Rinktiniai analizės skyriai. Rudens semestro pratybų medžiaga

1 Paskaita nr. 1

Rugsėjo 3 d.

1. Tegu A yra euklidinės erdvės aibė ir x yra jos uždarinio $\bar{A}$ elementas. Įrodyti, kad egzistuoja iš aibės A elementų sudaryta seka (x_n), kuri konverguoja į x.

2. Tegul A yra euklidinės erdvės $\mathbb{R}^n$ atviroji aibė ir B yra euklidinės erdvės $\mathbb{R}^m$ atviroji aibė. Įrodyti, kad jų *Descartes*o sandauga $A \times B$ yra euklidinės erdvės $\mathbb{R}^{n+m}$ atviroji aibė.

3. Kuris iš toliau formuluojamų keturių teiginių yra teisingas ir kuris neteisingas:

   (a) jei aibė $F \subset \mathbb{R}^{d+1}$ yra uždara, tai aibė $\{x \in \mathbb{R}^d : (0, x) \in F\}$ yra uždara erdvėje $\mathbb{R}^d$.

   (b) jei aibė $G \subset \mathbb{R}^{d+1}$ yra atvira, tai aibė $\{x \in \mathbb{R}^d : (0, x) \in G\}$ yra atvira erdvėje $\mathbb{R}^d$.

   (c) jei aibė $F \subset \mathbb{R}^d$ yra uždara, tai aibė $\{(0, x) \in \mathbb{R}^{d+1} : x \in F\}$ yra uždara erdvėje $\mathbb{R}^{d+1}$.

   (d) jei aibė $G \subset \mathbb{R}^d$ yra atvira, tai aibė $\{(0, x)x \in \mathbb{R}^{d+1} : x \in G\}$ yra atvira erdvėje $\mathbb{R}^{d+1}$.

4. Tegul A yra euklidinės erdvės aibė. Aibė $\partial A = \bar{A} \backslash A^\circ$ vadinama aibės siena. Įrodyti, kad $x \in \partial A$ tada ir tik tada, kai su kiekvienu $\varepsilon > 0$, ε-aplinkoje $O_\varepsilon(x)$ yra ir aibės A elementų ir aibės $\mathbb{R}^d \backslash A$ elementų.

5. Rasti racionaliųjų skaičių aibės $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ sieną $\partial\mathbb{Q}$.

6. Tegul A ir B yra euklidinės erdvės kompaktinės aibės. Įrodyti, kad aibės $A \cap B$ yra $A \cup B$ yra kompaktinės.