \mathbb{R}^s$. Akivaizdu, kad $\Omega_s \subset \bigcup\limits_k U^s_k$.

Įrodysime trečiąjį teoremos teiginį. Tegu $s > n - p$ ir $s/q \ge n/p - 1$. Tada pagal 3.8 teoremą

$$\|u\|_{L_q(U^s_k)} \le C\|u\|_{W^1_p(U_k)};$$

čia konstanta $C$ nepriklauso nei nuo $u$, nei nuo $k$. Raide $\mathbb{K}$ pažymėkime visumą indeksų $k$, kuriems aibė $U^s_k$ yra netuščia. Tada

$$\|u\|^q_{L_q(\Omega_s)} \le \sum_{k\in\mathbb{K}} \|u\|^q_{L_q(U^s_k)} \le C^q \sum_{k\in\mathbb{K}} \|u\|^q_{W^1_p(U_k)}.$$

Kadangi $q \ge p$, tai

$$\sum_k \|u\|^q_{W^1_p(U_k)} = \sum_k \Big[\int\limits_{U_k} \Big(|u_x|^p + |u|^p\Big)\,dx\Big]^{q/p} \le$$

$$\le \Big[\sum_k \int\limits_{U_k} \Big(|u_x|^p + |u|^p\Big)\,dx\Big]^{q/p} = \Big[\sum_k \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big(|u_x|^p + |u|^p\Big)\chi_k(x)\,dx\Big]^{q/p};$$

čia: $\chi_k$ – aibės $U_k$ *charakteristinė funkcija,* $|u_x|^p = \sum\limits_{i=1}^{n} |u_{x_i}|^p$. Aibių sistemos $\{U_k\}$ kartotinumas neviršija $N$, t.y. kiekvienas taškas $x \in \mathbb{R}^n$ gali priklausyti ne daugiau kaip $N$ aibėms $U_k$. Todėl

$$\sum_k \chi_k(x) \le N, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Kartu

$$\|u\|_{\mathrm{L_q}(\Omega_s)} \le CN^{1/p}\|u\|_{\mathrm{W}^1_\mathrm{p}(\mathbb{R}^n)} \le \tilde{C}CN^{1/p}\|u\|_{\mathrm{W}^1_\mathrm{p}(\Omega)}.$$

Taigi erdvė $\mathrm{W}^1_\mathrm{p}(\Omega)$ įsideda į erdvę $\mathrm{L_q}(\Omega_s)$ ir trečiasis teoremos teiginys įrodytas. Pirmasis ir antrasis teoremos teiginiai įrodomi analogiškai. $\triangleright$

Atkreipsime dėmesį į tai, kad funkcija $u$, priklausanti erdvei $\mathrm{W}^1_\mathrm{p}(\Omega)$ arba jos poerdviui $\mathring{\mathrm{W}}^1_\mathrm{p}(\Omega)$, yra apibrėžta b.v. $x \in \Omega$. Todėl iš pirmo žvilgsnio atrodo, kad nėra prasmės kalbėti apie jos reikšmes aibėje $\Omega_s = \Omega \cap \mathbb{R}^s$, kai $s < n$, nes aibės $\Omega_s$ Lebego matas erdvėje $\mathbb{R}^n$ lygus nuliui. Iš tikrųjų erdvės $\mathring{\mathrm{W}}^1_\mathrm{p}(\Omega)$ atveju įdėjimo teorema teigia, kad kiekvienos funkcijos $u \in \mathring{\mathrm{W}}^1_\mathrm{p}(\Omega)$ ekvivalentiškumo klasėje yra konkretus atstovas (jį galima apibrėžti (3.15) formule), apibrėžtas bet kokiame srities $\Omega$ pjūvyje plokštuma $\mathbb{R}^s$ ir turintis teoremoje nurodytas savybes.

Įrodysime dar vieną svarbią tokių atstovų savybę. Tegu $\Omega_s$ ir $\Omega_s^*$ yra du artimi ir lygiagretūs srities $\Omega$ pjūviai plokštuma $\mathbb{R}^s$. Tada funkcijos $u\big|_{\Omega_s}$ ir $u\big|_{\Omega_s^*}$ yra artimos $\mathrm{L_q}$ normos prasme. Tiksliau, yra teisinga tokia teorema.

**3.11 teorema.** *Tegu $\Omega$ yra aprėžta erdvėje $\mathbb{R}^n$ sritis,* $1 \le p \le n$, $s > n - p$, $q < \infty$, $1 - n/p + s/q \ge 0$. *Tada kiekvienos funkcijos $u \in \mathring{\mathrm{W}}^1_\mathrm{p}(\Omega)$ ekvivalentiškumo klasėje yra atstovas, apibrėžtas aibėje $\Omega_s = \Omega \cap \mathbb{R}^s$ ir bet kokiam $z \in \mathbb{R}^n$, $|z| = 1$, norma*

$$\|u(x + tz) - u(x)\|_{\mathrm{L_q}(\Omega_s)} \to 0,$$

*kai* $t \to 0$.

$\triangleleft$ Laisvai pasirinkime funkciją $u \in \mathring{\mathrm{W}}^1_\mathrm{p}(\Omega)$. Pratęskime ją nuliu į srities $\Omega$ išorę ir gautą funkciją pažymėkime ta pačia raide $u$. Tada $u \in \mathring{\mathrm{W}}^1_\mathrm{p}(Q)$, $\forall Q : Q \supset \overline{\Omega}$. Be to, pakankamai mažiems $t > 0$ skirtumas

$$u(x + tz) - u(x) \in \mathring{\mathrm{W}}^1_\mathrm{p}(Q)$$

ir

$$\|u(x + tz) - u(x)\|_{\mathrm{L_q}(\Omega_s)} \le C \sum_{i=1}^{n} \|u_{x_i}(x + tz) - u_{x_i}(x)\|_{\mathrm{L_p}(Q)}.$$

Kadangi $u_{x_i} \in \mathrm{L_p}(Q)$, tai ji yra tolydi $\mathrm{L_p}$ prasme. Todėl

$$\sum_{i=1}^{n} \|u_{x_i}(x + tz) - u_{x_i}(x)\|_{\mathrm{L_p}(Q)} \to 0,$$

kai $t \to 0$. Taigi

$$\|u(x + tz) - u(x)\|_{\mathrm{L_q}(\Omega_s)} \to 0,$$

kai $t \to 0$. $\triangleright$

P a s t a b o s:

1. Toks pat teiginys yra teisingas ir erdvės $W^1_p(\Omega)$ atveju. Tik 3.11 teoremoje aibę $\Omega_s$ reikia pakeisti bet kokia aibe $\Omega'_s : \overline{\Omega'_s} \subset \Omega_s$.

2. Įrodytos įdėjimo teoremos išlieka teisingos, jeigu jose sritį $\Omega_s = \Omega \cap \mathbb{R}^s$ pakeisime paviršiumi $S = \Omega \cap \Gamma$; čia $\Gamma$ – glodus[1] $s$-matis paviršius. Be to, galimas ir toks atvejis, kai $S = \partial\Omega$ arba paviršiaus $\partial\Omega$ dalis.

3.12 teorema. *Tegu $\Omega$ yra aprėžta erdvėje $\mathbb{R}^n$ sritis, $S = \partial\Omega$ – $C^1$ klasės paviršius, $s > n - p$, $1 \le p \le n$ ir $s/q \ge n/p - 1$. Tada erdvė $W^1_p(\Omega)$ įsideda į erdvę $L_q(S)$. Be to, jeigu $s/q > n/p - 1$, tai įdėjimo operatorius yra visiškai tolydus.*

Šios teoremos įrodymą galima rasti [**?**] knygoje.

I š v a d a. Tegu $\Omega$ yra aprėžta erdvėje $\mathbb{R}^n$ sritis, $S = \partial\Omega$ – $C^1$ klasės paviršius, $u \in W^1_p(\Omega)$, $v \in W^1_{p'}(\Omega)$, $p \ge 1$. Tada yra teisinga integravimo dalimis formulė

$$\int\limits_\Omega u v_{x_i}\, dx = -\int\limits_\Omega u_{x_i} v\, dx + \int\limits_S uv \cos(\mathbf{n}, x_i) dS. \tag{3.23}$$

◃ Kadangi funkcijas $u, v$ galima pratęsti į platesnę sritį išlaikant glodumą, tai erdvė $C^1(\overline{\Omega})$ yra tiršta erdvėse $W^1_p(\Omega)$ ir $W^1_{p'}(\Omega)$. Todėl egzistuoja seka $\{u_k\}$, konverguojanti į $u$ erdvėje $W^1_p(\Omega)$, ir seka $\{v_k\}$, konverguojanti į $v$ erdvėje $W^1_{p'}(\Omega)$. Kiekvienam $k = 1, 2, \ldots$ yra teisinga integravimo dalimis formulė

$$\int\limits_\Omega u_k v_{kx_i}\, dx = -\int\limits_\Omega u_{kx_i} v_k\, dx + \int\limits_S u_k v_k \cos(\mathbf{n}, x_i) dS. \tag{3.24}$$

Pagal 3.12 teoremą

$$\|u - u_k\|_{L_p(S)} \le C\|u - u_k\|_{W^1_p(\Omega)},$$

$$\|v - v_k\|_{L_{p'}(S)} \le C\|v - v_k\|_{W^1_{p'}(\Omega)}.$$

Be to,

$$\|u - u_k\|_{W^1_p(\Omega)} \to 0, \quad \|v - v_k\|_{W^1_{p'}(\Omega)} \to 0,$$

kai $k \to \infty$. Todėl (3.24) formulėje galima pereiti prie ribos, t.y. pakeisti funkcijas $u_k$ ir $v_k$ atitinkamai funkcijomis $u$ ir $v$. ▹

K o m e n t a r a i:

1. Įdėjimo teoremų apribojimai rodikliams yra tikslūs. Erdvė $W^1_p(\Omega)$ neįsideda į erdvę $L_q(\Omega_s)$, jeigu $s/q < n/p - 1$. Pavyzdžiui, funkcija

$$u(x) = |x|^\alpha, \quad 1 - n/p < \alpha < -s/q,$$

[1]Priminsime, kad paviršius vadinamas glodžiu, jeigu jis yra $C^1$ klasės paviršius.

rutulyje $B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ yra sumuojama laipsniu $p$ :

$$\int_B |u(x)|^p \, dx = \int_B |x|^{\alpha p} \, dx \le C/(n + \alpha p) < \infty.$$

Be to, egzistuoja jos pirmosios eilės apibendrintos išvestinės (žr. 2.4 skyrelio 4 pavyzdį)

$$u_{x_i}(x) = \alpha x_i |x|^{\alpha - 2}, \quad x \in B, \, i = 1, 2, \ldots, n,$$

ir rutulyje $B$ jos yra sumuojamos laipsniu $p$ :

$$\int_B |u_{x_i}(x)|^p \, dx \le \alpha^p \int_B |x|^{(\alpha-1)p} \, dx \le C'/(n + (\alpha - 1)p) < \infty.$$

Taigi funkcija $u \in \mathrm{W}_\mathrm{p}^1(B)$. Tačiau rutulyje $B^s = B \cap \mathbb{R}^s$ ji nėra sumuojama laipsniu $q$, nes integralas

$$\int_{B^s} |u(x)|^q \, dx = \int_{B^s} |x|^{\alpha q} \, dx$$

diverguoja, kai $s + \alpha q < 0$. Todėl funkcija $u \notin \mathrm{L}_\mathrm{q}(B^s)$ ir erdvė $\mathrm{W}_\mathrm{p}^1(B)$ neįsideda į erdvę $\mathrm{L}_\mathrm{q}(B^s)$ .

Neaprėžtos srities atveju erdvė $\mathrm{W}_\mathrm{p}^1(\Omega)$ neįsideda į erdvę $\mathrm{L}_\mathrm{q}(\Omega)$, jeigu $q < p$. Pavyzdžiui, funkcija

$$u(x) = |x|^\alpha, \quad -\frac{n}{q} < \alpha < -\frac{n}{p},$$

priklauso erdvei $\mathrm{W}_\mathrm{p}^1(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B})$, tačiau nepriklauso erdvei $\mathrm{L}_\mathrm{q}(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B})$ (patikrinkite). Todėl $\mathrm{W}_\mathrm{p}^1(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B})$ neįsideda į erdvę $\mathrm{L}_\mathrm{q}(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B})$.

2. Rodiklis $q^*$, apibrėžtas (3.11) lygtimi, vadinamas ribiniu. Atkreipsime dėmesį, kad rodiklis $q^*$ yra apibrėžtas tik kai $p < n$. Be to, $q^* > p$. Erdvė $\mathrm{W}_\mathrm{p}^1(\Omega)$ įsideda į erdvę $\mathrm{L}_\mathrm{q}(\Omega_s)$, jeigu $q \le q^*$, ir neįsideda į ją, jeigu $q > q^*$.

3. Jeigu $p \ge n$, tai aprėžtos srities atveju erdvė $\mathrm{W}_\mathrm{p}^1(\Omega)$ įsideda į erdvę $\mathrm{L}_\mathrm{q}(\Omega_s)$, $\forall q \ge 1$. Neaprėžtos srities atveju erdvė $\mathrm{W}_\mathrm{p}^1(\Omega)$ įsideda į erdvę $\mathrm{L}_\mathrm{q}(\Omega)$, $\forall q : p \le q < \infty$. Jeigu $p > n$, tai erdvė $\mathrm{W}_\mathrm{p}^1(\Omega)$ įsideda į erdvę $\mathrm{C}(\overline{\Omega})$, nepriklausomai nuo to, ar sritis $\Omega$ yra aprėžta, ar ne. Tačiau jeigu sritis $\Omega$ yra neaprėžta, tai ji dar turi tenkinti 2.16 teoremos arba analogiškas sąlygas, garantuojančias aprėžto pratęsimo operatoriaus egzistavimą.

4. Kai $p = n = 1$, erdvė $\mathrm{W}_\mathrm{p}^1(a, b)$ įsideda į erdvę $\mathrm{C}[a, b]$ (žr. 2.9 teoremą). Jeigu $p = n > 1$, tai erdvė $\mathrm{W}_\mathrm{p}^1(\Omega)$ neįsideda į erdvę $\mathrm{C}(\overline{\Omega})$. Pavyzdžiui, funkcija

$$u(x) = \ln\big|\ln|x|\big|, \quad x \in B_{e^{-1}} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < e^{-1}\},$$

rutulyje $B_{e^{-1}}$ yra sumuojama laipsniu $n$. Be to, rutulyje $B_{e^{-1}}$ egzistuoja jos pirmosios eilės apibendrintos išvestinės

$$u_{x_i} = x_i|x|^{-2}\ln^{-1}|x|,$$

sumuojamos laipsniu $n$ (patikrinkite). Todėl funkcija $u \in \mathrm{W}_\mathrm{p}^1(B_{e^{-1}})$. Tačiau ji nepriklauso erdvei $\mathrm{C}(\overline{B}_{e^{-1}})$, nes turi trūkį koordinačių pradžioje. Taigi erdvė $\mathrm{W}_\mathrm{p}^1(B_{e^{-1}})$ neįsideda į erdvę $\mathrm{C}(\overline{B}_{e^{-1}})$.

5. Erdvės $\mathrm{W}_\mathrm{p}^1(\Omega)$ įdėjimo operatorius į erdvę $\mathrm{C}(\overline{\Omega})$ yra visiškai tolydus tik tada, kai $p > n$. Jeigu $p \le n$, tai erdvės $\mathrm{W}_\mathrm{p}^1(\Omega)$ įdėjimo operatorius į erdvę $\mathrm{L}_\mathrm{q}(\Omega_s)$ yra visiškai tolydus tik tada, kai $1 - n/p + s/q > 0$. Be to, abiem atvejais $\Omega$ yra aprėžta sritis. Neaprėžtos srities atveju erdvės $\mathrm{W}_\mathrm{p}^1(\Omega)$ įdėjimo operatorius į erdvę $\mathrm{C}(\overline{\Omega})$ arba į erdvę $\mathrm{L}_\mathrm{q}(\Omega_s)$ nėra visiškai tolydus. Pateiksime kelis pavyzdžius.

   Tegu $u \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ir

$$u_k(x) = u(x - x^{(k)}), \quad k = 1, 2, \dots, \quad |x^{(k)}| \to \infty,$$

   kai $k \to \infty$. Taip apibrėžta funkcijų seka yra aprėžta erdvėje $\mathrm{W}_\mathrm{p}^1(\mathbb{R}^n)$ su bet kokiu rodikliu $p > n$. Be to, ji konverguoja į nulį erdvėje $\mathrm{C}(Q)$ bet kokiame kompakte $Q \subset \mathbb{R}^n$, tačiau nekonverguoja erdvėje $\mathrm{C}(\mathbb{R}^n)$. Todėl iš šios sekos negalima išskirti konverguojančio erdvėje $\mathrm{C}(\mathbb{R}^n)$ posekio. Kartu ji nėra sąlyginis kompaktas erdvėje $\mathrm{C}(\mathbb{R}^n)$. Taigi erdvės $\mathrm{W}_\mathrm{p}^1(\mathbb{R}^n)$ įdėjimo operatorius į erdvę $\mathrm{C}(\mathbb{R}^n)$ nėra visiškai tolydus.

   Tegu $u \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ir

$$u_k(x) = k^{-\frac{n}{p}} u(x/k), \quad k = 1, 2, \dots$$

   Taip apibrėžta funkcijų seka yra aprėžta erdvėje $\mathrm{W}_\mathrm{p}^1(\mathbb{R}^n)$ su bet kokiu rodikliu $p \ge 1$. Tačiau nors ir labai didelį teigiamą skaičių $R$ pasirinktume,

$$\sup_k \|u_k(x)\|_{\mathrm{L}_\mathrm{p}(\mathbb{R}^n \setminus B_R)} = \sup_k \|u(x)\|_{\mathrm{L}_\mathrm{p}(\mathbb{R}^n \setminus B_{R/k})} \not\to 0,$$

   kai $k \to \infty$. Todėl (žr. 2.6 teoremą) ji nėra sąlyginis kompaktas erdvėje $\mathrm{L}_\mathrm{p}(\mathbb{R}^n)$. Taigi erdvės $\mathrm{W}_\mathrm{p}^1(\mathbb{R}^n)$ įdėjimo operatorius į erdvę $\mathrm{L}_\mathrm{p}(\mathbb{R}^n)$ nėra visiškai tolydus.

   Tegu $p < n, \ u \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ir

$$u_k(x) = k^{\frac{n}{p}-1} u(kx), \quad k = 1, 2, \dots$$

   Taip apibrėžta funkcijų seka yra aprėžta erdvėje $\mathrm{W}_\mathrm{p}^1(B)$. Tačiau nors ir labai mažą teigiamą skaičių $h$ pasirinktume,

$$\sup_{|z|<h} \|u_k(x+z) - u_k(x)\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{q}^*}(B)} = \sup_{|z|<h} \|u(x+zk) - u(x)\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{q}^*}(B_k)} \not\to 0,$$

   kai $k \to \infty$. Todėl (žr. 2.5 teoremą) ji nėra sąlyginis kompaktas erdvėje $\mathrm{L}_{\mathrm{q}^*}(B)$. Taigi $\mathrm{W}_\mathrm{p}^1(B)$ įdėjimo operatorius į erdvę $\mathrm{L}_{\mathrm{q}^*}(B)$ nėra visiškai tolydus.

## 3.4. ERDVIŲ $\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$ ĮDĖJIMO TEOREMOS

3.13 teorema. *Tegu $\Omega$ yra aprėžta erdvėje $\mathbb{R}^n$ sritis, $S = \partial\Omega$ – $\mathrm{C}^1$ klasės paviršius. Tada:*

1. *Jeigu $m < k - n/p$ (t.y. kai $1/p - (k-m)/n < 0$), tai erdvė $\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$ įsideda į erdvę $\mathrm{C}^\mathrm{m}(\overline{\Omega})$ ir įdėjimo operatorius yra visiškai tolydus.*
2. *Jeigu $0 \le m \le k$, $p, q \ge 1$, $q < \infty$ ir $1/q \ge 1/p - (k-m)/n$, tai erdvė $\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$ įsideda į erdvę $\mathrm{W}_\mathrm{q}^\mathrm{m}(\Omega)$ ir tuo atveju, kai $1/q > 1/p - (k-m)/n$, įdėjimo operatorius yra visiškai tolydus.*

$\triangleleft$ Pagal 3.8 teoremą erdvė $\mathrm{W}_\mathrm{p}^1(\Omega)$ įsideda į erdvę $\mathrm{C}(\overline{\Omega})$, jeigu $p > n$, ir į erdvę $\mathrm{L}_\mathrm{q}(\Omega)$, jeigu $1/q \ge 1/p - 1/n$. Be to, jeigu $1/q = 1/p - 1/n$, tai įdėjimo operatorius, nors ir nėra visiškai tolydus, yra aprėžtas. Todėl $\forall u \in \mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$ ir $\forall\alpha : |\alpha| = k - 1$

$$D^\alpha u \in \mathrm{W}_\mathrm{p}^1(\Omega) \hookrightarrow \begin{cases} \mathrm{C}(\overline{\Omega}), & \text{kai} \quad 1/p - 1/n < 0, \\ \mathrm{L}_{\mathrm{p}_1}(\Omega), & \text{kai} \quad 1/p_1 = 1/p - 1/n. \end{cases}$$

Tegu $v \in \mathrm{L}_\mathrm{p}(\Omega)$, $v_{x_i} \in \mathrm{L}_{\mathrm{p}_1}(\Omega)$, $\forall i = 1, \dots, n$. Kadangi $\Omega$ yra $\mathrm{C}^1$ klasės sritis, tai $v \in \mathrm{W}_{\mathrm{p}_1}^1(\Omega)$. Pasinaudoję šia savybe, gausime, kad $\forall\alpha : |\alpha| = k - 2$

$$D^\alpha u \in \mathrm{W}_{\mathrm{p}_1}^1(\Omega) \hookrightarrow \begin{cases} \mathrm{C}(\overline{\Omega}), & \text{kai} \quad 1/p - 2/n < 0, \\ \mathrm{L}_{\mathrm{p}_2}(\Omega), & \text{kai} \quad 1/p_2 = 1/p - 2/n. \end{cases}$$

Taip samprotaudami, $\forall\alpha : |\alpha| = k - r$ gausime

$$D^\alpha u \in \mathrm{W}_{\mathrm{p}_{r-1}}^1(\Omega) \hookrightarrow \begin{cases} \mathrm{C}(\overline{\Omega}), & \text{kai} \quad 1/p - r/n < 0, \\ \mathrm{L}_{\mathrm{p}_r}(\Omega), & \text{kai} \quad 1/p_r = 1/p - r/n. \end{cases}$$

Įrodysime antrąjį teoremos teiginį. Tegu $1/p_1 = 1/p - 1/n$, $u \in \mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$. Tada $D^\alpha u \in \mathrm{L}_{\mathrm{p}_1}(\Omega)$, $\forall\alpha : |\alpha| = k - 1$. Be to, $D^\alpha u \in \mathrm{L}_{\mathrm{p}_1}(\Omega)$, $\forall\alpha : |\alpha| \le k - 1$. Todėl $u \in \mathrm{W}_{\mathrm{p}_1}^{\mathrm{k}-1}(\Omega)$. Taigi erdvė $\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$ įsideda į erdvę $\mathrm{W}_{\mathrm{p}_1}^{\mathrm{k}-1}(\Omega)$. Taip samprotaudami, gausime

$$\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega) \hookrightarrow \mathrm{W}_{\mathrm{p}_1}^{\mathrm{k}-1}(\Omega) \hookrightarrow \mathrm{W}_{\mathrm{p}_2}^{\mathrm{k}-2}(\Omega) \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \mathrm{W}_{\mathrm{p}_r}^{\mathrm{k}-\mathrm{r}}(\Omega).$$

Imkime čia $r = k - m$ ir pažymėkime $p_r = q$. Tada

$$\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega) \hookrightarrow \mathrm{W}_\mathrm{q}^\mathrm{m}(\Omega).$$

Erdvės $\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$ įdėjimo į erdvę $\mathrm{W}_\mathrm{q}^\mathrm{m}(\Omega)$ operatorius

$$\Pi = \Pi_{r-1} \cdot \ldots \cdot \Pi_0;$$

čia $\Pi_i$ yra erdvės $\mathrm{W}_{\mathrm{p}_\mathrm{i}}^{\mathrm{k}-\mathrm{i}}(\Omega)$ įdėjimo operatorius į erdvę $\mathrm{W}_{\mathrm{p}_{\mathrm{i}+1}}^{\mathrm{k}-\mathrm{i}-1}(\Omega)$, $p_0 = p$. Be to, jeigu vietoje bent vienos iš lygybių $1/p_i = 1/p - i/n$, $i = 1, \dots, m$ paimsime nelygybę $1/p_i > 1/p - i/n$, tai atitinkamas įdėjimo operatorius bus visiškai tolydus. Kartu visiškai tolydus bus ir operatorius $\Pi$.

Įrodysime pirmąjį teoremos teiginį. Tegu $r = k - m$ ir $1/p - (k-m)/n < < 0$. Jeigu $m = k - 1$, tai funkcija $u$ ir visos jos išvestinės iki $(k-1)$-osios eilės imtinai yra tolydžios. Todėl (žr. 3.8 teoremą) erdvė $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ įsideda į erdvę $\mathrm{C}^{\mathrm{k}-1}(\overline{\Omega})$ ir įdėjimo operatorius yra visiškai tolydus. Jeigu $m < k-1$, tai egzistuoja toks skaičius $q > \max\{p, n\}$, kad $1/q > 1/p - (k-m-1)/n$. Tačiau tada

$$\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega) \hookrightarrow \mathrm{W}_{\mathrm{q}}^{\mathrm{m}+1}(\Omega) \hookrightarrow \mathrm{C}^{\mathrm{m}}(\overline{\Omega}).$$

Be to, kiekvienas iš šių erdvių įdėjimo operatorių yra visiškai tolydus. Todėl erdvės $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ įdėjimo į erdvę $\mathrm{C}^{\mathrm{m}}(\overline{\Omega})$ operatorius taip pat yra visiškai tolydus. $\rhd$

Pirmąjį teoremos teiginį galima patikslinti. Remiantis 3.9 teorema, galima įrodyti, kad funkcijos $u$ $m$-osios eilės išvestinės yra ne tik tolydžios, bet ir tenkina Helderio sąlygą su tam tikru rodikliu $\alpha$. Tiksliau, yra teisinga tokia teorema.

**3.14 teorema.** *Tegu $\Omega$ yra aprėžta erdvėje $\mathbb{R}^n$ sritis, $S = \partial\Omega$ – $\mathrm{C}^1$ klasės paviršius, $\alpha \leq k - n/p - m$. Tada erdvė $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ įsideda į erdvę $\mathrm{C}^{\mathrm{m}+\alpha}(\overline{\Omega})$ ir, kai $\alpha < k - n/p - m$, įdėjimo operatorius yra visiškai tolydus.*

**3.15 teorema.** *Tegu $\Omega$ yra aprėžta erdvėje $\mathbb{R}^n$ sritis, $S = \partial\Omega$ – $\mathrm{C}^1$ klasės paviršius, $1 < p < n$, $q < \infty$ ir*

$$\frac{1}{q}\frac{n-1}{n} \geq \frac{1}{p} - \frac{k-m}{n}.$$

*Tada erdvė $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ įsideda į erdvę $\mathrm{W}_{\mathrm{q}}^{\mathrm{m}}(S)$ ir tuo atveju, kai*

$$\frac{1}{q}\frac{n-1}{n} > \frac{1}{p} - \frac{k-m}{n}, \tag{3.25}$$

*įdėjimo operatorius yra visiškai tolydus.*

$\lhd$ Tegu

$$\frac{1}{q_1} = \frac{1}{p} - \frac{k-m-1}{n}.$$

Tada (žr. 3.13 teoremą) erdvė $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ įsideda į erdvę $\mathrm{W}_{\mathrm{q_1}}^{\mathrm{m}+1}(\Omega)$. Kiekvienam $\alpha : |\alpha| \leq m$ išvestinė $D^\alpha u \in \mathrm{W}_{\mathrm{q_1}}^{1}(\Omega)$. Pagal teoremos sąlygą

$$\frac{1}{q}\frac{n-1}{n} \geq \frac{1}{q_1} - \frac{1}{n}.$$

Todėl (žr. 3.8 teoremą ir pastabą prie 3.11 teoremos) erdvė $\mathrm{W}_{\mathrm{q_1}}^{1}(\Omega)$ įsideda į erdvę $\mathrm{L}_{\mathrm{q}}(S)$. Kartu erdvė $\mathrm{W}_{\mathrm{q_1}}^{\mathrm{m}+1}(\Omega)$ įsideda į erdvę $\mathrm{W}_{\mathrm{q}}^{\mathrm{m}}(S)$. Taigi erdvė $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ įsideda į erdvę $\mathrm{W}_{\mathrm{q}}^{\mathrm{m}}(S)$. Be to, jeigu

$$\frac{1}{q}\frac{n-1}{n} > \frac{1}{q_1} - \frac{1}{n},$$

tai įdėjimo operatorius yra visiškai tolydus. ▷

Šitą teoremą galima apibendrinti. Tegu $\Omega_\Gamma = \Omega \cap \Gamma$, $\Gamma$ – klasės $\mathrm{C}^\mathrm{k}$ $s$-matis paviršius erdvėje $\mathbb{R}^n$. Tada yra teisinga teorema.

**3.16 teorema.** *Tegu $\Omega$ yra aprėžta erdvėje $\mathbb{R}^n$ sritis, $S = \partial\Omega$ – $\mathrm{C}^1$ klasės paviršius, $1 \le p < n,\ 0 \le m < k,\ 0 < s < n,\ s > n - p(k-m)$ ir*

$$\frac{s}{nq} \ge \frac{1}{p} - \frac{k-m}{n}.$$

*Tada erdvė $\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$ įsideda į erdvę $\mathrm{W}_\mathrm{q}^\mathrm{m}(\Omega_\Gamma)$ ir tuo atveju, kai*

$$\frac{s}{nq} > \frac{1}{p} - \frac{k-m}{n},$$

*įdėjimo operatorius yra visiškai tolydus.*

Bendru atveju, remiantis vien 3.3 skyrelyje įrodytais teiginiais, šios teoremos tiesiogiai įrodyti negalima. Reikia tikslesnių funkcijų $u \in \mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$ integralinių įverčių. Tokie įverčiai bus gauti 3.6 skyrelyje.

Pabaigoje dar suformuluosime erdvių $\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$ įdėjimo teoremą neaprėžtos srities atveju. Jos įrodymas yra visiškai toks pat kaip 3.10 teoremos.

**3.17 teorema.** *Tegu $\Omega$ yra neaprėžta erdvėje $\mathbb{R}^n$ sritis, tenkinanti 2.16 teoremos sąlygas, $\Omega_s = \Omega \cap \mathbb{R}^s$. Tada:*

1. *Jeigu $0 \le m < k - n/p$, tai erdvė $\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$ įsideda į erdvę $\mathrm{C}^\mathrm{m}(\overline{\Omega})$.*
2. *Jeigu $\alpha \le k - n/p - m$, tai erdvė $\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$ įsideda į erdvę $\mathrm{C}^{\mathrm{m}+\alpha}(\overline{\Omega})$.*
3. *Jeigu*
$$1 \le p \le q, \quad q < \infty, \quad s > n - (k-m)p$$
*ir*
$$s/nq \ge 1/p - (k-m)/n,$$
*tai erdvė $\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$ įsideda į erdvę $\mathrm{W}_\mathrm{q}^\mathrm{m}(\Omega_s)$.*

## 3.5. EKVIVALENČIOSIOS NORMOS ERDVĖSE $\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$

3.18 teorema. *Tegu $\Omega$ yra aprėžta erdvėje $\mathbb{R}^n$ sritis, $S = \partial\Omega$ – $\mathrm{C}^1$ klasės paviršius, $\psi_1, \dots, \psi_m$ – pusnormės erdvėje $\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$, $C$ – tokia teigiama konstanta, kad*

$$\psi_i(u) \le C\|u\|_{\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)}, \ \forall u \in \mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega), \ i = 1, 2, \dots, m. \tag{3.26}$$

*Be to, tegu pusnormės $\psi_1, \dots, \psi_m$ apibrėžia pilną funkcijų sistemą $(k-1)$-ojo laipsnio polinomų aibėje (t.y. jeigu $\psi_1(P) = \ldots = \psi_m(P) = 0$ ir $P$ yra $(k-1)$-ojo laipsnio polinomas, tai $P = 0$). Tada normos*

$$|||u|||_{\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|=k} \|\, D^\alpha\, u\|_{\mathrm{L}_\mathrm{p}(\Omega)} + \sum_{j=1}^m \psi_j(u) \tag{3.27}$$

*ir*

$$\|u\|_{\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\le k} \|\, D^\alpha\, u\|_{\mathrm{L}_\mathrm{p}(\Omega)} \tag{3.28}$$

*yra ekvivalenčios.*

$\triangleleft$ Normos, apibrėžtos (3.27) ir (3.28) formulėmis, yra ekvivalenčios, jeigu egzistuoja tokios teigiamos konstantos $C_1,\ C_2$, kad

$$C_1|||u|||_{\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)} \le \|u\|_{\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)} \le C_2|||u|||_{\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)}. \tag{3.29}$$

Pirmoji iš (3.29) nelygybių išplaukia iš (3.26) sąlygos. Įrodysime antrąją nelygybę. Tarkime priešingai, kad šita nelygybė yra negalima. Tada kiekvienam natūraliajam $n$ atsiras tokia funkcija $u_n \in \mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$, kad

$$\|u_n\|_{\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)} \ge n|||u_n|||_{\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)}.$$

Tegu

$$v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|_{\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)}}, \ n = 1, 2, \ldots$$

Akivaizdu, kad

$$\|v_n\|_{\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)} = 1, \ \forall n = 1, 2, \ldots$$

Iš čia išplaukia, kad seka $\{v_n\}$ erdvėje $\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$ yra aprėžta. Erdvė $\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$ įsideda į erdvę $\mathrm{W}_\mathrm{p}^{\mathrm{k}-1}(\Omega)$ ir įdėjimo operatorius yra visiškai tolydus. Todėl iš aprėžtos erdvėje $\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$ sekos $\{v_n\}$ galima išskirti konverguojantį erdvėje $\mathrm{W}_\mathrm{p}^{\mathrm{k}-1}(\Omega)$ posekį $\{v_{n_i}\}$. Be to, norma

$$|||v_n|||_{\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)} \le 1/n \to 0, \tag{3.30}$$

kai $n \to \infty$. Iš čia išplaukia, kad

$$\|\, D^\alpha\, v_n\|_{\mathrm{L}_\mathrm{p}(\Omega)} \to 0, \ \forall \alpha : |\alpha| = k,$$

kai $n \to \infty$. Tačiau tada posekis $\{v_{n_i}\}$ konverguoja erdvėje $\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$. Kadangi erdvė $\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$ yra pilna, tai egzistuoja toks elementas $v \in \mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$, kad

$$v = \lim_{n_i \to \infty} v_{n_i}.$$

Funkcijos $v$ visos $k$-osios eilės išvestinės yra lygios nuliui. Todėl (žr. 2.3 skyrelio 2.8 teoremą) $v$ yra $(k-1)$-ojo laipsnio polinomas. Pažymėkime $v = P$. Tada

$$\|P\|_{\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)} = \lim_{n_i \to \infty} \|v_{n_i}\|_{\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)} = 1. \tag{3.31}$$

Iš (3.30) įverčio išplaukia, kad

$$\sum_{j=1}^{m} \psi_j(v_{n_i}) \to 0,$$

kai $n_i \to \infty$. Kadangi pusnormės $\psi_j,\ j = 1, 2, \ldots,$ yra tolydžios, tai

$$0 = \lim_{n_i \to \infty} \sum_{j=1}^{m} \psi_j(v_{n_i}) = \sum_{j=1}^{m} \psi_j\big(\lim_{n_i \to \infty} v_{n_i}\big) = \sum_{j=1}^{m} \psi_j(P).$$

Tačiau ši lygybė yra galima tik tuo atveju, kai $P = 0$. Gauta prieštara įrodo, kad padaryta prielaida yra neteisinga. Taigi egzistuoja tokia konstanta $C_2$, kad

$$\|u\|_{\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)} \le C_2 |||u|||_{\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)}.$$

Teorema įrodyta. $\triangleright$

Specialiai parinkus pusnormes $\psi_i$, galima gauti keletą svarbių nelygybių.

P u a n k a r e n e l y g y b ė. Tegu $k = 1$ ir

$$\psi_1(u) = \Big|\int_\omega u\,dx\Big|;$$

čia $\omega$ – mati srityje $\Omega$ aibė, $|\omega| > 0$. Kiekvienai pastoviai funkcijai $u \in \mathrm{W}_\mathrm{p}^1(\Omega)$ iš lygybės $\psi_1(u) = |\omega||u| = 0$ išplaukia, kad $u = 0$. Todėl pusnormė $\psi_1$ tenkina 3.18 teoremos sąlygas. Taigi egzistuoja tokia teigiama konstanta $C$, kad

$$\|u\|_{\mathrm{L}_\mathrm{p}(\Omega)} \le C\Big(\Big|\int_\omega u\,dx\Big| + \sum_{i=1}^{n} \|u_{x_i}\|_{\mathrm{L}_\mathrm{p}(\Omega)}\Big).$$

F r y d r i c h s o n e l y g y b ė. Tegu $k = 1$ ir $S = \partial\Omega$ – pakankamai glodus paviršius. Tada erdvė $\mathrm{W}_\mathrm{p}^1(\Omega)$ įsideda į erdvę $\mathrm{L}_\mathrm{p}(S)$ ir pusnormę galima apibrėžti taip:

$$\psi_1(u) = \Big|\int_S u\,dS\Big|.$$

Šiuo atveju 3.18 teoremos sąlygos taip pat patenkintos. Todėl egzistuoja tokia teigiama konstanta $C$, kad

$$\|u\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega)} \leq C\Big(\Big|\int\limits_{S} u\,dS\Big| + \sum_{i=1}^{n} \|u_{x_i}\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega)}\Big).$$

Be to, kiekvienai funkcijai $u \in \mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^{1}(\Omega)$ yra teisinga Frydrichso nelygybė.

$$\|u\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega)} \leq C \sum_{i=1}^{n} \|u_{x_i}\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega)}.$$

P a s t a b a. Frydrichso nelygybė 2.5 skyrelyje įrodyta nereikalaujant iš $\partial\Omega$ jokio glodumo.

## 3.6. INTERPOLIACINĖS NELYGYBĖS

Erdvių $\mathrm{W}^{\mathrm{k}}_{\mathrm{p}}(\Omega)$ įdėjimo teoremose gautus įverčius galima patikslinti. Tiksliau, funkcijos $u$ normą erdvėje $\mathrm{W}^{\mathrm{k}}_{\mathrm{p}}(\Omega)$ galima pakeisti funkcijos $u$ bei jos $k$-osios eilės išvestinių normomis erdvėje $\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega)$ su tam tikrais teigiamais daugikliais. Be to, vieną iš šių daugiklių galima pasirinkti laisvai. Tokios patikslintos nelygybės yra vadinamos *interpoliacinėmis nelygybėmis*.

3.19 teorema. *Tegu $\Omega$ yra bet kokia erdvėje $\mathbb{R}^n$ sritis, $\Omega_s = \Omega \cap \mathbb{R}^s$, $\varepsilon$ – bet koks teigiamas skaičius. Tada:*

1. *Jeigu $\theta = k - r - n/p > 0$, $p \geq 1$, $0 \leq r < k$, tai kiekvienai funkcijai $u \in \mathring{\mathrm{W}}^{\mathrm{k}}_{\mathrm{p}}(\Omega)$ yra teisinga nelygybė*
$$\sum_{|\alpha|=r} \sup_{x\in\Omega} \big|D^\alpha u\big| \leq C_1 \varepsilon^\theta \sum_{|\alpha|=k} \| D^\alpha u\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega)} + C_2 \varepsilon^{\theta-k} \|u\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega)}. \tag{3.32}$$

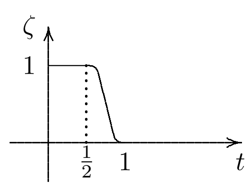
2. *Jeigu $\theta = k - r - n/p + s/q > 0$, $q \geq p \geq 1$, $0 \leq r < k$, tai kiekvienai funkcijai $u \in \mathring{\mathrm{W}}^{\mathrm{k}}_{\mathrm{p}}(\Omega)$ yra teisinga nelygybė*[1]
$$\sum_{|\alpha|=r} \| D^\alpha u\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{q}}(\Omega_s)} \leq C_1 \varepsilon^\theta \sum_{|\alpha|=k} \| D^\alpha u\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega)} + C_2 \varepsilon^{\theta-k} \|u\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega)}; \tag{3.33}$$

*čia konstantos $C_1$, $C_2$ nepriklauso nuo $u$, $\varepsilon$, $\Omega$ ir $\Omega_s$.*

$\triangleleft$ Pagal poerdvio $\mathring{\mathrm{W}}^{\mathrm{k}}_{\mathrm{p}}(\Omega)$ apibrėžimą kiekvieną jo elementą galima aproksimuoti funkcijomis iš $\mathrm{C}^\infty_0(\Omega)$ erdvės $\mathrm{W}^{\mathrm{k}}_{\mathrm{p}}(\Omega)$ normoje. Todėl abu teoremos teiginius pakanka įrodyti funkcijoms iš $\mathrm{C}^\infty_0(\Omega)$. Tegu funkcija $u \in \mathrm{C}^\infty_0(\Omega)$. Pratęskime ją nuliu į srities $\Omega$ išorę ir gautą funkciją pažymėkime ta pačia raide $u$. Tada pratęsta funkcija $u \in \mathrm{C}^\infty_0(\mathbb{R}^n)$ ir
$$u(x) = -\int_{\mathbb{R}^n} E(x-y)\Delta u(y)\,dy \tag{3.34}$$
(žr. 3.2 skyrelį).

Interpoliacines nelygybes įrodysime matematinės indukcijos metodu. Iš pradžių įsitikinsime, kad jos yra teisingos, kai $k = 1$ ir $k = 2$.

Tegu $\zeta$ yra kokia nors neneigiama be galo diferencijuojama funkcija, apibrėžta intervale $[0, \infty)$, $\zeta(t) = 1$, kai $t \leq 1/2$, $\zeta(t) = 0$, kai $t \geq 1$, ir $\zeta(t) \geq 0$, kai $1/2 \leq t \leq 1$ (žr. 3.1 pav.).




3.1 pav.

[1] Sąlyga $q \geq p$ reikalinga tik tuo atveju, kai sritis $\Omega$ yra neaprėžta.

Apibrėžkime funkciją

$$\zeta_\varepsilon(x) = \zeta(\varepsilon^{-1}|x|), \quad x\in\mathbb{R}^n, \quad \varepsilon > 0.$$

Pasinaudoję integravimo dalimis formule, perrašykime (3.34) lygybę taip:

$$u(x) = -\int\limits_{\mathbb{R}^n} E(x-y)\zeta_\varepsilon(x-y)\Delta u(y)\,dy-$$

$$-\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Delta_x\Big[E(x-y)\big(1-\zeta_\varepsilon(x-y)\big)\Big]u(y)\,dy.$$

Gautus integralus pažymėkime atitinkamai $u_\varepsilon(x)$ ir $u^\varepsilon(x)$. Į integralą $u_\varepsilon(x)$ galima žiūrėti kaip į integralinį operatorių su silpna ypatuma. Be to, jo branduolys lygus nuliui, kai $|x-y| > \varepsilon$. Todėl

$$\sup_{x\in\Omega}|u_\varepsilon(x)| \le C_1\varepsilon^{n/p'-n+2}\|\Delta u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} = C_1\varepsilon^{2-n/p}\|\Delta u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)},$$

kai $p > n$ (žr. (3.2) formulę, $\alpha = n-2$), ir

$$\|u_\varepsilon\|_{\mathrm{L_q}(\Omega_s)} \le C_1\varepsilon^{n/p'+s/q-n+2}\|\Delta u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} = C_1\varepsilon^{2-n/p+s/q}\|\Delta u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)},$$

kai $p \le n$, $s > n-p$ ir $q \ge p \ge 1$ (žr. (3.10) formulę, $\alpha = n-2$).

Integralo $u^\varepsilon(x)$ branduolys lygus nuliui, kai $|x-y| < \varepsilon/2$ arba $|x-y| > \varepsilon$. Pasinaudoję šia savybe, gausime

$$\sup_{x\in\Omega}|u^\varepsilon(x)| \le C_2\varepsilon^{-n/p}\|u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)},$$

$$\|u^\varepsilon\|_{\mathrm{L_q}(\Omega_s)} \le C_2\varepsilon^{-n/p+s/q}\|u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}$$

(žr. (3.2) ir (3.10) formulių išvedimą). Taigi

$$\sup_{x\in\Omega}|u(x)| \le \sup_{x\in\Omega}|u_\varepsilon(x)| + \sup_{x\in\Omega}|u^\varepsilon(x)| \le$$

$$\le C_1\varepsilon^{2-n/p}\|\Delta u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} + C_2\varepsilon^{-n/p}\|u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} \le$$

$$\le C_1\varepsilon^{2-n/p}\sum_{|\alpha|=2}\|\,D^\alpha\,u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} + C_2\varepsilon^{-n/p}\|u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}, \tag{3.35}$$

kai $p > n$, ir

$$\|u\|_{\mathrm{L_q}(\Omega_s)} \le \|u_\varepsilon\|_{\mathrm{L_q}(\Omega_s)} + \|u^\varepsilon\|_{\mathrm{L_q}(\Omega_s)} \le$$

$$\le C_1\varepsilon^{2-n/p+s/q}\|\Delta u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} + C_2\varepsilon^{-n/p+s/q}\|u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} \le$$

$$\le C_1\varepsilon^{2-n/p+s/q}\sum_{|\alpha|=2}\|\,D^\alpha\,u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} + C_2\varepsilon^{-n/p+s/q}\|u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}, \tag{3.36}$$

kai $p \le n,\ s > n-p$ ir $q \ge p \ge 1$.

Dabar (3.34) formulę perrašykime taip:

$$u(x) = \frac{1}{|S_1|} \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{x_i - y_i}{|x-y|^n} u_{y_i}(y)\, dy =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{k_{i\varepsilon}(x-y)}{|x-y|^{n-1}} u_{y_i}(y)\, dy + \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{k_i^\varepsilon(x-y)}{|x-y|^{n-1}}\Big) u(y)\, dy;$$

čia

$$k_{i\varepsilon}(x) = \frac{1}{|S_1|}\frac{x_i}{|x|}\zeta_\varepsilon(x), \quad k_i^\varepsilon(x) = \frac{1}{|S_1|}\frac{x_i}{|x|}\big(1 - \zeta_\varepsilon(x)\big).$$

Į integralą

$$v_{i\varepsilon}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{k_{i\varepsilon}(x-y)}{|x-y|^{n-1}} u_{y_i}(y)\, dy$$

galima žiūrėti kaip į integralinį operatorių su silpna ypatuma. Be to, funkcija $k_{i\varepsilon}(x-y) = 0$, kai $|x-y| > \varepsilon$. Todėl

$$\sup_{x\in\Omega} |v_{i\varepsilon}(x)| \le C_1 \varepsilon^{n/p' - n + 1} \|u_{y_i}\|_{\mathrm{L}_\mathrm{p}(\Omega)} = C_1 \varepsilon^{1-n/p} \|u_{y_i}\|_{\mathrm{L}_\mathrm{p}(\Omega)},$$

kai $p > n$ (žr. (3.2) formulę, $\alpha = n-1$), ir

$$\|v_{i\varepsilon}\|_{\mathrm{L}_\mathrm{q}(\Omega_s)} \le C_1 \varepsilon^{n/p' + s/q - n + 1} \|u_{y_i}\|_{\mathrm{L}_\mathrm{p}(\Omega)} = C_1 \varepsilon^{1-n/p+s/q} \|u_{y_i}\|_{\mathrm{L}_\mathrm{p}(\Omega)},$$

kai $p \le n,\ s > n-p$ ir $q \ge p \ge 1$ (žr. (3.10) formulę, $\alpha = n-1$).

Tegu

$$v_i^\varepsilon(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{k_i^\varepsilon(x-y)}{|x-y|^{n-1}}\Big) u(y)\, dy.$$

Šio integralo branduolys lygus nuliui, kai $|x-y| < \varepsilon/2$ arba $|x-y| > \varepsilon$. Pasinaudoję šia savybe, gausime

$$\sup_{x\in\Omega} |v_i^\varepsilon(x)| \le C_2 \varepsilon^{-n/p} \|u\|_{\mathrm{L}_\mathrm{p}(\Omega)},$$

$$\|v_i^\varepsilon\|_{\mathrm{L}_\mathrm{q}(\Omega_s)} \le C_2 \varepsilon^{-n/p+s/q} \|u\|_{\mathrm{L}_\mathrm{p}(\Omega)}$$

(žr. (3.2) ir (3.10) formulių išvedimą).

Iš integralų $v_{i\varepsilon}(x)$ ir $v_i^\varepsilon(x)$ įverčių išvedama nelygybė

$$\sup_{x\in\Omega} |u(x)| \le \sum_{i=1}^{n} \sup_{x\in\Omega} |v_{i\varepsilon}(x)| + \sum_{i=1}^{n} \sup_{x\in\Omega} |v_i^\varepsilon(x)| \le$$

$$\le C_1 \varepsilon^{1-n/p} \sum_{i=1}^{n} \|u_{x_i}\|_{\mathrm{L}_\mathrm{p}(\Omega)} + n C_2 \varepsilon^{-n/p} \|u\|_{\mathrm{L}_\mathrm{p}(\Omega)}, \tag{3.37}$$

kai $p > n$, ir nelygybė

$$\|u\|_{\mathrm{L_q}(\Omega_s)} \le \sum_{i=1}^{n} \|v_{i\varepsilon}\|_{\mathrm{L_q}(\Omega_s)} + \sum_{i=1}^{n} \|v_i^{\varepsilon}\|_{\mathrm{L_q}(\Omega_s)} \le$$

$$\le C_1 \varepsilon^{1-n/p+s/q} \sum_{i=1}^{n} \|u_{x_i}\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} + nC_2 \varepsilon^{-n/p+s/q} \|u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}, \tag{3.38}$$

kai $p \le n, \ s > n-p$ ir $q \ge p \ge 1$.

Diferencijuodami (3.34) lygybę kintamuojo $x_i$ atžvilgiu, gausime

$$u_{x_i}(x) = -\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial x_i} E(x-y)\Delta u(y)\,dy = -\frac{1}{|S_1|}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{x_i - y_i}{|x-y|^n}\Delta u(y)\,dy =$$

$$= -\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{k_{i\varepsilon}(x-y)}{|x-y|^{n-1}}\Delta u(y)\,dy + \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Delta_x\Big(\frac{k_i^{\varepsilon}(x-y)}{|x-y|^{n-1}}\Big) u(y)\,dy, \quad i = 1, \dots, n.$$

Pastaruosius du integralus pažymėkime atitinkamai $w_{i\varepsilon}(x)$ ir $w_i^{\varepsilon}(x)$. Juos galima įvertinti visiškai taip pat kaip integralus $v_{i\varepsilon}(x)$ ir $v_i^{\varepsilon}(x)$. Tiksliau,

$$\sup_{x\in\Omega} |w_{i\varepsilon}(x)| \le C_1 \varepsilon^{1-n/p} \|\Delta u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}, \quad \sup_{x\in\Omega} |w_i^{\varepsilon}(x)| \le C_2 \varepsilon^{-1-n/p} \|u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)},$$

kai $p > n$, ir

$$\|w_{i\varepsilon}\|_{\mathrm{L_q}(\Omega_s)} \le C_1 \varepsilon^{1-n/p+s/q} \|\Delta u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)},$$

$$\|w_i^{\varepsilon}\|_{\mathrm{L_q}(\Omega_s)} \le C_2 \varepsilon^{-1-n/p+s/q} \|u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)},$$

kai $p \le n, \ s > n-p$ ir $q \ge p \ge 1$. Pasinaudoję šiais įverčiais, gausime

$$\sup_{x\in\Omega} |u_{x_i}(x)| \le \sup_{x\in\Omega} |w_{i\varepsilon}(x)| + \sup_{x\in\Omega} |w_i^{\varepsilon}(x)| \le$$

$$\le C_1 \varepsilon^{1-n/p} \|\Delta u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} + C_2 \varepsilon^{-1-n/p} \|u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)},$$

kai $p > n$, ir

$$\|u_{x_i}\|_{\mathrm{L_q}(\Omega_s)} \le \|w_{i\varepsilon}\|_{\mathrm{L_q}(\Omega_s)} + \|w_i^{\varepsilon}\|_{\mathrm{L_q}(\Omega_s)} \le$$

$$\le C_1 \varepsilon^{1-n/p+s/q} \|\Delta u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} + C_2 \varepsilon^{-1-n/p+s/q} \|u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)},$$

kai $p \le n, \ s > n-p$ ir $q \ge p \ge 1$. Kartu esant atitinkamoms sąlygoms teisingi tokie įverčiai:

$$\sum_{|\alpha|=1} \sup_{x\in\Omega} |\, D^{\alpha}\, u(x)| \le$$

$$\le C_1 \varepsilon^{1-n/p} \sum_{|\alpha|=2} \|\, D^{\alpha}\, u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} + C_2 \varepsilon^{-1-n/p} \|u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}, \tag{3.39}$$

$$\sum_{|\alpha|=1} \|\, D^{\alpha}\, u\|_{\mathrm{L_q}(\Omega_s)} \le$$

$$\leq C_1\varepsilon^{1-n/p+s/q}\sum_{|\alpha|=2}\|\,D^\alpha\,u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}+C_2\varepsilon^{-1-n/p+s/q}\|u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}. \tag{3.40}$$

Iš (3.35), (3.36), (3.37), (3.38), (3.39) ir (3.40) matome, kad interpoliacinės nelygybės yra teisingos, kai $k=1$ ir $k=2$. Tarkime, jos teisingos, kai $k=m$. Įrodysime, kad jos teisingos, kai $k=m+1$.

Visų pirma pastebėsime, kad yra teisingi tokie įverčiai:

$$\sum_{|\alpha|=r}\sup_{x\in\Omega}|\,D^\alpha\,u(x)|\leq C_1\varepsilon^{1-n/p}\sum_{|\alpha|=r+1}\|\,D^\alpha\,u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}+$$

$$+C_2\varepsilon^{-n/p}\sum_{|\alpha|=r}\|\,D^\alpha\,u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)},$$

$$\sum_{|\alpha|=r}\sup_{x\in\Omega}|\,D^\alpha\,u(x)|\leq C_1\varepsilon^{1-n/p}\sum_{|\alpha|=r+1}\|\,D^\alpha\,u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}+$$

$$+C_2\varepsilon^{-1-n/p}\sum_{|\alpha|=r-1}\|\,D^\alpha\,u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)},$$

kai $p>n$, ir

$$\sum_{|\alpha|=r}\|\,D^\alpha\,u\|_{\mathrm{L_q}(\Omega_s)}\leq C_1\varepsilon^{1-n/p+s/q}\sum_{|\alpha|=r+1}\|\,D^\alpha\,u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}+$$

$$+C_2\varepsilon^{-n/p+s/q}\sum_{|\alpha|=r}\|\,D^\alpha\,u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)},$$

$$\sum_{|\alpha|=r}\|\,D^\alpha\,u\|_{\mathrm{L_q}(\Omega_s)}\leq C_1\varepsilon^{1-n/p+s/q}\sum_{|\alpha|=r+1}\|\,D^\alpha\,u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}+$$

$$+C_2\varepsilon^{-1-n/p+s/q}\sum_{|\alpha|=r-1}\|\,D^\alpha\,u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}, \tag{3.41}$$

kai $p\leq n,\ s>n-p,\ q\geq p\geq 1$.

Tarkime, (3.32) ir (3.33) nelygybės teisingos, kai $k=m$. Teorema bus įrodyta, jeigu įsitikinsime, kad (3.32) ir (3.33) nelygybės teisingos, kai $k=m+1$. Šis teoremos įrodymo etapas iš esmės yra toks pats abiem nelygybėms. Todėl įrodysime tik antrąją (jos įrodymas techniškai truputį sudėtingesnis).

Pagal indukcinę prielaidą

$$\sum_{|\alpha|=r}\|\,D^\alpha\,u\|_{\mathrm{L_q}(\Omega_s)}\leq C_1\varepsilon^{\theta_m}\sum_{|\alpha|=m}\|\,D^\alpha\,u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}+C_2\varepsilon^{\theta_m-m}\|u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}; \tag{3.42}$$

čia $\theta_m=m-r-n/p+s/q,\ r<m,\ q\geq p\geq 1$. Paėmę

$$\varepsilon=\|u\|^{1/m}\Big/\Big(\sum_{|\alpha|=m}\|\,D^\alpha\,u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}\Big)^{1/m},$$

gausime nelygybę

$$\sum_{|\alpha|=r} \| D^\alpha u\|_{L_q(\Omega_s)} \le C\Big(\sum_{|\alpha|=m} \| D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)}\Big)^{1-\theta_m/m} \|u\|^{\theta_m/m}_{L_p(\Omega)}.$$

Pasinaudoję (3.41) nelygybe (kai s = n, p = q), gausime

$$\sum_{|\alpha|=r} \| D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)} \le C_1\varepsilon \sum_{|\alpha|=r+1} \| D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)}+$$

$$+C_2\varepsilon^{-1} \sum_{|\alpha|=r-1} \| D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)} \le C_3\Big(\sum_{|\alpha|=r+1} \| D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)}\Big)^{1/2}\cdot$$

$$\cdot\Big(\sum_{|\alpha|=r-1} \| D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)}\Big)^{1/2} \le C_4\Big(\sum_{|\alpha|=r+1} \| D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)}\Big)^{1/2}\cdot$$

$$\cdot\Big(\sum_{|\alpha|=r} \| D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)}\Big)^{(1-\theta_m)/2m} \|u\|^{\theta_m/2m}_{L_p(\Omega)};$$

čia $\theta_m = m-(r-1)$. Iš šių nelygybių išreiškę $\sum\limits_{|\alpha|=r} \| D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)}$ ir pasinaudoję Jungo nelygybe (su $p=(2m-r+1)/m$, $p'=(2m-r+1)/(m-r+1)$), gausime

$$\sum_{|\alpha|=r} \| D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)} \le C_5\Big(\sum_{|\alpha|=r+1} \| D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)}\Big)^{\frac{m}{2m-r+1}} \|u\|^{\frac{m-r+1}{2m-r+1}} \le$$

$$\le \varepsilon C_6 \sum_{|\alpha|=r+1} \| D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)} + C_7\varepsilon^{-\frac{m}{m-r+1}}\|u\|_{L_p(\Omega)}.$$

Pasinaudoję šiuo įverčiu, (3.42) nelygybę perrašysime taip:

$$\sum_{|\alpha|=r} \| D^\alpha u\|_{L_q(\Omega_s)} \le C_1\varepsilon^{\theta_{m+1}} \sum_{|\alpha|=m+1} \| D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)}+$$

$$+C_2\varepsilon^{\theta_{m+1}-m-1}\|u\|_{L_p(\Omega)};$$

čia $\theta_{m+1} = m+1-r-n/p+s/q$, $r<m$. Kai $r=m$,

$$\sum_{|\alpha|=m} \| D^\alpha u\|_{L_q(\Omega_s)} \le C_1\varepsilon^{1-n/p+s/q} \sum_{|\alpha|=m+1} \| D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)}+$$

$$+C_2\varepsilon^{-n/p+s/q} \sum_{|\alpha|=m} \| D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)} \le C_1\varepsilon^{1-n/p+s/q} \sum_{|\alpha|=m+1} \| D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)}+$$

$$+C_2\varepsilon^{-n/p+s/q}\Big(C_1'\varepsilon^1 \sum_{|\alpha|=m+1} \| D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)} + C_2'\varepsilon^{-m}\|u\|_{L_p(\Omega)}\Big) \le$$

$$\le C_1''\varepsilon^{1-n/p+s/q} \sum_{|\alpha|=m+1} \| D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)} + C_2''\varepsilon^{-m-n/p+s/q}\|u\|_{L_p(\Omega)}.$$

Sujungę pastarąsias dvi nelygybes, gausime (3.33) nelygybę, kai $k = m + 1$. Teorema įrodyta. ▷

P a s t a b a. Jeigu (3.32) ir (3.33) nelygybėse paimsime

$$\varepsilon = \|u\|^{1/k}_{\mathrm{L_p}(\Omega)} \Big/ \Big( \sum_{|\alpha|=k} \| D^\alpha u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} \Big)^{1/k},$$

tai gausime *multiplikatyviąsias nelygybes*:

$$\sum_{|\alpha|=r} \| D^\alpha u\|_{\mathrm{L_q}(\Omega_s)} \le C \Big( \sum_{|\alpha|=k} \| D^\alpha u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} \Big)^{1-\theta/k} \|u\|^{\theta/k}_{\mathrm{L_p}(\Omega)}, \tag{3.43}$$

$$\sum_{|\alpha|=r} \sup_{x\in\Omega} | D^\alpha u(x)| \le C \Big( \sum_{|\alpha|=k} \| D^\alpha u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} \Big)^{1-\theta/k} \|u\|^{\theta/k}_{\mathrm{L_p}(\Omega)}; \tag{3.44}$$

čia $\theta = k - r - n/p + s/q$ pirmos ir $\theta = k - r - n/p$ antros multiplikatyvios nelygybės atveju. Įrodysime interpoliacines nelygybes funkcijoms iš erdvės $\mathrm{W^k_p}(\Omega)$ aprėžtos srities $\Omega$ atveju.

**3.20 teorema.** *Tegu $\Omega$ yra aprėžta erdvėje $\mathbb{R}^n$ sritis, $S = \partial\Omega$ – $\mathrm{C^k}$ klasės paviršius ir patenkintos 3.19 teoremos sąlygos. Tada $\forall u \in \mathrm{W^k_p}(\Omega)$ ir pakankamai mažam $\varepsilon > 0$ yra teisingos (3.32) ir (3.33) interpoliacinės nelygybės.*

◁ Laisvai pasirinkime funkciją $u \in \mathrm{W^k_p}(\Omega)$. Pratęskime ją į kokią nors platesnę standartinę sritį $Q$ išlaikydami glodumą. Pratęstą funkciją pažymėkime ta pačia raide $u$. Pagal 2.17 teoremą funkcija $u \in \mathring{\mathrm{W}}^{\mathrm{k}}_{\mathrm{p}}(Q)$ ir

$$\|u\|_{\mathrm{W^k_p}(Q)} \le C\|u\|_{\mathrm{W^k_p}(\Omega)}, \quad \|u\|_{\mathrm{L_p}(Q)} \le C\|u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}.$$

Įrodysime (3.33) nelygybę (pirmoji nelygybė įrodoma visiškai taip pat). Kiekvienai funkcijai $u \in \mathring{\mathrm{W}}^{\mathrm{k}}_{\mathrm{p}}(Q)$ ir $r < k$ yra teisinga nelygybė

$$\sum_{|\alpha|=r} \| D^\alpha u\|_{\mathrm{L_p}(Q)} \le C_1\varepsilon^{k-r} \sum_{|\alpha|=k} \| D^\alpha u\|_{\mathrm{L_p}(Q)} + C_2\varepsilon^{-r}\|u\|_{\mathrm{L_p}(Q)}.$$

Todėl

$$\sum_{|\alpha|=r} \| D^\alpha u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} \le \sum_{|\alpha|=r} \| D^\alpha u\|_{\mathrm{L_p}(Q)} \le$$

$$\le C_1\varepsilon^{k-r} \sum_{|\alpha|=k} \| D^\alpha u\|_{\mathrm{L_p}(Q)} + C_2\varepsilon^{-r}\|u\|_{\mathrm{L_p}(Q)} \le$$

$$\le C_1'\varepsilon^{k-r} \sum_{j=0}^{k} \sum_{|\alpha|=j} \| D^\alpha u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} + C_2'\varepsilon^{-r}\|u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}.$$

Padauginę kairiąją ir dešiniąją šių nelygybių puses iš $\varepsilon^r$, gausime nelygybę, kuri teisinga kiekvienam $r = 1, 2 \ldots, k-1$. Kartu yra teisinga nelygybė

$$\sum_{r=1}^{k-1} \varepsilon^r \Big( \sum_{|\alpha|=r} \| D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)} \Big) \le C_1'(k-1)\varepsilon^k \sum_{|\alpha|=k} \| D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)} +$$

$$+ C_1'(k-1)\varepsilon^k \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{|\alpha|=j} \| D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)} + C_2'(k-1)\|u\|_{L_p(\Omega)}.$$

Tegu $\varepsilon_0 = \min\{1/2C_1'(k-1), 1\}$. Tada $\forall \varepsilon \le \varepsilon_0$ teisinga nelygybė

$$\sum_{r=1}^{k-1} \varepsilon^r \Big( \sum_{|\alpha|=r} \| D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)} \Big) \le$$

$$\le 2C_1'(k-1)\varepsilon^k \sum_{|\alpha|=k} \| D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)} + 2C_2'(k-1)\|u\|_{L_p(\Omega)}.$$

Šios nelygybės kairėje visi nariai po sumos ženklu yra neneigiami. Todėl $\forall r < k$ yra teisinga nelygybė

$$\sum_{|\alpha|=r} \| D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)} \le$$

$$\le 2C_1'(k-1)\varepsilon^{k-r} \sum_{|\alpha|=k} \| D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)} + 2C_2'(k-1)\varepsilon^{-r}\|u\|_{L_p(\Omega)}.$$

Remdamiesi šia nelygybe, gauname

$$\sum_{|\alpha|=r} \| D^\alpha u\|_{L_q(\Omega_s)} \le \sum_{|\alpha|=r} \| D^\alpha u\|_{L_q(Q_s)} \le$$

$$\le C_1\varepsilon^\theta \sum_{|\alpha|=k} \| D^\alpha u\|_{L_p(Q)} + C_2\varepsilon^{\theta-k}\|u\|_{L_p(Q)} \le$$

$$\le C_1'\varepsilon^\theta \sum_{j=0}^{k} \sum_{|\alpha|=j} \| D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)} + C_2'\varepsilon^{\theta-k}\|u\|_{L_p(\Omega)} \le$$

$$\le C_1''\varepsilon^\theta \sum_{|\alpha|=k} \| D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)} + C_2''\varepsilon^{\theta-k}\|u\|_{L_p(\Omega)};$$

čia $Q_s = Q \cap \mathbb{R}^s$, $\theta = k - r - n/p + s/q$. Pakeitę šioje nelygybėje $C_1''$ į $C_1$, $C_2''$ į $C_2$, gausime (3.33) nelygybę. $\triangleright$

Išvados:

1. Erdvės $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ elementams teisingos *multiplikatyviosios nelygybės*:

$$\sum_{|\alpha|=r} \| D^{\alpha} u\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{q}}(\Omega_s)} \leq$$

$$\leq C_1^{'}\Big(\sum_{|\alpha|=k} \| D^{\alpha} u\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega)}\Big)^{1-\theta/k} \|u\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega)}^{\theta/k} + C_2^{'}\varepsilon_0^{\theta-k}\|u\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega)}, \qquad (3.45)$$

$$\sum_{|\alpha|=r} \sup_{x\in\Omega} | D^{\alpha} u(x)| \leq$$

$$\leq C_1^{'}\Big(\sum_{|\alpha|=k} \| D^{\alpha} u\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega)}\Big)^{1-\theta/k} \|u\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega)}^{\theta/k} + C_2^{'}\varepsilon_0^{\theta-k}\|u\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega)}; \qquad (3.46)$$

   čia $\theta = k-r-n/p+s/q$ pirmos ir $\theta = k-r-n/p$ antros multiplikatyvios nelygybės atveju. Jos išvedamos iš (3.32), (3.33) nelygybių, kai

$$\varepsilon = \min\Big\{\|u\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega)}^{1/k}\Big/\Big(\sum_{|\alpha|=k} \| D^{\alpha} u\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega)}\Big)^{1/k}, \varepsilon_0\Big\}.$$

   Savo ruožtu iš (3.45), (3.46) išvedamos (3.32), (3.33) interpoliacinės nelygybės. Reikia tik pasinaudoti Jungo nelygybe.

2. Tegu $0 \leq r \leq k$, $s > n-p(k-r)$, $\theta = k-r-n/p+s/q > 0$. Tada iš (3.32) nelygybės išplaukia, kad erdvė $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ įsideda į erdvę $\mathrm{W}_{\mathrm{q}}^{\mathrm{r}}(\Omega_s)$. Įrodysime, kad erdvė $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ kompaktiškai įsideda į erdvę $\mathrm{W}_{\mathrm{q}}^{\mathrm{r}}(\Omega_s)$. Kadangi erdvė $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ kompaktiškai įsideda į erdvę $\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega)$, tai iš bet kokios aprėžtos erdvėje $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ sekos galima išskirti konverguojantį erdvėje $\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega)$ posekį. Iš (3.45) nelygybės išplaukia, kad šis posekis konverguoja ir erdvėje $\mathrm{W}_{\mathrm{q}}^{\mathrm{r}}(\Omega_s)$.

P a s t a b o s:

1. Atkreipsime dėmesį į tai, kad 3.20 teoremoje konstantos $C_1$, $C_2$ priklauso nuo srities $\Omega$.

2. Plokščią sritį $\Omega_s = \Omega\cap\mathbb{R}^s$ kairiojoje (3.32) nelygybės pusėje galima pakeisti paviršiumi $S = \Omega\cap\Gamma$, $\Gamma$ – glodus $s$-matis erdvėje $\mathbb{R}^n$ paviršius. Nagrinėjant kraštinius uždavinius elipsinėms antrosios eilės lygtims, dažnai naudojama nelygybė

$$\|u\|_{\mathrm{L}_2(S)} \leq C_1\varepsilon^{1/2}\sum_{i=1}^{n}\|u_{x_i}\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)} + C_2\varepsilon^{-1/2}\|u\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)}. \qquad (3.47)$$

   Ji sutaps su (3.32) nelygybe, jeigu $\Omega_s$ pakeisime $S = \partial\Omega$ ir paimsime $p = q = 2$.

## 3.7. ERDVĖS $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\mathbb{R}^n)$ TEIGIAMOMS RODIKLIO $k$ REIKŠMĖMS

Kiekvienai funkcijai $u \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ galima apibrėžti jos Furjė transformaciją

$$\widehat{u}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} u(x)\, dx.$$

Pagal Parsevalio formulę

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^2\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\widehat{u}(\xi)|^2\, d\xi.$$

Kiekvienam multiindeksui $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ funkcijos $D^\alpha u$ Furjė transformacija

$$\widehat{D^\alpha u}(\xi) = (i\xi)^\alpha \widehat{u}(\xi), \quad \xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \xi_n^{\alpha_n}.$$

Todėl[1]

$$\|u\|^2_{\mathrm{H}^{\mathrm{k}}(\mathbb{R}^n)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \| D^\alpha u\|^2_{\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^n)} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\widehat{u}(\xi)|^2 \sum_{|\alpha| \leq k} |\xi^\alpha|^2\, d\xi.$$

Reiškiniai $\sum\limits_{|\alpha| \leq k} |\xi^\alpha|^2$ ir $1 + |\xi|^{2k}$ yra ekvivalentūs. Tiksliau, egzistuoja tokios dvi teigiamos konstantos $C_1$ ir $C_2$, kad

$$C_1 \sum_{|\alpha| \leq k} |\xi^\alpha|^2 \leq 1 + |\xi|^{2k} \leq C_2 \sum_{|\alpha| \leq k} |\xi^\alpha|^2.$$

Todėl

$$C_1 \|u\|^2_{\mathrm{H}^{\mathrm{k}}(\mathbb{R}^n)} \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\widehat{u}(\xi)|^2 (1 + |\xi|^{2k})\, d\xi \leq C_2 \|u\|^2_{\mathrm{H}^{\mathrm{k}}(\mathbb{R}^n)}.$$

Pastarasis integralas yra apibrėžtas sveikoms teigiamoms $k$ reikšmėms. Tačiau jis turi prasmę ir kitoms realioms $k$ reikšmėms. Be to, kai $k \in (0, 1)$, jis yra ekvivalentus reiškiniui

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^2\, dx + \int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2k}}\, dxdy.$$

Iš tikrųjų

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2k}}\, dxdy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x + z) - u(x)|^2}{|z|^{n+2k}}\, dxdz.$$

Pritaikę vidiniam integralui Parsevalio formulę, gausime

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x + z) - u(x)|^2}{|z|^{n+2k}}\, dxdz = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\widehat{u}(\xi)|^2 \frac{|e^{i\xi z} - 1|^2}{|z|^{n+2k}}\, d\xi dz.$$

[1] Priminsime, kad $\mathrm{H}^{\mathrm{k}}(\mathbb{R}^n) = \mathrm{W}_2^{\mathrm{k}}(\mathbb{R}^n)$.

Integralas

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|e^{i\xi z}-1|^2}{|z|^{n+2k}}\,dz = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|e^{i|\xi|z_1}-1|^2}{|z|^{n+2k}}\,dz = |\xi|^{2k}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|e^{iw_1}-1|^2}{|w|^{n+2k}}\,dw.$$

Norint šias lygybes pagrįsti, pakanka koordinačių ašis $z_1,\dots,z_n$ pasukti taip, kad vektorius $\xi$ gulėtų ašyje $z_1$, o po to padaryti keitinį $w=|\xi|z$. Integralas

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|e^{iw_1}-1|^2}{|w|^{n+2k}}\,dw > 0$$

ir konverguoja, kai $k\in(0,1)$. Todėl egzistuoja tokios dvi teigiamos konstantos $C_1$ ir $C_2$, kad

$$C_1\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\widehat{u}(\xi)|^2|\xi|^{2k}\,d\xi \le \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{n+2k}}\,dxdy \le C_2\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\widehat{u}(\xi)|^2|\xi|^{2k}\,d\xi.$$

A p i b r ė ž i m a s. Tegu $k\in(0,1)$. Sakysime, funkcija $u$ iš $L_2(\mathbb{R}^n)$ priklauso aibei $H^k(\mathbb{R}^n)$, jeigu reiškinys

$$\langle u\rangle_{H^k(\mathbb{R}^n)} = \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{n+2k}}\,dxdy\Big)^{1/2} < \infty.$$

Aibė $H^k(\mathbb{R}^n)$ su norma

$$\|u\|_{H^k(\mathbb{R}^n)} = \Big(\|u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)} + \langle u\rangle^2_{H^k(\mathbb{R}^n)}\Big)^{1/2} \tag{3.48}$$

yra normuota erdvė. Jeigu $k>1$ ir nėra sveikasis skaičius, tai normą erdvėje $H^k(\mathbb{R}^n)$ galima apibrėžti taip:

$$\|u\|_{H^k(\mathbb{R}^n)} = \Big(\sum_{|\alpha|<k} \|D^\alpha u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)} + \sum_{|\alpha|=[k]} \langle D^\alpha u\rangle^2_{H^{k-[k]}(\mathbb{R}^n)}\Big)^{1/2}; \tag{3.49}$$

čia $[k]$ – sveikoji skaičiaus $k$ dalis.

P a s t a b o s:

1. Normų $H^k(\mathbb{R}^n)$ apibrėžimai, kai $k$ yra sveikasis skaičius ir kai $k$ nėra sveikasis skaičius, skiriasi. Tačiau abiem atvejais normos ekvivalenčios reiškiniui

$$\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\widehat{u}(\xi)|^2(1+|\xi|^{2k})\,d\xi\Big)^{1/2}.$$

   Todėl erdvės $H^k(\mathbb{R}^n)$ sudaro natūralią parametro $k>0$ atžvilgiu erdvių skalę.

Analogiškai galima apibrėžti erdvę $\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\mathbb{R}^n)$ su rodikliu $k > 0$, kai $k$ nėra sveikasis skaičius. Sakysime, funkcija $u$ iš $\mathrm{L}_\mathrm{p}(\mathbb{R}^n)$ priklauso aibei $\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\mathbb{R}^n)$, $k\in(0,1)$, jeigu reiškinys

$$\langle u\rangle_{\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\mathbb{R}^n)} = \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+pk}}\,dxdy\Big)^{1/p} < \infty.$$

Aibė $\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\mathbb{R}^n)$ su norma

$$\|u\|_{\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\mathbb{R}^n)} = \Big(\|u\|^p_{\mathrm{L}_\mathrm{p}(\mathbb{R}^n)} + \langle u\rangle^p_{\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\mathbb{R}^n)}\Big)^{1/p}$$

yra normuota erdvė. Normą erdvėje $\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\mathbb{R}^n)$, kai $k > 1$ ir nėra sveikasis skaičius, galima apibrėžti taip:

$$\|u\|_{\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\mathbb{R}^n)} = \Big(\sum_{|\alpha|<k} \|\, D^\alpha u\|^p_{\mathrm{L}_\mathrm{p}(\mathbb{R}^n)} + \sum_{|\alpha|=[k]} \langle D^\alpha u\rangle^p_{\mathrm{W}_\mathrm{p}^{\mathrm{k}-[\mathrm{k}]}(\mathbb{R}^n)}\Big)^{1/p}.$$

2. Aibė $\mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ yra tiršta erdvėje $\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\mathbb{R}^n)$ ir tuo atveju, kai $k$ nėra sveikasis skaičius. Įrodymo schema yra tokia. Iš pradžių reikia įrodyti, kad $u(x)\xi_R(x) \to u(x)$, kai $R \to \infty$, o po to pastebėti, kad $\forall\rho > 0$ vidutinė funkcija
$$(u\xi_R)_\rho \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$
ir
$$(u\xi_R)_\rho(x) \to u(x)\xi_R(x),$$
kai $\rho \to 0$. Čia $\xi_R(x) = \xi(R^{-1}x)$, $\xi$ – be galo diferencijuojama neneigiama funkcija, lygi vienetui, kai $|x| < 1$, ir lygi nuliui, kai $|x| > 2$.

Tegu $\Omega$ yra sritis erdvėje $\mathbb{R}^n$. Sakysime, funkcija $u\in \mathrm{L}_\mathrm{p}(\Omega)$ priklauso aibei $\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$, $k\in(0,1)$, jeigu reiškinys

$$\langle u\rangle_{\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)} = \Big(\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+pk}}\,dxdy\Big)^{1/p} < \infty.$$

Aibė $\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$ su norma

$$\|u\|_{\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)} = \Big(\|u\|^p_{\mathrm{L}_\mathrm{p}(\Omega)} + \langle u\rangle^p_{\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)}\Big)^{1/p}$$

yra normuota erdvė.

A p i b r ė ž i m a s. Tegu $k > 1$ ir nėra sveikasis skaičius. Sakysime, funkcija $u\in \mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$, jeigu
$$D^\alpha u\in \mathrm{L}_\mathrm{p}(\Omega), \quad \forall\alpha : |\alpha| < k,$$
ir
$$\langle D^\alpha u\rangle_{\mathrm{W}_\mathrm{p}^{\mathrm{k}-[\mathrm{k}]}(\Omega)} = \Big(\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega} \frac{|\, D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^p}{|x-y|^{n+p(k-[k])}}\,dxdy\Big)^{1/p} < \infty.$$

Aibėje $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ normą galima apibrėžti taip:

$$\|u\|_{\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)} = \Big(\sum_{|\alpha|<k} \| D^\alpha u\|^p_{\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=[k]} \langle D^\alpha u\rangle^p_{\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}-[\mathrm{k}]}(\Omega)}\Big)^{1/p}.$$

Tegu $\Omega = \mathbb{R}^n_+$. Tada kiekvieną funkciją $u \in \mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\mathbb{R}^n_+)$ išlaikant glodumą galima pratęsti į visą erdvę $\mathbb{R}^n$. Tiksliau, yra teisinga tokia teorema.

**3.21 teorema.** *Egzistuoja tiesinis aprėžtas pratęsimo operatorius*

$$\Pi : \mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\mathbb{R}^n_+) \to \mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\mathbb{R}^n).$$

*Be to, jeigu* $u \in \mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\mathbb{R}^n_+)$ *ir* $v = \Pi u$, *tai* $v(x) = u(x)$, *kai* $x \in \mathbb{R}^n_+$.

Pastarosios teoremos čia neįrodinėsime. Atkreipsime dėmesį tik į tai, kad ją pakanka įrodyti glodžioms funkcijoms. Tai, kad glodžios funkcijos yra tiršta aibė, įrodoma įprastu būdu. Reikia tik vidutinės funkcijos apibrėžime (žr. 2.1 skyrelį) branduolį $\omega_\rho(x-y)$ pakeisti branduoliu $\omega_\rho(x-y-\rho e_n)$.

Naudojant vieneto skaidinį ir taikant 3.21 teoremą, galima įrodyti tokį teiginį.

**3.22 teorema.** *Tegu* $\Omega$ *yra aprėžta erdvėje* $\mathbb{R}^n$ *sritis,* $S = \partial\Omega$ – $\mathrm{C}^{\mathrm{k}+\varepsilon}$ *klasės paviršius. Tada egzistuoja tiesinis aprėžtas pratęsimo operatorius*

$$\Pi : \mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega) \to \mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\mathbb{R}^n).$$

*Be to, jeigu* $u \in \mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ *ir* $v = \Pi u$, *tai* $v(x) = u(x)$, *kai* $x \in \Omega$.

## 3.8. FUNKCIJŲ $u\in W^k_p$ PĖDSAKAI

Bendruoju atveju elementų iš Sobolevo erdvių $W^k_p$ pėdsakai nepriklauso tai pačiai Sobolevo erdvių skalei. Norint juos tiksliai aprašyti, reikėtų apibrėžti kitas funkcijų erdvesIšimtį sudaro du atvejai:

1) k – sveikasis skaičius;

2) p = 2.

Šiuos du atvejus čia ir nagrinėsime.

Tegu $k$ yra sveikasis skaičius ir $\Gamma\subset\Omega$ – glodus $(n-1)$-matis paviršius. Pagal 3.16 teoremą kiekvienos funkcijos $u\in W^k_p(\Omega)$ ekvivalentiškumo klasėje yra atstovas $u|_\Gamma\in L_q(\Gamma)$ (jis vadinamas funkcijos $u$ ***pėdsaku*** paviršiuje $\Gamma$) ir teisingas įvertis

$$\|u\|_{L_q(\Gamma)}\leq C\|u\|_{W^k_p(\Omega)};$$

čia $q\leq(n-1)p/(n-pk)$, jeigu $n>pk$, ir $q\geq 1$, jeigu $n\leq pk$. Tegu $\mathfrak{M}$ yra funkcijų $u$ iš erdvės $W^k_p(\Omega)$ pėdsakų paviršiuje $\Gamma$ aibė. Akivaizdu, kad $\mathfrak{M}$ yra tiesinė aibė. Apibrėžkime normą

$$|\!|\!|\varphi|\!|\!| = \inf_{u\in W^k_p(\Omega),\, u|_\Gamma=\varphi}\|u\|_{W^k_p(\Omega)}. \tag{3.50}$$

Aibė $\mathfrak{M}$ su taip apibrėžta norma yra normuota erdvė. Tiesiogiai galima įrodyti, kad ji yra pilna. Įrodysime, kad taip apibrėžta erdvė yra Sobolevo erdvė $W^r_p(\Gamma)$ su tam tikru trupmeniniu rodikliu $r$.

Iš pradžių išnagrinėsime atvejį, kai $\Omega=\mathbb{R}^n_+=\{x\in\mathbb{R}^n : x_n>0\}$, $x=(x',x_n)$ ir $k=1$.

**3.23 teorema.** *Tegu $p>1$. Tada:*

1. *Funkcija $u\in W^1_p(\mathbb{R}^n_+)$ turi pėdsaką $u|_{x_n=0}:=\varphi\in W^{1-1/p}_p(\mathbb{R}^{n-1})$. Be to,*

$$\|\varphi\|_{W^{1-1/p}_p(\mathbb{R}^{n-1})}\leq C\|u\|_{W^1_p(\mathbb{R}^n_+)}; \tag{3.51}$$

*čia konstanta $C$ nepriklauso nuo konkretaus elemento $u$.*

2. *Kiekvienai $\varphi\in W^{1-1/p}_p(\mathbb{R}^{n-1})$ egzistuoja tokia funkcija*

$$u\in W^1_p(\mathbb{R}^n_+),$$

*kad*

$$u(x',0)=\varphi(x')$$

*ir teisinga nelygybė*

$$\|u\|_{W^1_p(\mathbb{R}^n_+)}\leq C\|\varphi\|_{W^{1-1/p}_p(\mathbb{R}^{n-1})}; \tag{3.52}$$

*čia konstanta $C$ nepriklauso nuo konkretaus elemento $\varphi$.*

$\triangleleft$ Įrodysime pirmąjį teoremos teiginį. Tegu $u\in \mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{k}}(\mathbb{R}_+^n)$ ir $u(x',0) = = \varphi(x')$. Remiantis 3.10 teorema, $\varphi\in \mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\mathbb{R}^{n-1})$ ir

$$\|\varphi\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\mathbb{R}^{n-1})}\leq C\|u\|_{\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^1(\mathbb{R}_+^n)}.$$

Kiekvieną elementą $u\in \mathrm{W}_{\mathrm{p}}^1(\mathbb{R}_+^n)$ erdvės $\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^1(\mathbb{R}_+^n)$ normoje galima aproksimuoti be galo diferencijuojamomis ir lygiomis nuliui pakankamai didelio rutulio išorėje funkcijomis. Todėl įrodydami šį teiginį, galime tarti, kad funkcija $u = u(x)$ yra be galo diferencijuojama ir lygi nuliui pakankamai dideliems $|x|$.

Integralas

$$\langle\varphi\rangle^p_{\mathrm{W}_{\mathrm{p}}^{1-1/\mathrm{p}}(\mathbb{R}^{n-1})} = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{|\varphi(x'+z')-\varphi(x')|^p}{|z'|^{n-2+p}}\,dx'dz' =$$

$$= \int\limits_{|z'|=1}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\int\limits_0^\infty \frac{|\varphi(x'+\rho\omega')-\varphi(x')|^p}{\rho^p}\,d\rho dx' d\omega'.$$

Vietoje kintamųjų $x'$ apibrėžkime naujus kintamuosius $y'$ taip, kad koordinačių ašis $y_1$ būtų nukreipta vektoriaus $\omega'$ kryptimi. Tada

$$\Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\varphi(y'+\rho\omega')-\varphi(y')|^p\,dy_1\Big)^{1/p}\leq$$

$$\leq\frac{1}{\rho}\int\limits_0^\rho\Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |u(y'+\rho\omega',0)-u(y'+\rho\omega',t)|^p\,dy_1\Big)^{1/p}dt +$$

$$+\frac{1}{\rho}\int\limits_0^\rho\Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |u(y'+\rho\omega',t)-u(y',t)|^p\,dy_1\Big)^{1/p}dt +$$

$$+\frac{1}{\rho}\int\limits_0^\rho\Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |u(y',t)-u(y',0)|^p\,dy_1\Big)^{1/p}dt \leq$$

$$\leq\int\limits_0^\rho (2\|u_t(y',t)\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\mathbb{R}^1)} + \|u_{y_1}(y',t)\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\mathbb{R}^1)})\,dt.$$

Įvertindami šiuos integralus, iš pradžių pasinaudojome Niutono–Leibnico formule, o po to Minkovskio nelygybe.

Į paskutinį integralą galima žiūrėti kaip į kintamojo $\rho$ funkciją, kuri taške $\rho = 0$ lygi nuliui. Pritaikę taip apibrėžtai funkcijai Hardžio nelygybę, gausime

$$\int\limits_0^\infty \rho^{-p}\Big(\int\limits_0^\rho (2\|u_t(y',t)\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\mathbb{R}^1)} + \|u_{y_1}(y',t)\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\mathbb{R}^1)})\,dt\Big)^p d\rho\leq$$

$$\leq\Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p\int\limits_0^\infty(2\|u_t(y',t)\|^p_{L_p(\mathbb{R}^1)}+\|u_{y_1}(y',t)\|^p_{L_p(\mathbb{R}^1)})\,dt.$$

Todėl

$$\langle\varphi\rangle^p_{W_p^{1-1/p}(\mathbb{R}^{n-1})}\leq\sigma_1\Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p\Big(2\|u_t(y',t)\|^p_{L_p(\mathbb{R}^n_+)}+\|u_{y_1}(y',t)\|^p_{L_p(\mathbb{R}^n_+)}\Big);$$

čia $\sigma_1$ – $(n-1)$-matės vienetinės sferos plotas. Grįžę prie senų kintamųjų $x'$, gausime įvertį

$$\langle\varphi\rangle^p_{W_p^{1-1/p}(\mathbb{R}^{n-1})}\leq C\sum_{i=1}^n\|u_{x_i}\|^p_{L_p(\mathbb{R}^n_+)}.$$

Taigi funkcija $\varphi\in W_p^{1-1/p}(\mathbb{R}^{n-1})$ ir yra teisinga (3.51) nelygybė.

Antrąjį teoremos teiginį pakanka įrodyti, kai funkcija $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$. Tegu $w$ – tokia be galo diferencijuojama erdvėje $\mathbb{R}^{n-1}$ funkcija, kad

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} w(x')\,dx'=1$$

ir $w(x')=0$, kai $|x'|>1$. Apibrėžkime funkciją

$$v(x)=\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\varphi(x'+x_ny')w(y')\,dy',\quad x_n\geq0.$$

Akivaizdu, kad $v(x',0)=\varphi(x')$. Pagal Minkovskio nelygybę

$$\|v\|_{L_p(\mathbb{R}^{n-1})}\leq\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}|\varphi(x'+x_ny')w(y')|^p\,dx'\Big)^{1/p}dy'\leq$$

$$\leq\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}|w(y')|\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}|\varphi(x'+x_ny'))|^p\,dx'\Big)^{1/p}dy'\leq$$

$$\leq\|\varphi\|_{L_p(\mathbb{R}^{n-1})}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}|w(y')|\,dy',\quad\forall x_n\geq0. \tag{3.53}$$

Rasime funkcijos $v$ išvestines. Kai $i<n$,

$$v_{x_i}(x)=x_n^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\varphi_{y_i}(x'+x_ny')w(y')\,dy'=$$

$$=-x_n^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}(\varphi(x'+x_ny')-\varphi(x'))w_{y_i}(y')\,dy'.$$

Kai $i=n$,

$$v_{x_n}(x)=x_n^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\sum_{i=1}^{n-1}\varphi_{y_i}(x'+x_ny')y_iw(y')\,dy'=$$

$$=-x_n^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}(\varphi(x'+x_ny')-\varphi(x'))\sum_{i=1}^{n-1}\big(y_iw(y')\big)_{y_i}\,dy'.$$

Įvertinkime funkcijų $v_{x_i}$ normas erdvėje $\mathrm{L_p}(\mathbb{R}^n_+)$. Tegu $i=1,\dots,n-1$. Pagal Minkovskio nelygybę norma

$$\|v_{x_i}\|_{\mathrm{L_p}(\mathbb{R}^n_+)}\le\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}|\varphi(x'+x_ny')-\varphi(x')|^p x_n^{-p}\,dx\Big)^{1/p}|w_{y_i}(y')|\,dy'=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\Big(\int\limits_0^\infty x_n^{-p}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}|\varphi(x'+x_ny')-\varphi(x')|^p x_n^{-p}\,dx'dx_n\Big)^{1/p}|w_{y_i}(y')|\,dy'.$$

Paskutiniame integrale pereikime prie sferinių koordinačių (kintamųjų $y'$ atžvilgiu). Tada pasinaudoję Helderio nelygybe, gausime, kad $\|v_{x_i}\|_{\mathrm{L_p}(\mathbb{R}^n_+)}$ neviršija

$$C\int\limits_0^1 r^{n-2}\int\limits_{|\omega'|=1}\Big(\int\limits_0^\infty\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}|\varphi(x'+x_nr\omega')-\varphi(x')|^p\,dx'\,x_n^{-p}\,dx_n\Big)^{1/p}\,d\omega'dr\le$$

$$\le C_1\int\limits_0^1 r^{n-2}\Big(\int\limits_{|\omega'|=1}\int\limits_0^\infty\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}|\varphi(x'+x_nr\omega')-\varphi(x')|^p\,dx'\,x_n^{-p}\,dx_nd\omega'\Big)^{1/p}\,dr=$$

$$=C_1\int\limits_0^1 r^{n-2}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\frac{|\varphi(x'+rz')-\varphi(x')|^p}{|z'|^{n-2+p}}\,dx'dz'\Big)^{1/p}\,dr\le$$

$$\le C_2\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\frac{|\varphi(x'+z')-\varphi(x')|^p}{|z'|^{n-2+p}}\,dx'dz'\Big)^{1/p}.$$

Taigi $\forall i=1,\dots,n-1$ teisinga nelygybė

$$\|v_{x_i}\|_{\mathrm{L_p}(\mathbb{R}^n_+)}\le C_2\langle\varphi\rangle_{\mathrm{W}_\mathrm{p}^{1-1/p}(\mathbb{R}^{n-1})}. \tag{3.54}$$

Ši nelygybė yra teisinga ir kai $i=n$ (tik su sava konstanta $C_2$). Įrodymas yra visiškai toks pats.

Tegu $\xi(t)$ yra be galo diferencijuojama monotoniškai mažėjanti intervale $[0,\infty)$ funkcija, lygi vienetui, kai $t\in[0,1/2)$, ir lygi nuliui, kai $t\ge 1$. Apibrėžkime funkciją

$$u(x)=v(x)\xi(x_n).$$

Akivaizdu, kad $u(x',0)=v(x',0)=\varphi(x')$. Be to, iš (3.53) ir (3.54) išplaukia nelygybės:

$$\|u\|_{L_p(\mathbb{R}^n_+)} \leq \|v\|_{L_p(\mathbb{R}^n_+)} \leq \|\varphi\|_{L_p(\mathbb{R}^{n-1})} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} |w(y')|\,dy',$$

$$\|u_{x_i}\|_{L_p(\mathbb{R}^n_+)} \leq \|v_{x_i}\|_{L_p(\mathbb{R}^n_+)} + \sup_{t\geq 0}|\xi'(t)|\|v\|_{L_p(\mathbb{R}^n_+)} \leq$$

$$\leq C_2\langle\varphi\rangle_{W_p^{1-1/p}(\mathbb{R}^{n-1})} + C_3\|\varphi\|_{L_p(\mathbb{R}^{n-1})}.$$

Kartu yra teisinga (3.52) nelygybė. ▹

I š v a d a. Iš (3.51) ir (3.52) nelygybių išplaukia, kad egzistuoja tokios teigiamos konstantos $C_1$ ir $C_2$, kad

$$C_1|||\varphi||| \leq \|\varphi\|_{W_p^{1-1/p}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C_2|||\varphi|||;$$

čia $|||\cdot|||$ apibrėžta (3.50) formule. Todėl erdvė $W_p^{1-1/p}(\mathbb{R}^{n-1})$ sutampa su funkcijų iš erdvės $W_p^1(\mathbb{R}^n_+)$ pėdsakų hiperplokštumoje $x_n=0$ erdve.

Įrodytą teoremą lengvai galima apibendrinti bet kokiam sveikajam $k\geq 1$. Tiksliau, teisinga tokia teorema.

**3.24 teorema.** *Tegu $p>1$. Tada:*

1. *Funkcija $u\in W_p^k(\mathbb{R}^n_+)$ turi pėdsaką hiperplokštumoje $x_n=0$ ir*

$$D^\alpha u|_{x_n=0} := \varphi_\alpha \in W_p^{k-|\alpha|-1/p}(\mathbb{R}^{n-1}), \quad |\alpha|<k.$$

*Be to,*

$$\|\varphi_\alpha\|_{W_p^{k-|\alpha|-1/p}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C\|u\|_{W_p^k(\mathbb{R}^n_+)}; \tag{3.55}$$

*čia konstanta $C$ nepriklauso nuo konkretaus elemento $u$.*

2. *Kiekvienam funkcijų $\varphi_i\in W_p^{k-i-1/p}(\mathbb{R}^{n-1})$, $i=1,\dots,k-1$, rinkiniui egzistuoja tokia funkcija $u\in W_p^k(\mathbb{R}^n_+)$, kad*

$$\frac{\partial^i u(x',0)}{\partial x_n^i} = \varphi_i(x'), \quad i=1,\dots,k-1,$$

*ir yra teisinga nelygybė*

$$\|u\|_{W_p^k(\mathbb{R}^n_+)} \leq C\sum_{i=0}^{k-1}\|\varphi_i\|_{W_p^{k-i-1/p}(\mathbb{R}^{n-1})}; \tag{3.56}$$

*čia konstanta $C$ nepriklauso nuo konkrečių elementų $\varphi_i$.*

I š v a d a. Iš (3.55) ir (3.56) nelygybių išplaukia, kad egzistuoja tokios teigiamos konstantos $C_1$ ir $C_2$, kad

$$C_1|||\varphi|||\leq\|\varphi\|_{\mathrm{W}_\mathrm{p}^{\mathrm{k}-1/\mathrm{p}}(\mathbb{R}^{n-1})}\leq C_2|||\varphi|||.$$

Kartu galime tvirtinti, kad erdvė $\mathrm{W}_\mathrm{p}^{1-1/\mathrm{p}}(\mathbb{R}^{n-1})$ sutampa su funkcijų erdvės $\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\mathbb{R}^n_+)$ pėdsakų hiperplokštumoje $x_n=0$ erdve.

Tarkime, $\Omega$ yra aprėžta erdvėje $\mathbb{R}^n$ sritis ir $S=\partial\Omega$ – $\mathrm{C}^\mathrm{k}$ klasės paviršius. Tada yra teisinga teorema.

3.25 teorema. *Tegu $p>1$. Tada:*

1. *Funkcija $u\in\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$ turi pėdsaką paviršiuje $S$ ir*

$$D^\alpha u\big|_S=\varphi_\alpha\in\mathrm{W}_\mathrm{p}^{\mathrm{k}-|\alpha|-1/\mathrm{p}}(S),\quad |\alpha|<k.$$

*Be to,*

$$\|\varphi_\alpha\|_{\mathrm{W}_\mathrm{p}^{\mathrm{k}-|\alpha|-1/\mathrm{p}}(S)}\leq C\|u\|_{\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)};$$

*čia konstanta $C$ nepriklauso nuo konkretaus elemento $u$.*

2. *Bet kokiai funkcijai $\varphi\in\mathrm{W}_\mathrm{p}^{\mathrm{k}-1/\mathrm{p}}(S)$ egzistuoja tokia funkcija $u\in\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$, kad $u|_S=\varphi$ ir yra teisinga nelygybė*

$$\|u\|_{\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)}\leq C\|\varphi\|_{\mathrm{W}_\mathrm{p}^{\mathrm{k}-1/\mathrm{p}}(S)};$$

*čia konstanta $C$ nepriklauso nuo konkretaus elemento $\varphi$.*

Šią teoremą galima įrodyti įprastu būdu. Tik iš pradžių, naudojant vieneto skaidinį, reikia apibrėžti erdvę $\mathrm{W}_\mathrm{p}^{\mathrm{k}-1/\mathrm{p}}(S)$. Teoremos įrodymą galima rasti [?] knygoje.

P a s t a b a. Kiekvienai funkcijai $u\in\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$ paviršiuje $S$ galima apibrėžti jos normalines išvestines iki $(k-1)$-osios eilės imtinai. Todėl 3.25 teoremos antrąją dalį galima apibendrinti (žr. 3.24 teoremos antrą teiginį).

Išnagrinėsime antrąjį atvejį. Tarkime, $p=2$. Priminsime, kad erdvė $\mathrm{W}_2^\mathrm{k}$ yra Hilberto erdvė. Ją žymėsime $\mathrm{H}^\mathrm{k}$.

3.26 teorema. *Tegu $k>1/2$ ir $u\in\mathrm{H}^\mathrm{k}(\mathbb{R}^n)$. Tada funkcija $u$ turi pėdsaką*

$$u\big|_{x_n=0}\in\mathrm{H}^{\mathrm{k}-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$$

*ir yra teisinga nelygybė*

$$\|u\|_{\mathrm{H}^{\mathrm{k}-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})}\leq C\|u\|_{\mathrm{H}^\mathrm{k}(\mathbb{R}^n)};\tag{3.57}$$

*čia konstanta $C$ nepriklauso nuo konkretaus elemento $u\in\mathrm{H}^\mathrm{k}(\mathbb{R}^n)$.*

◁ Kadangi aibė $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ yra tiršta erdvėje $H^k(\mathbb{R}^n)$, tai teoremą pakanka įrodyti funkcijoms iš $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Tegu $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ir

$$\widehat{u}(\xi', x_n) = (2\pi)^{-(n-1)/2} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-ix'\xi'} u(x', x_n)\, dx'$$

yra funkcijos $u$ Furjė transformacija kintamųjų $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$ atžvilgiu. Kita vertus,

$$\widehat{u}(\xi', x_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{u}(\xi) e^{i\xi_n x_n}\, d\xi_n;$$

čia $\widehat{u}(\xi)$ – funkcijos $u$ Furjė transformacija visų kintamųjų $x$ atžvilgiu. Kadangi $|e^{i\xi_n x_n}| = 1$, tai

$$|\widehat{u}(\xi', 0)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\widehat{u}(\xi)|\, d\xi_n. \tag{3.58}$$

Pagal Helderio nelygybę

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\widehat{u}(\xi)|\, d\xi_n \leq \Big( \int\limits_{-\infty}^{\infty} (1 + |\xi|^2)^k |\widehat{u}(\xi)|^2\, d\xi_n \Big)^{1/2} \Big( \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi_n}{(1 + |\xi'|^2 + |\xi_n|^2)^k} \Big)^{1/2}.$$

Paskutiniame integrale vietoje kintamojo $\xi_n$ įveskime naują kintamąjį $t$ pagal formulę

$$\xi_n = t\sqrt{1 + |\xi'|^2}.$$

Tada

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi_n}{(1 + |\xi'|^2 + |\xi_n|^2)^k} = \frac{1}{(1 + |\xi'|^2)^{k-1/2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(1 + t^2)^k}.$$

Pagal teoremos sąlygą $k > 1/2$. Todėl

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(1 + t^2)^k} = M < \infty$$

ir

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\widehat{u}(\xi)|\, d\xi_n \leq \Big( \int\limits_{-\infty}^{\infty} (1 + |\xi|^2)^k |\widehat{u}(\xi)|^2\, d\xi_n \Big)^{1/2} \frac{M}{(1 + |\xi'|^2)^{k-1/2}}.$$

Sugretinę pastarąją nelygybę su (3.58), gausime

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} (1 + |\xi'|^2)^{k-1/2} |\widehat{u}(\xi', 0)|^2\, d\xi' \leq \frac{M}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (1 + |\xi|^2)^k |\widehat{u}(\xi)|^2\, d\xi_n d\xi'.$$

Reiškinys nelygybės kairėje yra ekvivalentus $\|u\|^2_{\mathrm{H}^{\mathrm{k}-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})}$, o reiškinys dešinėje – $\|u\|^2_{\mathrm{H}^{\mathrm{k}}(\mathbb{R}^n)}$. Todėl $\forall u\in \mathrm{C}^\infty_0(\mathbb{R}^n)$ yra teisinga (3.57) nelygybė. Kartu ši nelygybė yra teisinga ir $\forall u\in \mathrm{H}^{\mathrm{k}}(\mathbb{R}^n)$. ▷

I š v a d o s:

1. Tegu $k > |\alpha| + 1/2$ ir funkcija $u\in \mathrm{H}^{\mathrm{k}}(\mathbb{R}^n)$. Tada jos išvestinė $D^\alpha u$ turi pėdsaką
$$D^\alpha u\big|_{x_n=0}\in \mathrm{H}^{\mathrm{k}-|\alpha|-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$$
ir yra teisinga nelygybė
$$\| D^\alpha u\|_{\mathrm{H}^{\mathrm{k}-|\alpha|-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})}\le C\|u\|_{\mathrm{H}^{\mathrm{k}}(\mathbb{R}^n)};$$
čia konstanta $C$ nepriklauso nuo konkretaus elemento $u\in \mathrm{H}^{\mathrm{k}}(\mathbb{R}^n)$.

2. Tegu $m < n$, $k > |\alpha| - (n-m)/2$ ir funkcija $u\in \mathrm{H}^{\mathrm{k}}(\mathbb{R}^n)$. Tada jos išvestinė $D^\alpha u$ turi pėdsaką
$$D^\alpha u\big|_{\mathbb{R}^m}\in \mathrm{H}^{\mathrm{k}-|\alpha|-(\mathrm{n}-\mathrm{m})/2}(\mathbb{R}^m)$$
ir teisinga nelygybė
$$\| D^\alpha u\|_{\mathrm{H}^{\mathrm{k}-|\alpha|-(\mathrm{n}-\mathrm{m})/2}(\mathbb{R}^m)}\le C\|u\|_{\mathrm{H}^{\mathrm{k}}(\mathbb{R}^n)};$$
čia konstanta $C$ nepriklauso nuo konkretaus elemento $u$.

P a s t a b a. Tegu $\Omega$ yra aprėžta erdvėje $\mathbb{R}^n$ sritis, $S = \partial\Omega$ – $\mathrm{C}^{\mathrm{k}+\varepsilon}$ klasės paviršius. Tada 1 išvadoje erdvę $\mathbb{R}^{n-1}$ galima pakeisti paviršiumi $S$, o 2 – erdvę $\mathbb{R}^s$ glodžiu $s$-mačiu paviršiumi $\Gamma\subset\Omega$.

Įrodysime atvirkštinį teiginį.

3.27 teorema. *Tegu $\varphi\in \mathrm{H}^{\mathrm{k}-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$, $k > 1/2$. Tada egzistuoja tokia funkcija*
$$u\in \mathrm{H}^{\mathrm{k}}(\mathbb{R}^n),$$
*kad*
$$u(x', 0) = \varphi(x')$$
*ir*
$$\|u\|_{\mathrm{H}^{\mathrm{k}}(\mathbb{R}^n)}\le C\|\varphi\|_{\mathrm{H}^{\mathrm{k}-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})}; \tag{3.59}$$
*čia konstanta $C$ nepriklauso nuo konkretaus elemento $\varphi$.*

◁ Pakanka įrodyti, kad teorema teisinga $\forall\varphi\in \mathrm{C}^\infty_0(\mathbb{R}^{n-1})$. Apibrėžkime funkciją
$$\widehat{u}(\xi', x_n) = \widehat{\varphi}(\xi')w(x_n\sqrt{1 + |\xi'|^2});$$
čia $w\in \mathrm{C}^\infty_0(\mathbb{R}^1)$ ir $w(t) = 1$ taško $t = 0$ aplinkoje. Apskaičiavę taip apibrėžtos funkcijos Furjė transformaciją kintamojo $x_n$ atžvilgiu, gausime
$$\widehat{u}(\xi) = \widehat{\varphi}(\xi')(1 + |\xi'|^2)^{-1/2}\widehat{w}\big(\xi_n(1 + |\xi'|^2)^{-1/2}\big).$$

Funkcijos $u$ normos kvadratas erdvėje $\mathrm{H}^{\mathrm{k}}(\mathbb{R}^n)$ ekvivalentus integralui

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^k |\widehat{u}(\xi)|^2 \, d\xi$$

Pastarąjį integralą integruodami atskirai pagal kintamuosius $\xi'$ ir $\xi_n$, gausime

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} |\widehat{\varphi}(\xi')|^2 (1+|\xi'|^2)^{-1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (1+|\xi'|^2+\xi_n^2)^k |\widehat{w}\big(\xi_n(1+|\xi'|^2)^{-1/2}\big)|^2 \, d\xi_n d\xi' =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} |\widehat{\varphi}(\xi')|^2 (1+|\xi'|^2)^{k-1/2} \, d\xi' \int\limits_{-\infty}^{\infty} (1+t^2)^k |\widehat{w}(t)|^2 \, dt \leq C\|\varphi\|^2_{\mathrm{H}^{\mathrm{k}-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})}.$$

Todėl sukonstruotai funkcijai $u$ teisinga (3.59) nelygybė. Beliko įrodyti, kad $u(x',0)=\varphi(x')$. Tačiau tai išplaukia iš formulės $\widehat{u}(\xi',0)=\widehat{\varphi}(\xi')$. $\triangleright$

I š v a d o s:

1. Tegu $k>1$, $\varphi_i \in \mathrm{H}^{\mathrm{k-i}-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$, $i=0,\dots,s$ ir $k-s>1/2$. Tada egzistuoja tokia funkcija $u \in \mathrm{H}^{\mathrm{k}}(\mathbb{R}^n)$, kad

$$\frac{\partial^i u(x',0)}{\partial x_n^i} = \varphi_i(x'), \quad \forall i=0,\dots,s,$$

   ir teisinga nelygybė

$$\|u\|_{\mathrm{H}^{\mathrm{k}}(\mathbb{R}^n)} \leq C \sum_{i=0}^{s} \|\varphi_i\|_{\mathrm{H}^{\mathrm{k-i}-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})};$$

   čia konstanta $C$ nepriklauso nuo elementų $\varphi_1,\dots,\varphi_s$.

2. Tegu $\varphi_\alpha \in \mathrm{H}^{\mathrm{k}-|\alpha|-(\mathrm{n-m})/2}(\mathbb{R}^m)$, $k>(n-m)/2$, $\alpha$ – multiindeksas, $k-|\alpha|-(n-m)/2>0$. Tada egzistuoja tokia funkcija $u \in \mathrm{H}^{\mathrm{k}}(\mathbb{R}^n)$, kad

$$D^\alpha u\big|_{\mathbb{R}^m} = \varphi_\alpha$$

   ir teisinga nelygybė

$$\|u\|_{\mathrm{H}^{\mathrm{k}}(\mathbb{R}^n)} \leq C \sum_{\alpha} \|\varphi_\alpha\|_{\mathrm{H}^{\mathrm{k}-|\alpha|-(\mathrm{n-m})/2}(\mathbb{R}^m)};$$

   čia konstanta $C$ nepriklauso nuo $\varphi_\alpha$.

## 3.9. UŽDAVINIAI

1. Įrodykite nelygybes

   (a) $|\Omega|^{-1/p}\|u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}\leq|\Omega|^{-1/q}\|u\|_{\mathrm{L_q}(\Omega)}, \quad \forall u\in\mathrm{L_q}(\Omega),\ p\leq q;$

   (b) $\|u\|_{\mathrm{L_q}(\Omega)}\leq\|u\|^{\alpha}_{\mathrm{L_p}(\Omega)}\|u\|^{-\alpha}_{\mathrm{L_r}(\Omega)}, \quad u\in\mathrm{L_r}(\Omega),$
   
   $p\leq q\leq r,\ 1/q=\alpha/p+(1-\alpha)/r;$

   (c) $\|u\|_{\mathrm{L_q}(\Omega)}\leq\varepsilon\|u\|_{\mathrm{L_r}(\Omega)}+\varepsilon^{-\alpha}\|u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}, \quad p\leq q\leq r,$
   
   $\alpha=(1/p-1/q)(1/q-1/r).$

   N u r o d y m a s. Pasinaudokite Jungo ir Helderio nelygybėmis.

2. Įrodykite, kad (2.19) ir (2.20) normos yra ekvivalenčios.

3. Tegu $\Omega$ yra aprėžta iškila sritis, $u\in\mathrm{W}^1_1(\Omega)$. Įrodykite, kad b.v. $x\in\Omega$ teisinga nelygybė

$$|u(x)-u_\omega|\leq\frac{d^n}{n|\omega|}\int\limits_{\Omega}|x-y|^{1-n}|u_y|\,dy, \quad u_\omega=\frac{1}{|\omega|}\int\limits_{\omega}u(x)\,dx;$$

   čia $d=\operatorname{diam}\Omega$, $\omega\subset\Omega$ – kokia nors mati aibė, $|\omega|\neq0$.

   N u r o d y m a s. Įsitikinkite, kad pastarąją nelygybę pakanka įrodyti funkcijoms $u\in\mathrm{C}^1(\Omega)$ ir pasinaudokite Niutono–Leibnico formule.

4. Tegu $f_i\in\mathrm{C}^\infty_0(\mathbb{R}^{n-1})$, $i=1,\dots,n$. Įrodykite nelygybę

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\prod_{i=1}^n f_i(x')\,dx\leq\prod_{i=1}^n\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}|f_i(x')|^{n-1}\,dx'\Big)^{1/(n-1)};$$

   čia $f_i(x')=f_i(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n)$.

   N u r o d y m a s. Pasinaudokite matematinės indukcijos metodu.

5. Tegu $\Omega$ yra aprėžta iškila sritis, $u\in\mathrm{W}^1_1(\Omega)$. Įrodykite nelygybę

$$\|u-u_\omega\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}\leq\big(|S_1|/|\omega|\big)^{1-1/p}d^n\|u_x\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}.$$

   N u r o d y m a s. Pasinaudokite 3 uždaviniu.

6. Tegu $p\in[1,\infty)$. Įrodykite, kad kiekvienai funkcijai $u\in\mathring{\mathrm{W}}^1_{\mathrm{p}}(\Omega)$ yra teisinga nelygybė

$$\|u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}\leq\big(|\Omega|/|S_1|\big)^{1/n}\|u_x\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}.$$

   N u r o d y m a s. Pasinaudokite Frydrichso–Puankare nelygybe.

7. Tegu $u\in \mathring{\mathrm{W}}_{\mathrm{p}}^1(\Omega)$, $p > n$. Įrodykite, kad funkcija $u\in \mathrm{C}^{1-\mathrm{n}/\mathrm{p}}(\overline{\Omega})$ ir teisinga nelygybė
$$\operatorname*{osc}_{\Omega\cap B_R} u\le CR^{1-n/p}\|u_x\|_{\mathrm{L}_\mathrm{p}(\Omega)};$$
čia konstanta $C$ priklauso tik nuo $n$ ir $p$.

   N u r o d y m a s. Pasinaudokite 3.6 teoremos įrodymu.

8. Tegu $\Omega$ yra aprėžta erdvėje $\mathbb{R}^n$ sritis, $S = \partial\Omega$ – $\mathrm{C}^1$ klasės paviršius. Įrodykite, kad funkcija $u\in \mathrm{W}_\infty^1(\Omega)$ tada ir tik tada, kai ji srityje $\Omega$ tenkina Lipšico sąlygą.

   N u r o d y m a s. Pasinaudokite Niutono–Leibnico formule.

9. Įrodykite, kad kiekvienai funkcijai $u\in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$ ir $\forall k > 0$ teisinga formulė
$$u(x) = \sum_{i_1,..,i_k=1}^{n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^k u(u)}{\partial y_{i_1}\cdots\partial y_{i_k}} \frac{(x_{i_1}-y_{i_1})\cdots(x_{i_k}-y_{i_k})}{(k-1)!|S_1||x-y|^n}\, dy.$$

   N u r o d y m a s. Pasinaudokite tapatybe
$$\sum_{i_k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{(x_{i_1}-y_{i_1})\cdots(x_{i_{k-1}}-y_{i_{k-1}})(x_{i_k}-y_{i_k})}{|x-y|^n} =$$
$$= (k-1)\frac{(x_{i_1}-y_{i_1})\cdots(x_{i_{k-1}}-y_{i_{k-1}})}{|x-y|^n};$$
čia $k\ge 2$, $i_1,\dots,i_{k-1}$ – fiksuoti, išvestinės apibendrintos.

10. Tegu $\Omega$ yra aprėžta erdvėje $\mathbb{R}^n$ sritis, $S = \partial\Omega$ – $\mathrm{C}^\mathrm{k}$ klasės paviršius, $0\le r < k$, $s > n-p(k-r)$, $k-r-n/p+s/q^* = 0$. Įrodykite, kad erdvė $\mathrm{W}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega)$ įsideda į erdvę $\mathrm{W}_{\mathrm{q}^*}^\mathrm{r}(\Omega_s)$.

    N u r o d y m a s. Iš pradžių įrodykite, kad erdvė $\mathring{\mathrm{W}}_\mathrm{p}^\mathrm{k}(\Omega) \hookrightarrow \mathrm{W}_{\mathrm{q}^*}^\mathrm{r}(\Omega_s)$ (žr. 9 uždavinį ir 3.12 nelygybę). Po to pasinaudokite 2.17 teorema.

11. Tegu $k\in[0,1/2)$. Įrodykite nelygybę
$$\|x^{-k}u\|_{\mathrm{L}_2(0,\infty)}\le C\|u\|_{\mathrm{H}^\mathrm{k}(0,\infty)}, \quad \forall u\in \mathrm{C}_0^\infty(0,\infty).$$

    N u r o d y m a s. Iš pradžių patikrinkite tapatybę $u = v - w$; čia
$$v(x) = \frac{1}{x}\int\limits_0^x (u(x)-u(s))\, ds, \quad w(x) = \int\limits_x^\infty \frac{1}{s}v(s)\, ds.$$

    Po to įrodykite nelygybes:
$$\|x^{-k}v\|_{\mathrm{L}_2(0,\infty)}\le C_1\|u\|_{\mathrm{H}^\mathrm{k}(0,\infty)}, \quad \|x^{-k}w\|_{\mathrm{L}_2(0,\infty)}\le C_2\|u\|_{\mathrm{H}^\mathrm{k}(0,\infty)}.$$