Matematinė analizė. Rudens semestro pratybų uždavinių sprendimai

Vaidotas Zemlys

2010 m. vasario 26 d.

Turinys

1 Pirmoji grupė uždavinių

1.1 1-2 paskaitos

1. Rasti visus funkcijos f kritinius taškus ir nusakyti, kurie taškai yra stacionarumo, o kuriuose funkcija nėra diferencijuojama.

   (a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$

   (b) $f(x) = (x^2 - 1)^{2/3}$

   (c) $f(x) = \sin(\pi x^2)$

2. Duotam intervalui I ir funkcijai $f : I \to \mathbb{R}$ rasti funkcijos minimumą ir maksimumą arba paaiškinti kodėl jis neegzistuoja.

   (a) $f(x) = x^3 - 27x$, $I = [-2, 4]$

   (b) $f(x) = (x^2 - 16)^{2/3}$, $I = [-5, 6)$

   (c) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$, $I = (-\infty, \infty)$

3. Džeimsas Bondas yra vienoje pusėje 12 mylių platumo kanjono, kurio kitoje pusėje yra slapta karinė bazė nutolusi nuo jo per 20 mylias, iki kurios jam reikia nusigauti. Džeimsas Bondas turi įtaisą kuriuo gali persikelti per kanjoną tiesia linija 3 mylių per valandą greičiu. Persikėlęs jis gali tęsti savo misiją pėsčiomis 5 mylių per valandą greičiu. Kur kitoje kanjono pusėje jam geriausiai persikelti, kad iki karinės bazės jis nusigautų greičiausiai?

4. Lordas nusprendė pastatyti stačiakampį aptvarą ant uolos kuri yra upės krantas. Jis turi 1000 pėdų tvoros, bet jam nereikia tverti tos uolos pusės kuri yra prie upės krantas (krantas yra tiesi linija). Kokie aptvaro išmatavimai duos didžiausią aptveriamą plotą?

5. Viela kuri yra ilgio L yra padalinama į dvi dalis. Viena dalis yra sulenkiama į apskritimą, kita į kvadratą. Kokiomis proporcijomis reikia padalinti vielą, kad gautų figūrų plotai būtų maksimalūs?

6. Cilindro, kurio aukštis yra h, o pagrindo spindulys r, tūris yra $V = \pi r^2 h$, o paviršiaus plotas $S = 2\pi r(r + h)$.

   (a) Kokie turėtų būti uždaros cilindrinės skardinės, kurios tūris yra 2000π kubinių colių, išmatavimai, kad jai pagaminti būtų sunaudota mažiausiai skardos?

   (b) Kokio didžiausio tūrio skardinė gali būti padaryta iš 600π kvadratinių colių skardos gabalo?

   (c) Ištirkite kaip pasikeičia šie atsakymai, jei skardinė turi vieną atvirą galą.

7. Raskite tokį kreivės $y = x^2$ tašką, kurios yra arčiausiai taško $(16, \frac{1}{2})$.

8. Stačiakampis yra įbrėžtas į elipsę, kurios lygtis yra $x^2 + 4y^2 = 4$. Raskite didžiausio ploto tokio stačiakampio išmatavimus.

9. *Normandiškas langas* yra stačiakampio su puslankiu viršuje formos. Puslankio diametras sutampa su stačiakampio pločiu.

   (a) Parodyti, kad didžiausio ploto normandiškas langas su fiksuotu perimetru P yra tas, kurio stačiakmpio aukštis yra pusė jo pločio.

   (b) Kaip pasikeičia problema, jeigu mes fiksuotume reikalingo rėmo ilgį, laikydami, kad prie išorinio rėmo dar reikia rėmo dalies, stačiakampio viršui?

ND 1.1 *Rasti visus funkcijos f kritinius taškus ir nusakyti, kurie taškai yra stacionarumo, o kuriuose funkcija nėra diferencijuojama.*

1. $f(x) = 3x^4 - 20x^3 + 36x^2 + 3$

2. $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

3.

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x, & kaix < -1, \\ 4 - x^2, & kai\ -1 \leq x \leq 2, \\ x^2 - 8x + 12, & kai\ x > 2. \end{cases} \tag{1}$$

ND 1.2 *Duotam intervalui I ir funkcijai $f : I \to \mathbb{R}$ rasti funkcijos minimumą ir maksimumą arba paaiškinti kodėl jis neegzistuoja.*

1. $f(x) = x^3 - 27x$, $I = [-2, 4]$
2. $f(x) = (x^2 - 16)^{2/3}$, $I = [-5, 6)$
3. $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$, $I = (-\infty, \infty)$

ND 1.3 *Pateikite pavyzdį funkcijos apibrėžos tiesėje $\mathbb{R}$, kuri turi lokalų maksimumą taške a, bei lokalų minimumą taške b, bet $f(a) < f(b)$.*

ND 1.4 *Turime du koridorius kurie susijungia stačiu kampu, ir kurio vieno plotis yra w_1, o kito w_2. Kokio maksimalaus ilgio kopėčias galima pranešti šiuo praėjimu?*

1.2 3-4 paskaitos

1. Kiekvienai iš funkcijų raskite: taškus, kur funkcija kerta x ir y ašį, horizontaliąsias ir vertikaliąsias funkcijos asimptotes, intervalus, kuriuose funkcija yra monotoninė, iškilumo ir įgaubtumo intervalus, funkcijos lokalius minimumus ir maksimumus, funkcijos išlinkio taškus. Remdamiesi šia informacija nubrėžkite funkcijos grafiką.

   (a) $f(x) = \frac{x^{4/3}}{2} - 2x^{1/3}$

   (b) $f(x) = x^{5/3} + 5x^{-1/3}$

   (c) $f(x) = x - \frac{4}{x}$

   (d) $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x^2-x-2}$

   (e) $f(x) = e^{-x^2/2}$

   (f)

$$f(x) = \begin{cases} x+2, \text{ kai } x \le -1, \\ x^2, \text{ kai } x \ge -1. \end{cases}$$

2. Nubrėžkite funkcijos f tenkinančios visas nurodytas sąlygas grafiką, arba paaiškinkite, kodėl tokia funkcija neegzistuoja:

   (a) f turi lokalų minimumą taškuose $x = -1$, $x = 1$ ir $x = 3$;

   (b) f turi lokalų maksimumą taškuose $x = -3$, $x = 0$, $x = 2$ ir $x = 5$.

   (c) $\max f(x) = f(-3) = 2$

   (d) $\min f(x) = f(1) = -5$

   (e) f yra diferencijuojama išskyrus tašką $x = 5$.

3. Kiekvienam nurodytam reiškiniui arba pateikite pavyzdį arba įrodykite, kad toks reiškinys neįmanomas:

   (a) Išlinkio taškas, kuris yra ir lokalaus ekstremumo taškas.

   (b) Stipriai monotoniška funkcija kur yra išgaubta visoje tiesėje $(-\infty, \infty)$

   (c) Aprėžta funkcija, kuri yra iškila tiesėje $(-\infty, \infty)$

4. Tarkime, kad f yra du kartus tolydžiai diferencijuojama funkcija intervale (a, b) ir šiame intervale yra trys skirtingi taškai x_1, x_2 ir x_3, kuriuose $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$. Įrodykite, kad egzistuoja toks taškas c, kuriam $f^{(2)}(c) = 0$

   Sprendimas. Žinome tokį faktą: jeigu funkcija g yra diferencijuojama intervale (a, b) ir taškams $x_1, x_2 \in (a, b)$, $g(x_1) = g(x_2)$, tai egzistuos toks taškas $c \in (x_1, x_2)$, kuriam $g'(c) = 0$.

   Nemažindami bendrumo laikykime, kad $x_1 < x_2 < x_3$. Remiantis paminėtu faktu turime, kad egzistuoja toks taškas $c_1 \in (x_1, x_2)$, kuriam $f'(c_1) = 0$. Taip pat egzistuoja toks taškas $c_2 \in (x_2, x_3)$, kuriam $f'(c_2) = 0$. Kadangi funkcija f yra du kartus tolydžiai diferencijuojama, tai funkcija f' yra vieną kartą tolydžiai diferencijuojama. Be to $f'(c_1) = f'(c_2)$. Taigi egzistuoja toks taškas $c \in (c_1, c_2)$, kuriam $f''(c) = 0$. Tai ir reikėjo įrodyti.

5. Tarkime, kad f ir g yra du kartus tolydžiai diferencijuojamos funkcijos intervale (a, b). Tegu $c \in (a, b)$ ir $f(c) = f'(c) = 0 = g(c) = g'(c)$, ir $g^{(2)}(c) \neq 0$. Parodykite, kad

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(2)}(c)}{g^{(2)}(c)}$$

   Sprendimas. Kadangi funkcijos f ir g yra du kartus tolydžiai diferencijuojamos jos tenkina *Taylor*o formulę:

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{1}{2}f^{(2)}(c)(x-c)^2 + o\left((x-c)^2\right), \text{ kai } x \to c,$$

$$g(x) = g(c) + g'(c)(x-c) + \frac{1}{2}g^{(2)}(c)(x-c)^2 + o\left((x-c)^2\right), \text{ kai } x \to c.$$

Taigi

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{1}{2}f^{(2)}(c)(x-c)^2 + o\left((x-c)^2\right)}{\frac{1}{2}g^{(2)}(c)(x-c)^2 + o\left((x-c)^2\right)} = \frac{f^{(2)}(c)+o(1)}{g^{(2)}(c)+o(1)},$$

kai $x \to c$. Bet tai ir reiškia, kad

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(2)}(c)}{g^{(2)}(c)}.$$

6. Raskite sinuso funkcijos *Taylor*o formulę taške 0.
7. Rasti funkcijos e^{2x-x^2} *Taylor*o formulę su nariais iki x^5. **(129)**
8. Rasti funkcijos $\sqrt[3]{\sin x^3}$ *Taylor*o formulę su nariais iki x^{13}.**(130)**