Funkcinė centrinė ribinė teorema serijų schemai

Vaidotas Zemlys

Vilniaus Universitetas

Université des Sciences et Technologies de Lille

2007 gegužės 8 d.

- Vienmatis

$$\xi_n(t) = S_{[nt]} + (nt - [nt])X_{[nt]+1}$$

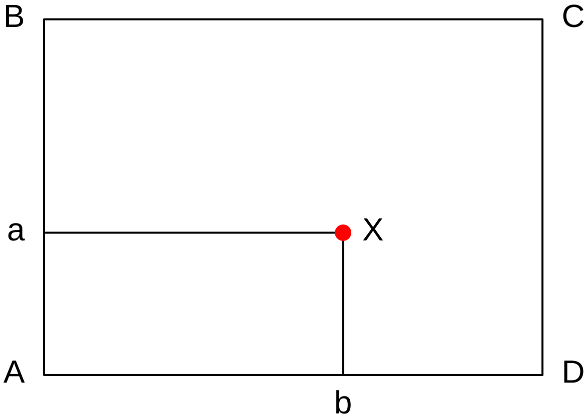
- Gardelė:

$$R_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{j}} := [(j_1 - 1)/n_1, j_1/n_1] \times \cdots \times [(j_d - 1)/n_d, j_d/n_d].$$

- Daugiamatis:

$$\xi_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{t}) = \sum_{\boldsymbol{1} \leq \boldsymbol{j} \leq \boldsymbol{n}} |R_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{j}}|^{-1} |R_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{j}} \cap [0, \boldsymbol{t}]| X_{\boldsymbol{j}}$$

Sumavimo proceso konstrukcijos paaiškinimas



$$X = \frac{(1-a)(1-b)}{cd}A + \frac{a(1-b)}{cd}B + \frac{b(1-a)}{cd}D + \frac{ab}{cd}C$$

FCRT

- Vienmačio argumento

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\xi_n \to W \text{ erdvėje } C([0,1])$$

- Daugiamačio argumento

$$\frac{1}{\sqrt{n_1 \dots n_d}}\xi_{\boldsymbol{n}} \to W \text{ erdvėje } C([0,1]^d)$$

Hiolderio erdvės

- $H^o_\alpha([0,1]^d)$, $0 < \alpha \leq 1$ yra aibė tokių realių tolydžių funkcijų $x : [0,1]^d \to \mathbb{R}$, kurioms $\lim_{\delta \to 0} w_\alpha(x, \delta) = 0$, čia

$$w_\alpha(x,\delta) = \sup_{\boldsymbol{t},\boldsymbol{s} \in [0,1]^d, 0 < |\boldsymbol{t} - \boldsymbol{s}| < \delta} \frac{|x(\boldsymbol{t}) - x(\boldsymbol{s})|}{|\boldsymbol{t} - \boldsymbol{s}|^\alpha}.$$

- Separabili Banacho erdvė su norma

$$\|x\|_\alpha = |x(0)| + w_\alpha(x, 1).$$

Sąlygos

- $C([0,1]^d)$. Tokios pačios kaip ir CRT, $EX_1^2 < \infty$. Prokhorov (1956), Alexander ir Pyke (1986).
- $H_\alpha([0,1])$:

$$\lim_{t\to\infty} t^p P(|X_1| > t) = 0$$

  Račkauskas ir Suquet (2001), čia $p = 1/(1/2 - \alpha)$.
- $H_\alpha([0,1]^d)$:

$$\sup_{t>0} t^p P(|X_1| > t) < \infty$$

  Račkauskas, Suquet, Zemlys (2006).

- $\{X_{n,k}, 1 \leq k \leq k_n, n \in \mathbb{N}\}$. Kiekvienam n, $X_{n,k}$ nepriklausomi.
- Įprastinė konstrukcija „netinka“:

$$E\xi_n(t)^2 \approx \sum_{k=1}^{[nt]} \sigma_{n,k}^2$$

čia $\sigma_{n,k}^2 = EX_{n,k}^2$.

- $b_n(k) = \sum_{j=1}^{k} \sigma_{n,j}^2$.
- Tegu $b_n(k_n) = 1$, tada

$$\xi_n(t) = S_n(k-1) + (t - b_n(k-1))\sigma_{n,k}^2 X_{n,k},$$

kai $b_n(k-1) < t \leq b_n(k)$.

Sąlygos

- $C([0,1])$, kaip ir CRT,

$$\max_{1\le k\le k_n} \sigma_{n,k}^2 \to 0$$

$$\sum_{k=1}^{k_n} EX_{n,k}^2 I(|X_{n,k}| > \varepsilon) \to 0$$

Araujo ir Gine (1980)

- $H_\alpha^o([0,1])$, $q > p = 1/(1/2 - \alpha)$,

$$\sum_{k=1}^{k_n} \sigma_{n,k}^{-2q\alpha} EX_{n,k}^q \to 0,$$

Račkauskas ir Suquet (2003)

- $(X_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{k}},\ \mathbf{1} \le \boldsymbol{j} \le \boldsymbol{k_n}),\ \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^d$
- $$S_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{k}) = \sum_{\boldsymbol{j} \le \boldsymbol{k}} X_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{j}}, \quad b_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{k}) = \sum_{\boldsymbol{j} \le \boldsymbol{k}} \sigma^2_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{k}}$$
- $b_i(k) = b_{\boldsymbol{n}}(k^1_{\boldsymbol{n}}, \dots, k^{i-1}_{\boldsymbol{n}}, k, k^{i+1}_{\boldsymbol{n}}, \dots, k^d_{\boldsymbol{n}})$
- Netolygi gardelė:

$$R_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{j}} := \Big[b_1(j_1 - 1),\ b_1(j_1)\Big) \times \dots \times \Big[b_d(j_d - 1),\ b_d(j_d)\Big)$$

Rezultatas

- Sumavimo procesas

$$\xi_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{t}) = \sum_{\boldsymbol{1} \leq \boldsymbol{j} \leq \boldsymbol{n}} |R_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{j}}|^{-1} |R_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{j}} \cap [0, \boldsymbol{t}]| X_{\boldsymbol{j}}$$

- Funkcinė centrinė ribinė teorema:

$$\xi_{\boldsymbol{n}} \to W \text{ erdvėje } H_\alpha([0,1]^d),$$

kai $\mathrm{m}(\boldsymbol{n}) \to \infty$.

Sąlygos tirštumui

- Begalinio mažumo sąlyga:

$$\max_{1\le l\le d}\max_{1\le k_l\le k_{\boldsymbol{n}}^l}\Delta b_l(k_l)\to 0,\ \text{kai } \mathrm{m}(\boldsymbol{n})\to\infty$$

- Momentinė sąlyga:

$$\lim_{\mathrm{m}(\boldsymbol{n})\to\infty}\sum_{\boldsymbol{1}\le\boldsymbol{k}\le\boldsymbol{k_n}}\sigma_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{k}}^{-2q\alpha}E|X_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{k}}|^q=0,$$

čia $q>p:=1/(1/2-\alpha)$.

Apibrėžimai

Kiekvienai funkcijai $x \in H^o_\alpha([0,1]^d)$:

$$\lambda_{0,\boldsymbol{v}}(x) = x(\boldsymbol{v}), \quad \boldsymbol{v} \in V_0,$$
$$\lambda_{j,\boldsymbol{v}}(x) = x(\boldsymbol{v}) - \frac{1}{2}(x(\boldsymbol{v}^-) + x(\boldsymbol{v}^+)), \quad \boldsymbol{v} \in V_j, \;\; j \geq 1,$$

čia $V_j = W_j \setminus W_{j-1}$, $W_j = \{k2^{-j}; 0 \leq k \leq 2^j\}^d$.

$$v_i^{\pm} = \begin{cases} v_i \pm 2^j, & \text{kai } k_i \text{ yra nelyginis;} \\ v_i, & \text{kai } k_i \text{ yra lyginis.} \end{cases}$$

Tirštumo kriterijus

Teiginys

Tegu $\{\phi_{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^d\}$ ir ϕ yra atsitiktiniai elementai su reikšmėmis erdvėje $H_\alpha^o([0,1]^d)$. Tarkime yra tenkinamos sąlygos.

i) *Kiekvienam diadiniam $\boldsymbol{t} \in [0,1]^d$, apibendrinta seka $\phi_{\boldsymbol{n}}(t)$ yra asimptotiškai tiršta.*

ii) *Kiekvienam $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{J\to\infty} \limsup_{\boldsymbol{n}\to\infty} P(\sup_{j\geq J} 2^{\alpha j} \max_{\boldsymbol{v}\in V_j} |\lambda_{j,\boldsymbol{v}}(\phi_{\boldsymbol{n}})| > \varepsilon) = 0.$$

Tada apibendrinta seka $\phi_{\boldsymbol{n}}$ yra asimptotiškai tiršta erdvėje $H_\alpha^o([0,1]^d)$.

Prielaidos baigtiniamačių pasiskirstymų konvergavimui

- $\mathcal{J}$ visos baigtinės aibių $\{[0, \boldsymbol{t}]\}$ sankirtos.
- "Dispersijos matas":

$$\mu_{\boldsymbol{n}}(C) = \sum_{\boldsymbol{1} \le \boldsymbol{k} \le \boldsymbol{k_n}} \mathbf{1}\{\boldsymbol{B}(\boldsymbol{k}) \in C\} \sigma^2_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{k}}$$

- Prielaida: kiekvienam $C \in \mathcal{J}$

$$\lim_{\mathrm{m}(\boldsymbol{n}) \to \infty} \mu_{\boldsymbol{n}}(C) \to |C|.$$

Baigtiniamačių skirstinių problema

- Serijų schema: $\boldsymbol{k_n} = (2n, 2n)$

$$\sigma_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{k}} = \frac{1}{10n^2}, \boldsymbol{k} \leq (n, n)$$
$$\sigma_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{k}} = \frac{3}{10n^2}, \boldsymbol{k} \in \{1, \dots, 2n\}^2 \setminus \{1, \dots, n\}^2$$

- $E\xi_{\boldsymbol{n}}^2(1/2, 1/2) = 1/10$, kai $EW^2(1/2, 1/2) = 1/4$.

Goldie ir Greenwood (1986) rezultatas

- Naudojama tolygi gardelė. Reikalaujama baigtiniamačių skirstinių konvergavimo.
- FCRT tolydžių funkcijų erdvėje.
- Momentinė sąlyga: seka $(n^{d/2}X_{n,k})^s$ turi būti tolygiai integruojama, kuriam nors $s > 2$.

Bickel ir Wichura (1971) rezultatas

- Atvejis $d = 2$, $EX^2_{\boldsymbol{n},(i,j)} = a_i b_j$.
- $$S_n(t_1, t_2) = \sum_{i \le A_n(t_1)} \sum_{j \le B_n(t_2)} X_{n,(i,j)}.$$
- Jei tenkinama Lindebergo ir begalinio mažumo sąlyga, $S_n(\boldsymbol{t})$ konverguoja į Vynerio paklodę erdvėje $D([0,1]^2)$.

Tolimesni planai

- Sąlygos tolygiai gardelei.
- Momentinių sąlygų susilpninimas.
- Alternatyvi gardelės konstrukcija.