Funkcinė centrinė ribinė teorema daugiamačio indekso sumavimo procesams

A. Račkauskas[1,3], Ch. Suquet[2], V. Zemlys[1,2]

[1]Vilniaus Universitetas

[2]Universite des Sciences et Technologies de Lille

[3]Matematikos ir informatikos institutas

2006 gegužės 24

Vienmatis atvejis

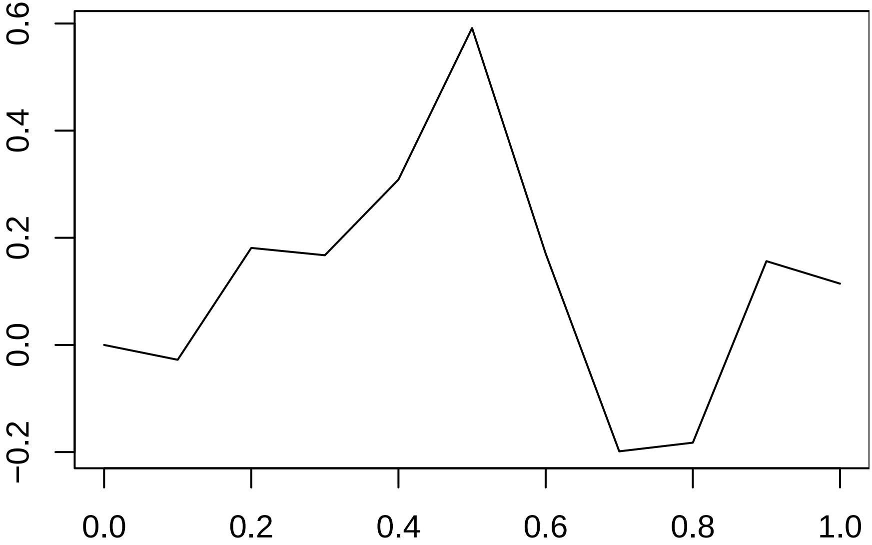
Tegu X_j, $1 \le j \le n$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai

$$\xi_n(t) = S_{[nt]} + (nt - [nt])X_{[nt]+1}, \quad t \in [0,1],$$

čia

$$S_k = X_1 + X_2 + \ldots + X_k, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Laužtė



Trajektorijų erdvės

- $C([0,1])$ – tolydžių funkcijų aibė su įprastine norma

$$\|x\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |x(t)|$$

Trajektorijų erdvės

- $H_\rho([0,1])$ – aibė tolydžių funkcijų tenkinančių $w(x,1) < \infty$, čia

$$w_\rho(x,\delta) = \sup_{|t-s|<\delta} \frac{|x(t)-x(s)|}{\rho(|t-s|)}.$$

su norma

$$\|x\|_\rho := \|x\|_\infty + w_\rho(x,1)$$

Trajektorijų erdvės

- $C([0,1])$ – tolydžių funkcijų aibė su įprastine norma

$$\|x\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |x(t)|$$

- $H_\rho([0,1])$ – aibė tolydžių funkcijų tenkinančių $w(x,1) < \infty$, čia

$$w_\rho(x,\delta) = \sup_{|t-s|<\delta} \frac{|x(t)-x(s)|}{\rho(|t-s|)}.$$

su norma

$$\|x\|_\rho := \|x\|_\infty + w_\rho(x,1)$$

Funkcinė centrinė ribinė teorema

Funkcinė centrinė ribinė teorema (FCRT) galioja, jei

$$n^{-1/2}\xi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} W, \text{ kai } n \to \infty,$$

erdvėje $C([0,1])$.

Funkcinė centrinė ribinė teorema

Funkcinė centrinė ribinė teorema (FCRT) galioja, jei

$$n^{-1/2}\xi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} W, \text{ kai } n \to \infty,$$

erdvėje $H_\rho([0,1])$.

FCRT-$C[0,1]$

- Erdvėje $C[0,1]$, Donskerio-Prochorovo invariantiškumo principas. Būtina ir pakankama sąlyga $EX_1^2 < \infty$
- Ribinis procesas Brauno judesys.

Perėjimas prie hiolderiškumo

- $H_\rho([0,1])$ – neseparabili. Nagrinėjamas poerdvis $H_\rho^o([0,1])$, funkcijų tenkinančių sąlygą

$$\lim_{\delta \to 0} w(x, \delta) = 0$$

- Brauno judesiui teisinga

$$\limsup_{\delta := |s-t| \downarrow 0} \frac{W(t) - W(s)}{(2\delta |\log \delta|)^{1/2}} = 1 \quad \text{b.v.}$$

FCRT-$H^o_\rho([0,1])$

- Erdvėje $H^o_\alpha([0,1])$, Lamperti (1962), pakankama sąlyga $E|X_1|^q < \infty$, $q > 1/(1/2-\alpha)$, $0 < \alpha < 1/2$.
- Erdvėje $H^o_\alpha([0,1])$, Račkauskas-Suquet. Būtina ir pakankama sąlyga

$$\lim_{t\to\infty} t^{1/(1/2-\alpha)} P(|X_1| > t) = 0$$

Bendresnė sumavimo proceso konstrukcija

- $(X_{\boldsymbol{j}}, \boldsymbol{j} \in \mathbb{N}^d)$ – nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai su nuliniu vidurkiu.
- $\boldsymbol{n} = (n_1, \ldots, n_d)$,

$$\xi_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{t}) = \sum_{\boldsymbol{j} \leq \boldsymbol{n}} |R_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{j}}|^{-1} |R_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{j}} \cap [0, t_1] \times \cdots \times [0, t_d]| X_{\boldsymbol{j}},$$

čia

$$R_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{j}} := [(j_1 - 1)/n_1, j_1/n_1] \times \cdots \times [(j_d - 1)/n_d, j_d/n_d].$$

Vienmatis atvejis

- $\boldsymbol{n} = (n)$, $R_{n,j} = [(j-1)/n, j/n]$

$$|R_{n,j} \cap [0,t]| = ((t - (j - 1/n)) \vee 0) \wedge 1/n$$

Vienmatis atvejis

- $\boldsymbol{n} = (n)$, $R_{n,j} = [(j-1)/n, j/n]$

$$|R_{n,j} \cap [0,t]| = ((t - (j - 1/n)) \vee 0) \wedge 1/n$$

-

$$\xi_n(t) = S_{[nt]} + n(t - [nt]/n) X_{[nt]+1}, \quad t \in [0,1]$$

Reikšmės gardelėje

- $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{i}/\boldsymbol{n} = (i_1/n_1, \dots, i_d/n_d)$

$$|R_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{j}} \cap [0, \boldsymbol{t}]| = \begin{cases} (n_1 \dots n_d)^{-1}, & \text{jei } \boldsymbol{j} \leq \boldsymbol{i}, \\ 0, & \text{kitais atvejais} \end{cases}$$

Reikšmės gardelėje

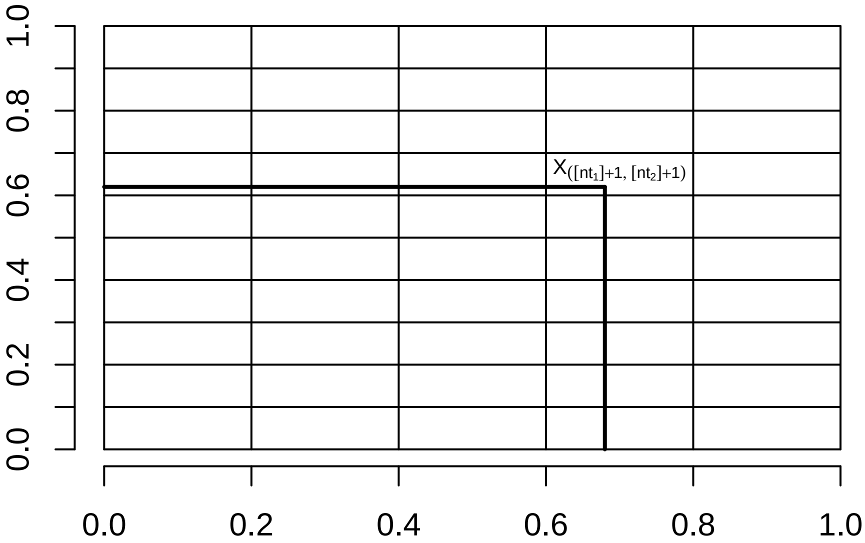
- $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{i}/\boldsymbol{n} = (i_1/n_1, \ldots, i_d/n_d)$

$$|R_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{j}} \cap [0, \boldsymbol{t}]| = \begin{cases} (n_1 \ldots n_d)^{-1}, & \text{jei } \boldsymbol{j} \le \boldsymbol{i}, \\ 0, & \text{kitais atvejais} \end{cases}$$

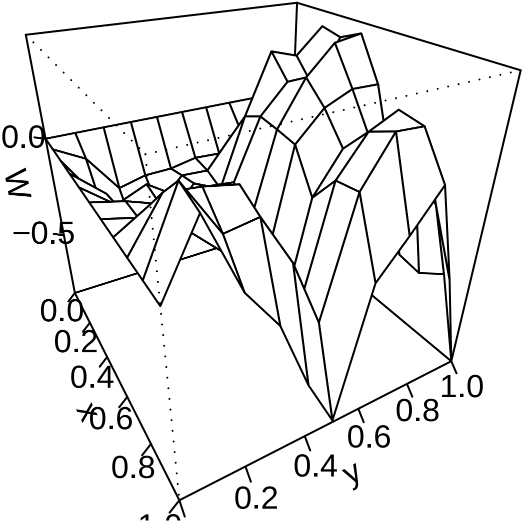
-

$$\xi_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{t}) = \sum_{\boldsymbol{j} \le \boldsymbol{n}} |R_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{j}}|^{-1} |R_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{j}} \cap [0, \boldsymbol{t}]| X_{\boldsymbol{j}} = \sum_{\boldsymbol{j} \le \boldsymbol{i}} X_{\boldsymbol{j}} = S_{[\boldsymbol{n}\boldsymbol{t}]}$$

Dvimatis atvejis $A = [0, t_1] \times [0, t_2]$



Dvimatis atvejis $A = [0, t_1] \times [0, t_2]$



Funkcinė centrinė ribinė teorema

Funkcinė centrinė ribinė teorema (FCRT) galioja, jei

$$(n_1 \cdots n_d)^{-1/2} \xi_{\boldsymbol{n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} W, \text{ kai } m(\boldsymbol{n}) \to \infty.$$

erdvėje $C([0,1]^d)$, čia $m(\boldsymbol{n}) := n_1 \wedge \ldots \wedge n_d$.

Funkcinė centrinė ribinė teorema (FCRT) galioja, jei

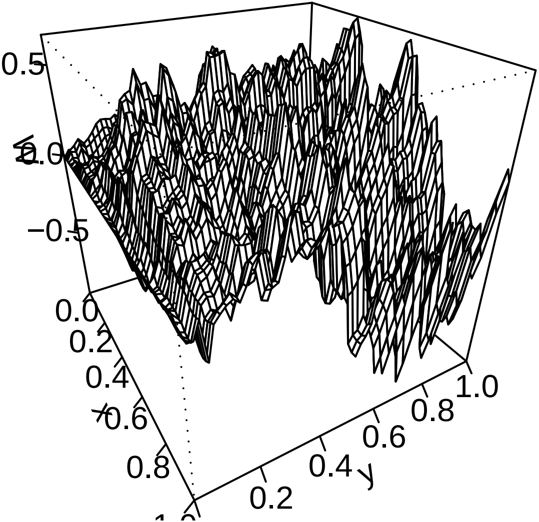
$$(n_1 \cdots n_d)^{-1/2}\xi_{\boldsymbol{n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} W, \text{ kai } m(\boldsymbol{n}) \to \infty.$$

erdvėje $H_\alpha^o([0,1]^d)$, čia $m(\boldsymbol{n}) := n_1 \wedge \ldots \wedge n_d$.

Ribinis procesas

- W – Vynerio paklodė (sheet). $W(\boldsymbol{t})$ – normalusis su $EW(\boldsymbol{t}) = 0$ ir $EW(\boldsymbol{t})W(\boldsymbol{s}) = (t_1 \wedge s_1) \dots (t_d \wedge s_d)$, $\boldsymbol{t}, \boldsymbol{s} \in [0, 1]^d$.
- Kai $d = 1$ įprastas Brauno judesys.

Vynerio paklodės trajektorija



Hiolderio erdvė atveju $[0,1]^d$

- $H_\rho([0,1]^d)$ – aibė tolydžių funkcijų tenkinančių $w(x,1) < \infty$, čia

$$w_\rho(x,\delta) = \sup_{|\boldsymbol{t}-\boldsymbol{s}|<\delta} \frac{|x(\boldsymbol{t}) - x(\boldsymbol{s})|}{\rho(|\boldsymbol{t}-\boldsymbol{s}|)},$$

čia $|\boldsymbol{t}| = |t_1 \vee \cdots \vee t_d|$, su norma

$$\|x\|_\rho := \|x\|_\infty + w_\rho(x,1)$$

FCRT-$H_\alpha^o([0,1]^d)$

Erickson (1983). FCRT galioja erdvėje $H_\alpha([0,1]^d, \mathbb{R})$, jei $E|X|^q < \infty$, kai $q > \frac{d}{1/2-\alpha}$, $0 < \alpha < 1/2$.

Motyvacija

- Apibendrinti Račkausko-Suquet rezultatus

Motyvacija

- Apibendrinti Račkausko-Suquet rezultatus
  - FCRT-$H_\alpha^o([0,1]^d, \mathbb{R})$

Motyvacija

- Apibendrinti Račkausko-Suquet rezultatus
  - FCRT-$H^o_\alpha([0,1]^d, \mathbb{R})$
  - FCRT-$H^o_\alpha([0,1]^d, \mathbb{H})$

Motyvacija

- Apibendrinti Račkausko-Suquet rezultatus
  - FCRT-$H_{\alpha}^{o}([0,1]^d, \mathbb{R})$
  - FCRT-$H_{\alpha}^{o}([0,1]^d, \mathbb{H})$
- Rasti būtinas ir pakankamas sąlygas FCRT.

Ankstesni rezultatai

- FCRT-$H_\alpha^o([0,1]^2, \mathbb{R})$

Ankstesni rezultatai

- FCRT-$H_\alpha^o([0,1]^2, \mathbb{R})$
  - Magistrinis darbas (2004)

Ankstesni rezultatai

- FCRT-$H_\alpha^o([0,1]^2, \mathbb{R})$
  - Magistrinis darbas (2004)
  - Pranešimas LMD konferencijoje(2004)

Ankstesni rezultatai

- FCRT-$H_\alpha^o([0,1]^2, \mathbb{R})$
  - Magistrinis darbas (2004)
  - Pranešimas LMD konferencijoje(2004)
  - Straipsnis LMR (2005)

Ankstesni rezultatai

- FCRT-$H_\alpha^o([0,1]^2,\mathbb{R})$
    - Magistrinis darbas (2004)
    - Pranešimas LMD konferencijoje(2004)
    - Straipsnis LMR (2005)
    - Pranešimas SPRF konferencijoje (2006)

Ankstesni rezultatai

- FCRT-$H^o_\alpha([0,1]^2,\mathbb{R})$
  - Magistrinis darbas (2004)
  - Pranešimas LMD konferencijoje(2004)
  - Straipsnis LMR (2005)
  - Pranešimas SPRF konferencijoje (2006)
- FCRT-$H^o_\alpha([0,1]^d,\mathbb{R}$, pranešimas LMD konferencijoje (2005).

Paskelbtas rezultatas

$$(n_1 n_2)^{-1/2}\xi_{\boldsymbol{n}} \xrightarrow[n_1\wedge n_2\to\infty]{\mathcal{D}} W \text{ erdvėje } H_\alpha^o\big([0,1]^2\big),$$

tada ir tik tada, kai

$$n_1 n_2 \mathbf{P}\big(|X_{\mathbf{1}}| > n_1^{1/p} n_2^{1/2}\big) \to 0, \text{ kai } n_1 \wedge n_2 \to \infty,$$

čia $p = 1/(1/2-\alpha)$.

Perėjimas prie dvimačio atvejo

- Vienmatis atvejis, $1/p = 1/2 - \alpha$

$$\lim_{n\to\infty} n\mathbf{P}(|X_1| > n^{1/p}) = 0$$

Perėjimas prie dvimačio atvejo

- Vienmatis atvejis, $1/p = 1/2 - \alpha$

$$\lim_{n\to\infty} n\mathbf{P}(|X_1| > n^{1/p}) = 0$$

- Dvimatis atvejis, $1/p = 1/2 - \alpha$

$$\lim_{n_1\wedge n_2\to\infty} n_1 n_2 \mathbf{P}(|X_1| > n_1^{1/p} n_2^{1/2}) = 0$$

Būtinumas

Turime

$$X_{\boldsymbol{k}} = (S_{(k_1,k_2)} - S_{(k_1-1,k_2)}) - (S_{(k_1,k_2-1)} - S_{(k_1-1,k_2-1)}),$$

todėl

$$\begin{aligned} & P(n_1^{-1/p} n_2^{-1/2} \max_{\boldsymbol{1} \le \boldsymbol{k} \le \boldsymbol{n}} |X_{\boldsymbol{k}}| > t) \\ \le\ & P\Big(2(n_1 n_2)^{1/2} \max_{|\frac{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{l}}{\boldsymbol{n}}| = |\frac{1}{\boldsymbol{n}}|} \frac{|S_{\boldsymbol{k}} - S_{\boldsymbol{l}}|}{|(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{l})/\boldsymbol{n}|^{\alpha}} > t\Big) \\ \le\ & P(w_\alpha((n_1 n_2)^{1/2} \xi_{\boldsymbol{n}}, \delta) > t/2) \end{aligned}$$

Naujas rezultatas

Teiginys

$$(n_1 \dots n_d)^{-1/2} \xi_{\boldsymbol{n}} \xrightarrow[m(\boldsymbol{n})\to\infty]{\mathcal{D}} W \text{ erdvėje } H_\alpha^o([0,1]^d),$$

tada ir tik tada, kai

$$n_1 \dots n_d \mathbf{P}\left(|X_{\mathbf{1}}| > n_1^{1/p} n_2^{1/2} \dots n_d^{1/2}\right) \to 0, \text{ kai } m(\boldsymbol{n}) \to \infty.$$

, čia $m(\boldsymbol{n}) = n_1 \wedge \dots \wedge n_d$, $p = 1/(1/2 - \alpha)$.

Fiksuotos trajektorijos

- Fiksuotai trajektorijai $\boldsymbol{n} = (n, \ldots, n)$ gauname sąlygą:

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{d}{d/2-\alpha}} \mathbf{P}(|X_{\mathbf{1}}| \geq t) = 0,$$

- Trajektorijai $n_1^{1/p} = n_2^{1/2}$ gauname sąlygą:

$$\lim_{t\to\infty} t^{1+p/2} \mathbf{P}(|X_{\mathbf{1}}| \geq t) = 0,$$

Ekvivalenti sąlyga

Sąlyga

$$n_1 \dots n_d \mathbf{P}\big(|X_{\mathbf{1}}| > n_1^{1/p} n_2^{1/2} \dots n_d^{1/2}\big) \to 0, \text{ kai } m(\boldsymbol{n}) \to \infty.$$

yra ekvivalenti sąlygai

$$\sup_{t>0} t^p \mathbf{P}(|X_{\mathbf{1}}| > t) < \infty$$

kai $d > 1$.

Palyginimas

$p = 1/(1/2 - \alpha)$

- Ericksono sąlyga: $E|X_1|^q < \infty$, when $q > d/(1/2 - \alpha)$.

Palyginimas

$p = 1/(1/2 - \alpha)$

- Ericksono sąlyga: $E|X_1|^q < \infty$, when $q > d/(1/2 - \alpha)$.
- Račkausko ir Suquet sąlyga ($d = 1$): $\lim t^p \mathbf{P}(|X_\mathbf{1}| > t) = 0$

Palyginimas

$p = 1/(1/2 - \alpha)$

- Ericksono sąlyga: $E|X_1|^q < \infty$, when $q > d/(1/2 - \alpha)$.
- Račkausko ir Suquet sąlyga $(d = 1)$: $\lim t^p \mathbf{P}(|X_\mathbf{1}| > t) = 0$
- Ekvivalenčios sąlygos

$$\lim_{m(\boldsymbol{n})\to\infty} n_1 \dots n_d P(|X_\mathbf{1}| > n_1^{1/p} n_2^{1/2} \dots n_d^{1/2}) = 0$$

ir

$$\sup_{t>0} t^p P(|X_\mathbf{1}| > t) < \infty \quad (d > 1)$$

Palyginimas

$p = 1/(1/2 - \alpha)$

- Ericksono sąlyga: $E|X_1|^q < \infty$, when $q > d/(1/2 - \alpha)$.

- Ekvivalenčios sąlygos

$$\lim_{m(\mathbf{n})\to\infty} n_1 \dots n_d P(|X_{\mathbf{1}}| > n_1^{1/p} n_2^{1/2} \dots n_d^{1/2}) = 0$$

ir

$$\sup_{t>0} t^p P(|X_{\mathbf{1}}| > t) < \infty \quad (d > 1)$$

1. Reikia d „mažiau“ momentų.

Palyginimas

$p = 1/(1/2 - \alpha)$

- Račkausko ir Suquet sąlyga ($d = 1$): $\lim t^p \mathbf{P}(|X_{\mathbf{1}}| > t) = 0$
- Ekvivalenčios sąlygos

$$\lim_{m(\boldsymbol{n})\to\infty} n_1 \ldots n_d P(|X_{\mathbf{1}}| > n_1^{1/p} n_2^{1/2} \ldots n_d^{1/2}) = 0$$

ir

$$\sup_{t>0} t^p P(|X_{\mathbf{1}}| > t) < \infty \quad (d > 1)$$

2. Užtenka silpno momento.

Palyginimas

$p = 1/(1/2 - \alpha)$

- Ericksono sąlyga: $E|X_1|^q < \infty$, when $q > d/(1/2 - \alpha)$.
- Račkausko ir Suquet sąlyga ($d = 1$): $\lim t^p \mathbf{P}(|X_\mathbf{1}| > t) = 0$
- Ekvivalenčios sąlygos

$$\lim_{m(\boldsymbol{n})\to\infty} n_1 \dots n_d P(|X_\mathbf{1}| > n_1^{1/p} n_2^{1/2} \dots n_d^{1/2}) = 0$$

ir

$$\sup_{t>0} t^p P(|X_\mathbf{1}| > t) < \infty \quad (d > 1)$$

1. Reikia d „mažiau“ momentų.
2. Užtenka silpno momento.

Bendriausia sumavimo proceso konstrukcija

- $(X_{\boldsymbol{j}},\ \boldsymbol{j} \in \mathbb{N}^d)$ – nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai su nuliniu vidurkiu.
- $\boldsymbol{n} = (n_1, \dots, n_d)$, A – $[0,1]^d$ Borelio poaibis

$$\xi_{\boldsymbol{n}}(A) = \sum_{\boldsymbol{j} \leq \boldsymbol{n}} |R_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{j}}|^{-1} |R_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{j}} \cap A| X_{\boldsymbol{j}},$$

čia

$$R_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{j}} := [(j_1 - 1)/n_1, j_1/n_1] \times \cdots \times [(j_d - 1)/n_d, j_d/n_d].$$

Aibių kolekcijų pavyzdžiai

- $\mathcal{A} = \{[0, \boldsymbol{t}] = [0, t_1] \times \cdots \times [0, t_d], \boldsymbol{t} \in [0, 1]^d\}$
- $[0, 1]^d$ iškilieji poaibiai
- Vapnik-Červonenkis klasės

Funkcinė centrinė ribinė teorema (FCRT) galioja, jei

$$(n_1 \cdots n_d)^{-1/2} \xi_{\boldsymbol{n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} W, \text{ kai } m(\boldsymbol{n}) \to \infty.$$

tam tikroje trajektorijų erdvėje, čia $m(\boldsymbol{n}) := n_1 \wedge \ldots \wedge n_d$.

Trajektorijų erdvės

(T, d) – parametrų aibė, $(B, \|\|)$ – reikšmių aibė.

Trajektorijų erdvės

(T, d) – parametrų aibė, $(B, \|\|)$ – reikšmių aibė.

- $C(T, B)$ – tolydžių funkcijų aibė su įprastine norma

$$\|x\|_\infty = \sup_{t \in T} \|x\|$$

(T, d) – parametrų aibė, $(B, \|\|)$ – reikšmių aibė.

- $H_\rho(T, B)$ – aibė tolydžių funkcijų tenkinančių $w(x, 1) < \infty$, čia

$$w_\rho(x, \delta) = \sup_{t,s \in T, d(t,s) < \delta} \frac{\|x(t) - x(s)\|}{\rho(d(t, s))}.$$

su norma

$$\|x\|_\rho := \|x\|_\infty + w_\rho(x, 1)$$

Trajektorijų erdvės

(T, d) – parametrų aibė, $(B, \|\|)$ – reikšmių aibė.

- $C(T, B)$ – tolydžių funkcijų aibė su įprastine norma

$$\|x\|_\infty = \sup_{t \in T} \|x\|$$

- $H_\rho(T, B)$ – aibė tolydžių funkcijų tenkinančių $w(x, 1) < \infty$, čia

$$w_\rho(x, \delta) = \sup_{t,s \in T, d(t,s) < \delta} \frac{\|x(t) - x(s)\|}{\rho(d(t, s))}.$$

su norma

$$\|x\|_\rho := \|x\|_\infty + w_\rho(x, 1)$$

Ribinis procesas

- W – Vynerio paklodė (sheet). $W(A)$ – normalusis su $EW(A) = 0$ ir $EW(A)W(B) = |A \cap B|$, Borelio aibėms $A, B \subset [0,1]^d$.
- Imant $A = [0,t] \subset [0,1]$ įprastas Brauno judesys

$\{X(t), t \in T\}$ - normalusis procesas. $d(t,s) = \sqrt{E|X(t) - X(s)|^2}$

Teiginys

Dudley (1973). Tegu $N(\varepsilon)$ yra mažiausias n toks, kad egzistuoja aibės $A_1, \ldots, A_n \subset T$, tokios, kad $T \subset \cup_1^n A_k$ ir diam $A_k \leq 2\varepsilon$ *visiems k. Tegu*

$$f(u) := \int_0^u (log(N(v)))^{1/2} dv < \infty, \quad u \in [0,1]$$

Tada $X(t)$ turi modifikacijas $C(T, \mathbb{R})$ ir $H_f(T, \mathbb{R})$ erdvėse.

Vynerio paklodės trajektorijų savybės

- Parametrų aibė $(\mathcal{A} \subset \mathcal{B}([0,1]^d), d)$ su

$$d(A,B) = \sqrt{|A \Delta B|} = \sqrt{E(W(A) - W(B))^2}$$

- Remiantis Dudley teorema, $W \in C(\mathcal{A}, \mathbb{R})$ ir $W \in H_f(\mathcal{A}, \mathbb{R})$.

FCRT tolydžių funkcijų erdvėje

FCRT-$C(\mathcal{A}, \mathbb{R})$. Bass (1985), Pyke (1986), pakankama sąlyga $EX_1^2 < \infty$ ir

$$\int_0^1 \log(N_I(\varepsilon, \mathcal{A}, \delta) d\varepsilon < \infty$$

čia $N_I(\varepsilon, \mathcal{A}, \delta)$ - metrinė entropija su įdėjimu.

Hiolderiškos trajektorijos

- Jei T - visiškai aprėžta, $H_\rho(T, \mathbb{R})$ yra σ-kompaktiška separabili tiesinė erdvė su norma $\|x\|_g$, kai $\rho = o(g)$.

Hiolderiškos trajektorijos

- Jei T - visiškai aprėžta, $H_\rho(T, \mathbb{R})$ yra σ-kompaktiška separabili tiesinė erdvė su norma $\|x\|_g$, kai $\rho = o(g)$.
- Erickson (1981). Tegu $E|X_1|^p < \infty$, $r_1(\mathcal{A}) \leq r$, ir $q := p/2 - r > 0$.

Tada FCRT erdvėje $H_\rho(\mathcal{A}, \mathbb{R})$ su norma $\|x\|_f$, $\rho = o(f)$ galioja su $\rho(h)^p = h^q |\log h| |\log \log h|^\beta$, kiekvienam $\beta > 1$.

Hiolderiškos trajektorijos

- Imant $\mathcal{A} := \{[0, t_1] \times \cdots \times [0, t_d], (t_1, \ldots, t_d) \in [0, 1]^d\}$, pakankama sąlyga supaprastėja:

FCRT galioja erdvėje $H_\alpha([0,1]^d, \mathbb{R})$, jei $E|X|^q < \infty$, kai $q > \frac{d}{1/2-\alpha}$, $0 < \alpha < 1/2$.

Rezultatai vektoriniams a.d.

- Kuelbs (1973). $C([0,1],B)$ – būtina ir pakankama sąlyga $X_1 \in CRT(B)$.
- Račkauskas ir Suquet (2003). $H^o_\rho([0,1],B)$ – būtina ir pakankama sąlyga $X_1 \in CRT(B)$ ir kiekvienam $A > 0$

$$\lim_{t\to\infty} tP(\|X_1\| > A\theta(t)) = 0,$$

čia $\theta(t) = t^{1/2}\rho(1/t)$.

Separabilumas, kai $T = [0,1]^d$

$H^o_\rho([0,1]^d)$ – erdvės $H_\rho([0,1]^d)$ poerdvis, kurio elementams galioja

$$\lim_{\delta\to\infty} w_\rho(x,\delta) = 0$$

Teiginys

Račkauskas-Suquet (2000). Su $\rho = h^\alpha \log^\beta(c/h)$, erdvė $H^o_\rho([0,1]^d, B)$ yra separabili Banacho erdvė, kuriai egzistuoja Schauder išdėstymas.

Tirštumo kriterijus

Teiginys

Tegu $\{\phi_{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^d\}$ *ir* ϕ *yra atsitiktiniai elementai su reikšmėmis erdvėje* $H_\alpha^o(\mathbb{H})$. *Tarkime yra tenkinamos sąlygos.*

i) *Kiekvienam diadiniam* $\boldsymbol{t} \in [0,1]^d$, *atsitiktinių* $\mathbb{H}$-*elementų apibendrinta seka* $\phi_{\boldsymbol{n}}(t)$ *yra asimptotiškai tiršta erdvėje* $\mathbb{H}$.

ii) *Kiekvienam* $\varepsilon > 0$

$$\lim_{J\to\infty} \limsup_{\boldsymbol{n}\to\infty} P(\sup_{j\geq J} 2^{\alpha j} \max_{\boldsymbol{v}\in V_j} |\lambda_{j,\boldsymbol{v}}(\phi_{\boldsymbol{n}})| > \varepsilon) = 0.$$

Tada apibendrinta seka $\phi_{\boldsymbol{n}}$ *yra asimptotiškai tiršta erdvėje* $H_\alpha^o(\mathbb{H})$.

Vynerio paklodė

Vynerio procesas su reikšmėmis Hilberto erdvėje $\mathbb{H}$ ir kovariacijos operatoriumi S yra Gausinis nulinio vidurkio $\mathbb{H}$ procesas tenkinantis

$$E\langle W(\boldsymbol{t}), x\rangle\langle W(\boldsymbol{s}), y\rangle = (t_1 \wedge s_1)\dots(t_d \wedge s_d)\langle Sx, y\rangle$$

kiekvienam $\boldsymbol{t}, \boldsymbol{s} \in [0,1]^d$ ir $x, y \in \mathbb{H}$.
Remiantis Račkausko ir Suquet rezultatais $W(\boldsymbol{t})$ turi versiją $H^o_\alpha(\mathbb{H})$.

Pagrindinis rezultatas

Teiginys

Tegu $X_{\boldsymbol{j}}$, $\boldsymbol{j} \leq \boldsymbol{n}$ *yra vienodai pasisikirstę atsitiktiniai dydžiai su reikšmėmis erdvėje* $\mathbb{H}$.

$$(n_1 \dots n_d)^{-1/2} \xi_{\boldsymbol{n}} \xrightarrow[m(\boldsymbol{n}) \to \infty]{\mathcal{D}} W \text{ erdvėje } H^o_\alpha(\mathbb{H}),$$

tada ir tik tada, kai

$$n_1 \dots n_d \mathbf{P}\big(\|X_{\mathbf{1}}\| > n_1^{1/p} n_2^{1/2} \dots n_d^{1/2}\big) \to 0, \text{ kai } m(\boldsymbol{n}) \to \infty.$$

, *čia* $m(\boldsymbol{n}) = n_1 \wedge \dots \wedge n_d$.