Funkcinė ribinė teorema dvimačio indekso sumavimo procesams

Alfredas Račkauskas,
Vaidotas Zemlys

Vilniaus Universitetas, Matematikos ir Informatikos Fakultetas,
Ekonometrinės analizės katedra

Darbo esmė

- Papildytas Erickson rezultatas
- Apibendrintas Račkausko ir Suquet rezultatas

Sumavimo procesas

- $(X_{\boldsymbol{j}}, \boldsymbol{j} \in \mathbb{N}^d)$ – v. p. r. a. d. su nuliniu vidurkiu.
- $\boldsymbol{n} = (n_1, \ldots, n_d)$, $\boldsymbol{t} = (t_1, \ldots, t_d) \in [0,1]^d$

$$\xi_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{t}) = \sum_{\boldsymbol{j} \le \boldsymbol{n}} |R_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{j}}|^{-1} |R_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{j}} \cap [0,t_1] \times \cdots \times [0,t_d]| X_{\boldsymbol{j}},$$

čia

$$R_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{j}} := [(j_1-1)/n_1, j_1/n_1] \times \cdots \times [(j_d-1)/n_d, j_d/n_d].$$

Vienmatis atvejis

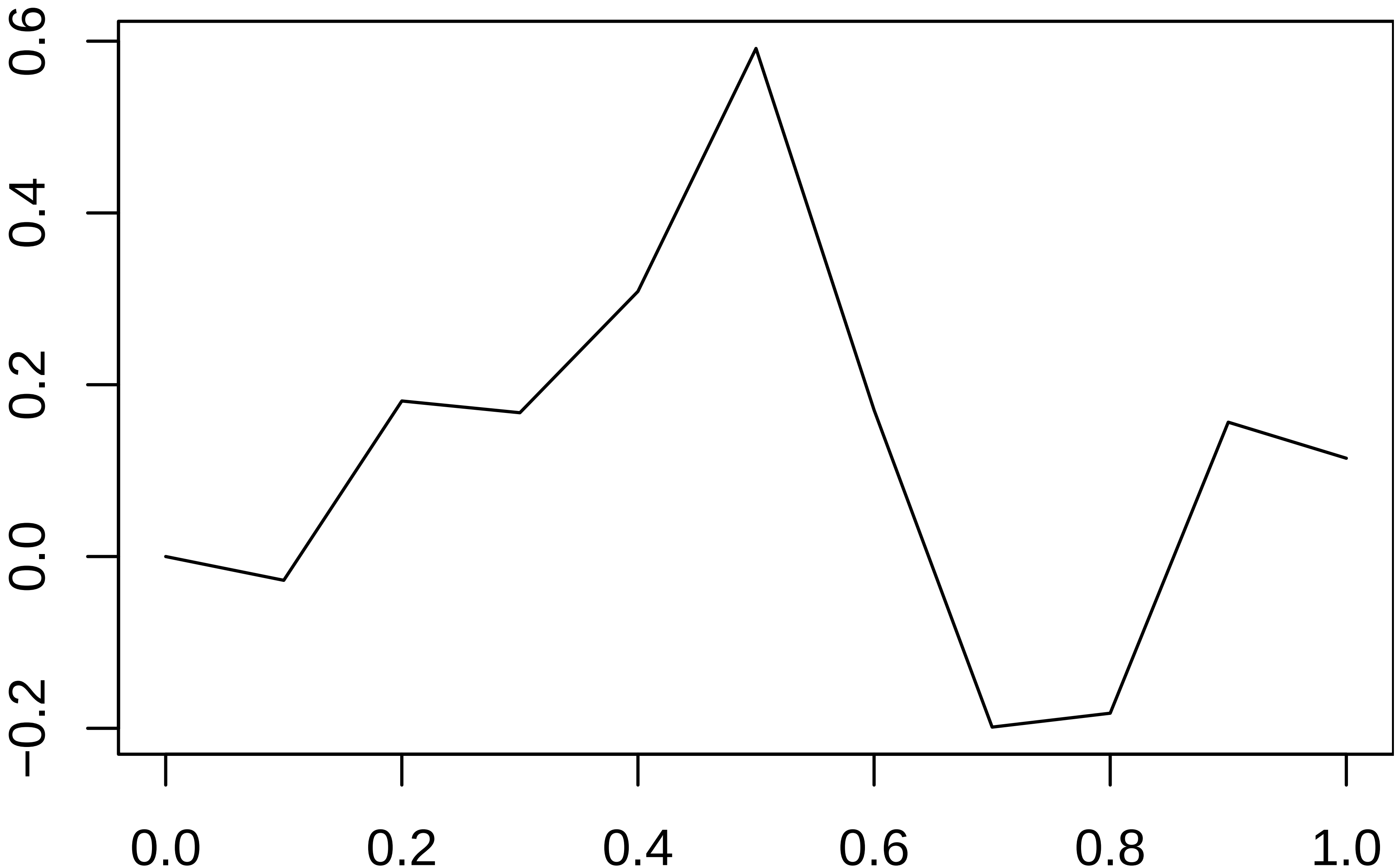
Įprastinis laužčių procesas

$$\xi_n(t) = S_{[nt]} + (nt - [nt])X_{[nt]+1}, \quad t \in [0, 1],$$

čia

$$S_k = X_1 + X_2 + \ldots + X_k, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Vienmatis atvejis



Donskerio-Prochorovo teorema

$$n^{-1/2}\xi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} W \text{ erdvėje } C[0,1] \Leftrightarrow \mathbf{E}X_1^2 < \infty,$$

čia $W(t)$ - Vynerio procesas arba Brauno judesys.

- $W_0 = 0$.
- $W_t \sim N(0,t)$.
- $\mathbf{E}W_tW_s = t \wedge s$.

Hiolderio erdvės

- Tegu $0 < \alpha \leq 1$, $H_\alpha^o([0,1]^d)$ yra aibė tokių realių tolydžių funkcijų $x : [0,1]^d \to \mathbb{R}$, kurioms $\lim_{\delta \to 0} w_\alpha(x, \delta) = 0$, čia

$$w_\alpha(x, \delta) = \sup_{\boldsymbol{t}, \boldsymbol{s} \in [0,1]^d, 0 < |\boldsymbol{t} - \boldsymbol{s}| < \delta} \frac{|x(\boldsymbol{t}) - x(\boldsymbol{s})|}{|\boldsymbol{t} - \boldsymbol{s}|^\alpha}.$$

- Separabili Banacho erdvė su norma

$$\|x\|_\alpha = |x(0)| + w_\alpha(x, 1).$$

D-P apibendrinimas

$$n^{-1/2}\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} W, \text{ erdvėje } H^o_\alpha([0,1])$$

- Lamperti (1962) įrodė pakankamą sąlygą:

$$\mathbf{E}|X_1|^p < \infty,$$

  čia $p > 1/(1/2 - \alpha)$ ir $0 < \alpha < 1/2$.

- Račkauskas ir Suquet (2001) papildė Lamperti rezultatą įrodydami būtiną ir pakankamą sąlygą:

$$\lim_{t\to\infty} t^p \mathbf{P}(|X_1| \geq t) = 0 \text{ su } p = \frac{1}{1/2 - \alpha}.$$

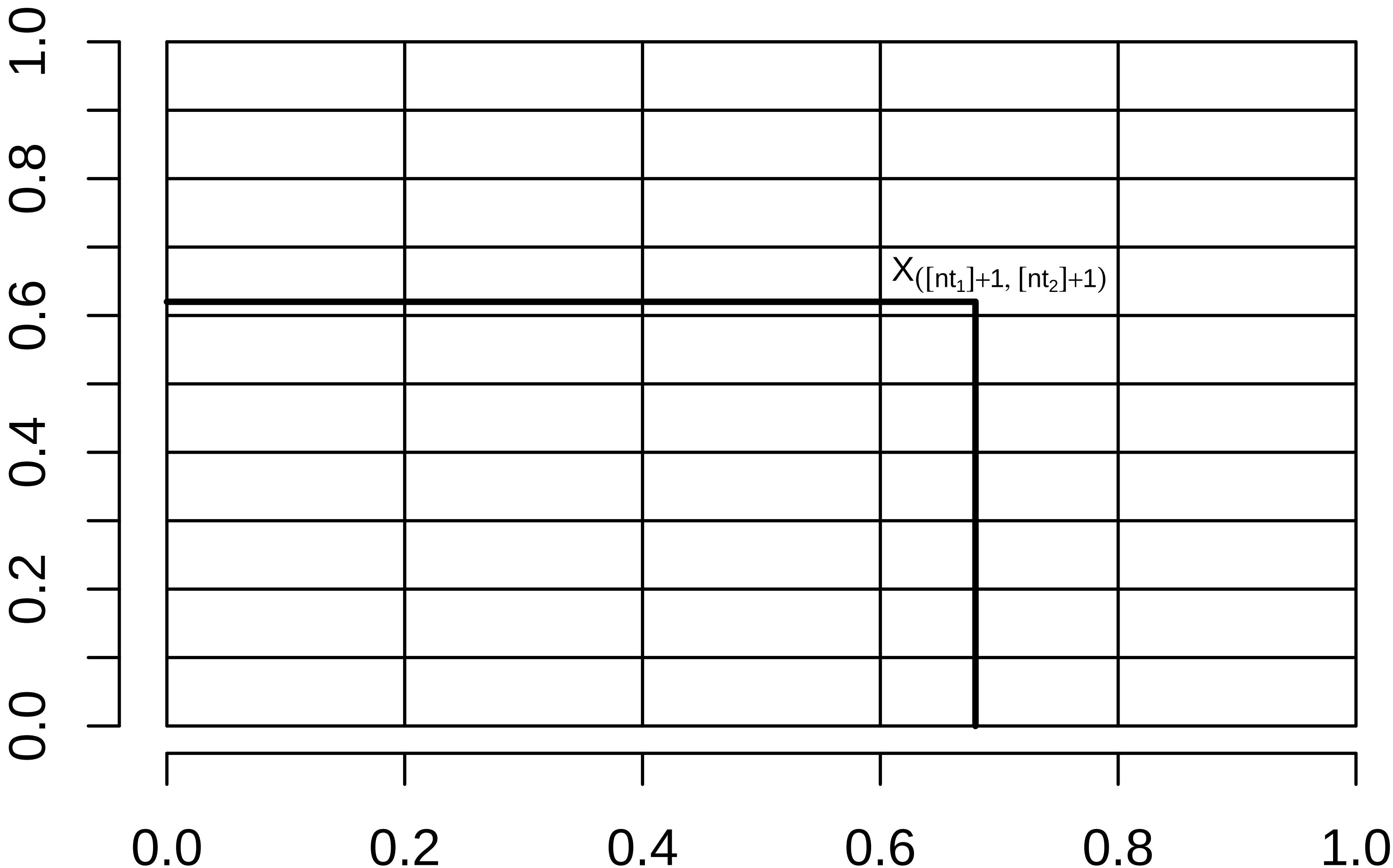
Dvimatis atvejis

$$
\begin{aligned}
\xi_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{t}) = & S_{([n_1 t_1],\, [n_2 t_2])} + \\
& + (n_1 t_1 - [n_1 t_1]) S^{(2)}_{([n_1 t_1]+1, [n_2 t_2])} \\
& + (n_2 t_2 - [n_2 t_2]) S^{(1)}_{([n_1 t_1], [n_2 t_2]+1)} \\
& + (n_1 t_1 - [n_1 t_1])(n_2 t_2 - [n_2 t_2]) X_{([n_1 t_1]+1, [n_2 t_2]+1)},
\end{aligned}
$$

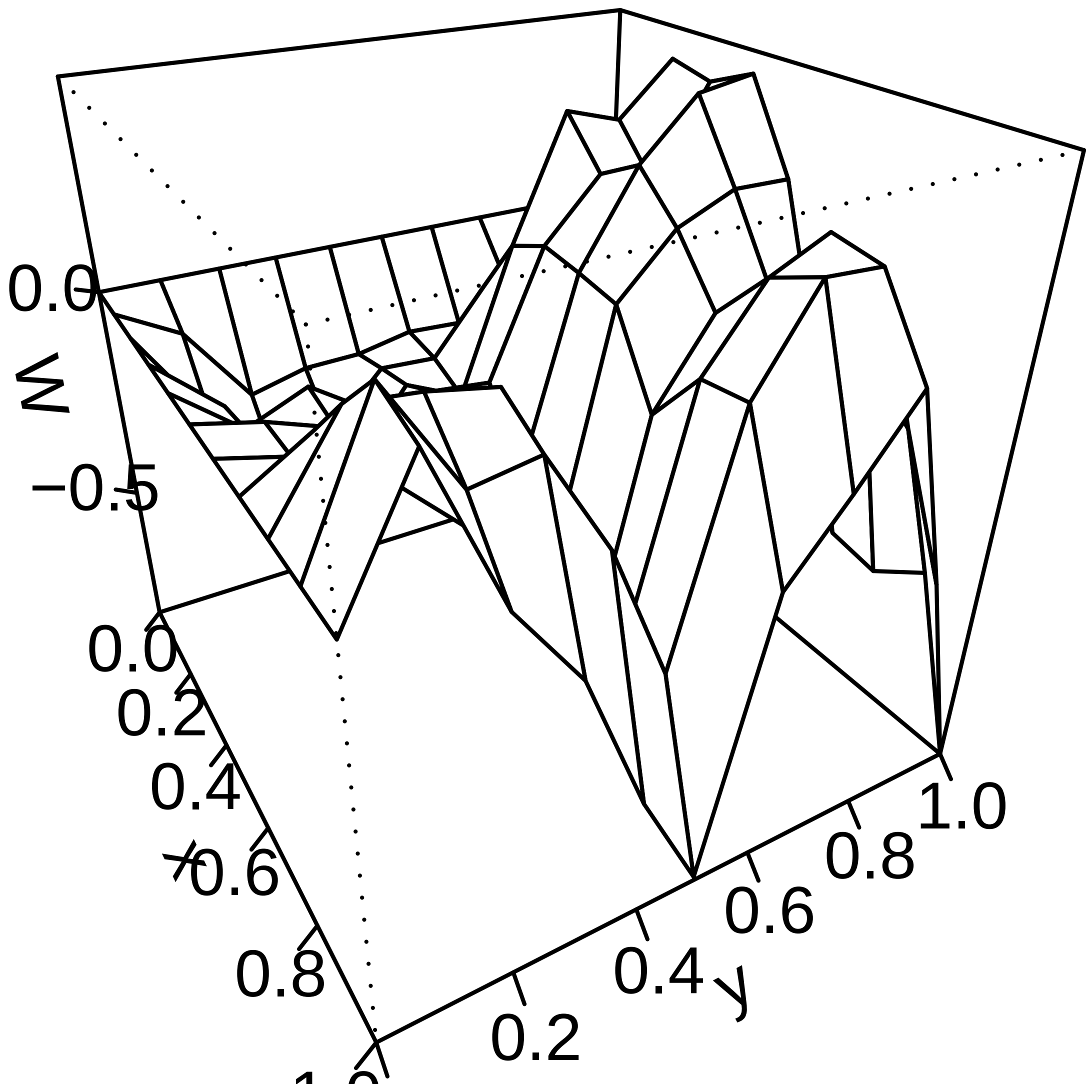
čia

$$
S_{(k,\, m)} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} X_{(i,\, j)}, \quad S^{(1)}_{(k,\, m)} = \sum_{j=1}^{m} X_{(k,\, j)}, \quad S^{(2)}_{(k,\, m)} = \sum_{i=1}^{k} X_{(i,\, m)}.
$$

Dvimatis atvejis



Dvimatis atvejis



Ribinės teoremos

Tolydžius sumavimo procesus dvimačiu atveju nagrinėjo Kuelbs (1968) . Jis apsiribojo indeksu $\boldsymbol{n} = (n, n)$ ir įrodė, kad

$$\xi_{(n,n)} \xrightarrow[n \to \infty]{\mathcal{D}} W_2,$$

erdvėje $C([0,1]^2)$, jei $E|X_{(1,1)}|^{3+\delta} < \infty$, kokiam nors $\delta > 0$. Čia W_2 – dvimatė Vynerio paklodė.

Vynerio paklodė

- $W_d(\boldsymbol{t}) = 0$, jei nors vienas $t_i = 0$.

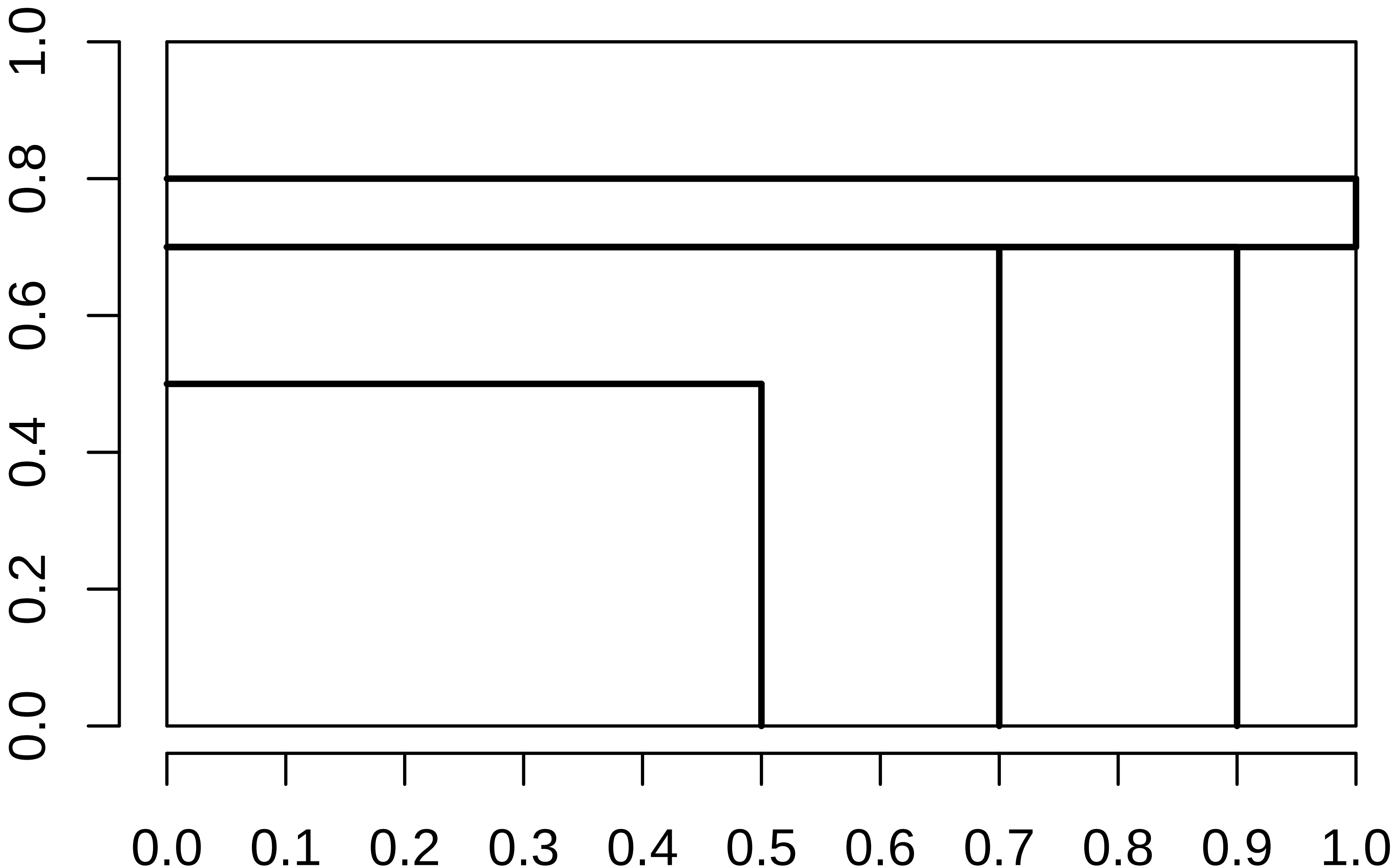
- $W_d(\boldsymbol{t}) \sim N(0, t_1 \cdots t_d)$, $\boldsymbol{t} = (t_1, \ldots, t_d)$.

- $\mathbf{E} W_d(\boldsymbol{t}) W_d(\boldsymbol{s}) = (t_1 \wedge s_1) \cdots (t_d \wedge s_d)$.

Vynerio paklodės savybės

- Fiksavus vieną t_i, gaunama Vynerio paklodė W_{d-1}.
- Nesikertančiuose stačiakampiuose, nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai. $\mathbf{E}W(\boldsymbol{s})(W(\boldsymbol{t}) - W(\boldsymbol{s})) = 0$, $\boldsymbol{s} \leq \boldsymbol{t}$.
- Trajektorijos priklauso erdvei $H_\alpha^o\big([0,1]^d\big)$, $0 < \alpha < 1/2$.

Vynerio paklodės savybės



Daugiamatis atvejis

Iš Erickson (1981) rezultatų išplaukia, kad erdvėje $H_\alpha^o\bigl([0,1]^d\bigr)$

$$(n_1 \cdots n_d)^{-1/2}\xi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} W_d, \text{ kai } \boldsymbol{n} \to \infty,$$

jei

$$\mathbf{E}|X_1|^q < \infty, \text{ kai } q > d/(1/2 - \alpha).$$

Čia $\boldsymbol{n} \to \infty$ reiškia, kad $n_1 \wedge \ldots \wedge n_d \to \infty$.

Pagrindinis rezultatas

$$(n_1 n_2)^{-1/2} \xi_{\boldsymbol{n}} \xrightarrow[n_1 \wedge n_2 \to \infty]{\mathcal{D}} W_2 \text{ erdvėje } H_\alpha^o\big([0,1]^2\big),$$

tada ir tik tada, jei

$$t_1 t_2 \mathbf{P}\big(|X_{\mathbf{1}}| > t_1^{1/p} t_2^{1/2}\big) \to 0, \text{ kai } t_1 \wedge t_2 \to \infty,$$

čia $p = 1/(1/2 - \alpha)$.

Konvergavimo kriterijus

Tegu $\{\zeta_{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^2\}$ yra atsitiktinių erdvės $H^o_\alpha\big([0,1]^2\big)$ elementų apibendrinta seka tenkinanti šias sąlygas:

i) Baigtiniamačiai $\zeta_{\boldsymbol{n}}$ skirstiniai silpnai konverguoja į kokio nors erdvės $H^o_\alpha\big([0,1]^d\big)$ atsitiktinio elemento ζ baigtiniamačius skirstinius, kai $n_1 \wedge n_2 \to \infty$.

ii) $\lim_{a\to\infty} \sup_{\boldsymbol{n}} P(\sup_{\boldsymbol{t}\in T} |\zeta_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{t})| > a) = 0$

iii) Kiekvienam $\varepsilon > 0$

$$\lim_{J\to\infty} \limsup_{\boldsymbol{n}\to\infty} P(\sup_{j\geq J} 2^{\alpha j} \max_{\boldsymbol{v}\in V_j} |\lambda_{j,\boldsymbol{v}}(\zeta_{\boldsymbol{n}})| > \varepsilon) = 0.$$

Apibrėžimai

Kiekvienai funkcijai $x \in H_\alpha^o$:

$$\lambda_{0,\boldsymbol{v}}(x) = x(\boldsymbol{v}), \quad \boldsymbol{v} \in V_0,$$

$$\lambda_{j,\boldsymbol{v}}(x) = x(\boldsymbol{v}) - \frac{1}{2}(x(\boldsymbol{v}^-) + x(\boldsymbol{v}^+)), \quad \boldsymbol{v} \in V_j, \ \ j \geq 1,$$

čia $V_j = W_j \backslash W_{j-1}$, $W_j = \{k2^{-j}; 0 \leq k \leq 2^j\}^2$.

$$v_i^{\pm} = \begin{cases} v_i \pm 2^j, & \text{kai } k_i \text{ yra nelyginis;} \\ v_i, & \text{kai } k_i \text{ yra lyginis.} \end{cases}$$

Prochorovo teorema

Tegu $(X_\alpha, \alpha \in I)$ yra apibendrinta separabilios erdvės atsitiktinių elementų seka. Jei (X_α) yra asimptotiškai tiršta, t.y. kiekvienam $\varepsilon > 0$ egzistuoja toks kompaktas K_ε, kad

$$\liminf_{\alpha} P(X_\alpha \in K_\varepsilon) > 1 - \varepsilon.$$

tai apibendrinta seka (X_α) yra reliatyviai kompaktiška, (1.3.9 teorema 21 psl. van der Vaart ir Wellner (1996))

Arcela-Askoli teorema

Erdvės H^o_α poaibis A yra reliatyviai kompaktiška aibė tada ir tik tada, kai tenkinamos sąlygos

$$\sup_{x \in A} \sup_{t \in T} |x(t)| < \infty$$

ir

$$\lim_{J \to \infty} \sup_{x \in A} \sup_{j \geq J} \max_{v \in V_j} 2^{\alpha j} |\lambda_{j,v}(x)| = 0.$$

Žinomi faktai

- $(\xi_{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^2)$ apibendrinta seka su sąryšiu $\boldsymbol{j} \leq \boldsymbol{n} \Leftrightarrow j_i \leq n_i$, $i = 1, \ldots, d$.
- Proceso $(n_1 n_2)^{-1/2} \xi_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{t})$ baigtiniamačiai pasiskirstymai konverguoja į Vynerio proceso baigtiniamačius pasiskirstymus, kai $n_1 \wedge n_2 \to \infty$. (Erickson (1981))

Būtinumas

Turime

$$X_{\boldsymbol{k}} = \big(S_{(k_1,k_2)} - S_{(k_1-1,k_2)}\big) - \big(S_{(k_1,k_2-1)} - S_{(k_1-1,k_2-1)}\big),$$

todėl

$$\begin{aligned} P(n_1^{-1/p} n_2^{-1/2} \max_{\boldsymbol{1}\le\boldsymbol{k}\le\boldsymbol{n}} |X_{\boldsymbol{k}}| > t) \\ \le P\Big(2(n_1 n_2)^{1/2} \max_{|\frac{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{l}}{\boldsymbol{n}}|=|\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{n}}|} \frac{|S_{\boldsymbol{k}} - S_{\boldsymbol{l}}|}{|(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{l})/\boldsymbol{n}|^{\alpha}} > t\Big) \\ \le P(w_\alpha((n_1 n_2)^{1/2}\xi_{\boldsymbol{n}}, \delta) > t/2) \end{aligned}$$

Pakankamumas

Dėl simetrijos užtenka patikrinti, kad kiekvienam $\varepsilon > 0$ galioja

$$\lim_{J\to\infty} \limsup_{\boldsymbol{n}\to\infty} P\left(\sup_{j\geq J} 2^{\alpha j}(n_1 n_2)^{-1/2} \max_{\substack{0\leq k\leq 2^j-1\\ 0\leq \ell\leq 2^j}} \Delta_{\boldsymbol{n}}(t_{k+1}, t_k; s_\ell) > \varepsilon\right) = 0,$$

čia $t_k = k2^{-j}$ and $s_\ell = \ell 2^{-j}$.

Pakankamumas

Skirtumui $\Delta_{\boldsymbol{n}}(t,t';s) = |\xi_{(n_1,n_2)}(t',s) - \xi_{(n_1,n_2)}(t,s)|$, teisinga:

$$\sup_{s\in[0,1]} \Delta_{\boldsymbol{n}}(t,t';s) \le 3\chi\{t'-t \ge 1/n_1\}\psi_{\boldsymbol{n}}(t',t) + 6\min\big\{1, n_1(t'-t)\big\}\zeta_{n_1,n_2},$$

čia

$$\psi_{\boldsymbol{n}}(t',t) = \max_{1\le k\le n_2}\Big|\sum_{i=[n_1 t]+1}^{[n_1 t']} S^{(1)}_{(i,\ k)}\Big|,$$

$$\zeta_{n_1,n_2} = \max_{1\le i\le n_1}\max_{1\le k\le n_2}|S^{(1)}_{(i,\ k)}|.$$

Rezultatų palyginimas

Sena sąlyga: $\mathbf{E}|X_1|^q < \infty$, kai $q > 2/(1/2-\alpha)$.

Nauja sąlyga: $t_1 t_2 \mathbf{P}\big(|X_{\mathbf{1}}| > t_1^{1/p} t_2^{1/2}\big) \to 0,$ kai $t_1 \wedge t_2 \to \infty$.

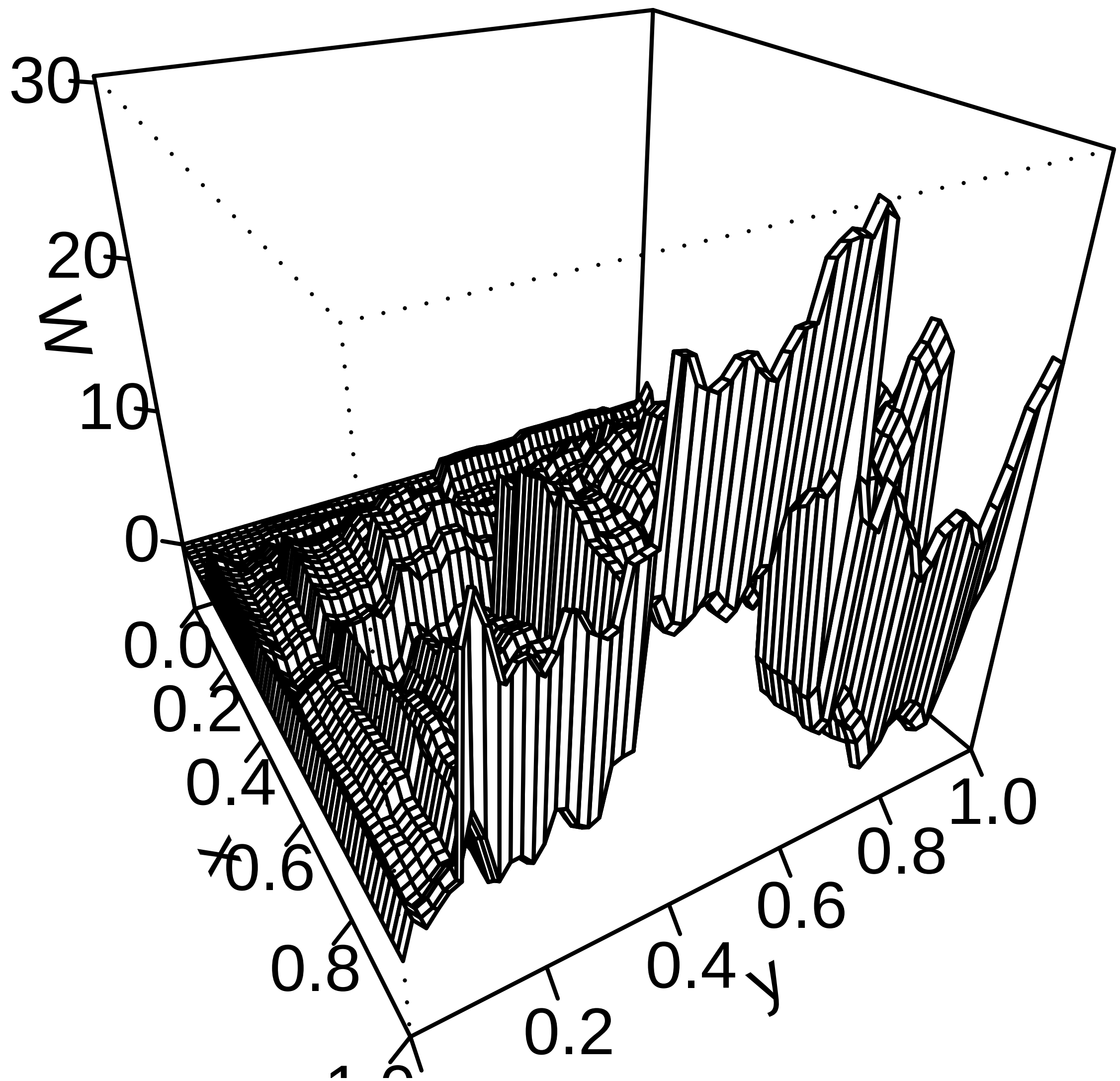
- Pagerintas Erickson rezultatas dvimačiam atvejui. “Reikia” dvigubai mažiau momentų.

$$\lim_{t\to\infty} t^p \mathbf{P}(|X_{\mathbf{1}}| \geq t) = 0.$$

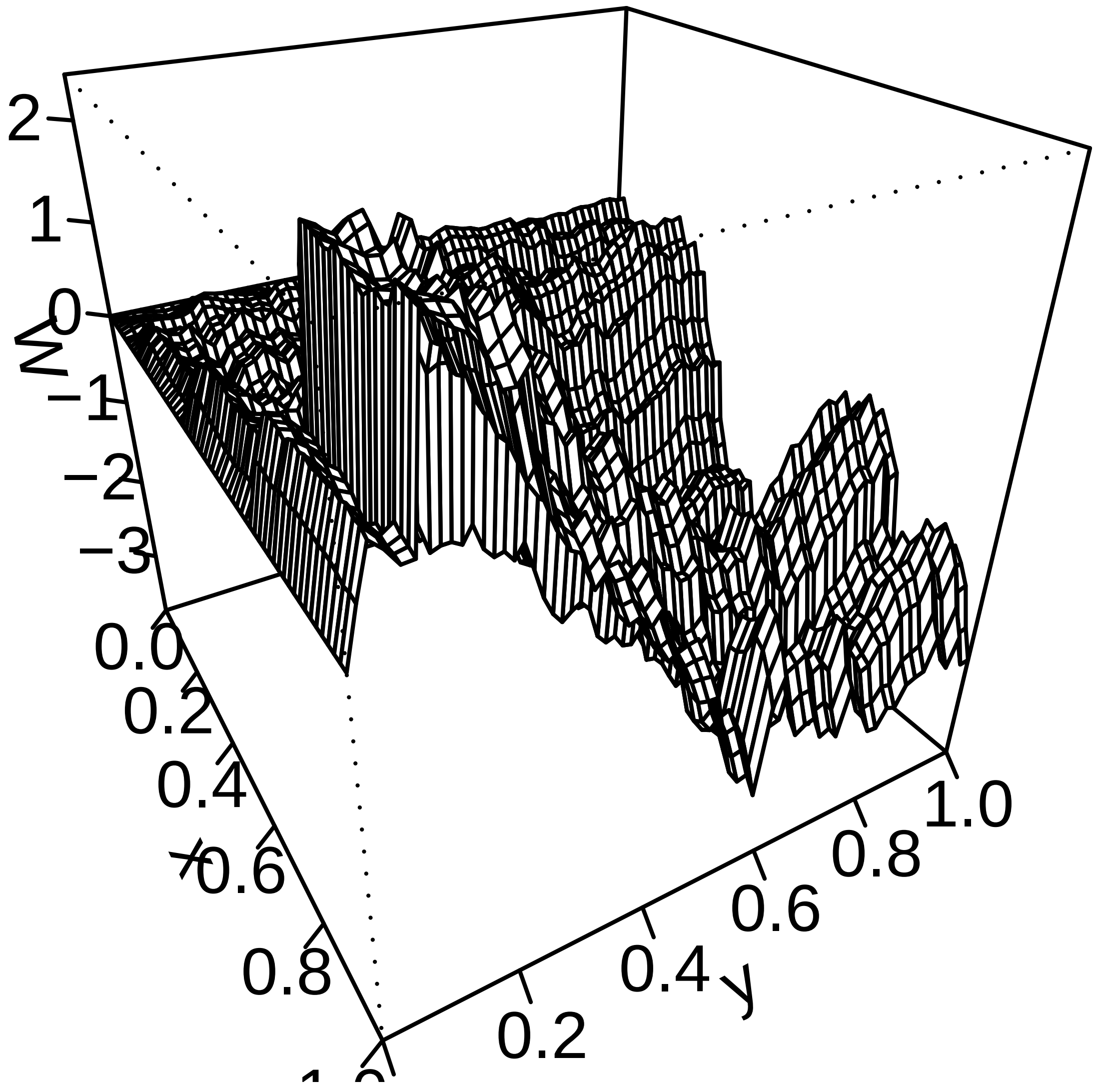
- Einant fiksuotais keliais: $n_2 = O(n_1^r)$, $r \geq 1$ užtenka mažiau momentų, negu vienmačiu atveju.

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{r+1}{r/p+1/2}} \mathbf{P}(|X_{\mathbf{1}}| \geq t) = 0.$$

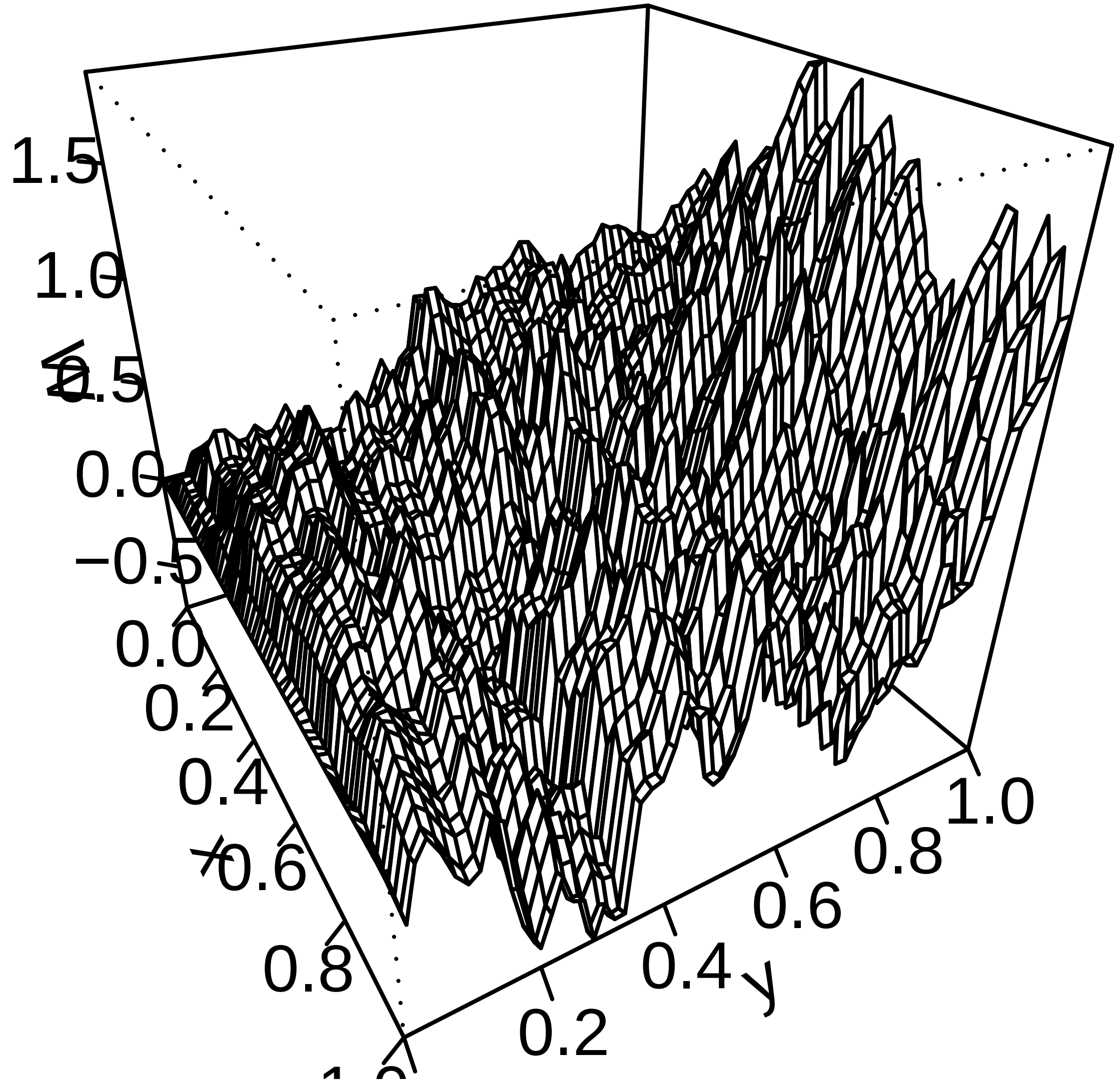
Skirtingas momentų skaičius



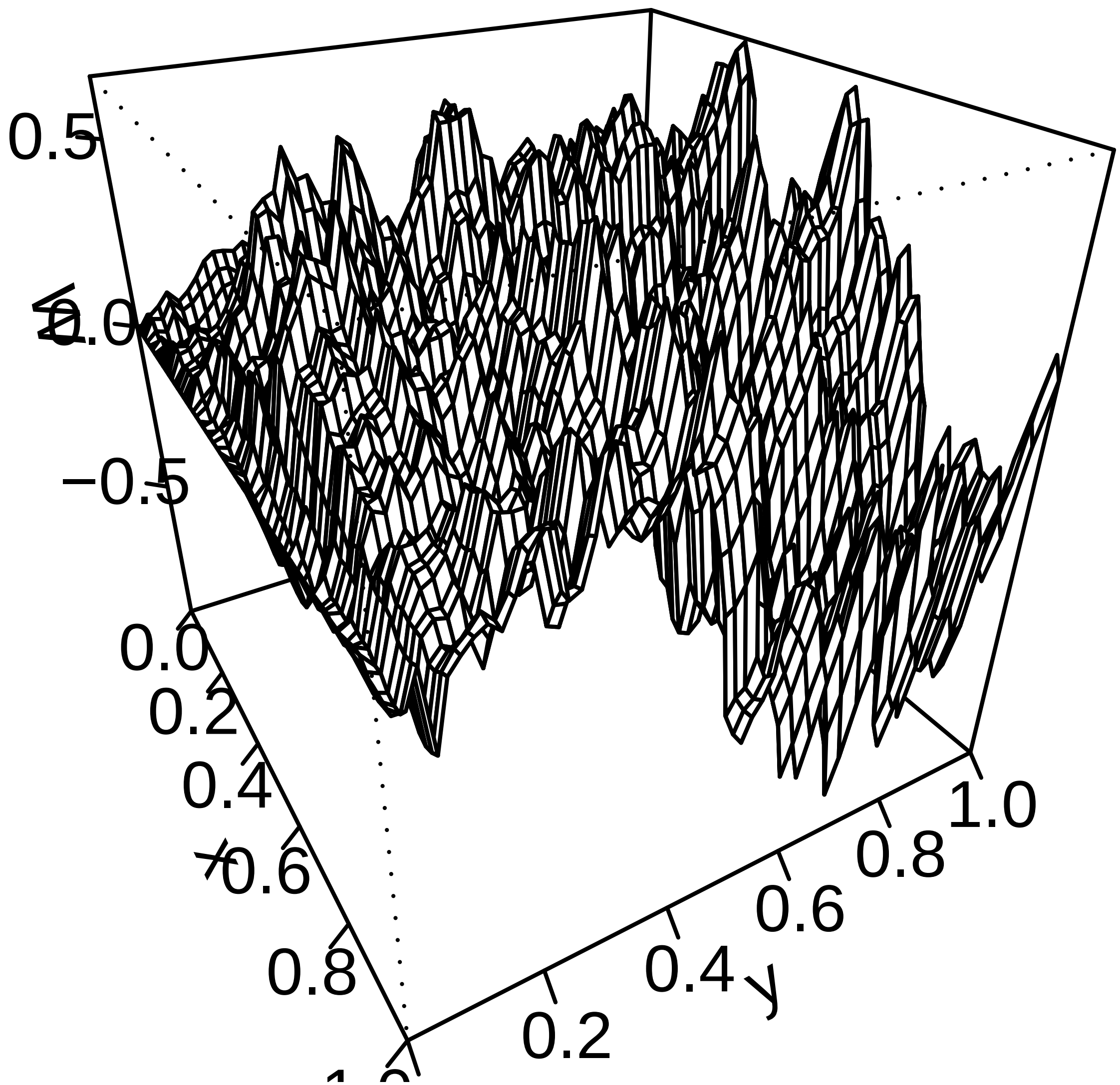
Skirtingas momentų skaičius



Skirtingas momentų skaičius



Skirtingas momentų skaičius



Neišspręstos problemos

- Hiolderio erdvės su bendresniu tolydumo moduliu ρ.
- Rasti būtinas ir pakankamas sąlygas, kai $d \geq 2$.
- Rasti būtinas ir pakankamas sąlygas atvejui su Vynerio paklode $\{W(A), A \in T_{\mathcal{B}}\}$, čia $T_{\mathcal{B}}$ – visų $[0,1]^d$ Borelio poaibių, kurių Lebego matas baigtinis, aibė.
- Save normuojančio apibendrinto laužčių proceso konvergavimas.

Papildoma informacija

- Skaidrė daryta su LaTeX naudojant **prosper** paketą iš http://prosper.sourceforge.net
- Grafikai daryti naudojant statistinį paketą **R** iš http://www.r-project.org
- Skaidres, LaTeX dokumentą ir **R** kodą galima rasti http://mif.vu.lt/~zemlys/mokslas/