

Funkcinė centrinė ribinė teorema daugiamačio indekso sumavimo procesams

A. Račkauskas^{1,3}, Ch. Suquet², V. Zemlys^{1,2}

¹Vilniaus Universitetas

²Universite des Sciences et Technologies de Lille

³Matematikos ir informatikos institutas

2006 gegužės 23

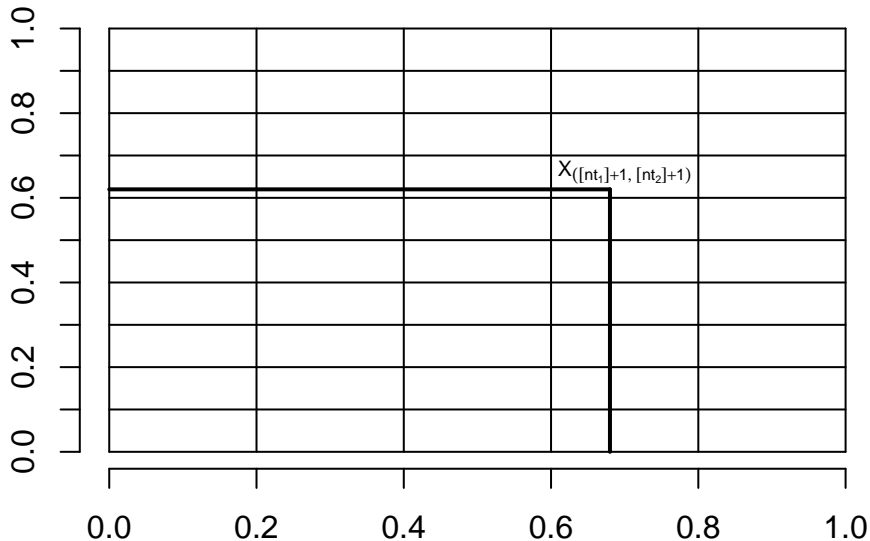
- $(X_j, j \in \mathbb{N}^d)$ – nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai su nuliniu vidurkiu.
- $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d)$, $A \subset [0, 1]^d$ Borelio poaibis

$$\xi_{\mathbf{n}}(A) = \sum_{j \leq \mathbf{n}} |R_{\mathbf{n},j}|^{-1} |R_{\mathbf{n},j} \cap A| X_j,$$

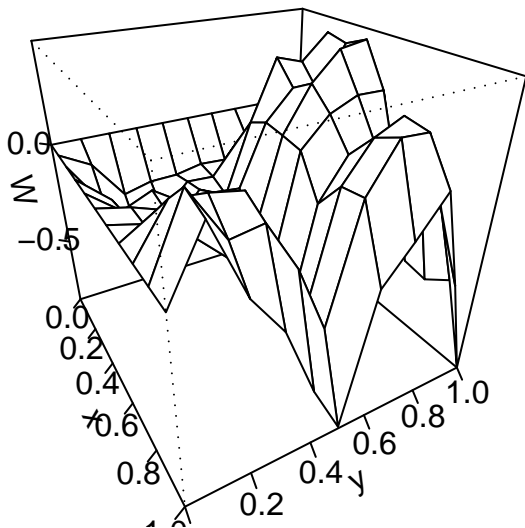
čia

$$R_{\mathbf{n},j} := [(j_1 - 1)/n_1, j_1/n_1] \times \dots \times [(j_d - 1)/n_d, j_d/n_d].$$

Dvimatis atvejis $A = [0, t_1] \times [0, t_2]$



Dvimatis atvejis $A = [0, t_1] \times [0, t_2]$



Funkcinė centrinė ribinė teorema (FCRT) galioja, jei

$$(n_1 \cdots n_d)^{-1/2} \xi_{\mathbf{n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} W, \text{ kai } m(\mathbf{n}) \rightarrow \infty.$$

tam tikroje trajektorijų erdvėje, čia $m(\mathbf{n}) := n_1 \wedge \dots \wedge n_d$.

Trajektorijų erdvės

(T, d) – parametrų aibė, $(B, |||)$ – reikšmių aibė.

Trajektorijų erdvės

(T, d) – parametrų aibė, $(B, \|\cdot\|)$ – reikšmių aibė.

- $C(T, B)$ – tolydžių funkcijų aibė su įprastine norma

$$\|x\|_{\infty} = \sup_{t \in T} \|x\|$$

(T, d) – parametrų aibė, $(B, \|\cdot\|)$ – reikšmių aibė.

- $H_\rho(T, B)$ – aibė tolydžių funkcijų tenkinančių $w(x, 1) < \infty$,
čia

$$w_\rho(x, \delta) = \sup_{t, s \in T, d(t, s) < \delta} \frac{\|x(t) - x(s)\|}{\rho(d(t, s))}.$$

su norma

$$\|x\|_\rho := \|x\|_\infty + w_\rho(x, 1)$$

(T, d) – parametrų aibė, $(B, \|\cdot\|)$ – reikšmių aibė.

- $C(T, B)$ – tolydžių funkcijų aibė su įprastine norma

$$\|x\|_{\infty} = \sup_{t \in T} \|x\|$$

- $H_{\rho}(T, B)$ – aibė tolydžių funkcijų tenkinančių $w(x, 1) < \infty$,
čia

$$w_{\rho}(x, \delta) = \sup_{t, s \in T, d(t, s) < \delta} \frac{\|x(t) - x(s)\|}{\rho(d(t, s))}.$$

su norma

$$\|x\|_{\rho} := \|x\|_{\infty} + w_{\rho}(x, 1)$$

$\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d)$, $A = [0, 1]^d$ Borelio poaibis

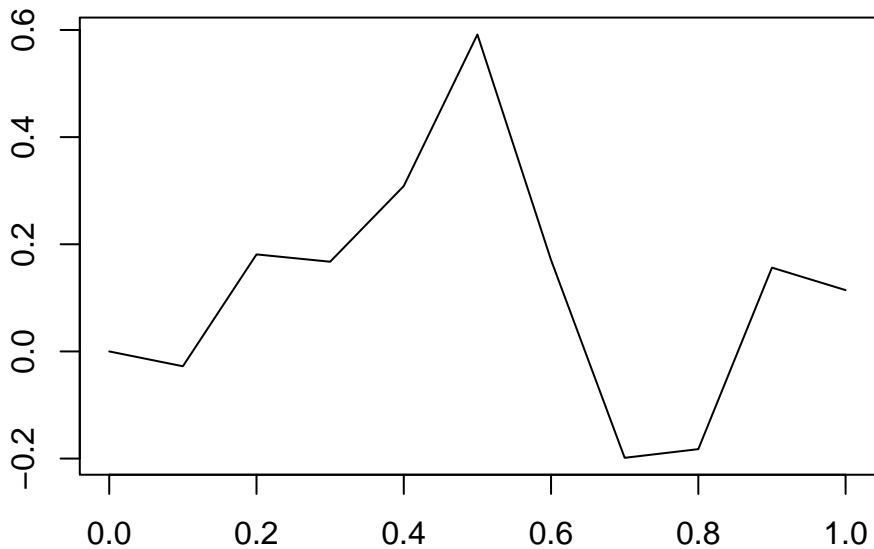
$$\xi_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}) = \sum_{j \leq \mathbf{n}} |R_{\mathbf{n},j}|^{-1} |R_{\mathbf{n},j} \cap A| X_j,$$

$A = [0, t]$, $\mathbf{n} = (n)$.

$$\xi_n(t) = S_{[nt]} + (nt - [nt])X_{[nt]+1}, \quad t \in [0, 1],$$

čia

$$S_k = X_1 + X_2 + \dots + X_k, \quad k = 1, 2, \dots$$



- Erdvėje $C[0, 1]$, Donskerio-Prochorovo invariantiškumo princips. Būtina ir pakankama sālyga $EX_1^2 < \infty$
- Erdvėje $H_\alpha^o([0, 1])$, Lamperti (1962), pakankama sālyga $E|X_1|^q < \infty$, $q > 1/(1/2 - \alpha)$, $0 < \alpha < 1/2$.
- Erdvėje $H_\alpha^o([0, 1])$, Račkauskas-Suquet. Būtina ir pakankama sālyga

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{1/(1/2-\alpha)} P(|X_1| > t) = 0$$

- Kuelbs (1973). $C([0, 1], B)$ – būtina ir pakankama sāļga $X_1 \in CRT(B)$.
- Račkauskas ir Suquet (2003). $H_\rho^o([0, 1], B)$ – būtina ir pakankama sāļga $X_1 \in CRT(B)$ ir kiekvienam $A > 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} tP(\|X_1\| > A\theta(t)) = 0,$$

čia $\theta(t) = t^{1/2}\rho(1/t)$.

- W – Wynerio paklodė (sheet). $W(A)$ – normalusis su $EW(A) = 0$ ir $EW(A)W(B) = |A \cap B|$, Borelio aibėms $A, B \subset [0, 1]^d$.
- Imant $A = [0, t] \subset [0, 1]$ įprastas Brauno judesys

$\{X(t), t \in T\}$ - normalusis procesas. $d(t, s) = \sqrt{E|X(t) - X(s)|^2}$

Teiginys

Dudley (1973). Tegu $N(\varepsilon) = \exp(H(\varepsilon))$ yra mažiausias n toks, kad egzistuoja aibės $A_1, \dots, A_n \subset T$, tokios, kad $T \subset \cup_1^n A_k$ ir $\text{diam } A_k \leq 2\varepsilon$ visiems k . Tegu

$$f(t) := \int_0^t (H(s))^{1/2} ds < \infty$$

Tada $X(t)$ turi modifikacijas $C(T, \mathbb{R})$ ir $H_f(T, \mathbb{R})$ erdvėse.

- Parametrų aibė $(\mathcal{A} := \mathcal{B}([0, 1]^d), d)$ su

$$d(A, B) = \sqrt{|A\Delta B|} = \sqrt{E(W(A) - W(B))^2}$$

- Remiantis Dudley teorema, $W \in C(\mathcal{A}, \mathbb{R})$ ir $W \in H_f(\mathcal{A}, \mathbb{R})$.

FCRT- $C(\mathcal{A}, \mathbb{R})$. Bass (1985), Pyke (1986), pakankama sąlyga $EX_1^2 < \infty$ ir

$$\int_0^1 \log(N_I(\varepsilon, \mathcal{A}, \delta)) d\varepsilon < \infty$$

čia $N_I(\varepsilon, \mathcal{A}, \delta)$ - metrinė entropija su įdėjimu.

- Jei T - visiškai aprėžta, $H_\rho(T, \mathbb{R})$ yra σ -kompaktiška separabili tiesinė erdvė su norma $\|x\|_g$, kai $\rho = o(g)$.

- Jei T - visiškai aprėžta, $H_\rho(T, \mathbb{R})$ yra σ -kompaktiška separabili tiesinė erdvė su norma $\|x\|_g$, kai $\rho = o(g)$.
- Erickson (1981). Tegu $E|X_1|^p < \infty$, $r_1(\mathcal{A}) \leq r$, ir $q := p/2 - r > 0$.

Tada FCRT erdvėje $H_\rho(\mathcal{A}, \mathbb{R})$ su norma $\|x\|_f$, $\rho = o(f)$ galioja su $\rho(h)^p = h^q |\log h| |\log \log h|^\beta$, kiekvienam $\beta > 1$.

- Imant $\mathcal{A} := \{[0, t_1] \times \cdots \times [0, t_d], (t_1, \dots, t_d) \in [0, 1]^d\}$, pakankama sąlyga supaprastėja:

FCRT galioja erdvėje $H_\alpha([0, 1]^d, \mathbb{R})$, jei $E|X|^q < \infty$, kai $q > \frac{d}{1/2-\alpha}$, $0 < \alpha < 1/2$.

- Apibendrinti Račkausko-Suquet rezultatus

- Apibendrinti Račkausko-Suquet rezultatus
 - FCRT- $H_\alpha^o([0, 1]^d, \mathbb{R})$

- Apibendrinti Račkausko-Suquet rezultatus
 - FCRT- $H_\alpha^o([0, 1]^d, \mathbb{R})$
 - FCRT- $H_\alpha^o([0, 1]^d, \mathbb{H})$

- Apibendrinti Račkausko-Suquet rezultatus
 - FCRT- $H_\alpha^o([0, 1]^d, \mathbb{R})$
 - FCRT- $H_\alpha^o([0, 1]^d, \mathbb{H})$
- Rasti būtinas ir pakankamas sąlygas FCRT.

- FCRT- $H_{\alpha}^0([0, 1]^2, \mathbb{R})$

- FCRT- $H_{\alpha}^0([0, 1]^2, \mathbb{R})$
 - Magistrinis darbs (2004)

- FCRT- $H_\alpha^0([0, 1]^2, \mathbb{R})$
 - Magistrinis darbas (2004)
 - Pranešimas LMD konferencijoje(2004)

- FCRT- $H_{\alpha}^0([0, 1]^2, \mathbb{R})$
 - Magistrinis darbas (2004)
 - Pranešimas LMD konferencijoje(2004)
 - Straipsnis LMR (2005)

- FCRT- $H_{\alpha}^0([0, 1]^2, \mathbb{R})$
 - Magistrinis darbas (2004)
 - Pranešimas LMD konferencijoje(2004)
 - Straipsnis LMR (2005)
 - Pranešimas SPRF konferencijoje (2006)

- FCRT- $H_\alpha^o([0, 1]^2, \mathbb{R})$
 - Magistrinis darbs (2004)
 - Pranešimas LMD konferencijojē(2004)
 - Straipsnis LMR (2005)
 - Pranešimas SPRF konferencijojē (2006)
- FCRT- $H_\alpha^o([0, 1]^d, \mathbb{R}, \text{pranešimas LMD konferencijojē (2005)}).$

$$(n_1 n_2)^{-1/2} \xi_n \xrightarrow[n_1 \wedge n_2 \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} W \text{ erdvēje } H_\alpha^0([0, 1]^2),$$

tada ir tik tada, kai

$$n_1 n_2 \mathbf{P}(|X_1| > n_1^{1/p} n_2^{1/2}) \rightarrow 0, \text{ kai } n_1 \wedge n_2 \rightarrow \infty,$$

čia $p = 1/(1/2 - \alpha)$.

$H_\rho^0([0, 1]^d)$ – erdvės $H_\rho([0, 1]^d)$ poerdvis, kurio elementams galioja

$$\lim_{\delta \rightarrow \infty} w_\rho(x, \delta) = 0$$

Teiginys

Račkauskas-Suquet (2000). Su $\rho = h^\alpha \log^\beta(c/h)$, erdvė $H_\rho^0([0, 1]^d, B)$ yra separabili Banacho erdvė, kuriai egzistuoja Schauder išdėstymas.

Kiekvienai funkcijai $x \in H_\alpha^0(\mathbb{H})$:

$$\lambda_{0,\mathbf{v}}(x) = x(\mathbf{v}), \quad \mathbf{v} \in V_0,$$

$$\lambda_{j,\mathbf{v}}(x) = x(\mathbf{v}) - \frac{1}{2}(x(\mathbf{v}^-) + x(\mathbf{v}^+)), \quad \mathbf{v} \in V_j, \quad j \geq 1,$$

čia $V_j = W_j \setminus W_{j-1}$, $W_j = \{k2^{-j}; 0 \leq k \leq 2^j\}^d$.

$$v_i^\pm = \begin{cases} v_i \pm 2^j, & \text{kai } k_j \text{ yra nelyginis;} \\ v_i, & \text{kai } k_j \text{ yra lyginis.} \end{cases}$$

$$x = \sum_{j=0}^{\infty} (E_j - E_{j-1})x,$$

čia

$$E_j x = \sum_{i=0}^j \sum_{v \in V_i} \lambda_{i,v}(x) \Lambda_{i,v}$$

Piramidalinės funkcijos $\Lambda_{j,v}$ apibrėžiamos kaip

$$\Lambda_{j,v}(\mathbf{t}) = \Lambda(2^j(\mathbf{t} - \mathbf{v})), \quad \mathbf{t} \in [0, 1]^d,$$

čia

$$\Lambda(\mathbf{s}) := \max(0, 1 - \max_{s_i < 0} |s_i| - \max_{s_i > 0} s_i), \quad \mathbf{s} = (s_1, \dots, s_d) \in [-1, 1]^d.$$

Teiginys

Tegu $\{\phi_n, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ ir ϕ yra atsitiktiniai elementai su reikšmėmis erdvėje $H_\alpha^0(\mathbb{H})$. Tarkime yra tenkinamos sąlygos.

- i) Kiekvienam diadiniam $\mathbf{t} \in [0, 1]^d$, atsitiktinių \mathbb{H} -elementų apibendrinta seka $\phi_n(\mathbf{t})$ yra asimptotiškai tiršta erdvėje \mathbb{H} .
- ii) Kiekvienam $\varepsilon > 0$

$$\lim_{J \rightarrow \infty} \limsup_{\mathbf{n} \rightarrow \infty} P(\sup_{j \geq J} 2^{\alpha j} \max_{\mathbf{v} \in V_j} |\lambda_{j, \mathbf{v}}(\phi_n)| > \varepsilon) = 0.$$

Tada apibendrinta seka ϕ_n yra asimptotiškai tiršta erdvėje $H_\alpha^0(\mathbb{H})$.

Vynerio procesas su reikšmėmis Hilberto erdvėje \mathbb{H} ir kovariacijos operatoriumi S yra Gausinis nulinio vidurkio \mathbb{H} procesas tenkinantis

$$E\langle W(\mathbf{t}), x \rangle \langle W(\mathbf{s}), y \rangle = (t_1 \wedge s_1) \dots (t_d \wedge s_d) \langle Sx, y \rangle$$

kiekvienam $\mathbf{t}, \mathbf{s} \in [0, 1]^d$ ir $x, y \in \mathbb{H}$.

Remiantis Račkausko ir Suquet rezultatais $W(\mathbf{t})$ turi versiją $H_\alpha^0(\mathbb{H})$.

Teiginys

Tegu X_j , $j \leq \mathbf{n}$ yra vienodai pasisikirstę atsitiktiniai dydžiai su reikšmėmis erdvėje \mathbb{H} .

$$(n_1 \dots n_d)^{-1/2} \xi_{\mathbf{n}} \xrightarrow[m(\mathbf{n}) \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} W \text{ erdvėje } H_{\alpha}^0(\mathbb{H}),$$

tada ir tik tada, kai

$$n_1 \dots n_d \mathbf{P}(\|X_1\| > n_1^{1/p} n_2^{1/2} \dots n_d^{1/2}) \rightarrow 0, \text{ kai } m(\mathbf{n}) \rightarrow \infty.$$

, čia $m(\mathbf{n}) = n_1 \wedge \dots \wedge n_d$.

- Fiksuotai trajektorijai $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d)$ gauname sąlygą:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{d}{d/2-\alpha}} P(\|X_1\| \geq t) = 0,$$

- Trajektorijai $n_1^{1/p} = (n_2 \dots n_d)^{1/2}$ gauname sąlygą:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{1+p/2} P(\|X_1\| \geq t) = 0,$$

Vienareikšmė formuluotė

Sąlyga

$$n_1 \dots n_d \mathbf{P}(\|X_1\| > n_1^{1/p} n_2^{1/2} \dots n_d^{1/2}) \rightarrow 0, \text{ kai } m(\mathbf{n}) \rightarrow \infty.$$

yra ekvivalenti sąlygai

$$\sup_{t>0} t^p P(\|X_1\| > t) < \infty$$

kai $d > 1$.

$$p = 1/(1/2 - \alpha)$$

- Ericksono sąlyga: $E|X_1|^q < \infty$, when $q > d/(1/2 - \alpha)$.

$$\rho = 1/(1/2 - \alpha)$$

- Ericksono sąlyga: $E|X_1|^q < \infty$, when $q > d/(1/2 - \alpha)$.
- Račkausko ir Suquet sąlyga ($d = 1$): $\lim t^\rho \mathbf{P}(|X_1| > t) = 0$

$$\rho = 1/(1/2 - \alpha)$$

- Ericksono sąlyga: $E|X_1|^q < \infty$, when $q > d/(1/2 - \alpha)$.
- Račkausko ir Suquet sąlyga ($d = 1$): $\lim t^p \mathbf{P}(|X_1| > t) = 0$
- Ekvivalenčios sąlygos

$$\lim_{m(\mathbf{n}) \rightarrow \infty} n_1 \dots n_d P(\|X_1\| > n_1^{1/p} n_2^{1/2} \dots n_d^{1/2}) = 0$$

ir

$$\sup_{t>0} t^p P(\|X_1\| > t) < \infty \quad (d > 1)$$

$$p = 1/(1/2 - \alpha)$$

- Ericksono sąlyga: $E|X_1|^q < \infty$, when $q > d/(1/2 - \alpha)$.
- Ekvivalenčios sąlygos

$$\lim_{m(\mathbf{n}) \rightarrow \infty} n_1 \dots n_d P(\|X_1\| > n_1^{1/p} n_2^{1/2} \dots n_d^{1/2}) = 0$$

ir

$$\sup_{t>0} t^p P(\|X_1\| > t) < \infty \quad (d > 1)$$

- 1 Reikia d „mažiau“ momentų.

$$\rho = 1/(1/2 - \alpha)$$

- Račkausko ir Suquet sąlyga ($d = 1$): $\lim t^{\rho} \mathbf{P}(\|X_1\| > t) = 0$
- Ekvivalenčios sąlygos

$$\lim_{m(\mathbf{n}) \rightarrow \infty} n_1 \dots n_d P(\|X_1\| > n_1^{1/\rho} n_2^{1/2} \dots n_d^{1/2}) = 0$$

ir

$$\sup_{t>0} t^{\rho} P(\|X_1\| > t) < \infty \quad (d > 1)$$

- ② Užtenka silpno momento.

$$p = 1/(1/2 - \alpha)$$

- Ericksono sąlyga: $E|X_1|^q < \infty$, when $q > d/(1/2 - \alpha)$.
- Račkausko ir Suquet sąlyga ($d = 1$): $\lim t^p \mathbf{P}(|X_1| > t) = 0$
- Ekvivalenčios sąlygos

$$\lim_{m(\mathbf{n}) \rightarrow \infty} n_1 \dots n_d P(\|X_1\| > n_1^{1/p} n_2^{1/2} \dots n_d^{1/2}) = 0$$

ir

$$\sup_{t>0} t^p P(\|X_1\| > t) < \infty \quad (d > 1)$$

- 1 Reikia d „mažiau“ momentų.
- 2 Užtenka silpno momento.