Matematinė analizė. Rudens semestro teorijos pratybų patikrinimo uždavinių sprendimai

Vaidotas Zemlys

2010 m. vasario 10 d.

Turinys

1 Pirmasis testas

1.1 Pirmas variantas

Spalio 9 d.

1. Tegu X, Y, Z yra aibės ir $X \subset Z$, $Y \subset Z$. Parodyti, kad $Z \backslash (X \cap Y) = (Z \backslash X) \cup (Z \backslash Y)$.

   Sprendimas. Turime

$$
\begin{aligned}
x \in Z \backslash (X \cap Y) \quad &\Leftrightarrow \quad (x \in Z) \wedge \neg (x \in X \cap Y) \\
&\Leftrightarrow \quad (x \in Z) \wedge \neg \left((x \in X) \wedge (x \in Y) \right) \\
&\Leftrightarrow \quad (x \in Z) \wedge \left(\neg (x \in X) \vee \neg (x \in Y) \right) \\
&\Leftrightarrow \quad \left((x \in Z) \wedge \neg (x \in X) \right) \vee \left((x \in Z) \wedge \neg (x \in Y) \right) \\
&\Leftrightarrow \quad (x \in Z \backslash X) \vee (x \in Z \backslash Y) \\
&\Leftrightarrow \quad x \in (Z \backslash X) \cup (Z \backslash Y)
\end{aligned}
$$

2. Tegu $X \subset \mathbb{R}$, $Y \subset [0,1]$, $Z \subset \mathbb{R}$. Tegu $f : X \to Y$ yra funkcija su reikšmėmis $f(x) = \sin x$, kai $x \in X$ ir $g : Y \to Z$ yra funkcija su reikšmėmis $g(y) = \operatorname{ctg} y$, kai $y \in Y$. Parinkite aibes X, Y, Z taip, kad funkcija $g \circ f : X \to Z$ būtų

   (a) injekcija,

   (b) siurjekcija,

   (c) bijekcija.

   Sprendimas. Tegu $X = (0, \pi/2)$. Tada f yra bijekcija, jei $Y = (0,1)$. Kai $Y = (0,1)$, g yra bijekcija, jei $Z = (\operatorname{ctg} 1, \infty)$. Taigi g yra injekcija, kai $Y = (0,1)$ ir $Z = \mathbb{R}$.

   Vadinasi funkcija $g \circ f$ bus injekcija, kai $X = (0, \pi/2)$, $Y = (0,1)$, $Z = \mathbb{R}$, ir bijekcija, kai $X = (0, \pi/2)$, $Y = (0,1)$ ir $Z = (\operatorname{ctg} 1, \infty)$.

   Funkcija f yra siurjekcija, kai $X = (0, \pi)$, o $Y = (0,1)$. Kadangi, kai $Y = (0,1)$ g bus siurjekcija, kai $Z = (\operatorname{ctg} 1, \infty)$ (nes tada g yra bijekcija), tai $g \circ f$ bus siurjekcija, kai $X = (0, \pi)$, $Y = (0,1)$ ir $Z = (\operatorname{ctg} 1, \infty)$.

3. Tegu n ir m yra sveikieji skaičiai ir $n < m$. Parodyti, kad jei l natūrinis skaičius, tai $n \cdot (l+1) < m \cdot (l+1)$.

   Sprendimas. Turime, kad $n < m$, jei egzistuoja toks teigiamas natūrinis skaičius t, kad $m = n + t$. Taigi turime

$$m \cdot (l+1) = (n+t) \cdot (l+1) = n \cdot (l+1) + t \cdot (l+1).$$

   Kadangi l yra natūrinis, tai būtinai $l+1$ yra teigiamas natūrinis. Taigi $t \cdot (l+1)$ yra teigiamas natūrinis, nes yra dviejų teigiamų natūrinių skaičų sandauga. Taigi radome tokį teigiamą $v \in \mathbb{N}$, kad $m \cdot (l+1) = n \cdot (l+1) + v$. Vadinasi $n \cdot (l+1) < m \cdot (l+1)$.

1.2 Antras variantas

Spalio 9 d.

1. Tegu X, Y, Z yra aibės ir $X \subset Z$, $Y \subset Z$. Parodyti, kad $Z \backslash (X \cup Y) = (Z \backslash X) \cap (Z \backslash Y)$.

   Sprendimas. Turime

$$\begin{aligned} x \in Z \backslash (X \cup Y) \quad &\Leftrightarrow \quad (x \in Z) \wedge \neg(x \in X \cup Y) \\ &\Leftrightarrow \quad (x \in Z) \wedge \neg\left((x \in X) \vee (x \in Y)\right) \\ &\Leftrightarrow \quad (x \in Z) \wedge (\neg(x \in X) \wedge \neg(x \in Y)) \\ &\Leftrightarrow \quad ((x \in Z) \wedge \neg(x \in X)) \wedge ((x \in Z) \wedge \neg(x \in Y)) \\ &\Leftrightarrow \quad (x \in Z \backslash X) \wedge (x \in Z \backslash Y) \\ &\Leftrightarrow \quad x \in (Z \backslash X) \cap (Z \backslash Y) \end{aligned}$$

2. Tegu $X \subset \mathbb{R}$, $Y \subset [0, 1]$, $Z \subset \mathbb{R}$. Tegu $f : X \to Y$ yra funkcija su reikšmėmis $f(x) = \cos x$, kai $x \in X$ ir $g : Y \to Z$ yra funkcija su reikšmėmis $g(y) = \operatorname{tg} y$, kai $y \in Y$. Parinkite aibes X, Y, Z taip, kad funkcija $g \circ f : X \to Z$ būtų

   (a) injekcija,

   (b) siurjekcija,

   (c) bijekcija.

   Sprendimas. Tegu $X = (0, \pi/2)$. Tada f yra bijekcija, jei $Y = (0, 1)$. Kai $Y = (0, 1)$, g yra bijekcija, jei $Z = (\operatorname{tg} 1, \infty)$. Taigi g yra injekcija, kai $Y = (0, 1)$ ir $Z = \mathbb{R}$.

   Vadinasi funkcija $g \circ f$ bus injekcija, kai $X = (0, \pi/2)$, $Y = (0, 1)$, $Z = \mathbb{R}$, ir bijekcija, kai $X = (0, \pi/2)$, $Y = (0, 1)$ ir $Z = (\operatorname{tg} 1, \infty)$.

   Funkcija f yra siurjekcija, kai $X = (-\pi/2, \pi/2)$, o $Y = (0, 1)$. Kadangi, kai $Y = (0, 1)$, g bus siurjekcija, kai $Z = (\operatorname{tg} 1, \infty)$ (nes tada g yra bijekcija), tai $g \circ f$ bus siurjekcija, kai $X = (-\pi/2, \pi/2)$, $Y = (0, 1)$ ir $Z = (\operatorname{tg} 1, \infty)$.

3. Tegu n ir m yra sveikieji skaičiai ir $n < m$. Parodyti, kad jei l sveikasis skaičius nelygus nuliui, tai $n \cdot l^2 < m \cdot l^2$.

   Sprendimas. Turime, kad $n < m$, jei egzistuoja toks teigiamas natūrinis skaičius t, kad $m = n + t$. Taigi turime

$$m \cdot l^2 = (n + t) \cdot l^2 = n \cdot l^2 + t \cdot l^2.$$

   Kadangi l yra sveikas nelygus nuliui skaičius, tai turime, kad l^2 yra teigiamas natūrinis skaičius. Taigi $t \cdot l^2$ yra teigiamas natūrinis, nes yra dviejų teigiamų natūrinių skaičų sandauga. Taigi radome tokį teigiamą $v \in \mathbb{N}$, kad $m \cdot l^2 = n \cdot l^2 + v$. Vadinasi $n \cdot l^2 < m \cdot l^2$.

2 Antrasis testas

2.1 Pirmas variantas

Lapkričio 20 d.

1. Tegu r_n yra aprėžta teigiamų skaičių seka. Tegu seka $\exp r_n$ konverguoja į $\exp r$. Parodyti, kad tada seka r_n konverguoja į r. Pasinaudoti tuo, kad $\ln(1+\varepsilon) < \varepsilon$ ir $\ln(1-\varepsilon) > \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$, bet kuriam $\varepsilon > 0$.

   Sprendimas. Turime kiekvienam $\varepsilon > 0$ egzistuoja toks N, kad

   $$|\exp r_n - \exp r| < \varepsilon$$

   Tada turime

   $$\begin{aligned} -\varepsilon < e^{r_n} - e^r &< \varepsilon \\ 1 - \varepsilon e^{-r} < e^{r_n - r} &< 1 + \varepsilon e^{-r} \\ \ln(1 - \varepsilon e^{-r}) < & r_n - r < \ln(1 + \varepsilon e^{-r}) \end{aligned}$$

   Pasinaudoję duotomis nelygybėmis turime

   $$\frac{\varepsilon e^{-r}}{1 - \varepsilon e^{-r}} < r_n - r < \varepsilon e^{-r}$$

   Toliau pagal ribos apibrėžimą.

2. Kiek ir kokių ribinių taškų turi seka $\{(1+\frac{6}{k})^k \sin\frac{\pi(1+6k)}{3}, (4+6k)^k \sin\frac{\pi(4+6k)}{3}, \sin\frac{\pi(5+6k)}{3} : k = 1, 2, \ldots\}$. Parodykite tai.

   Sprendimas. Turime $\sin\frac{\pi(1+6k)}{3} = \sin\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}/2$, visiems k, $\sin\frac{\pi(4+6k)}{3} = \sin\frac{4\pi}{3} = -\sqrt{3}/2$, $\sin\frac{\pi(5+6k)}{3} = \sin\frac{5\pi}{3} = -\sqrt{3}/2$.

   Taip pat turime, kad $\lim(1+\frac{6}{k})^k = e^6$, $\lim(4+6k)^k = \infty$. Taigi seka turės 2 ribinius taškus $e^6\sqrt{3}/2$ ir $-\sqrt{3}/2$.

3. Ar konverguoja eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n!} \cos e^n$ **Sprendimas**. Nagrinėti absoliutų eilutės konvergavimą ir pritaikyti *D'Alembert* požymį.

3 Trečiasis testas

3.1 Pirmas variantas

1. Tegu $X_n = \mathbb{R} \backslash [1/n, n]$. Įrodyti, kad $\cup_{n=2}^{4} X_n$ yra atvira aibė.

   Sprendimas. Turime, kad $[1/n, n]$ yra uždaros aibės. Tada X_n yra atviros, ir jų sąjunga yra atvira, nes atvirų aibių sąjungos yra atviros.

2. Rasti ribą

$$\lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{x+4} - \sqrt[3]{x+22}}{\sqrt[4]{x+11} - 2}$$

   Nurodymas: Naudotis riba $\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^{\mu} - 1}{x} = \mu$.

3. Rasti išvestinę:

   (a) $x^{(\ln x)^{2x}}$

   (b) $\sqrt{\frac{\arcsin(\sin e^{2x})}{\arccos(\ln 2x)}}$

   (c) $\frac{1}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{e^{x^2/2} - 1}{\sqrt{2} e^{\frac{x^2}{2}}}$

3.2 Antras variantas

1. Tegu $X_1 = [-2, -1/2]$, $X_2 = \mathbb{R} \backslash (-5, 5)$, $X_3 = \{1\}$. Parodyti, kad $\cup_{n=1}^{3} X_n$ yra uždara aibė.

2. Rasti ribą

$$\lim_{x \to 6} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt[3]{x+21}}{\sqrt[4]{x+10} - 2}$$

   Nurodymas: Naudotis riba $\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^{\mu} - 1}{x} = \mu$.

3. Rasti išvestinę:

   (a) $x^{(\ln x)^{3x}}$

   (b) $\sqrt{\frac{\arcsin(\sin e^{3x})}{\arccos(\ln 3x)}}$

   (c) $\frac{1}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{e^{x^2/2} - 1}{\sqrt{2} e^{\frac{x^2}{2}}}$