

Rinktiniai analizės skyriai II. Pratybų uždaviniai

Vaidotas Zemlys

Turinys

1 Pratybų nr. 1 uždaviniai	2
2 Pratybų nr. 2 uždaviniai	3
3 Pratybų nr. 3 uždaviniai	4
4 Pratybų nr. 4 uždaviniai	5
5 Pratybų nr. 5 uždaviniai	6
6 Pratybų nr. 6 uždaviniai	7
7 Pratybų nr. 7-8 uždaviniai	8
8 Pratybų nr. 9 uždaviniai	9
9 Pratybų nr. 10 uždaviniai	10
10 Pratybų nr. 13 uždaviniai	11
11 Pratybų nr. 14 uždaviniai	12
12 Pratybų nr. 15 uždaviniai	13

1 Pratybų nr. 1 uždaviniai

Vasario 5 d.

1. Apskaičiuokite $z^{14} + z^{-14}$, kai z yra lygties $z + 1/z = 1$ šaknys.
2. Raskite plokštumos \mathbb{C} taškų z aibes ir pavaizduokite jas geometriškai:
 - (a) $|z + 1 - i| = |z - 1 + i|$
 - (b) $|z + 1 + 2i| \leq 0$
 - (c) $\arg z = (2n + 1)\pi, n \in \mathbb{Z}$.
3. Įrodykite tapatybes
 - (a) $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$
 - (b) $|z_1 \bar{z}_2 - 1|^2 - |z_1 - z_2|^2 = (|z_1|^2 - 1)(|z_2|^2 - 1)$
4. Įrodykite kad $\arg \bar{z} = 2\pi - \arg z$, kai $\bar{z} \neq z$.
5. Nustatykite, kuri iš aibių yra sritis ir pavaizduokite ją geometriškai
 - (a) $|z - 1| < 1$ ir $|z - 5i| < 1$
 - (b) $|z - i| \geq 1$ ir $|z - i| \leq 2$
 - (c) $|z| < 5, z \notin |Imz| < 1$ ir $|Rez| < 1$.
6. Rasti šių sekų ribas:
 - (a) $\frac{2n-1}{n} + i\frac{n-3}{3}$
 - (b) $\exp\left(i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2n}\right)\right)$
 - (c) $\sin \frac{\pi}{2^n} + i\frac{n^2-3}{5n^2+1}$
7. Išstirkite kaip konverguoja šios eilutės:
 - (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}(i\sqrt{n})}{\sin in}$
 - (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{\operatorname{sh}(in)}$

2 Pratybų nr. 2 uždaviniai

Vasario 12 d.

1. Raskite funkcijų $w = f(z)$ realias ir menamasias dalis:

(a) $w = z^3 - i\bar{z} + 3$

(b) $w = z \cos z + \bar{z}$

(c) $w = \sin z + i(3z + 2)$

2. Ar diferencijuojama funkcija $w = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$?

3. Ištirti funkcijų diferencijavimą ir rasti jų išvestines:

(a) e^z

(b) $\sin z$

(c) $\log z$

4. Įrodykite, kad šios funkcijos yra diferencijuojamos tik taške 0:

(a) $|z|z$

(b) $z\Re z$

(c) $z\Im z$

(d) $|z|\Re \bar{z}$.

5. Kurios iš šių funkcijų ir kokioje srityje yra analizinės:

(a) $w = |z|\Re z - 2z$

(b) $w = \frac{1}{z} \sin z - 3z$

(c) $w = z\Im z + |z|\bar{z}$

(d) $w = ze^{-z} - 3iz$

6. Rasti ribas:

(a) $\lim_{z \rightarrow 1} \frac{\ln z}{z-1}$

(b) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z}{z^2}$.

3 Pratybų nr. 3 uždaviniai

Vasario 19 d.

1. Kuri plokštumos dalis yra ištempžiama, jei
 - (a) $w = \frac{1}{1-z}$?
 - (b) $w = e^{2z}$?
 - (c) $w = z^3$?
2. Kuri plokštumos dalis yra suspaudžiama, jei
 - (a) $w = z^2$?
 - (b) $w = \frac{z+1}{z+2}$?
3. Rasti kokių kampų taško z_0 aplinka pasukama apie tašką z_0 , kai atvaizdis $w = f(z)$
 - (a) $f(z) = \frac{z+i}{z-i}$, $z_0 = 1$,
 - (b) $f(z) = \cos z$, $z_0 = i$,
 - (c) $f(z) = 2iz$, $z_0 = 3 + 2i$.
4. Rasti tiesinę funkciją $w = az + b$, skritulį $|z - z_0| \leq r$ atvaizduojančią į skritulį $|w - w_0| \leq R$.
5. Į kokias kreives funkcija $w = \frac{1}{z}$ vaizduoja
 - (a) tiesę $x + y - 2 = 0$?
 - (b) tiesę $\Re z + \Im z = 1$?
 - (c) apskritimą $|z - 2| = 1$?
6. Raskite deformacijos koeficientą ir posūkio kampą:
 - (a) $w = 3^{-iz} + 2z^2$, $z_0 = 0$
 - (b) $w = \frac{z+1}{z-1}$, $z_0 = 3 + i$
7. Į kokią sritį funkcija $w = \sin z$ vaizduoja pusjuostę $0 < \Re z < 2\pi$, $\Im z > 0$?
8. Raskite sritį, į kurią funkciją $w = \operatorname{ch} z$ vaizduoja pusjuostę $0 < \Im z < \pi$, $\Re z > 0$.

4 Pratybų nr. 4 uždaviniai

Vasario 26 d.

1. Suskaičiuoti integralą $\int_0^{1+i} z^2 dz$.
2. Suskaičiuoti integralą $\int_{|z|=1} \frac{dz}{z}$.
3. Suskaičiuoti integralą $\int_{\Gamma} \frac{dz}{\sqrt[4]{z}}$, čia $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1, \Im z \geq 0\}$:
 - (a) laikant $\sqrt[4]{1} = 1$,
 - (b) laikant $\sqrt[4]{1} = i$ ir kreivės Γ pradinis taškas yra $z = 1$.
4. Suskaičiuoti integralą $\int_{\Gamma} \bar{z} dz$, kai $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : \|(x, y)\|_{\max} = 1\}$.
5. Suskaičiuoti integralą $\int_{\Gamma} \frac{1+z^2}{z} dz$, čia $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : z = Re^{it}, t \in [0, \pi]\}$
6. Suskaičiuoti integralą $\int_1^i \frac{\ln(z+1)}{z+1} dz$ apskritimo $|z| = 1, \Im z \geq 0, \Re z \geq 0$.

5 Pratybų nr. 5 uždaviniai

Kovo 19 d.

1. Suskaičiuoti integralą $\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^3 - 2z^2}$.

2. Suskaičiuoti integralus

(a) $\int_{|z|=3} \frac{\cos z}{z^2 + 4z} dz$

(b) $\int_{|z+i|=1} \frac{dz}{z^2 + 1}$

(c) $\int_{|z|=4} \frac{\cos z}{(z - \pi)^3}$

3. Suskaičiuoti integralus

(a) $\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^4} dz$

(b) $\int_{|z|=3} \frac{\cos \pi z dz}{(z-1)^3}$

(c) $\int_{|z|=2} \frac{z^4 + 3z^3 - 2z + 1}{(z+1)^3} dz$

4. Rasti eilučių konvergavimo sritis

(a) $\sum_{k=0}^{\infty} z^{k^2}$

(b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-i)^k}{k^2}$

6 Pratybų nr. 6 uždaviniai

Kovo 20 d.

1. Rasti eilučių konvergavimo sritis

(a) $\sum_{k=0}^{\infty} z^{k^2}$

(b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-i)^k}{k^2}$

2. Išreikškite z laipsniais funkciją $\frac{1}{1+z} + e^{-z}$.

3. Išreikškite z laipsniais funkciją $\frac{e^z}{1-z}$.

4. Išskleisti funkciją $\frac{2z-5}{z^2-5z+6}$ taško 1 aplinkoje.

5. Išskleiskite Lorano eilute taško z_0 aplinkoje šias funkcijas:

(a) $\frac{z+3}{z^2-1}$, $z_0 = 1$

(b) $\exp\left(\frac{z}{z-3}\right)$, $z_0 = 3$.

7 Pratybų nr. 7-8 uždaviniai

Kovo 26 d.

1. Išreikškite z laipsniais funkcijas

(a) $\frac{1}{1+z} + e^{-z}$.

(b) $\frac{e^z}{1-z}$.

2. Išskleisti funkciją $\frac{2z-5}{z^2-5z+6}$ taško 1 aplinkoje.

3. Išskleiskite Teiloro eilute nurodyto taško $z_0 = 0$ šias funkcijas:

(a) $\frac{1}{5z+4}$, $z_0 = 2$

(b) $\sin(2z + 1)$, $z_0 = -1$

(c) $e^{z-1} \sin(z - 1)$, $z_0 = 1$.

(d) $\cos^2 z + \operatorname{ch}^2 z$, $z_0 = 0$.

(e) $\cos z \operatorname{ch} z$, $z_0 = 0$.

4. Rasti funkcijų nulius ir nustatyti jų eilę:

(a) $z^3(z^2 + 4)^2$

(b) $z^2 \sin z$

(c) $e^{\tan z}$

5. Išskleiskite Lorano eilute taško z_0 aplinkoje šias funkcijas:

(a) $\frac{z+3}{z^2-1}$, $z_0 = 1$

(b) $\exp\left(\frac{z}{z-3}\right)$, $z_0 = 3$.

(c) $z^2 e^{1/z}$, $z_0 = 0$

(d) $z^2 e^{1/z}$, $z = \infty$

(e) $z^{\frac{1}{4}} \cos \frac{1}{z}$, $z_0 = 0$

(f) $z e^{\frac{1}{z+i}}$, $z_0 = i$.

(g) $z^2 \sin\left(\pi \frac{z+1}{z}\right)$, $0 < |z| < \infty$

6. Išskleiskite funkcijas Lorano eilute taško z_0 aplinkoje ir raskite pagrindinę eilutės dalį:

(a) $\frac{z-1}{\sin z}$, $z_0 = 0$

(b) $\frac{e^{iz}}{z^2+b^2}$, $z_0 = ib$, $b > 0$.

8 Pratybų nr. 9 uždaviniai

1. Apskaičiuoti $\operatorname{Res}_{z=0} \frac{\sin z}{z^4}$
2. Apskaičiuoti funkcijos $z \cos \frac{1}{z+2}$ reziduumus.
3. Apskaičiuoti integralą $\int_{|z|=2} e^{\frac{1}{z-1}} dz$.
4. Apskaičiuoti integralą $\int_{|z|=3} \frac{dz}{z^2+4}$.
5. Apskaičiuoti integralą $\int_{|z|=2} \frac{z^{12}}{(2z^2+1)^2(3z^3+1)^3}$
6. Apskaičiuoti funkcijos $\frac{z^6}{(z-i)^4}$ reziduumus.
7. Apskaičiuoti funkcijos $\operatorname{ctg} z^2$ reziduumus.

9 Pratybų nr. 10 uždaviniai

Išspręsti dif. lygtis:

1. $\sqrt{1+y^2}dx = xydy$

2. $(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0, y(0) = 1.$

3. $xy' + y = y^2, y(1) = 0,5.$

4. $e^{-s} \left(1 + \frac{ds}{dt}\right) = 1$

5. $y' = \cos(y - x)$

6. $y' - y = 2x - 3$

7. $x^2y' - \cos 2y = 1, y(\infty) = \frac{9}{4}\pi$

8. $3y^2y' + 16x = 2xy^3, y(x)$ yra apribota, kai $x \rightarrow \infty$

10 Pratybų nr. 13 uždaviniai

Išspręsti

1. $(2x + 1)y' = 4x + 2y$

2. $(xy + e^x)dx - xdy$

3. $(x + y^2)dy = ydx$

4. $(\sin^2 y + x \operatorname{ctg} y)y' = 1$

5. $\frac{y}{\sqrt{y^2+1}} \frac{dy}{dx} + \sqrt{y^2+1} = x^2 + 1$

6. $3dy + (1 + e^{x+3y})dx = 0$

7. $(x + 1)(y' + y^2) = -y$

8. $(x^3y - 3x^2y + y^3)dx + 2x^3dy = 0$

11 Pratybų nr. 14 uždaviniai

Išspręsti dif. lygtis

1. $\frac{\sqrt{\ln y}}{y} \frac{dy}{dx} + \frac{2}{3(x+1)} \sqrt{(\ln y)^3} = 1$

2. $(x+1)(y' + y^2) = -y$

3. $xydx + (x^2 + y^2 + 1)dy = 0$

4. $(x^3y - 3x^2y + y^3)dx + 2x^3dy = 0$

5. $(x \ln y - x^2 + \cos y)dy + (x^3 + y \ln y - y - 2xy)dx = 0$

6. $y'' + y' - 2y = 0$

7. $y'' - 2y' = 0, y(0) = 0, y'(0) = 2.$

8. $y^{IV} + 2y'' + y = 0.$

12 Pratybų nr. 15 uždaviniai

Išspręsti dif. lygtis

1. $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}; y(0) = 1, y'(0) = 0$

2. $y'' - y = 2e^x - x^2$

3. $y'' - 3y' + 2y = \sin x$

4. $y'' - 2y' + 2y = e^x + x \cos x$

Išspręsti lygčių sistemas

1. $x' = 2x + y, y' = 3x + 4y$

2. $x' = x - y, y' = y - 4x$

3. $x' = x - y + z, y' = x + y - z, z' = 2x - y$

4. $x' = 2x + y, y' = x + 3y - z, z' = -x + 2y + 3z$