Funkcinė ribinė teorema d-mačio indekso sumavimo procesams

Vaidotas Zemlys

Matematikos ir Informatikos Fakultetas, Ekonometrinės analizės katedra
Vaidotas.Zemlys@maf.vu.lt

2005 m. birželio 15 d.

Sumavimo procesas

- $(X_{\boldsymbol{j}}, \boldsymbol{j} \in \mathbb{N}^d)$ – v. p. r. a. d. su nuliniu vidurkiu.
- $\boldsymbol{n} = (n_1, \ldots, n_d)$, $\boldsymbol{t} = (t_1, \ldots, t_d) \in [0, 1]^d$

$$\xi_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{t}) = \sum_{\boldsymbol{j} \leq \boldsymbol{n}} |R_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{j}}|^{-1} |R_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{j}} \cap [0, t_1] \times \cdots \times [0, t_d]| X_{\boldsymbol{j}},$$

čia

$$R_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{j}} := [(j_1 - 1)/n_1, j_1/ni_1] \times \cdots \times [(j_d - 1)/n_d, j_d/n_d].$$

Funkcinė ribinė teorema

Kada

$$(n_1 \cdots n_d)^{-1/2} \xi_{\boldsymbol{n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} W_d, \text{ kai } \boldsymbol{n} \to \infty?$$

Čia $\boldsymbol{n} \to \infty$ reiškia, kad $n_1 \wedge \ldots \wedge n_d \to \infty$, o W_d – Vynerio paklodė tenkinanti sąlygas:

- $W_d(\boldsymbol{t}) = 0$, jei nors vienas $t_i = 0$.
- $W_d(\boldsymbol{t}) \sim N(0, t_1 \cdots t_d)$, $\boldsymbol{t} = (t_1, \ldots, t_d)$.
- $\mathbf{E} W_d(\boldsymbol{t}) W_d(\boldsymbol{s}) = (t_1 \wedge s_1) \cdots (t_d \wedge s_d)$.

Hiolderio erdvės

- Tegu $0 < \alpha \leq 1$, $H^o_\alpha\big([0,1]^d\big)$ yra aibė tokių realių tolydžių funkcijų $x : [0,1]^d \to \mathbb{R}$, kurioms $\lim_{\delta \to 0} w_\alpha(x, \delta) = 0$, čia

$$w_\alpha(x, \delta) = \sup_{\boldsymbol{t}, \boldsymbol{s} \in [0,1]^d, 0 < |\boldsymbol{t} - \boldsymbol{s}| < \delta} \frac{|x(\boldsymbol{t}) - x(\boldsymbol{s})|}{|\boldsymbol{t} - \boldsymbol{s}|^\alpha}.$$

- Separabili Banacho erdvė su norma

$$\|x\|_\alpha = |x(0)| + w_\alpha(x, 1).$$

Sumavimo procesas

Įprastinis laužčių procesas

$$\xi_n(t) = S_{[nt]} + (nt - [nt])X_{[nt]+1}, \quad t \in [0, 1],$$

čia

$$S_k = X_1 + X_2 + \ldots + X_k, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Rezultatai

- Donskerio-Prochorovo teorema. Konvergavimas erdvėje $C([0,1])$. Būtina ir pakankama sąlyga $EX_1^2 < \infty$.
- Lamperti (1962) įrodė konvergavimą erdvėje $H_\alpha^o([0,1])$. Pakankama sąlyga:
$$\mathbf{E}|X_1|^p < \infty,$$
čia $p > 1/(1/2-\alpha)$ ir $0 < \alpha < 1/2$.
- Račkauskas ir Suquet (2001) papildė Lamperti rezultatą įrodydami būtiną ir pakankamą sąlygą:

$$\lim_{t\to\infty} t^p \mathbf{P}(|X_1| \geq t) = 0 \ su \ p = \frac{1}{1/2-\alpha}.$$

Sumavimo procesas

$$
\begin{aligned}
\xi_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{t}) = & S_{([n_1 t_1],\ [n_2 t_2])} + \\
& + (n_1 t_1 - [n_1 t_1]) S^{(2)}_{([n_1 t_1]+1, [n_2 t_2])} \\
& + (n_2 t_2 - [n_2 t_2]) S^{(1)}_{([n_1 t_1], [n_2 t_2]+1)} \\
& + (n_1 t_1 - [n_1 t_1])(n_2 t_2 - [n_2 t_2]) X_{([n_1 t_1]+1, [n_2 t_2]+1)},
\end{aligned}
$$

čia

$$
S_{(k,\ m)} = \sum_{j=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} X_{(i,\ j)}, \quad S^{(1)}_{(k,\ m)} = \sum_{j=1}^{m} X_{(k,\ j)}, \quad S^{(2)}_{(k,\ m)} = \sum_{i=1}^{k} X_{(i,\ m)}.
$$

- Račkauskas ir Zemlys (2004) apibendrino Račkausko ir Suquet rezultatą, įrodydami būtiną ir pakankamą sąlygą:

$$t_1 t_2 \mathbf{P}(|X_1| \geq t_1^{1/p} t_2^{1/2}) \to 0, \; \textit{kai } t_1 \wedge t_2 \to \infty, \; \textit{su } p = \frac{1}{1/2 - \alpha}.$$

Daugiamatis atvejis

- Erickson (1981) įrodė konvergavimą erdvėje $H_\alpha^o([0,1]^d)$. Pakankama sąlyga:

$$\mathbf{E}|X_1|^q < \infty,$$

kai $q > d/(1/2 - \alpha)$.

Teiginys

$$(n_1 \dots n_d)^{-1/2} \xi_{\boldsymbol{n}} \xrightarrow[n_1 \wedge \cdots \wedge n_d \to \infty]{\mathcal{D}} W_d \text{ erdvėje } H^o_\alpha\left([0,1]^d\right),$$

tada ir tik tada, jei

$$t_1 \dots t_d \mathbf{P}\left(|X_{\mathbf{1}}| > t_1^{1/p} t_2^{1/2} \dots t_d^{1/2}\right) \to 0, \text{ kai } t_1 \wedge \cdots \wedge t_d \to \infty.$$

Rezultatų palyginimas

Sena sąlyga: $\mathbf{E}|X_1|^q < \infty$, kai $q > d/(1/2-\alpha)$.
Nauja sąlyga:
$t_1 \dots t_d \mathbf{P}\big(|X_{\mathbf{1}}| > t_1^{1/p} t_2^{1/2} \dots t_d^{1/2}\big) \to 0$, kai $t_1 \wedge \dots \wedge t_d \to \infty$.

- Pagerintas Erickson rezultatas d-mačiam atvejui. "Reikia" d kartų mažiau momentų.

$$\lim_{t\to\infty} t^p \mathbf{P}(|X_{\mathbf{1}}| \geq t) = 0.$$

- Einant fiksuotais keliais: $n_1 = \dots = n_d = n$, užtenka vis mažiau momentų.

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{d}{1/p+(d-1)/2}} \mathbf{P}(|X_{\mathbf{1}}| \geq t) = 0.$$

Konvergavimo kriterijus

- $(\xi_{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^d)$ apibendrinta seka su sąryšiu $\boldsymbol{j} \leq \boldsymbol{n} \Leftrightarrow j_i \leq n_i$, $i = 1, \ldots, d$.
- Prochorovo teorema. Asimptotiškai tiršta apibendrinta matų seka yra reliatyviai kompaktiška.
- Kompakto erdvėse $H^o_\alpha\big([0,1]^d\big)$ charakterizavimas.

Tegu $\{\zeta_{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^d\}$ yra atsitiktinių erdvės $H_\alpha^o([0,1]^d)$ elementų apibendrinta seka tenkinanti šias sąlygas:

1. Baigtiniamačiai $\zeta_{\boldsymbol{n}}$ skirstiniai silpnai konverguoja į kokio nors erdvės $H_\alpha^o([0,1]^d)$ atsitiktinio elemento ζ baigtiniamačius skirstinius, kai $n_1 \wedge \cdots \wedge n_d \to \infty$.
2. $\lim_{a\to\infty} \sup_{\boldsymbol{n}} P(\sup_{\boldsymbol{t}\in T} |\zeta_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{t})| > a) = 0$
3. Kiekvienam $\varepsilon > 0$

$$\lim_{J\to\infty} \limsup_{\boldsymbol{n}\to\infty} P(\sup_{j\geq J} 2^{\alpha j} \max_{\boldsymbol{v}\in V_j} |\lambda_{j,\boldsymbol{v}}(\zeta_{\boldsymbol{n}})| > \varepsilon) = 0.$$