Funkcinė centrinė ribinė teorema autonormuotiems dvimačio indekso sumavimo procesams

Vaidotas Zemlys

Vilniaus Universitetas

Universite des Sciences et Technologies de Lille

2006 birželio 21

Sumavimo procesas vienmačiu atveju

Tegu X_j, $1 \leq j \leq n$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai

$$\xi_n(t) = S_{[nt]} + (nt - [nt])X_{[nt]+1}, \quad t \in [0,1],$$

čia

$$S_k = X_1 + X_2 + \ldots + X_k, \quad k = 1, 2, \ldots$$

FCRT autonormuotam procesui vienmačiu atveju

- Račkauskas ir Suquet (2001)

$$V_n^{-1}\xi_n \xrightarrow{D} W$$

  erdvėje $C[0,1]$ tada ir tik tada, kai $X_1 \in DAN$.
- $V_n^2 = X_1^2 + \cdots + V_n^2$

Dvimatis atvejis

$$\begin{aligned}\xi_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{t}) = & S_{([n_1 t_1],\ [n_2 t_2])} + \\ & + (n_1 t_1 - [n_1 t_1]) S^{(2)}_{([n_1 t_1]+1, [n_2 t_2])} \\ & + (n_2 t_2 - [n_2 t_2]) S^{(1)}_{([n_1 t_1], [n_2 t_2]+1)} \\ & + (n_1 t_1 - [n_1 t_1])(n_2 t_2 - [n_2 t_2]) X_{([n_1 t_1]+1, [n_2 t_2]+1)},\end{aligned}$$

čia

$$S_{(k,\ m)} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} X_{(i,\ j)}, \quad S^{(1)}_{(k,\ m)} = \sum_{j=1}^{m} X_{(k,\ j)}, \quad S^{(2)}_{(k,\ m)} = \sum_{i=1}^{k} X_{(i,\ m)}.$$

Pagrindinis klausimas

- Autonormavimas analogiškas: $V_{\boldsymbol{n}}^2 = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} X_{(i,j)}^2$

Pagrindinis klausimas

- Autonormavimas analogiškas: $V_{\boldsymbol{n}}^2 = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} X_{(i,j)}^2$
- Ar teisinga

$$V_{\boldsymbol{n}}^{-1} \xi_{\boldsymbol{n}} \xrightarrow{D} W \text{ kai } \min(n_1, n_2) \to \infty$$

erdvėje $C[0,1]^2$, tada ir tik tada, kai $X_1 \in DAN$?

Pagrindinis klausimas

- Autonormavimas analogiškas: $V_{\boldsymbol{n}}^2 = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} X_{(i,j)}^2$
- Ar teisinga

$$V_{\boldsymbol{n}}^{-1}\xi_{\boldsymbol{n}} \xrightarrow{D} W \text{ kai } \min(n_1, n_2) \to \infty$$

erdvėje $C[0,1]^2$, tada ir tik tada, kai $X_1 \in DAN$?

- W – Vynerio paklodė, gausinis procesas su $EW(\boldsymbol{t}) = 0$ ir $EW(\boldsymbol{t})W(\boldsymbol{s}) = (t_1 \wedge s_1)(t_2 \wedge s_2)$.

Daugiamačio indekso sumavimo procesas

- $(X_{\boldsymbol{j}}, \boldsymbol{j} \in \mathbb{N}^d)$ – nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai su nuliniu vidurkiu.
- $A \in \mathcal{A} \subset \mathcal{B}([0,1]^d)$
- $\boldsymbol{n} = (n_1, \dots, n_d)$,

$$\xi_{\boldsymbol{n}}(A) = \sum_{\boldsymbol{j} \le \boldsymbol{n}} |R_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{j}}|^{-1} |R_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{j}} \cap A| X_{\boldsymbol{j}},$$

čia

$$R_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{j}} := [(j_1 - 1)/n_1, j_1/n_1] \times \cdots \times [(j_d - 1)/n_d, j_d/n_d].$$

El Machkouri ir Ouchti rezultatas

- Seka $\{V^{-1}_{(n,\dots,n)}\xi_{(n,\dots,n)}(A), A\in\mathcal{A}\}$ silpnai konverguoja erdvėje $C(\mathcal{A})$ tada ir tik tada, kai $X_{\mathbf{1}}\in DAN$.

El Machkouri ir Ouchti rezultatas

- Seka $\{V^{-1}_{(n,\dots,n)}\xi_{(n,\dots,n)}(A), A \in \mathcal{A}\}$ silpnai konverguoja erdvėje $C(\mathcal{A})$ tada ir tik tada, kai $X_{\mathbf{1}} \in DAN$.
- $d(A,B) = \sqrt{|A\Delta B|}$, $A, B \in \mathcal{A}$.
- $\mathcal{A}$ turi tenkinti entropijos sąlygas.

FCRT

$X_{\mathbf{1}} \in DAN$ tada ir tik tada, jei

$$V_{\boldsymbol{n}}^{-1}\xi_{\boldsymbol{n}} \xrightarrow{D} W \text{ kai } \min(n_1, n_2) \to \infty$$

erdvėje $C[0,1]^2$

Baigtiniamačių pasiskirstymų konvergavimas

- $\{W(A), A \in \mathcal{A}\}$ - Vynerio paklodė. Gausinis procesas su $EW(A) = 0$ ir $EW(A)W(B) = |A \cap B|$.
- Proceso $\{V_{\boldsymbol{n}}^{-1}\xi_{\boldsymbol{n}}(A), A \in \mathcal{A}\}$ baigtiniamačiai pasiskirstymai konverguoja į $W(A)$ baigtiniamačius pasiskirstymus, kai $\min(n_1, \dots, n_d) \to \infty$
- A turi tenkinti $|\partial A| = 0$.

Pagalbiniai teiginiai

- Raikovo teorema:

$$b_{\boldsymbol{n}}^{-2} V_{\boldsymbol{n}}^2 \xrightarrow{P} 1$$

- Araujo ir Gine (1980) kiekvienam $\tau > 0$

$$p(\boldsymbol{n}) P(|X_{\boldsymbol{1}}| > \tau b_{\boldsymbol{n}}) \to 0$$
$$\frac{p(\boldsymbol{n})}{b_{\boldsymbol{n}}^2} E X_{\boldsymbol{1}}^2 I(|X_{\boldsymbol{1}}| \leq \tau b_{\boldsymbol{n}}) \to 1$$
$$p(\boldsymbol{n}) E X_{\boldsymbol{1}} I(|X_{\boldsymbol{1}}| \leq \tau b_{\boldsymbol{n}}) \to 0$$

- Giné, Götze ir Mason (1997)

$$E\left(\frac{X_1}{V_n}\right)^4 = o(n^{-1})$$