Vynerio paklodė ir jos modeliavimas

Vaidotas Zemlys

Vaidotas.Zemlys@maf.vu.lt

Vilniaus Universitetas, Matematikos ir Informatikos Fakultetas

Atsitiktiniai procesai

- Tikimybinė erdvė $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Mačios erdvės $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, $(S, \mathcal{S})$.
- Atsitiktinis dydis: mati funkcija $\xi : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$
- Atsitiktinių dydžių šeima $\{\xi_t, t \in T\}$. T – parametro kitimo aibė, pvz. $T = [0, 1]$, $T = \mathbb{N}$.
- Dviejų argumentų funkcija $\xi : \Omega \times T \to \mathbf{R}$. Fiksavus t gauname atsitiktinį dydį, fiksavus w gauname funkciją.
- Atsitiktinis elementas: mati funkcija $\xi : (\Omega, \mathcal{F}) \to (C([0, 1], \mathcal{C})$.

Vynerio procesas arba Brauno judesys

- $W_0 = 0$.
- $W_t \ \sim \ N(0, t)$.
- $\mathbf{E} W_t W_s = t \wedge s$.
- Jei $t_0 < t_1 < t_2, \cdots < t_n$, tai

$$W_{t_1} - W_{t_0}, W_{t_2} - W_{t_1}, \ldots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$$

nepriklausomi atsiktiniai dydžiai.

Brauno judesio trajektorijų savybės

- Tolydžios.
- Nediferencijuojamos nė viename taške.
- Tenkina Hiolderio sąlygą:

$$|f(t) - f(s)| < c|t - s|^{\alpha},$$

čia f - Brauno judesio trajektorija, $0 < \alpha < 1/2$.

Brauno judesio modeliavimas.

Donskerio-Prochorovo teorema

Tegu $X_1, X_2, \ldots$ nepriklausomi, vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai su nuliniais vidurkiais. Tegu $S_0 = 0$ ir

$$S_k = X_1 + X_2 + \ldots + X_k, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Apibrėžkime atsitiktinį procesą

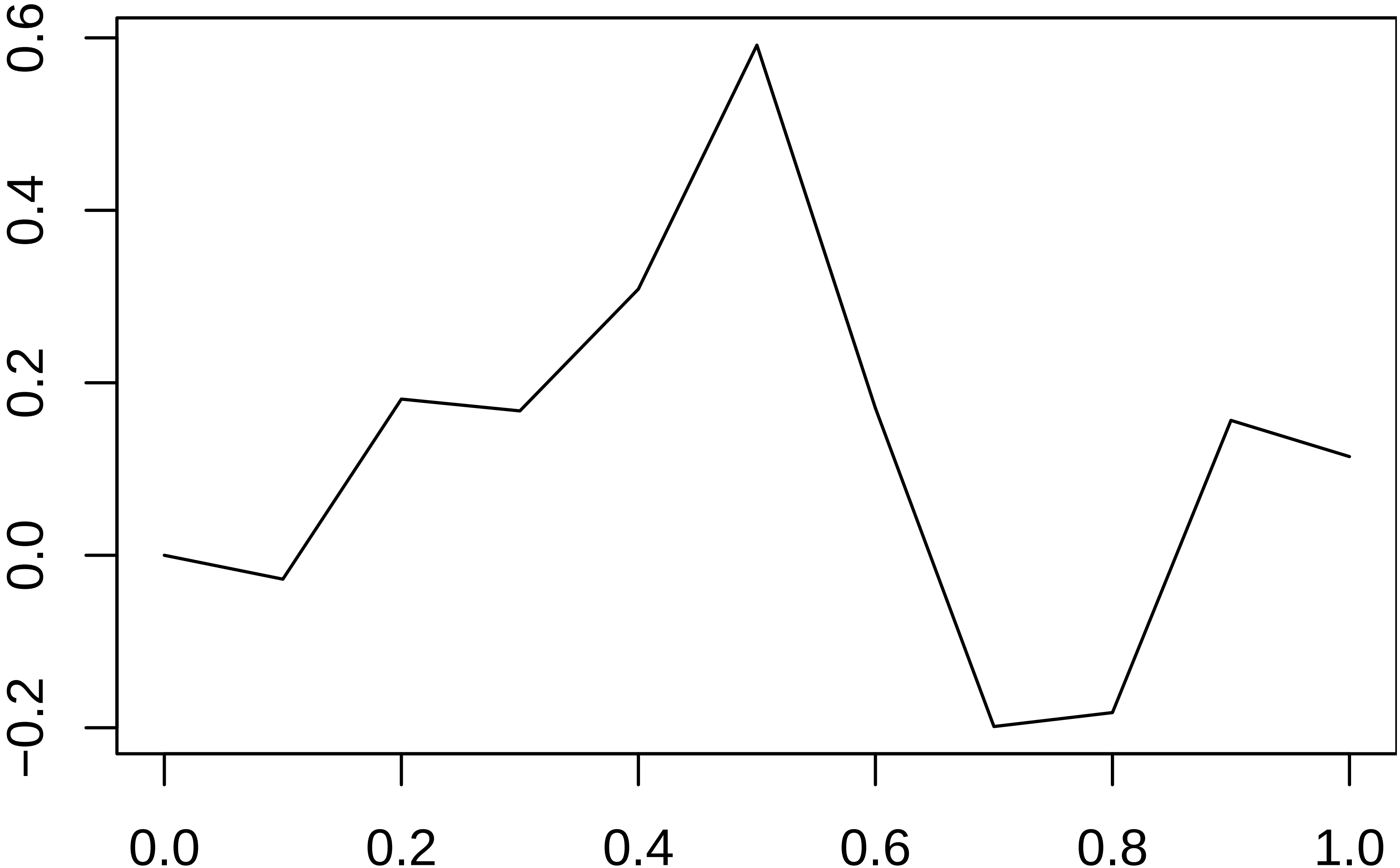
$$\xi_n(t) = S_{[nt]} + (nt - [nt])X_{[nt]+1}, \quad t \in [0, 1].$$

Tada

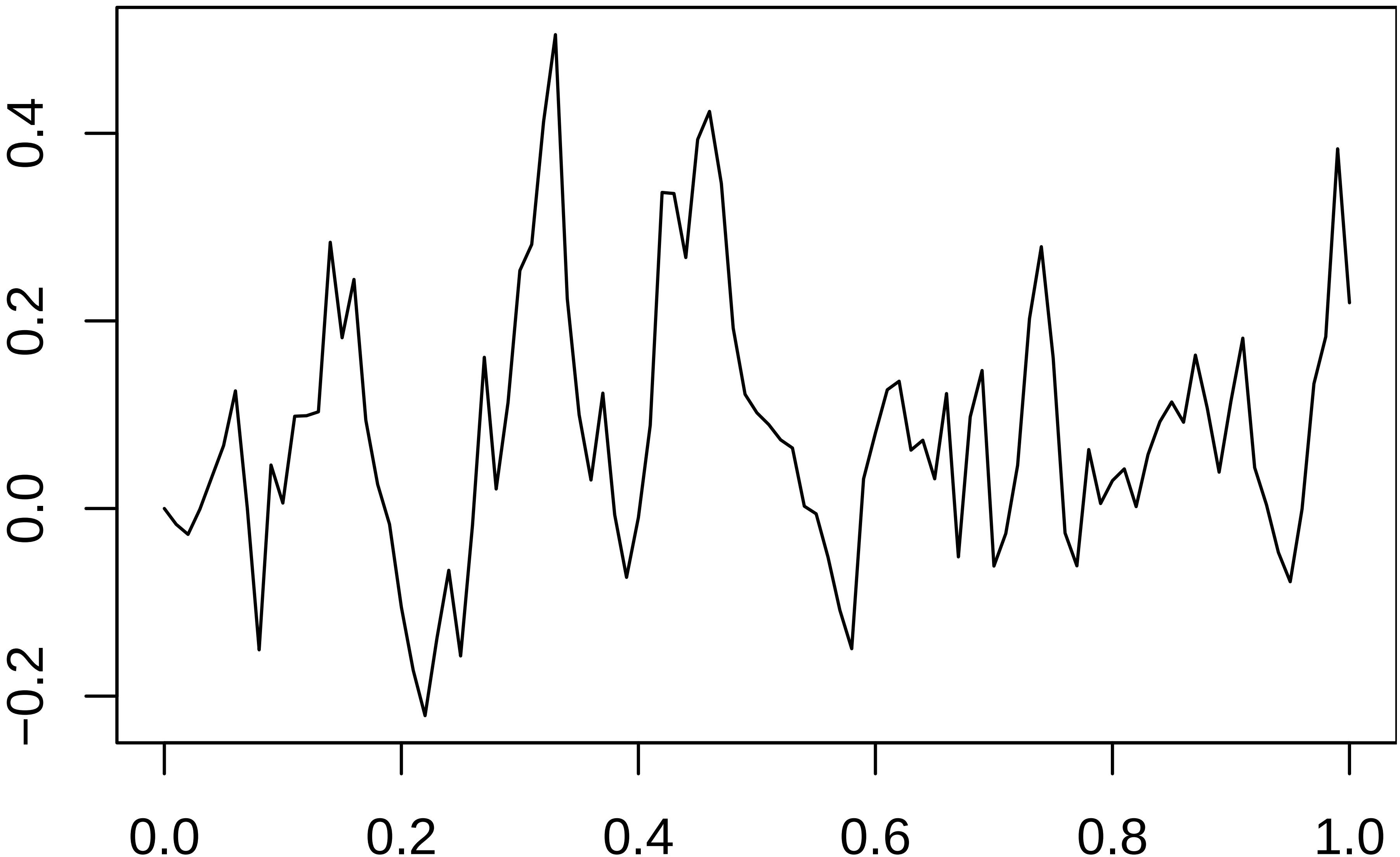
$$n^{-1/2}\xi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} W \text{ erdvėje } C[0, 1]$$

tada ir tik tada, jei $\mathbf{E}X_1^2 < \infty$.

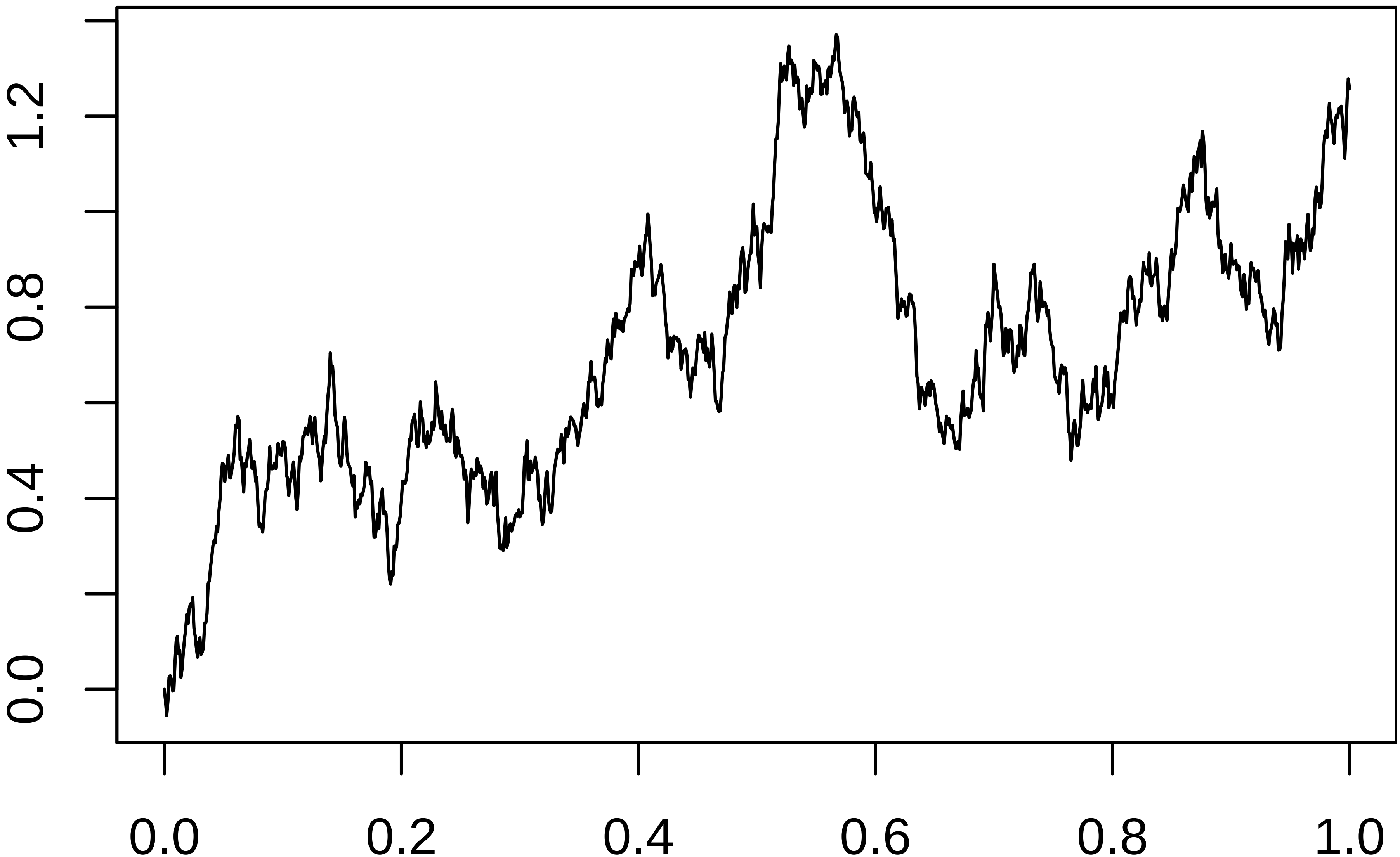
Brauno judesio trajektorija



Brauno judesio trajektorija



Brauno judesio trajektorija



Konvergavimas kitose erdvėse

Tegu $0 < \alpha \leq 1$, $H_\alpha^o\big([0,1]^d\big)$ yra aibė tokių realių tolydžių funkcijų $x : [0,1]^d \to \mathbb{R}$, kurioms $\lim_{\delta \to 0} w_\alpha(x, \delta) = 0$, čia

$$w_\alpha(x, \delta) = \sup_{\boldsymbol{t}, \boldsymbol{s} \in [0,1]^d, 0 < |\boldsymbol{t} - \boldsymbol{s}| < \delta} \frac{|x(\boldsymbol{t}) - x(\boldsymbol{s})|}{|\boldsymbol{t} - \boldsymbol{s}|^\alpha}.$$

Kada teisinga

$$n^{-1/2}\xi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} W \text{ erdvėje } H_\alpha^o([0,1])? \qquad (1)$$

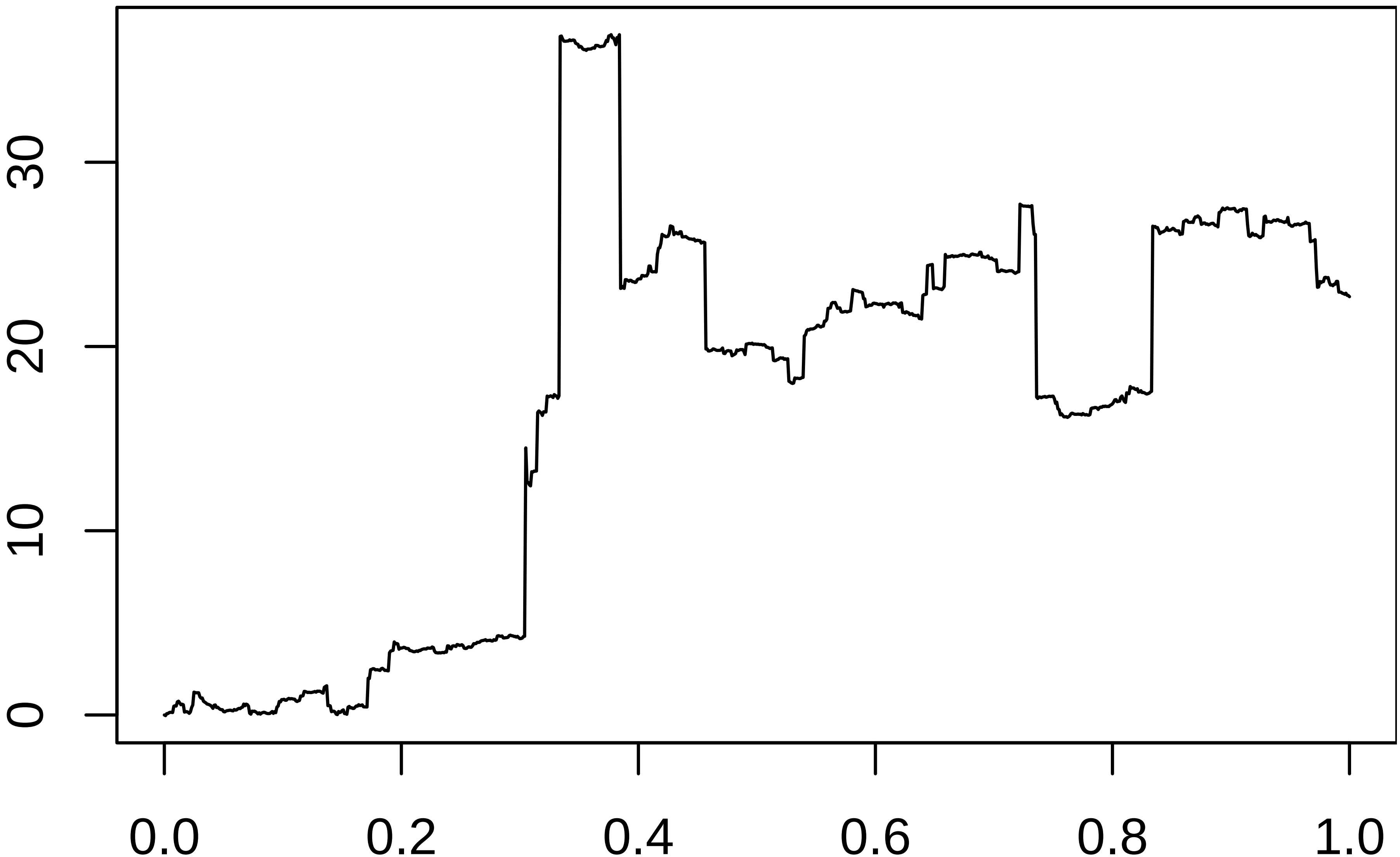
Konvergavimas kitose erdvėse

- Lamperti (1962) įrodė, kad (1) teisinga, jei $\mathbf{E}|X_1|^p < \infty$, čia $p > 1/(1/2 - \alpha)$ ir $0 < \alpha < 1/2$.

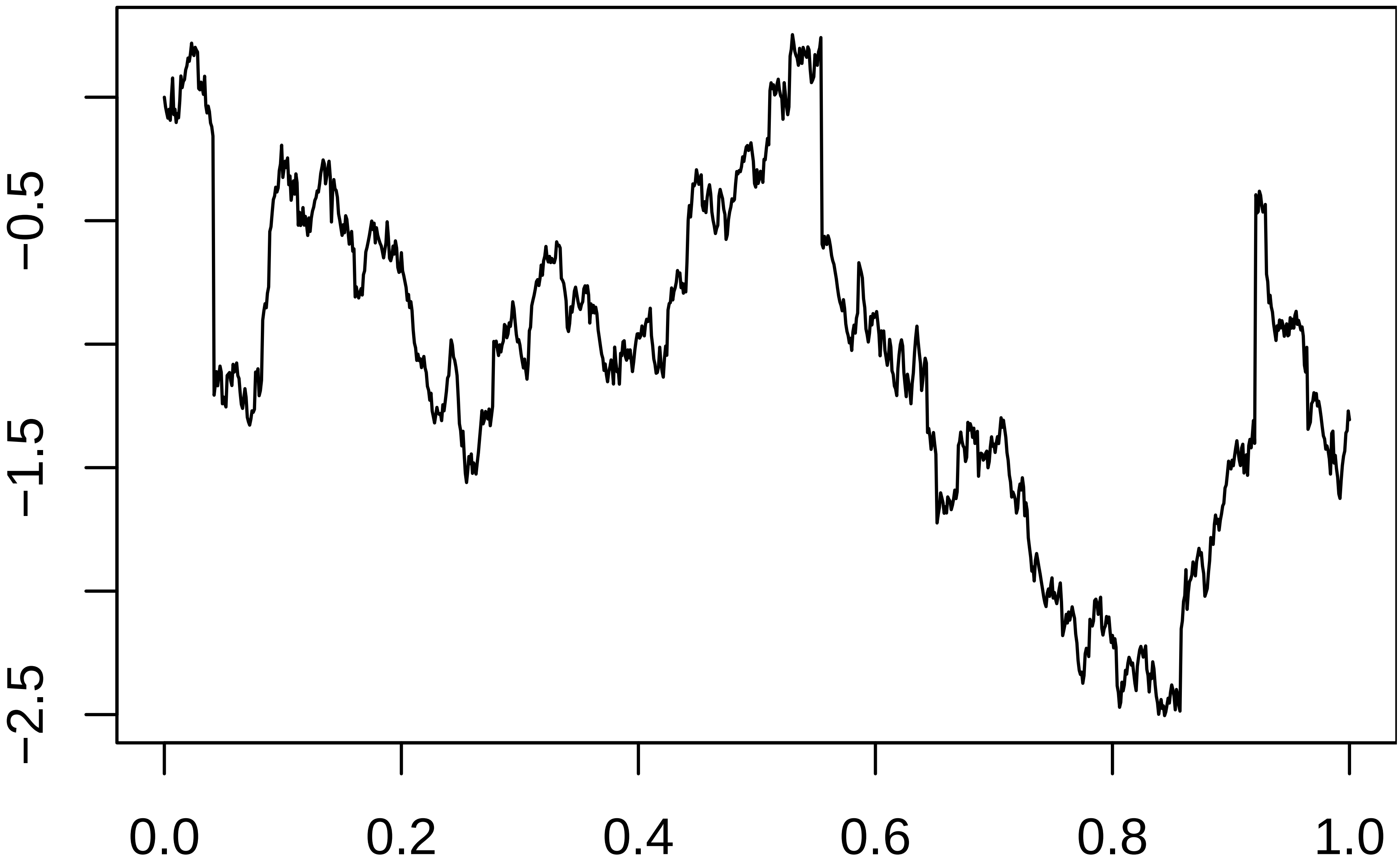
- Račkauskas ir Suquet (2001) papildė Lamperti rezultatą įrodydami, kad (1) teisinga tada ir tik tada, kai

$$\lim_{t\to\infty} t^p \mathbf{P}(|X_1| \geq t) = 0 \text{ su } p = \frac{1}{1/2 - \alpha}.$$

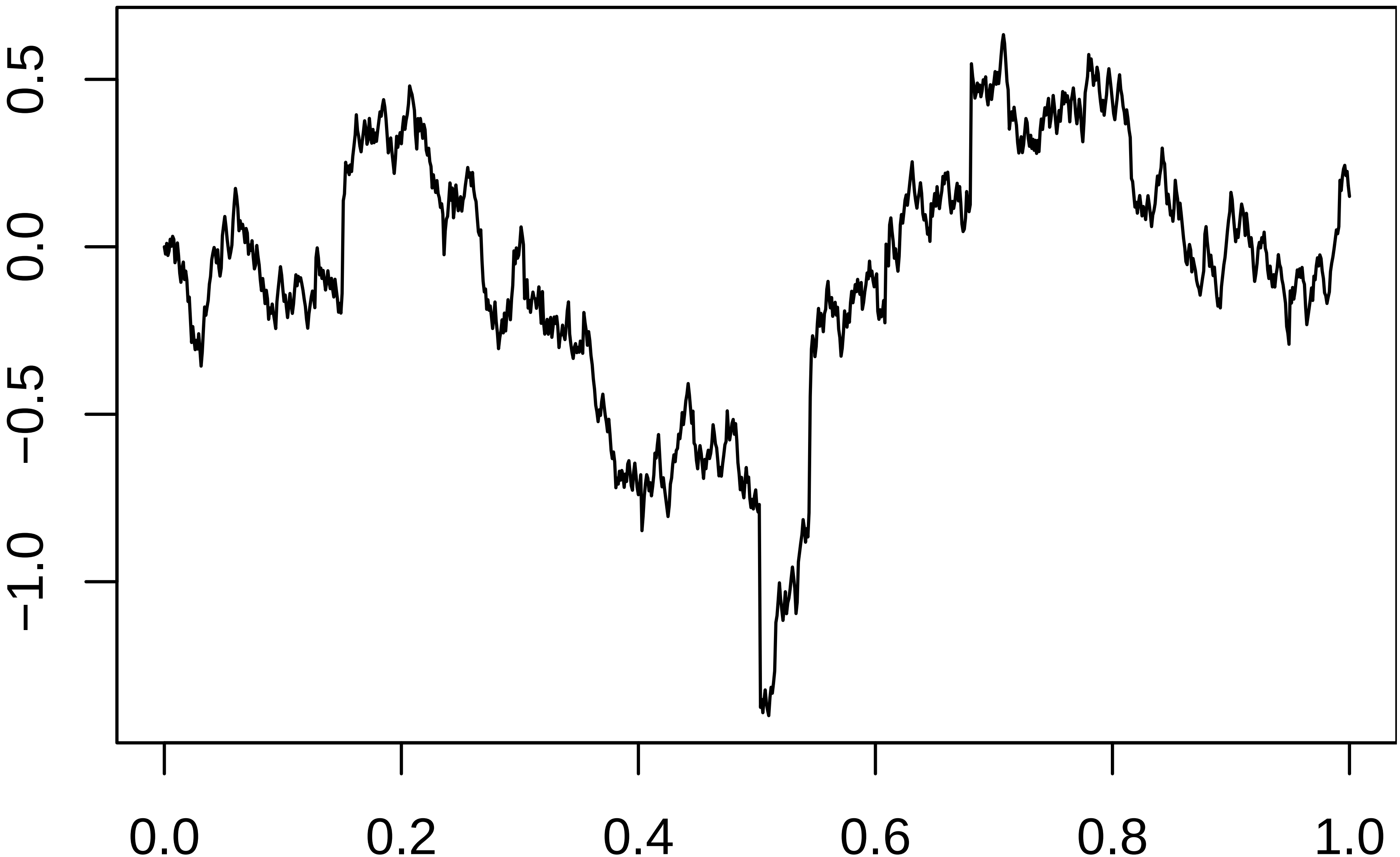
Skirtingas momentų skaičius



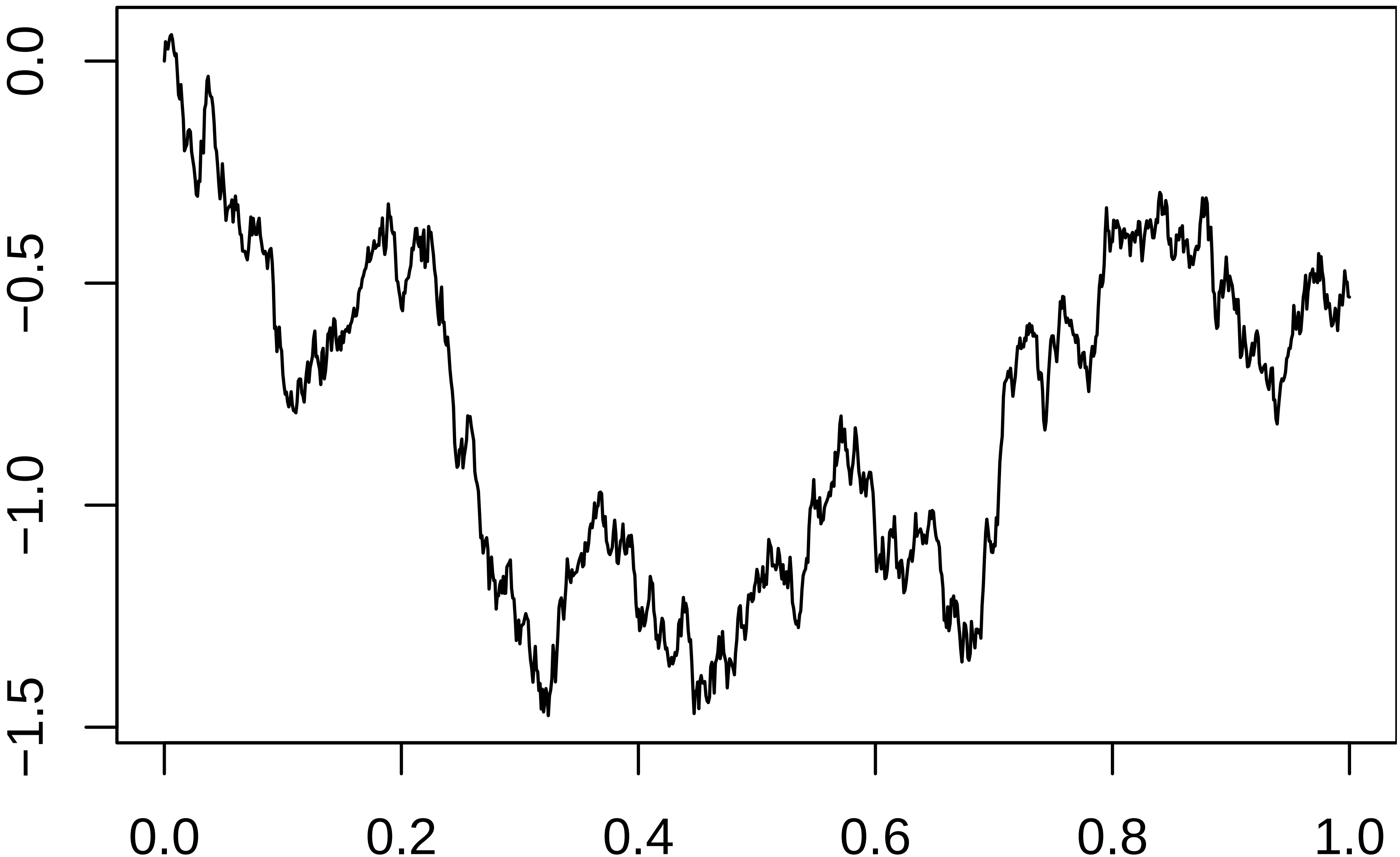
Skirtingas momentų skaičius



Skirtingas momentų skaičius



Skirtingas momentų skaičius



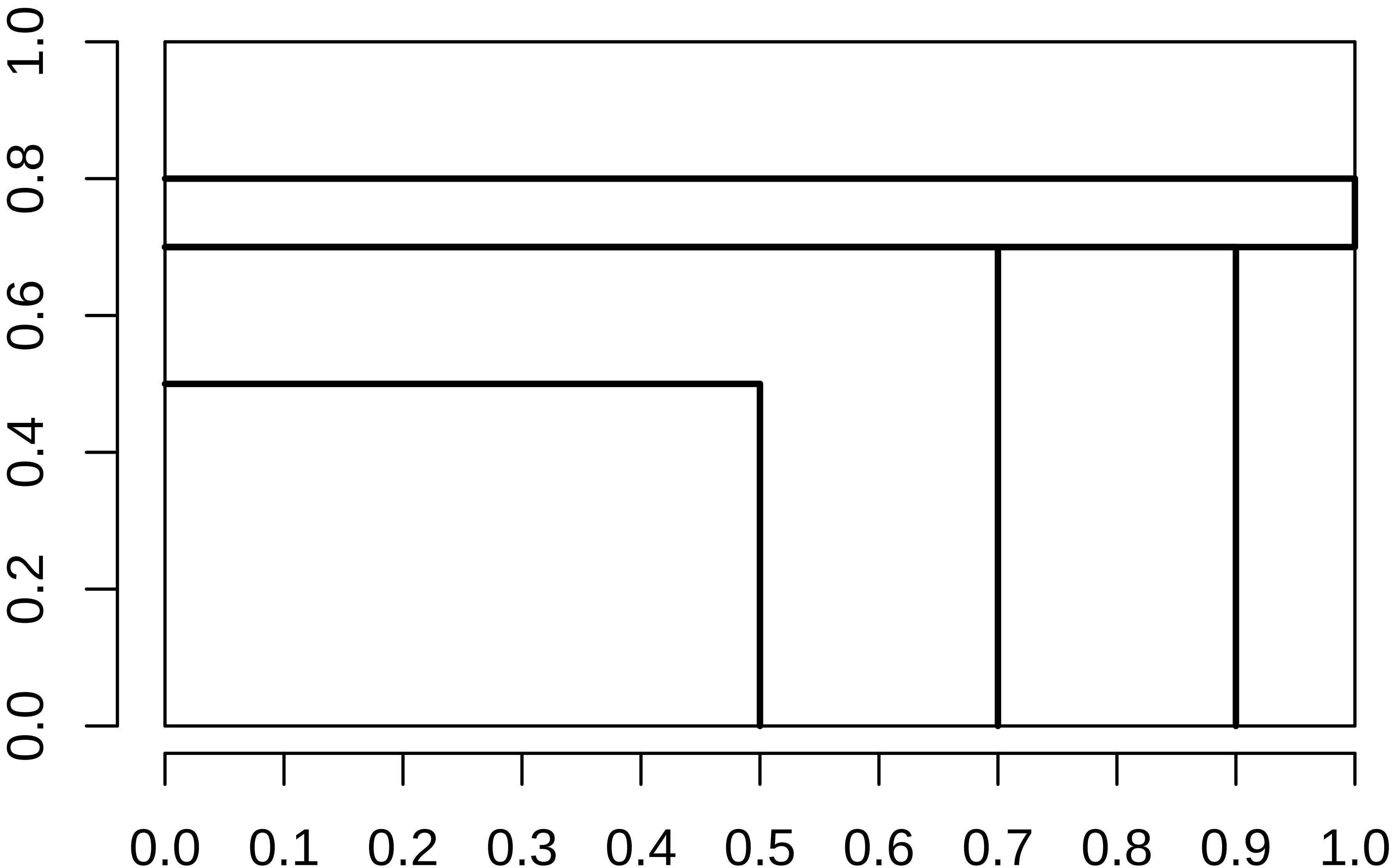
Vynerio paklodė

- $W_d(\boldsymbol{t}) = 0$, jei nors vienas $t_i = 0$.
- $W_d(\boldsymbol{t}) \ \sim \ N(0, t_1 \cdots t_d)$, $\boldsymbol{t} = (t_1, \ldots, t_d)$.
- $\mathbf{E} W_d(\boldsymbol{t}) W_d(\boldsymbol{s}) = (t_1 \wedge s_1) \cdots (t_d \wedge s_d)$.

Vynerio paklodės savybės

- Fiksavus vieną t_i, gaunama Vynerio paklodė W_{d-1}.
- Nesikertančiuose aibėse, nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai.
- Trajektorijos priklauso erdvei $H^o_\alpha\big([0,1]^d\big)$.

Vynerio paklodės savybės



Laužčių proceso apibendrinimas

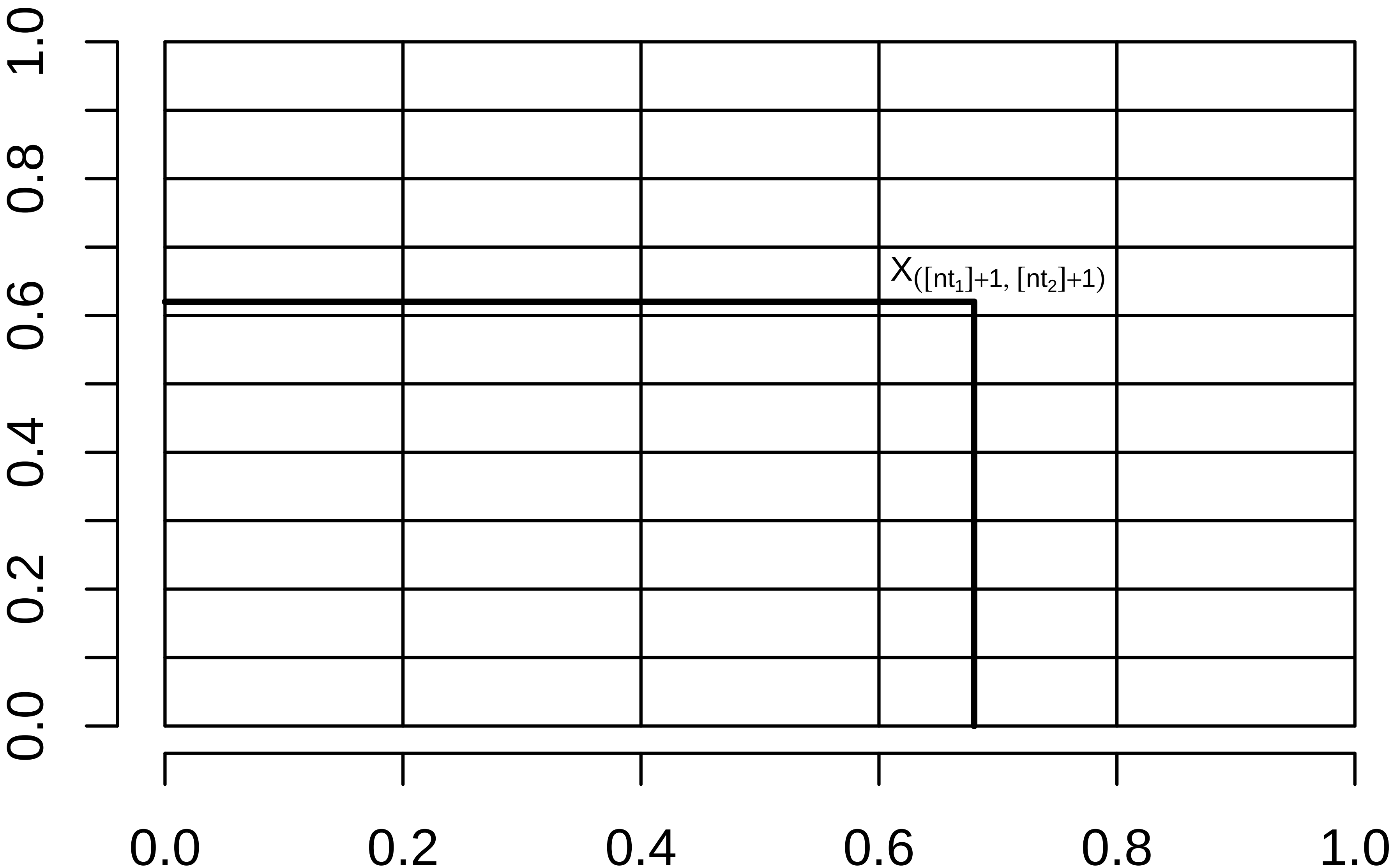
Tegu $(X_{\boldsymbol{j}}, \boldsymbol{j} \in \mathbb{N}^2, \boldsymbol{j} \geq \mathbf{1})$ yra vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai su nuliniu vidurkiu. Tada

$$\begin{aligned}\xi_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{t}) = & S_{([n_1 t_1],\, [n_2 t_2])} + \\ & + (n_1 t_1 - [n_1 t_1]) S^{(2)}_{([n_1 t_1]+1, [n_2 t_2])} \\ & + (n_2 t_2 - [n_2 t_2]) S^{(1)}_{([n_1 t_1], [n_2 t_2]+1)} \\ & + (n_1 t_1 - [n_1 t_1])(n_2 t_2 - [n_2 t_2]) X_{([n_1 t_1]+1, [n_2 t_2]+1)},\end{aligned}$$

čia

$$S_{(k,\, m)} = \sum_{j=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} X_{(i,\, j)}, \quad S^{(1)}_{(k,\, m)} = \sum_{j=1}^{m} X_{(k,\, j)}, \quad S^{(2)}_{(k,\, m)} = \sum_{i=1}^{k} X_{(i,\, m)}.$$

Laužčių proceso apibendrinimas



Konvergavimas

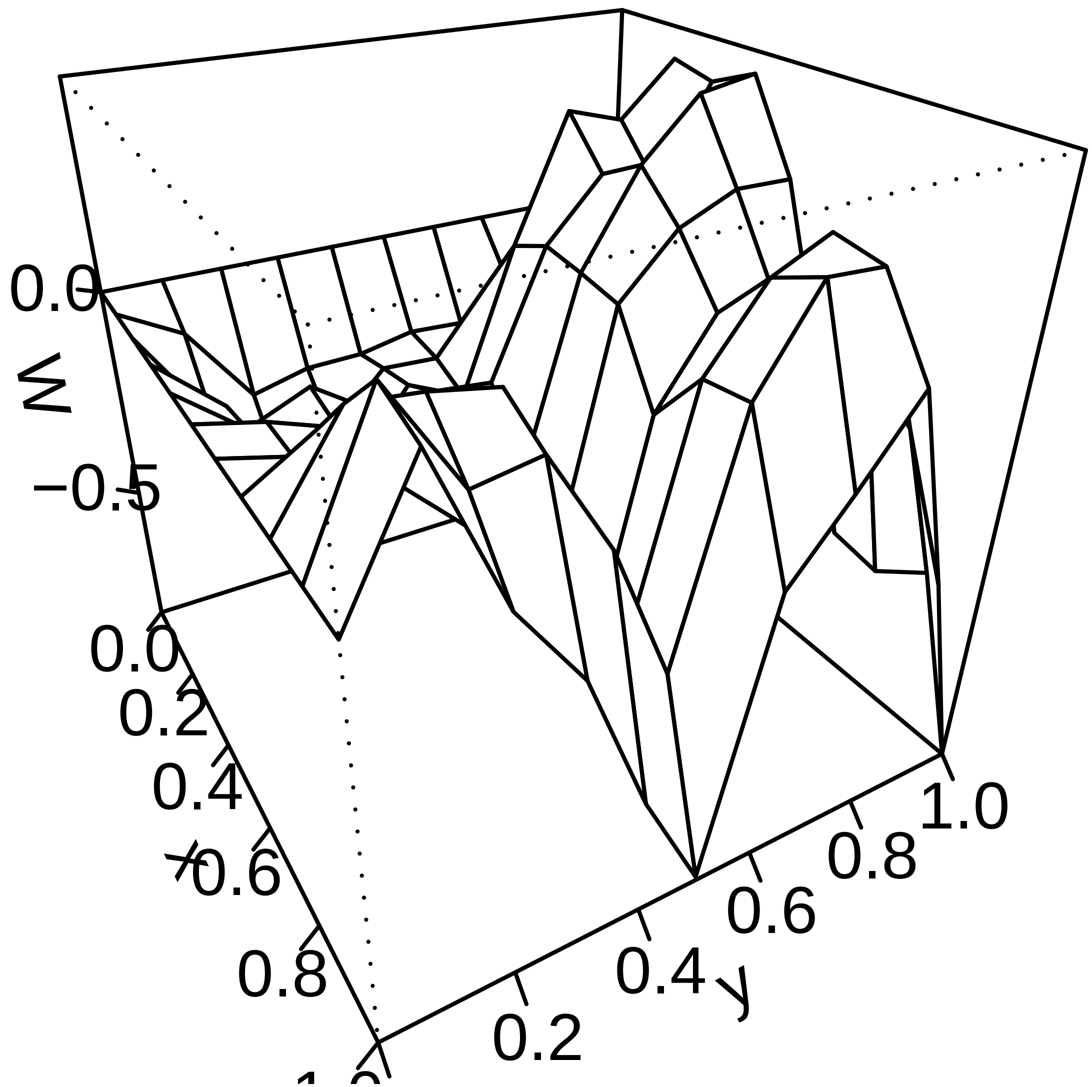
Kada

$$(n_1 n_2)^{-1/2} \xi_{\boldsymbol{n}} \xrightarrow[n_1 \wedge n_2 \to \infty]{\mathcal{D}} W_2 \text{ erdvėje } H_\alpha^o\big([0,1]^2\big)?$$

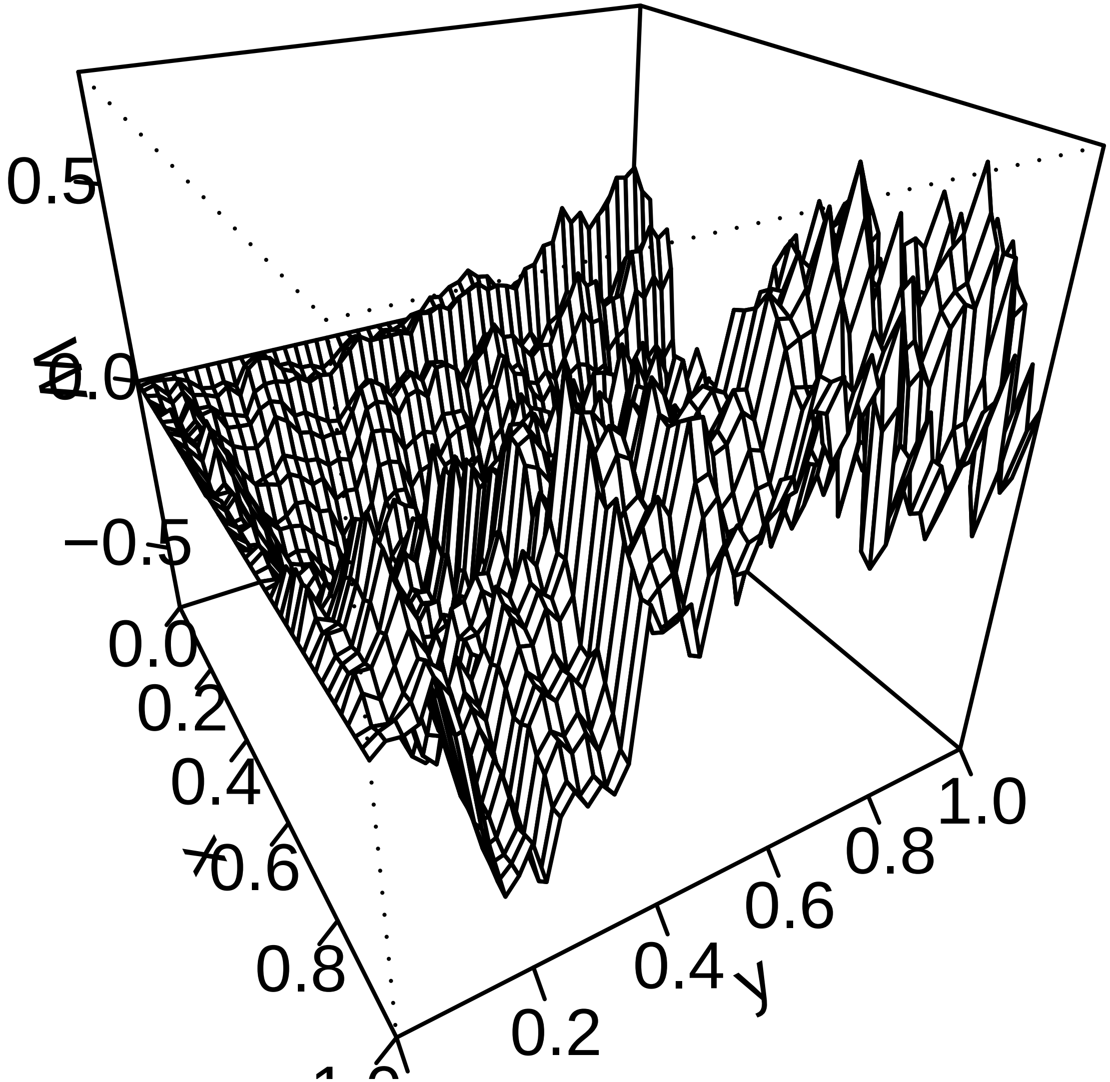
- Erickson (1981) įrodė, kad tai teisinga, jei $\mathbf{E}|X_1|^q < \infty$, kai $q > 2/(1/2 - \alpha)$.
- Įrodoma, kad tai teisinga tada ir tik tada, jei

$$t_1 t_2 \mathbf{P}\big(|X_{\mathbf{1}}| > t_1^{1/p} t_2^{1/2}\big) \to 0, \text{ kai } t_1 \wedge t_2 \to \infty.$$

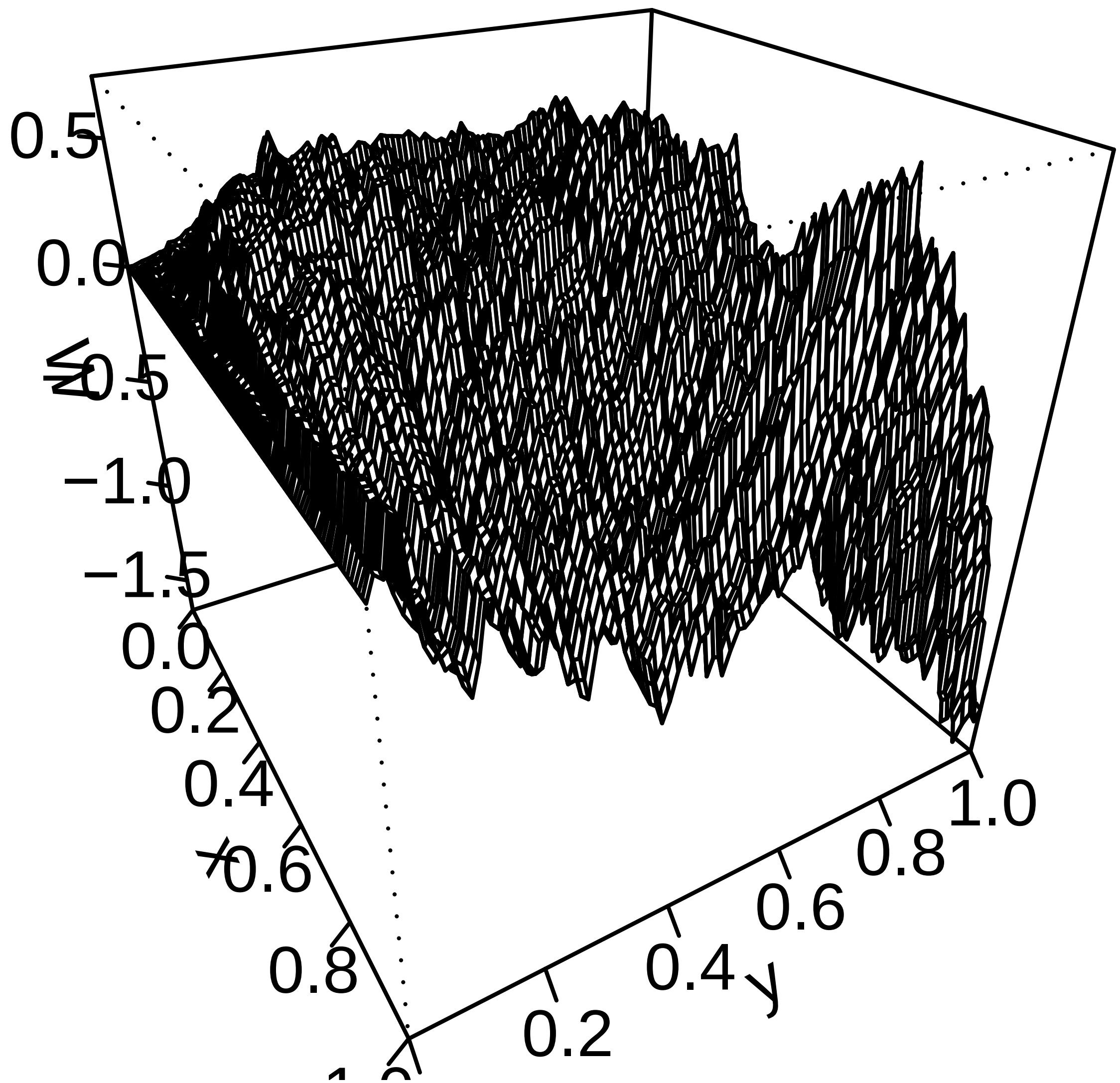
Vynerio paklodės trajektorijos



Vynerio paklodės trajektorijos



Vynerio paklodės trajektorijos



Palyginimas

Sena sąlyga: $\mathbf{E}|X_1|^q < \infty$, kai $q > 2/(1/2 - \alpha)$.
Nauja sąlyga: $t_1 t_2 \mathbf{P}\left(|X_{\mathbf{1}}| > t_1^{1/p} t_2^{1/2}\right) \to 0,$ kai $t_1 \wedge t_2 \to \infty$.

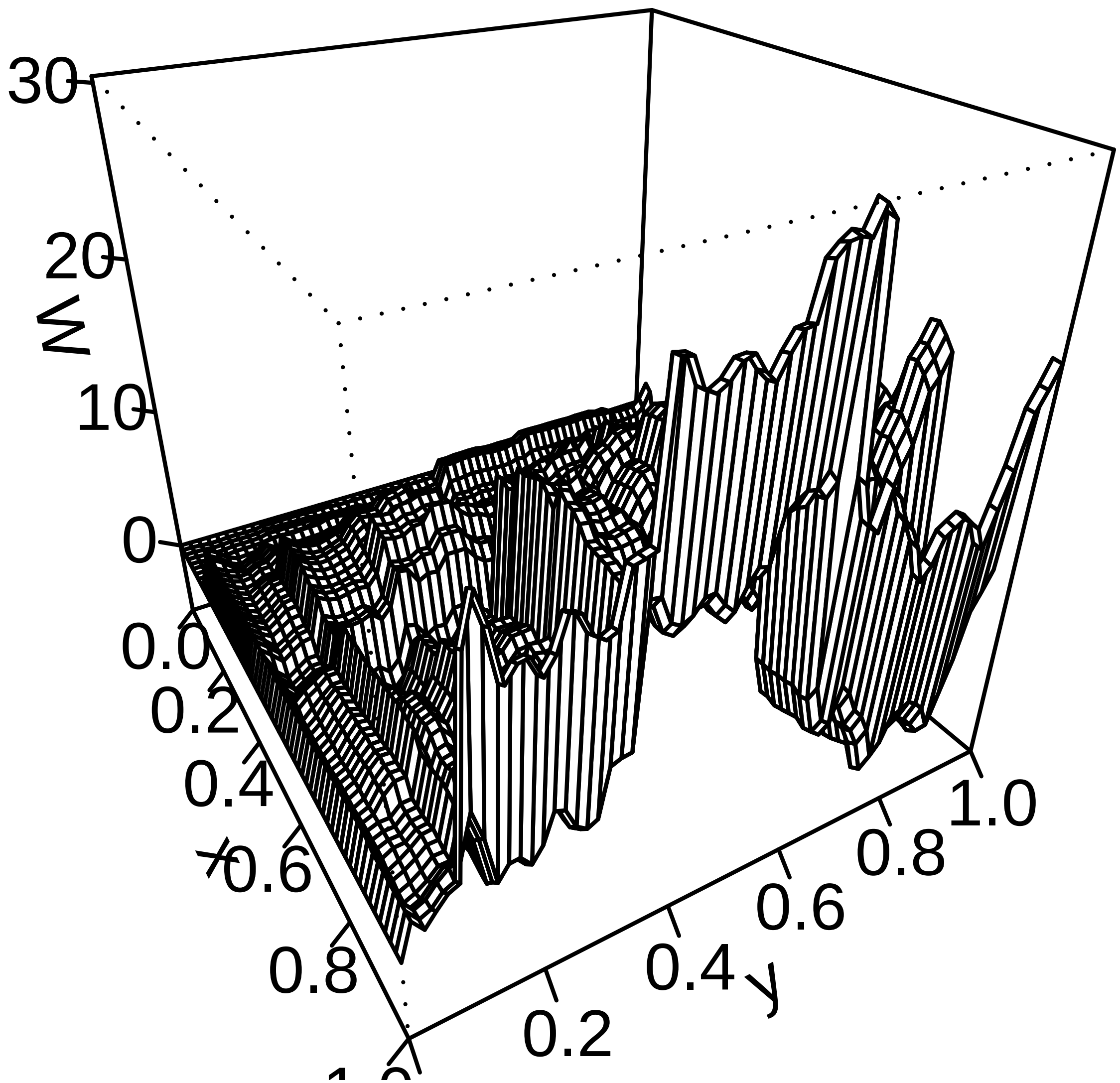
- Pagerintas Erickson rezultatas dvimačiam atvejui. "Reikia" dvigubai mažiau momentų.

$$\lim_{t\to\infty} t^p \mathbf{P}(|X_{\mathbf{1}}| \geq t) = 0.$$

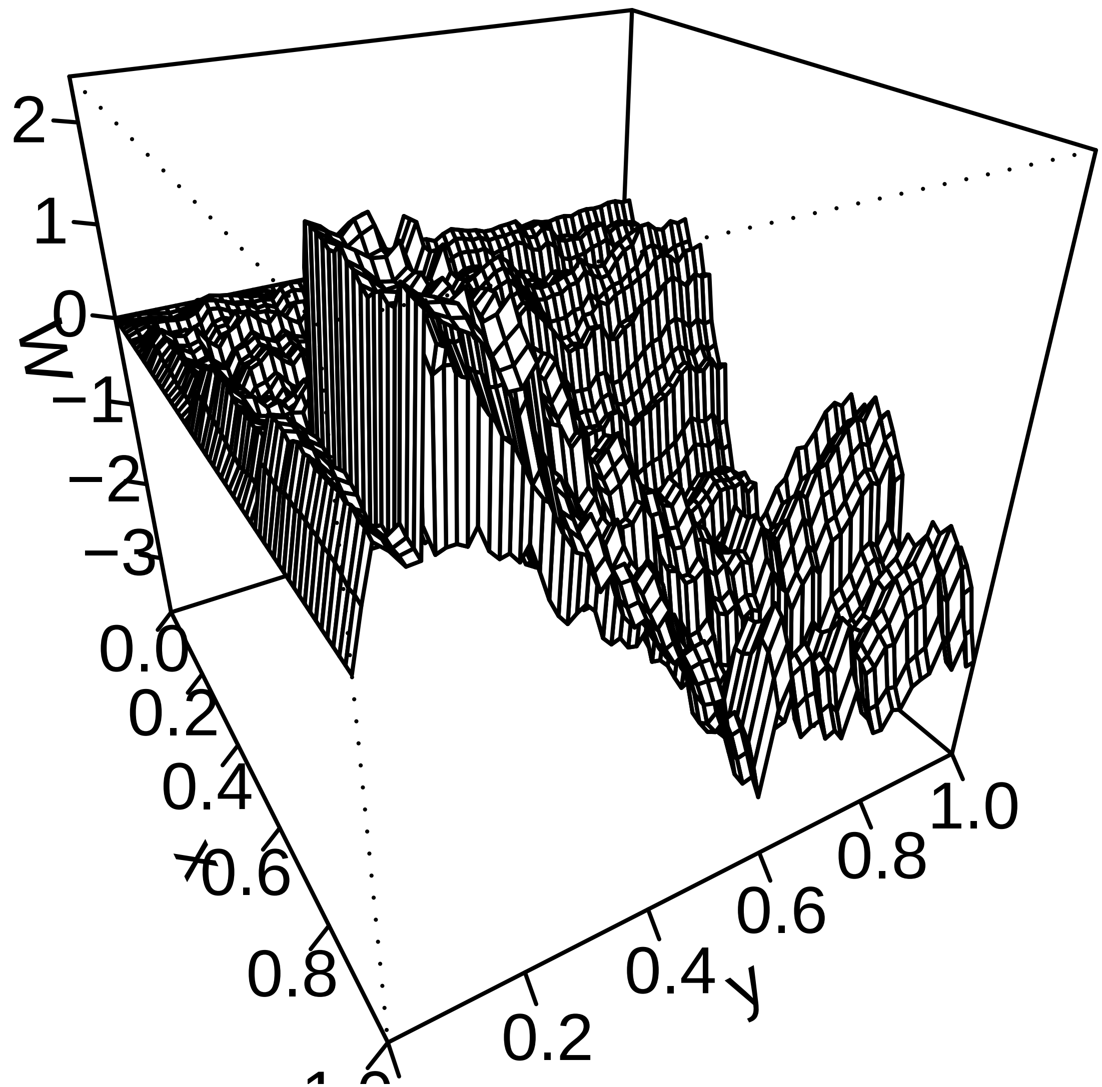
- Einant fiksuotais keliais: $n_2 = O(n_1^r)$, $r \geq 1$ užtenka mažiau momentų, negu vienmačiu atveju.

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{r+1}{r/p+1/2}} \mathbf{P}(|X_{\mathbf{1}}| \geq t) = 0.$$

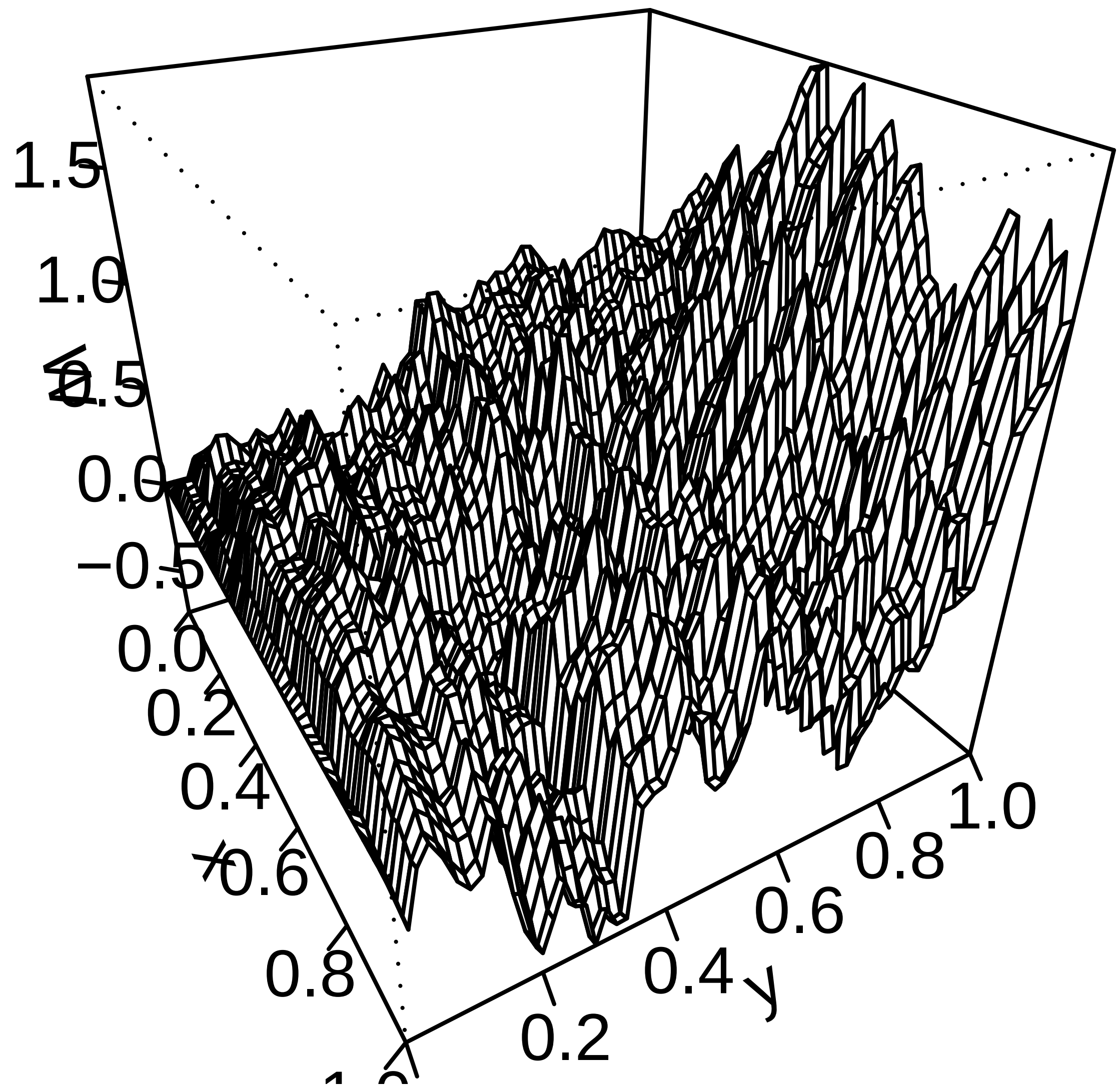
Skirtingas momentų skaičius



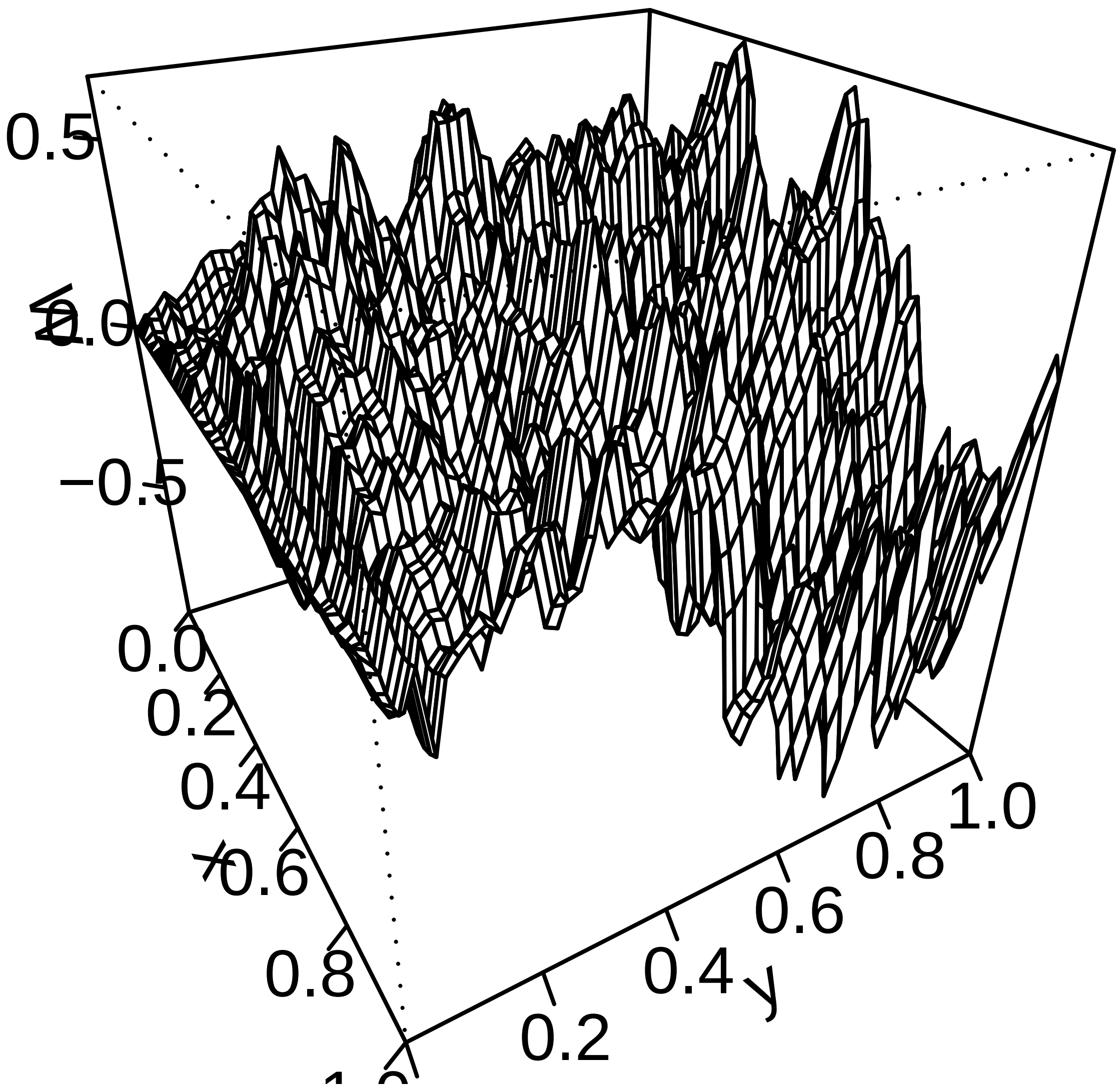
Skirtingas momentų skaičius



Skirtingas momentų skaičius



Skirtingas momentų skaičius



Įrodymo detalės

- Prochorovo teorema apibendrintoms sekoms.
- Arcela-Askoli teoremos analogas erdvėje $H^o_\alpha\big([0,1]^2\big)$.
- Apibendrinto laužčių proceso skirtumų nagrinėjimas.
- Doob, Rosenthal nelygybės.

Neišspręstos problemos

- Rasti būtinas ir pakankamas sąlygas, kai $d \geq 2$.
- Rasti būtinas ir pakankamas sąlygas atvejui su Vynerio paklode $\{W(A), A \in T_{\mathcal{B}}\}$, čia $T_{\mathcal{B}}$ – visų $[0, 1]^d$ Borelio poaibių, kurių Lebego matas baigtinis, aibė.
- Save normuojančio apibendrinto laužčių proceso konvergavimas.

Papildoma informacija

- Skaidrė daryta su LaTeX naudojant **prosper** paketą iš http://prosper.sourceforge.net
- Grafikai daryti naudojant statistinį paketą **R** iš http://www.r-project.org
- Skaidres, LaTeX dokumentą ir **R** kodą galima rasti http://mif.vu.lt/~vaze0348/slides