Matematinė analizė. Rudens semestro pratybų medžiaga

Vaidotas Zemlys

2010 m. gegužės 18 d.

Turinys

1 Pirmoji grupė uždavinių

1.1 1-2 paskaitos

1. Rasti visus funkcijos f kritinius taškus ir nusakyti, kurie taškai yra stacionarumo, o kuriuose funkcija nėra diferencijuojama.
   (a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$
   (b) $f(x) = (x^2 - 1)^{2/3}$
   (c) $f(x) = \sin(\pi x^2)$
2. Duotam intervalui I ir funkcijai $f : I \to \mathbb{R}$ rasti funkcijos minimumą ir maksimumą arba paaiškinti kodėl jis neegzistuoja.
   (a) $f(x) = x^3 - 27x$, $I = [-2, 4]$
   (b) $f(x) = (x^2 - 16)^{2/3}$, $I = [-5, 6)$
   (c) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$, $I = (-\infty, \infty)$
3. Džeimsas Bondas yra vienoje pusėje 12 mylių platumo kanjono, kurio kitoje pusėje yra slapta karinė bazė nutolusi nuo jo per 20 mylias, iki kurios jam reikia nusigauti. Džeimsas Bondas turi įtaisą kuriuo gali persikelti per kanjoną tiesia linija 3 mylių per valandą greičiu. Persikėlęs jis gali tęsti savo misiją pėsčiomis 5 mylių per valandą greičiu. Kur kitoje kanjono pusėje jam geriausiai persikelti, kad iki karinės bazės jis nusigautų greičiausiai?
4. Lordas nusprendė pastatyti stačiakampį aptvarą ant uolos kuri yra upės krantas. Jis turi 1000 pėdų tvoros, bet jam nereikia tverti tos uolos pusės kuri yra prie upės krantas (krantas yra tiesi linija). Kokie aptvaro išmatavimai duos didžiausią aptveriamą plotą?
5. Viela kuri yra ilgio L yra padalinama į dvi dalis. Viena dalis yra sulenkiama į apskritimą, kita į kvadratą. Kokiomis proporcijomis reikia padalinti vielą, kad gautų figūrų plotai būtų maksimalūs?
6. Cilindro, kurio aukštis yra h, o pagrindo spindulys r, tūris yra $V = \pi r^2 h$, o paviršiaus plotas $S = 2\pi r(r + h)$.
   (a) Kokie turėtų būti uždaros cilindrinės skardinės, kurios tūris yra 2000π kubinių colių, išmatavimai, kad jai pagaminti būtų sunaudota mažiausiai skardos?
   (b) Kokio didžiausio tūrio skardinė gali būti padaryta iš 600π kvadratinių colių skardos gabalo?
   (c) Ištirkite kaip pasikeičia šie atsakymai, jei skardinė turi vieną atvirą galą.
7. Raskite tokį kreivės $y = x^2$ tašką, kurios yra arčiausiai taško $(16, \frac{1}{2})$.
8. Stačiakampis yra įbrėžtas į elipsę, kurios lygtis yra $x^2 + 4y^2 = 4$. Raskite didžiausio ploto tokio stačiakampio išmatavimus.
9. *Normandiškas langas* yra stačiakampio su puslankiu viršuje formos. Puslankio diametras sutampa su stačiakampio pločiu.
   (a) Parodyti, kad didžiausio ploto normandiškas langas su fiksuotu perimetru P yra tas, kurio stačiakmpio aukštis yra pusė jo pločio.
   (b) Kaip pasikeičia problema, jeigu mes fiksuotume reikalingo rėmo ilgį, laikydami, kad prie išorinio rėmo dar reikia rėmo dalies, stačiakampio viršui?

ND 1.1 *Rasti visus funkcijos f kritinius taškus ir nusakyti, kurie taškai yra stacionarumo, o kuriuose funkcija nėra diferencijuojama.*

1. $f(x) = 3x^4 - 20x^3 + 36x^2 + 3$

2. $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

3.

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x, & kaix < -1, \\ 4 - x^2, & kai \ -1 \leq x \leq 2, \\ x^2 - 8x + 12, & kai\ x > 2. \end{cases} \tag{1}$$

ND 1.2 *Duotam intervalui I ir funkcijai $f : I \to \mathbb{R}$ rasti funkcijos minimumą ir maksimumą arba paaiškinti kodėl jis neegzistuoja.*

1. $f(x) = x^3 - 27x$, $I = [-2, 4]$
2. $f(x) = (x^2 - 16)^{2/3}$, $I = [-5, 6)$
3. $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$, $I = (-\infty, \infty)$

ND 1.3 *Pateikite pavyzdį funkcijos apibrėžos tiesėje $\mathbb{R}$, kuri turi lokalų maksimumą taške a, bei lokalų minimumą taške b, bet $f(a) < f(b)$.*

ND 1.4 *Turime du koridorius kurie susijungia stačiu kampu, ir kurio vieno plotis yra w_1, o kito w_2. Kokio maksimalaus ilgio kopėčias galima pranešti šiuo praėjimu?*

1.2 3-4 paskaitos

1. Kiekvienai iš funkcijų raskite: taškus, kur funkcija kerta x ir y ašį, horizontaliąsias ir vertikaliąsias funkcijos asimptotes, intervalus, kuriuose funkcija yra monotoninė, iškilumo ir įgaubtumo intervalus, funkcijos lokalius minimumus ir maksimumus, funkcijos išlinkio taškus. Remdamiesi šia informacija nubrėžkite funkcijos grafiką.

   (a) $f(x) = \frac{x^{4/3}}{2} - 2x^{1/3}$

   (b) $f(x) = x^{5/3} + 5x^{-1/3}$

   (c) $f(x) = x - \frac{4}{x}$

   (d) $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x^2-x-2}$

   (e) $f(x) = e^{-x^2/2}$

   (f)
$$f(x) = \begin{cases} x+2, \text{ kai } x \leq -1, \\ x^2, \text{ kai } x \geq -1. \end{cases}$$

2. Nubrėžkite funkcijos f tenkinančios visas nurodytas sąlygas grafiką, arba paaiškinkite, kodėl tokia funkcija neegzistuoja:

   (a) f turi lokalų minimumą taškuose $x = -1$, $x = 1$ ir $x = 3$;

   (b) f turi lokalų maksimumą taškuose $x = -3$, $x = 0$, $x = 2$ ir $x = 5$.

   (c) $\max f(x) = f(-3) = 2$

   (d) $\min f(x) = f(1) = -5$

   (e) f yra diferencijuojama išskyrus tašką $x = 5$.

3. Kiekvienam nurodytam reiškiniui arba pateikite pavyzdį arba įrodykite, kad toks reiškinys neįmanomas:

   (a) Išlinkio taškas, kuris yra ir lokalaus ekstremumo taškas.

   (b) Stipriai monotoniška funkcija kur yra išgaubta visoje tiesėje $(-\infty, \infty)$

   (c) Aprėžta funkcija, kuri yra iškila tiesėje $(-\infty, \infty)$

4. Tarkime, kad f yra du kartus tolydžiai diferencijuojama funkcija intervale (a, b) ir šiame intervale yra trys skirtingi taškai x_1, x_2 ir x_3, kuriuose $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$. Įrodykite, kad egzistuoja toks taškas c, kuriam $f^{(2)}(c) = 0$

5. Tarkime, kad f ir g yra du kartus tolydžiai diferencijuojamos funkcijos intervale (a, b). Tegu $c \in (a, b)$ ir $f(c) = f'(c) = 0 = g(c) = g'(c)$, ir $g^{(2)}(c) \neq 0$. Parodykite, kad
$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(2)}(c)}{g^{(2)}(c)}$$

6. Raskite sinuso funkcijos *Taylor*o formulę taške 0.

7. Rasti funkcijos e^{2x-x^2} *Taylor*o formulę su nariais iki x^5. **(129)**

8. Rasti funkcijos $\sqrt[3]{\sin x^3}$ *Taylor*o formulę su nariais iki x^{13}.**(130)**

ND 1.5 *Kiekvienai iš funkcijų raskite: taškus, kur funkcija kerta x ir y ašį, horizontaliąsias ir vertikaliąsias funkcijos asimptotes, intervalus, kuriuose funkcija yra monotoninė, iškilumo ir įgaubtumo intervalus, funkcijos lokalius minimumus ir maksimumus, funkcijos išlinkio taškus.*

1. $f(x) = x^4 - x^2$

2. $f(x) = \frac{x^2}{x^2+x-2}$

ND 1.6 *Raskite kosinuso funkcijos Tayloro formulę taške* 0.

ND 1.7 *Raskite funkcijos* $\sin(\cos x)$ *Tayloro formulę su nariais iki* x^3.

1.3 5-6 paskaitos

1. Pasinaudodami kintamųjų keitimu suintegruokite

   (a) $\int \frac{dx}{1+\sin x}$

   (b) $\int \frac{x^3 dx}{x^8-2}$

   (c) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$

   (d) $\int \frac{\sin x \cos x dx}{\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}}$

   (e) $\int \frac{dx}{\sin x}$

2. Pasinaudodami integravimu dalimis suintegruokite

   (a) $\int x^2 \arccos x dx$

   (b) $\int \frac{\arcsin x}{x^2} dx$

   (c) $\int \arctan \sqrt{x} dx$

   (d) $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2}$

   (e) $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$

3. Suintegruoti naudojantis kintamųjų keitimu:

   (a) $\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^2}}$

   (b) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$

   (c) $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$

2 Antroji grupė uždavinių

2.1 7-8 paskaitos

1. Naudojant racionaliųjų funkcijų integravimo metodus suintegruoti:
   (a) $\int \frac{xdx}{(x-1)^2(x+2)}$
   (b) $\int \frac{dx}{x(x+1)(x^2+x+1)}$
   (c) $\int \frac{dx}{x^3+1}$
2. Rasti iracionaliųjų funkcijų integralus
   (a) $\int \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}$ **(97)**
   (b) $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$ **(106)**
   (c) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$ **(107)**
3. Suintegruoti trigonometrines funkcijas
   (a) $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$ **(114)**
   (b) $\int \operatorname{tg}^5 x$ **(116)**
   (c) $\int \frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)}$ **(122)**
4. Rasti integralus:
   (a) $\int_0^{200\pi} \sqrt{1-\cos 2x}dx$
   (b) $\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$
   (c) $\int_0^1 x^m(\ln x)^n dx$

2.2 9-10 paskaitos

1. $\mathbb{R}^3$ erdvės vektoriams $x = (3, 0, -1)$ ir $y = (1, 2, 3)$ rasti:

   (a) vektorių $3x - y$;

   (b) skaliarinę sandaugą $x \cdot y$;

   (c) euklidinius ilgius $\|x\|_2$ ir $\|y\|_2$;

   (d) euklidinį atstumą $\rho_2(x, y)$.

2. Tegul $a, b, c \in \mathbb{R}$ ir bet kuriems $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ tegul

$$q(x, y) = ax_1y_1 + bx_1y_2 + bx_2y_1 + cx_2y_2.$$

   Su kokiais $a, b, c \in \mathbb{R}$ funkcijai $q(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ galioja savybės:

$$\begin{aligned} &q(x, x) > 0, \text{ jei } x \neq 0, \\ &q(x, y) = q(y, x), \\ &q(x, \lambda y + \mu z) = \lambda q(x, y) + \mu q(x, z). \end{aligned}$$

3. Tegu $x, y \in \mathbb{R}^d$ ir $\|\cdot\|$ yra norma erdvėje $\mathbb{R}^d$. Įrodyti, kad

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

4. Pavaizduoti erdvės $\mathbb{R}^d$ aibes $\{\|x\|_2 = 1, x \in \mathbb{R}^2\}$, $\{\|x\|_1 = 1, x \in \mathbb{R}^2\}$, $\{\|x\|_{\max} = 1, x \in \mathbb{R}^2\}$

5. Kiekvienam $n \in \mathbb{N}$ tegul

$$x_n := \left(\frac{n}{1+n}, \frac{1-n}{n}\right) \in \mathbb{R}^2$$

   Naudojant tik sekos konvergavimo apibrėžimą, įrodyti, kad vektorių seka (x_n) konverguoja į vektorių $(1, -1)$, kai $n \to \infty$.

6. Su kiekvienu $n \in \mathbb{N}$, tegul $x_n := (e^{-n} \sin n, e^{-n} \cos n) \in \mathbb{R}^2$. Ar vektorių seka (x_n) turi ribą? Atsakymą pagrįsti.

7. Tarkime, kad vektorių seka (x_n) konverguoja į vektorių y. Įrodyti, kad bet kuris jos posekis (x_{n_k}) taip pat konverguoja į vektorių y.

8. Parodyti, kad jei $\|x_n - x\|_{\max} \to 0$, tai $\|x_n\|_{\max} \to \|x\|_{\max}$.

ND 2.1 *Įrodyti, kad bet kuriems $x, y, z \in \mathbb{R}^d$ ir $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,*

$$\begin{aligned} &x \cdot x > 0, \text{ jei } x \neq 0, \\ &x \cdot y = y \cdot x, \\ &x \cdot (\lambda y + \mu z) = \lambda(x \cdot y) + \mu(x \cdot z). \end{aligned}$$

ND 2.2 *Įrodyti, kad funkcijoms $\|\cdot\|_1$ ir $\|\cdot\|_{\max}$ galioja savybės:*

1. *kiekvienam $x \in \mathbb{R}^d$, $\|x\| \geq 0$;*

2. *kiekvienam $x \in \mathbb{R}^d$, $\|x\| = 0$ tada ir tik tada, kai $x = 0$;*

3. *visiems $x \in \mathbb{R}^d$ ir $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$;*

4. *visiems $x, y \in \mathbb{R}^d$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.*

ND 2.3 *Tegu*

$$x_n = \left(\frac{n+1}{n}, \frac{(-1)^n}{n}\right)$$

Rasti (pateikti įrodymus)

1. $\lim x_n$*;*

2. $\lim \|x_n\|_2$*;*

3. $\lim \|x_n\|_1$*;*

4. $\lim \|x_n\|_{\max}$*.*

ND 2.4 *Tarkime, kad* $\mathbb{R}^d$ *erdvės elementų seka* (x_n) *konverguoja į nulį, kai* $n \to \infty$ *ir* $\mathbb{R}^d$ *erdvės elementų seka* (y_n) *yra aprėžta. Įrodyti, kad* $x_n \cdot y_n \to 0$*, kai* $n \to \infty$*.*

2.3 11-12 paskaitos

1. Tegu $a, b \in \mathbb{R}^d$ ir $a \leq b$. Įrodyti, kad uždarasis stačiakampis $[a, b]$ yra uždaroji aibė.

2. Tegul A yra euklidinės erdvės aibė ir tegul $\mathcal{F}$ yra tokių šios erdvės uždarųjų aibių F rinkinys, kurioms $A \subset F$. Įrodyti, kad $\overline{A} = \cap\mathcal{F}$.

3. Įrodyti, kad aibė $A \in \mathbb{R}^d$ yra atviroji tada ir tik tada, kai su kiekvienu elementu $x \in A$ egzistuoja toks atvirasis stačiakampis $(a, b) \subset \mathbb{R}^d$, kad $x \in (a, b) \subset A$.

4. Tegul $0 \leq r < R$. Įrodyti, kad aibė $\{x \in \mathbb{R}^d : r < \|x\|_2 < R\}$, vadinama atviruoju žiedu, yra atviroji.

5. Tegu aibė $A = \{\|x\|_{\max} \leq 2, x \in \mathbb{R}^2\}$ ir $B = \{x^2 - y^2 > 1, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$. Tegu $C = A \cap B$

   (a) Ar C yra atvira, ar uždara? Pagrįskite savo atsakymą.

   (b) Rasti C°

   (c) Rasti $\overline{C}$

6. Imkime tą pačią aibę C. Ar taškas $(-1, 0)$ priklauso aibei C? Koks vidinis, sąlyčio, ribinis ar izoliuotas šis taškas yra aibei C? Ar įmanoma sukonstruoti aibės C taškų seką konverguojančią į $(-1, 0)$? Jei įmanoma sukonstruokite, ir parodykite konvergavimą, jeigu neįmanoma įrodykite.

7. Ar aibių rinkinys

$$\big\{\{y \in \mathbb{R}^d : \|y - k\|_1 < 1\} : k \in \mathbb{Z}^d\big\}$$

   yra euklidinės erdvės $\mathbb{R}^d$ atvirasis denginys? Atsakymą pagrįsti.

8. Įrodyti, kad kiekviena, baigtinį elementų skaičių turinti, euklidinės erdvės aibė yra kompaktinė.

ND 2.5 *Tegul A yra euklidinės erdvės aibė ir tegul $\mathcal{G}$ yra tokių šios erdvės atvirųjų aibių G rinkinys, kurioms $G \subset A$. Įrodyti, kad $A^\circ = \cup\mathcal{G}$.*

ND 2.6 *Tegu aibė $A = \{\|x\|_{\max} \leq 2, x \in \mathbb{R}^2\}$ ir $B = \{x^2 - y^2 > 1, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$. Tegu $C = A \cap B$ Ar aibė C yra santykinai atvira aibės A atžvilgiu, ar ji yra santykinai uždara? Pagrįskite savo atsakymą.*

ND 2.7 *Tegu $A = \{x \in R^3 : x_2 \geq 2, x_1^2 + x_3^2 = 1\}$.*

1. *Rasti A°.*

2. *Rasti $\overline{A}$.*

3. *Ar aibė A yra kompaktiška? Pagrįsti atsakymą.*

4. *Sukonstruoti tokią aibės A taškų seką, kuri nekonverguotų.*

ND 2.8 *Įrodyti, kad aibės $A \subset \mathbb{R}^d$ savybės (a), (b), (c) yra ekvivalenčios:*

1. *A yra aprėžta*

2. *egzistuoja toks uždarasis stačiakampis $[a, b] \subset \mathbb{R}^d$, kad $A \subset [a, b]$.*

3. *egzistuoja toks realusis skaičius R, kad $A \subset \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_{max} \leq R\}$*

4. *egzistuoja toks realusis skaičius R, kad $A \subset \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_1 \leq R\}$*

2.4 13-14 paskaitos

1. Rinkinys $\{(\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N})\}$ yra intervalo $(0,1)$ atvirasis denginys. Ar šis denginys turi baigtinį podenginį?

2. Sukonstruoti tokį skaitų rinkinį kompaktinių aibių, kurių sąjunga nėra kompaktinė aibė.

3. Tegul K yra euklidinės erdvės kompaktinė aibė. Tada egzistuoja tokie vektoriai $u \in K$ ir $v \in K$, kad

$$\|u\|_2 \leq \|x\|_2 \leq \|v\|_2\,, \text{ visiems } x \in K$$

4. Tegul K yra euklidinės erdvės kompaktinė aibė ir $y \notin K$. Įrodyti, kad egzistuoja toks elementas $u \in K$, kad

$$\|u - y\|_2 \leq \|x - y\|_2\,, \text{ visiems } x \in K,$$

   t.y. egzistuoja artimiausias y-ui aibės K elementas.

5. Tegul $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, $x_0 \in \mathbb{R}^p$ ir $c \in \mathbb{R}^q$. Įrodyti, kad $f(x) \to c$, kai $x \to x_0$ tada ir tik tada, kai $\|f(x) - c\|_2 \to 0$, kai $x \to x_0$.

6. Įrodyti, kad funkcijos

   (a) $(x, y) \to x + y$ iš $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ į $\mathbb{R}^d$

   (b) $(\lambda, x) \to \lambda x$ iš $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ į $\mathbb{R}^d$

   (c) $(x, y) \to x \cdot y$ iš $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ $\mathbb{R}$

   yra tolydžios.

7. Tegu $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ir

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 x_2^2}{x_1^2 x_2^2 + (x_1 - x_2)^2}.$$

   Parodyti, kad

$$\lim_{x_1 \to 0}\left(\lim_{x_2 \to 0} f(x_1, x_2)\right) = \lim_{x_2 \to 0}\left(\lim_{x_1 \to 0} f(x_1, x_2)\right) = 0$$

   bet $\lim_{x \to 0} f(x)$ neegzistuoja.

8. Tegu $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ir

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2) \sin\frac{1}{x_1} \sin\frac{1}{x_2}.$$

   Parodyti, kad $\lim_{x_1 \to 0}(\lim_{x_2 \to 0} f(x_1, x_2))$ ir $\lim_{x_2 \to 0}(\lim_{x_1 \to 0} f(x_1, x_2))$ neegzistuoja, bet $\lim_{x \to 0} f(x)$ egzistuoja.

3 Trečioji grupė uždavinių

3.1 17-18 paskaitos

1. Tegul $f : \mathbb{R}^2 \to R$ yra funkcija su reikšmėmis

$$f(x) := \begin{cases} \frac{x_1 x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}, & \text{jei } x \neq 0, \\ 0, & \text{jei } x = 0. \end{cases}$$

   Ar ši funkcija tolydi taške $(0, 0)$? Atsakymą pagrįsti.

2. Tegul $f : \mathbb{R}^2 \to R$ yra funkcija su reikšmėmis

$$f(x) := \begin{cases} \frac{x_2^2 - x_1^2 x_2}{|x_2 - x_1^2|}, & \text{jei } x_1 \neq x_2, \\ 0, & \text{jei } x_1 = x_2. \end{cases}$$

   Kuriuose $\mathbb{R}^2$ taškuose ši funkcija tolydi? Atsakymą pagrįsti.

3. Įrodyti, kad projekcija $\pi_h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ yra tolydi funkcija su kiekvienu $h \in \{1, \ldots, d\}$.

4. Tegul $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(2, 0)\} \to R$ yra funkcija su reikšmėmis

$$f(x_1, x_2) := \frac{1}{(x_1 - 2)^2 + x_2^2}$$

   Ar ši funkcija tolygiai tolydi aibėje $O_1((0, 0))$? Ar ji yra tolygiai tolydi aibėje $O_2((0, 0))$? Atsakymą pagrįsti.

5. Tegu $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ yra funkcija su reikšmėmis $f(x) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$ su visais $x \in \mathbb{R}^2$. Ar ši funkcija tiesinė? Jei taip, rast jos matricinę formą.

6. Tegu $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ yra funkcija su reikšmėmis $f(x) = (x_1 + x_2, x_1 x_2)$ su visais $x \in \mathbb{R}^2$. Ar ši funkcija tiesinė? Jei taip, rast jos matricinę formą.

7. Tegu $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ yra tapatinga funkcija, t.y. funkcija su reikšmėmis $f(x) = x$ kiekvienam $x \in \mathbb{R}^d$. Rasti $[f]$ ir $\|f\|$.

8. Tegu $L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ yra tiesinių funkcijų erdvė su norma $\|f\|$. Parodyti, kad ši norma nėra suderinta su $\| \cdot \|_2$, t.y.

$$\|f\| \neq \sup_{\|x\|_2 = 1} \|f(x)\|_2$$

Namų darbai

1. Tegul $f : \mathbb{R}^2 \to R$ yra funkcija su reikšmėmis

$$f(x) := \begin{cases} x_1 x_2, & \text{jei } x_1 x_2 > 0, \\ 0, & \text{jei } x_1 x_2 \leq 0. \end{cases}$$

   Kuriuose $\mathbb{R}^2$ taškuose ši funkcija tolydi? Atsakymą pagrįsti.

2. Tegul $X \subset \mathbb{R}^p$, $f : X \to \mathbb{R}^q$ ir $g : X \to \mathbb{R}^d$. Funkcija $f \oplus g : \mathbb{R}^{q+d}$ su reikšmėmis $(f \oplus g)(x) := (f(x), g(x))$ vadina funkcijų f ir g *tiesiogine suma*. Įrodyti, kad $f \oplus g$ yra tolydi tada ir tik tada, kai f yra tolydi ir g yra tolydi.

3. Įrodyti, kad tiesinė funkcija yra tolygiai tolydi.

4. Tegul $f, g \in L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ ir $\lambda \in R$. Įrodyti, kad

$$[f + g] = [f] + [g] \text{ ir } [\lambda f] = \lambda [f]$$

3.2 19-20 paskaitos

1. Tegul $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$f(x) := (x_1x_2 - 2x_1 + x_2 + 5, x_1^2 + x_2^2 + x_1 - 3x_2 + 4)$$

kiekvienam $x \in \mathbb{R}^2$. Naudojantis tik apibrėžimu rasti šios funkcijos išvestinę ir *Jacobi*o matricą.

2. Tarkime, kad $U \subset \mathbb{R}^p$ yra atvira aibė, o funkcija $f : U \to \mathbb{R}^q$ yra diferencijuojama taške $u \in U$. Įrodyti, kad f yra tolydi taške u.

3. Tarkime, kad funkcija $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ yra diferencijuojama taške $u \in \mathbb{R}^d$. Tegul $x \in \mathbb{R}^d$ ir $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yra funkcija su reikšmėmis $g(t) := f(u + tx)$ kiekvienam $t \in \mathbb{R}$. Įrodyti, kad g yra diferencijuojama taške 0 ir rasti $g'(0)$.

4. Tegu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ yra funkcija su reikšmėmis $f(x) = (\cos x, \sin x)$, $x \in R$. Įrodyti, kad funkcija yra diferencijuojama ir rasti *Jacobi*o matricą $Jf(u)$.

5. Funkcijos $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ reikšmės yra

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 \cos(x_2x_3).$$

   (a) Rasti funkcijos f visas dalines išvestines
   (b) Rasti funkcijos f kryptinę išvestinę taške $(1, 2, 3)$ kryptimi $(1, -1, 0)$.

6. Tegu $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ yra diferencijuojama funkcija. Rasti funkcijos $g(x_1, x_2) = f(x_1+x_2, x_1-x_2)$ išvestinę.

7. Funkcijos $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ reikšmės yra

$$f(x) := (x_1^{1/3} + x_2^{1/3})^3$$

kiekvienam $x \in \mathbb{R}^2$. Įrodyti, kad ši funkcija turi kryptines išvestines taške $(0, 0)$ visomis kryptimis, bet nėra tame taške diferencijuojama.

8. Funkcijos $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ reikšmės yra

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x_1^2x_2}{x_1^4+x_2^2}, & \text{jei } x \neq 0 \\ 0, & \text{jei } x = 0 \end{cases}$$

Parodyti, kad funkcija nėra tolydi taške $(0, 0)$, bet turi jame dalines išvestines.

Namų darbai

1. Parodyti aibių iškilumą:
   (a) Atviras rutulys $O_r(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$ ir $r > 0$
   (b) Aibė $x \in \mathbb{R}^2 : x_2 \geq x_1^2$.

2. Tarkime, kad funkcija $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yra nemažėjanti ir iškila, o funkcija $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ yra iškila. Įrodyti, kad kompozicija $g \circ f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ yra iškila funkcija.

3. Tegul $f : \mathbb{R}^2_{++} \to \mathbb{R}$ yra funkcija su reikšmėmis $f(x_1, x_2) = x_1x_2$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_{++}$. Įrodyti, kad f yra kvazi-įgaubta.

4. Tarkime, kad funkcija $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ yra tolydi taške $u \in \mathbb{R}^p$ ir egzistuoja tokia afininė funkcija $T : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, kad $f(u+x) - T(u+x) = o(x)$, kai $x \to 0$. Įrodyti, kad f yra diferencijuojama taške u ir kiekvienam $x \in \mathbb{R}^p$

$$Df(u)(x) = T(u + x) - T(u) = T(x) - T(0)$$

5. Tegu $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ yra diferencijuojama funkcija, $f(x) = (\exp(-\|x\|_2), \cos(\|x\|_2))$ Rasti funkcijos $g(r, \phi) = f(r \cos \phi, r \sin \phi)$ išvestinę.

6. Tegul funkcija $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ yra tiesinė. Įrodyti, kad f yra diferencijuojama, o jos išvestinė funkcija yra pastovioji funkcija $Df = f$, t.y. funkcija su reikšmėmis $Df(x) = f$ kiekvienam $x \in \mathbb{R}^p$.