# Matematinė analizė. Rudens semestro pratybų uždavinių sprendimai.

Jurgita Markevičiūtė, Vaidotas Zemlys

2009 m. gruodžio 17 d.

## Turinys

# 1 Pirmoji grupė uždavinių

## 1.1 Pratybų nr. 1-2 uždavinių sprendimai

Rugsėjo 4, 7, 8 d.

1. Kuris iš teiginių *(a)* ir *(b)* yra tautologija

   (a) $[(A \Rightarrow B) \vee A] \Rightarrow B$,

   (b) $[(A \Rightarrow B) \wedge A] \Rightarrow A$.

   **Sprendimas:** Tautologija yra sudėtinio teiginio forma, kurios teisingumo reikšmė visada t nepriklausomai nuo ją sudarančių kintamųjų reikšmių. Todėl abiems sąlygoje pateiktiems uždaviniams sudarysime teisingumo lenteles.

   (a) $[(A \Rightarrow B) \vee A] \Rightarrow B$,

| $\tau(A)$ | $\tau(B)$ | $\tau(A \Rightarrow B)$ | $\tau((A \Rightarrow B) \vee A)$ | $\tau([(A \Rightarrow B) \vee A] \Rightarrow B)$ |
|---|---|---|---|---|
| k | k | t | t | k |
| k | t | t | t | t |
| t | k | k | t | k |
| t | t | t | t | t |

   Duotas teiginys ne su visomis reikšmėmis yra teisingas, todėl šis teiginys nėra tautologija.

   (b) $[(A \Rightarrow B) \wedge A] \Rightarrow A$.

| $\tau(A)$ | $\tau(B)$ | $\tau(A \Rightarrow B)$ | $\tau((A \Rightarrow B) \wedge A)$ | $\tau([(A \Rightarrow B) \wedge A] \Rightarrow A)$ |
|---|---|---|---|---|
| k | k | t | k | t |
| k | t | t | k | t |
| t | k | k | k | t |
| t | t | t | t | t |

   Šis teiginys yra tautologija, nes jis yra teisingas su visomis įmanomomis teiginių $A$ ir $B$ teisingumo reikšmėmis

2. Tegul $A$ ir $B$ yra teiginiai. Įrodyti, kad teisingos sudėtinių teiginių formos:

   (a) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((\neg A) \vee B)$ (tiesioginis);

   (b) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow [(\neg B) \Rightarrow (\neg A)]$ (kontrapozicijos);

   (c) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ([A \wedge (\neg B)] \Rightarrow [C \wedge (\neg C)])$ bet kuriam teiginiui $C$ (prieštaros);

   (d) $[\neg(A \Rightarrow B)] \Leftrightarrow [A \wedge (\neg B)]$ (kontrpavyzdys).

   **Sprendimas:** Teiginiai yra ekvivalentūs tada ir tik tada, kai jie turi tas pačias teisingumo reikšmes. Todėl kiekvienam teiginiui sudarysime teisingumo lenteles ir parodysime, kad teiginių teisingumo reikšmės sutampa.

   (a) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((\neg A) \vee B)$ (tiesioginis)

| $\tau(A)$ | $\tau(B)$ | $\tau((\neg A))$ | $\tau(A \Rightarrow B)$ | $\tau((\neg A) \vee B)$ |
|---|---|---|---|---|
| k | k | t | t | t |
| k | t | t | t | t |
| t | k | k | k | k |
| t | t | k | t | t |

   Kadangi gavome, kad abiejų teiginių teisingumo reikšmės sutampa, tai sudėtinio teiginio forma yra teisinga.

   (b) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow [(\neg B) \Rightarrow (\neg A)]$ (kontrapozicijos)

| $\tau(A)$ | $\tau(B)$ | $\tau((\neg A))$ | $\tau((\neg B))$ | $\tau(A \Rightarrow B)$ | $\tau((\neg B) \Rightarrow (\neg A))$ |
|---|---|---|---|---|---|
| k | k | t | t | t | t |
| k | t | t | k | t | t |
| t | k | k | t | k | k |
| t | t | k | k | t | t |

   Gavome, kad abiejų teiginių teisingumo reikšmės sutampa, todėl sudėtinio teiginio forma yra teisinga.

(c) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ([A \wedge (\neg B)] \Rightarrow [C \wedge (\neg C)])$ bet kuriam teiginiui $C$ (prieštaros);

| $\tau(A)$ | $\tau(B)$ | $\tau(C)$ | $\tau(A \wedge (\neg B))$ | $\tau(C \wedge (\neg C))$ | $\tau(A \Rightarrow B)$ | $\tau((A \wedge (\neg B)) \Rightarrow (C \wedge (\neg C)))$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| t | t | t | k | k | t | t |
| t | t | k | k | k | t | t |
| t | k | t | t | k | k | k |
| t | k | k | t | k | k | k |
| k | t | t | k | k | t | t |
| k | t | k | k | k | t | t |
| k | k | t | k | k | t | t |
| k | k | k | k | k | t | t |

Teisingumo lentelės reikšmės sutampa, tai sudėtinis teiginys suformuluotas teisingai.

(d) $[\neg(A \Rightarrow B)] \Leftrightarrow [A \wedge (\neg B)]$ (kontrpavyzdys)

| $\tau(A)$ | $\tau(B)$ | $\tau(\neg(A \Rightarrow B))$ | $\tau(A \wedge (\neg B))$ |
|---|---|---|---|
| k | k | k | k |
| k | t | k | k |
| t | k | t | t |
| t | t | k | k |

Vėlgi gavome, kad teisingumo lentelės sutampa, vadinasi sudėtinio teiginio forma yra teisinga.

3. Paprastame teiginyje yra vienas veiksmažodis. Sudėtiniame teiginyje būna keli veiksmažodžiai, taigi keli paprasti teiginiai. Kiekviename sudėtiniame teiginyje raskite paprastus teiginius, priskirkite jiems raides ir perrašykite sudėtinius teiginius loginiais simboliais. Pirma užduotis yra išspręsta kaip pavyzdys.

(a) Jei $\underbrace{x > 0,}_{A}$ arba $\underbrace{x < 0,}_{B}$ tai $\underbrace{x^2 > 0}_{C}$ $\quad (A \vee B) \Rightarrow C$

(b) Jei $a < b$ ir $c$ yra teigiamas, tai $ac < bc$

(c) Tam, kad $q$ būtų racionalus, pakanka, kad $q$ dešimtainės trupmenos išraiška būtų baigtinė.

(d) Sveikas skaičius $n$ yra lyginis, tada ir tik tada, kai $n$ padalijus iš 2 liekana yra nulis.

(e) Tegu $n$ ir $m$ yra sveiki skaičiai ir $n + m$ yra lyginis. Tada arba $n$ ir $m$ abu kartu yra lyginiai arba $n$ ir $m$ abu kartu yra nelyginiai

(f) $n$ lyginis yra būtina sąlyga, kad $n^2$ būtų lyginis.

(g) Tam kad $n$ būtų lyginis yra būtina, kad $n^2$ būtų nelyginis.

**Sprendimas:**

(a) Jei $\underbrace{x > 0,}_{A}$ arba $\underbrace{x < 0,}_{B}$ tai $\underbrace{x^2 > 0}_{C}$ $\quad (A \vee B) \Rightarrow C$

(b) Jei $\underbrace{a < b}_{A}$ ir $\underbrace{c \text{ yra teigiamas,}}_{B}$ tai $\underbrace{ac < bc}_{C}$

$(A \wedge B) \Rightarrow C$

(c) Tam, kad $\underbrace{q \text{ būtų racionalus}}_{A}$, pakanka, kad $\underbrace{q \text{ dešimtainės trupmenos išraiška būtų baigtinė}}_{B}$

$B \Rightarrow A$

(d) Sveikas skaičius $\underbrace{n \text{ yra lyginis}}_{A}$, tada ir tik tada, kai $\underbrace{n \text{ padalijus iš 2 liekana yra nulis}}_{B}$

$A \Leftrightarrow B$

(e) Tegu $\underbrace{n \text{ ir } m \text{ yra sveiki skaičiai}}_{A}$ ir $\underbrace{n+m \text{ yra lyginis.}}_{B}$

Tada arba $\underbrace{n \text{ ir } m \text{ abu kartu yra lyginiai}}_{C}$ arba $\underbrace{n \text{ ir } m \text{ abu kartu yra nelyginiai}}_{D}$

$(A \wedge B) \Rightarrow (C \vee D)$

(f) $\underbrace{n \text{ lyginis}}_{A}$ yra būtina sąlyga, kad $\underbrace{n^2 \text{ būtų lyginis}}_{B}$ $\quad B \Rightarrow A$

(g) Tam, kad $\underbrace{n \text{ būtų lyginis}}_{A}$ yra būtina, kad $\underbrace{n^2 \text{ būtų nelyginis}}_{B}$ $\quad A \Rightarrow B$

4. Paneikite šiuos teiginius. Užrašykite ir simboline išraiška ir aiškia, suprantama kalba.

   (a) Jei $n$ yra lyginis natūrinis skaičius, tai ir $n^2$ yra lyginis natūrinis skaičius.

   (b) Realus skaičius $x(x-1)$ yra teigiamas kai $x > 1$

   (c) Jei realaus skaičiaus kvadratas yra 2, tai šis skaičius nėra racionalusis.

   (d) Jei $y > 0$, tai $xy < zy \Rightarrow x < z$

   **Sprendimas:**

   (a) Suskaidykime sudėtinį teiginį į paprastus teiginius:
   Teiginys A: $n$ yra lyginis natūrinis skaičius.
   Teiginys B: $n^2$ yra lyginis natūrinis skaičius.
   Duotas sudėtinis teiginys: $A \Rightarrow B$.
   Paneigtas teiginys yra $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$. Skaičius $n$ yra lyginis natūrinis skaičius, o skaičius $n^2$ yra nelyginis natūrinis skaičius.

   (b) Suskaidykime duotą sudėtinį teiginį į paprastus teiginius:
   Teiginys A: Realus skaičius $x(x-1)$ yra teigiamas.
   Teiginys B: $x > 1$.
   Duotas sudėtinis teiginys: $B \Rightarrow A$.
   Paneigtas teiginys yra $\neg(B \Rightarrow A) \Leftrightarrow B \wedge \neg A$. Turime, $x > 1$ ir $x(x-1) \leq 0$.

   (c) Suskaidykime duotą teiginį į paprastus teiginius:
   Teiginys A: Realaus skaičiaus kvadratas yra 2.
   Teiginys B: Šis skaičius nėra racionalusis.
   Duotas sudėtinis teiginys: $A \Rightarrow B$.
   Paneigtas teiginys yra $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$. Turime racionalų skaičių, kurio kvadratas yra 2.

   (d) Paprasti teiginiai:
   Teiginys A: $y > 0$.
   Teiginys B: $xy < zy$
   Teiginys C: $x < z$.
   Duotas teiginys: $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$.
   Paneigtas teiginys yra $\neg(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge \neg C) \Rightarrow A \wedge B \wedge \neg C$. Teisinga $y > 0$, $xy < zy$ ir $x \geq z$.

5. Pavyzdžiuose *(a)–(f)* nustatyti, kas yra kintamasis $x$, kokia jo kitimo sritis ir kokia savybė $S(x)$. Naudojantis pirmuoju pavyzdžiu, kitiems pavyzdžiams panaudoti simbolinę išraišką. Kuris pavyzdys nėra teiginys? Pavyzdžiams, kurie yra teiginiai, nustatyti teisingumo reikšmę:

   (a) visiems realiesiems skaičiams $r$, $r^2 \geq 0$ (simboliškai $\forall r \in \mathbb{R}$, $r^2 \geq 0$);

   (b) visiems natūraliesiems skaičiams $n$, $n-1$ yra natūralusis skaičius;

   (c) visiems skaičiams, jei $p \in A$ yra pirminis, tai $p \in B$;

   (d) egzistuoja racionalusis skaičius $q$, kurio kvadratas yra 2;

   (e) egzistuoja sveikasis skaičius, prie kurio pridėjus 3, gauname $-1$;

(f) kiekvienam realiajam skaičiui $r$ egzistuoja realusis skaičius $s$, kad $rs = 1$.

**Sprendimas:**

(a) $\forall r \in \mathbb{R}$, $r^2 \geq 0$
Kitimo sritis: $\mathbb{R}$
Kintamasis: $r$
Savybe $S(r)$: $r^2 \geq 0$
Šis pavyzdys yra teiginys ir jo teisingumo reikšmė yra $t$.

(b) $\forall n$, $n - 1 \in \mathbb{N}$
Kitimo sritis: $\mathbb{N}$
Kintamasis: $n$
Savybe $S(n)$: $n - 1 \in \mathbb{N}$
Šis pavyzdys yra teiginys ir jo teisingumo reikšmė yra $k$, nes natūralieji skaičiai turi pradžią.

(c) $\forall p$, jei $p \in A$ yra pirminis, tai $p \in B$;
Kitimo sritis: $\mathbb{Q}$
Kintamasis: $p$
Savybe $S(p)$: $p \in A$ yra pirminis, tai $p \in B$
Šis pavyzdys nėra teiginys, nes neįmanoma nusakyti jo teisingumo reikšmės, nežinant kas yra $A$ ir $B$.

(d) $\exists q \in \mathbb{Q}$, $q^2 = 2$;
Kitimo sritis: $\mathbb{Q}$
Kintamasis: $q$
Savybe $S(q)$: $q^2 = 2$
Šis pavyzdys yra teiginys ir jo teisingumo reikšmė yra $k$.

(e) $\exists t \in \mathbb{Z}$, $t + 3 = -1$;
Kitimo sritis: $\mathbb{Z}$
Kintamasis: $t$
Savybe $S(t)$: $t + 3 = -1$
Šis pavyzdys yra teiginys ir jo teisingumo reikšmė yra $t$.

(f) $\forall r \in \mathbb{R}$, $\exists s \in \mathbb{R}$: $rs = 1$;
Kitimo sritis: $\mathbb{R}$
Kintamasis: $r$ ir $s$
Savybe $S(r, s)$: $rs = 1$
Šis pavyzdys yra teiginys ir jo teisingumo reikšmė yra $k$, nes paėmus $r = 0$, nerasime tokio skaičiaus $s$, kad $rs = 1$.

6. Performuluoti pavyzdžius *(a)–(e)* atskiriant kvantorius. Nustatyti teiginių teisingumą:

(a) kiekvienam teigiamam skaičiui $x$, ir kiekvienam teigiamam skaičiui $y$, galioja $y^2 = x$;

(b) egzistuoja teigiamas skaičius $x$ toks, kad kiekvienam teigiamam skaičiui $y$ galioja $y^2 = x$;

(c) egzistuoja teigiamas skaičius $x$ ir egzistuoja teigiamas skaičius $y$ tokie, kad galioja $y = x$;

(d) kiekvienam teigiamam skaičiui $y$ egzistuoja teigiamas skaičius $x$ toks, kad galioja $y^2 = x$;

(e) egzistuoja teigiamas skaičius $y$ toks, kad kiekvienam teigiamam skaičiui $x$ galioja $y^2 = x$.

**Sprendimas:**

(a) $\forall x > 0$, $\forall y > 0$: $y^2 = x$. Teisingumo reikšmė yra $k$.

(b) $\exists x > 0$, $\forall y > 0$: $y^2 = x$. Teisingumo reikšmė $k$.

(c) $\exists x > 0$, $\exists y > 0$: $y = x$. Teisingumo reikšmė $t$.

(d) $\forall y > 0$, $\exists x > 0$: $y^2 = x$. Teisingumo reikšmė $t$.

(e) $\exists y > 0$, $\forall x > 0$: $y^2 = x$. Teisingumo reikšmė yra $k$.

7. Paneikite šiuos teiginius. Užrašykite ir simboline išraiška ir aiškia, suprantama kalba.

(a) Kiekvienas realus skaičius $x$ tenkina $f(x) \geq f(0)$

(b) $\sin t = \cos t$, kokiam nors kampui $t$.

(c) Kiekvienam teigiamam $x$ galima rasti tokį teigiamą $y$, kad $xy < 0.001$

(d) Kiekvienam $\epsilon > 0$ galima rasti tokį $\delta > 0$, kad jei $|x - y| < \delta$, tai $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

(e) Tam tikrai funkcijai $f$, $f(x)$ neviršija 1 visiems $x$.

**Sprendimas:**

(a) Duotas teiginys: $\forall x \in \mathbb{R}$: $f(x) \geq f(0)$.
Paneigtas teiginys yra $\exists x \in \mathbb{R}$: $f(x) < f(0)$. Egzistuoja toks realusis skaičius $x$ tenkinantis $f(x) < f(0)$.

(b) Duotas teiginys: $\exists t$: $\sin t = \cos t$.
Paneigtas teiginys yra $\forall t$: $\sin t \neq \cos t$. Kiekvienam kampui $t$ galioja $\sin t \neq \cos t$.

(c) Duotas teiginys: $\forall x > 0$, $\exists y > 0$: $xy < 0.001$.
Paneigtas teiginys yra $\exists x > 0$, $\forall y > 0$: $xy \geq 0.001$. Egzistuoja toks skaičius $x$, kad kiekvienam skaičiui $y > 0$, $xy \geq 0.001$.

(d) Duotas teiginys: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall |x - y| < \delta$: $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.
Paneigtas teiginys: $\exists \varepsilon > 0$, kad $\forall \delta > 0$: $\exists |x - y| < \delta$, $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$.
Egzistuoja toks $\varepsilon > 0$, kad kiekvienam $\delta > 0$, egzistuoja tokie $x$, $y$ tenkintanys $|x-y| < \delta$, kad $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

(e) Duotas teiginys: $\exists f$: $f(x) \leq 1$, $\forall x$.
Paneigtas teiginys: $\forall f$: $f(x) > 1$, $\exists x$, kuris sako, kad kiekvienai funkcijai $f$, egzistuoja toks skaičius $x$, kad $f(x) > 1$.

8. Tarkime, kad realūs skaičiai $a$, $b$, $c$ ir $d$ yra tokie, kad $a = b$ ir $c = d$. Naudojantis lygybės aksiomomis įrodyti, kad $a + d = b + c$.

**Sprendimas:**Turime

$$a + d = b + d,$$

nes $a = b$, ir

$$b + d = b + c,$$

nes $c = d$. Naudojantis lygybės tranzityvumo gauname reikiamą įrodyti lygybę.

## 1.2 Pratybų nr. 3-4 uždavinių sprendimai

Rugsėjo 11, 14, 15 d.

1. Aprašykite aibes išvardindami jų elementus

   (a) Realieji skaičiai tenkinantys lygtį $x^2 - 1 = 0$

   (b) Realieji skaičiai tenkinantys lygtį $x^2 + 1 = 0$

   (c) Sveikieji skaičiai tarp $-3$ ir 4 imtinai.

   (d) Natūralieji skaičiai

   (e) Lyginiai skaičiai.

   (f) Lygčių sistemos sprendiniai

$$\begin{cases} x + 2y = 5, \\ 4x - 2y = 0. \end{cases} \tag{1}$$

   **Sprendimas:**

   (a) $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 = 0\} = \{-1, 1\}$, nes

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &= 0 \\ x^2 &= 1 \\ x &= \pm 1. \end{aligned}$$

   (b) $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 = 0\} = \varnothing$, nes lygtis neturi sprendinių realiųjų skaičių aibėje:

$$\begin{aligned} x^2 + 1 &= 0 \\ x^2 &= -1 \end{aligned}$$

   (c) $C = \{n \in \mathbb{Z} : -3 \le n \le 4\} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ .

   (d) $D = \{n \in \mathbb{N}\} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$.

   (e) $E = \{n : n = 2k, k \in \mathbb{N}\} = \{..., -4, -2, 0, 2, 4, ...\}$.

   (f) $F = \{(1, 2)\}$, nes

$$\begin{cases} x + 2y = 5, \\ 4x - 2y = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5 - 2y, \\ 10y = 20. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = 2. \end{cases}$$

2. Kurios aibės praeitoje užduotyje yra kitų aibių poaibiai?

   **Sprendimas:** Aibė $A \subset C$, nes jos elementai $\{-1, 1\}$, o aibė $C$, taip pat turi šiuos elementus. Taip pat aibė $B$ yra visų aibių poaibis, nes tuščioji aibė yra bet kurios aibės poaibis.

3. Aibės $X$ ir $Y$ yra lygios, jei $X \subset Y$ ir $Y \subset X$. Parodyti, kad taip apibrėžtai aibių lygybei galioja refleksyvumo, simetriškumo ir tranzityvumo aksiomos.

   **Sprendimas:**

   (a) Refleksyvumas. Imkime aibę $X$. Kiekviena aibė yra savo pačios poaibis, taigi $X \subset X$.

   (b) Simetriškumas. Turime teiginius: $A$ – aibės $X$ ir $Y$ yra lygios, $B$ – $X \subset Y$ ir $C$ – $Y \subset X$. Turime, kad $A \Leftrightarrow (B \wedge C)$. Reikia parodyti, kad $A \Leftrightarrow (C \wedge B)$, bet tai išplaukia iš to, kad loginė operacija $\wedge$ yra simetriška (Tuo galima įsitikinti sulyginus teisingumo lenteles).

(c) Tranzityvumas. Imkime aibes $X$, $Y$, $Z$. $X$ ir $Y$ yra lygios, kai $X \subset Y$ ir $Y \subset X$. $Y$ ir $Z$ yra lygios, kai $Y \subset Z$ ir $Z \subset Y$. Žinome, kad jei $X \subset Y$ ir $Y \subset Z$, tai būtinai $X \subset Z$. Analogiškai, jei $Z \subset Y$ ir $Y \subset X$, tai būtinai $Z \subset X$. Taigi gavome, $X \subset Z$ ir $Z \subset X$, taigi $X$ ir $Z$ lygios. Tą ir reikėjo parodyti.

4. Tegul $X$, $Y$ ir $Z$ yra aibės. Įrodyti, kad $Z \cap (X \cup Y) = (Z \cap X) \cup (Z \cap Y)$.

   **Sprendimas:** Aibės $X$ ir $Y$ yra lygios tada ir tik tada, kai teisingas teiginys: $\forall x$, $(x \in X) \Leftrightarrow (x \in Y)$. Taigi,

$$\begin{aligned} x \in Z \cap (X \cup Y) &\Leftrightarrow [x \in Z] \wedge [x \in (X \cup Y)] \\ &\Leftrightarrow [x \in Z] \wedge [(x \in X) \vee (x \in Y)] \end{aligned}$$

   Iš loginių operacijų *ir* ir *arba* distributyvumo turime

$$\begin{aligned} [x \in Z] \wedge [(x \in X) \vee (x \in Y)] &\Leftrightarrow [(x \in Z) \wedge (x \in X)] \vee [(x \in Z) \wedge (x \in Y)] \\ &\Leftrightarrow [x \in (Z \cup X)] \vee [x \in (Z \cup Y)] \\ &\Leftrightarrow x \in (Z \cap X) \cup (Z \cap Y). \end{aligned}$$

5. Tegul $X$ ir $Y$ yra aibės. Įrodyti: jei $X \subset Y$, tai $X = Y \backslash (Y \backslash X)$.

   **Sprendimas:**. Aibės $X$ ir $Y$ yra lygios tada ir tik tada, kai teisingas teiginys: $\forall x$, $(x \in X) \Leftrightarrow (x \in Y)$. Taigi,

$$\begin{aligned} x \in Y \backslash (Y \backslash X) &\Leftrightarrow [x \in Y] \wedge [x \notin (Y \backslash X)] \\ &\Leftrightarrow [x \in Y] \wedge \neg[(x \in Y) \wedge (x \notin X)] \\ &\Leftrightarrow [x \in Y] \wedge [(x \notin Y) \vee (x \in X)] \\ &\Leftrightarrow [(x \in Y) \wedge (x \notin Y)] \vee [(x \in Y) \wedge (x \in X)] \\ &\Leftrightarrow [(x \in Y) \wedge (x \in X)] \\ &\Leftrightarrow (x \in Y \cap X) \end{aligned}$$

   Jei $X \subset Y$, tai $Y \cap X = X$, taigi teiginys įrodytas.

6. Tegul $X$ yra aibė ir $\simeq$ yra ekvivalentumo binarusis sąryšis aibėje $X$. Įrodyti:

   (a) $[x] \subset X$, kiekvienam $x \in X$. (Čia $[x]$ yra ekivalentumo klasė, $[x] := \{y \in X, y \simeq x\}$).

   (b) $x \in [x]$ kiekvienam $x \in X$.

   **Sprendimas:**

   (a) Turime $[x] = \{y \in X, y \simeq x\}$. Taigi aibei $[x]$ priklauso tie $X$ elementai, kurie dar tenkina papildomą savybę, ekvivalentumą elementui $x$. Taigi iš apibrėžimo išplaukia, kad aibei $[x]$ negali priklausyti ne aibės $X$ elementai. Vadinasi $[x] \subset X$.

   (b) Kadangi $x \simeq x$ ir $x \in X$, tai pagal apibrėžimą $x \in [x]$.

7. Tegul $\mathbb{N}$ yra natūraliųjų skaičių aibė. Dekarto sandaugoje $X := \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ apibrėžkime binarųjį sąryšį $\simeq_Z$ bet kuriems $(k, n) \in X$ ir $(p, q) \in X$, sakydami, kad $(k, n) \simeq_Z (p, q)$, jei $k+q = p+n$. Parodykite, kad taip apibrėžtas binarusis sąryšis aibėje $X$ yra ekvivalentumo binarusis sąryšis.

   **Sprendimas:**

   - Refleksyvumas. Imkime $(k, n) \in X$. Tada pagal apibrėžimą gauname $k + n = k + n$. Kadangi lygybės sąryšiui galioja refleksyvumo aksioma, tai ir mūsų apibrėžtam ekvivalentumo sąryšiui galioja refleksyvumas.
   - Simetriškumas. Imkime $(k, n) \in X$ ir $(p, q) \in X$. Tada pagal apibrėžimą $k + q = p + n$. Imkime $(p, q) \in X$ ir $(k, n) \in X$. Tokiu atveju, turime $p + n = k + q$. Taigi sąryšio simetriškumas išplaukia iš lygybės simetriškumo.

- Tranzityvumas. Imkime $(k,n) \in X$, $(p,q) \in X$ ir $(t,u) \in X$. Pagal apibrėžimą gauname:

$$\begin{aligned} k+q &= p+n \\ p+u &= t+q. \end{aligned}$$

  Dešinių lygybių suma turi būti lygi kairiųjų lygybių sumai:

$$k+q+p+u = p+n+t+q.$$

  Naudodamiesi sumos asociatyvumu ir distributyvumu gauname

$$(k+u)+(p+q) = (t+n)+(p+q).$$

  Ši lygybė teisinga tik tuo atveju, kai

$$k+u = t+n$$

  priešingu atveju gautumėme, kad $p+q \neq p+q$. O šią lygybę mums ir reikėjo gauti.

8. Tegu sąryšis $\simeq$ aibėje $\mathbb{R}$ yra apibrėžiamas taip: $x \simeq y$ tada ir tik tada, jei $x-y \in \mathbb{Z}$. Įrodykite, kad $\simeq$ yra ekvivalentumo sąryšis. Kokia yra 1 ekvivalentumo klasė? $\frac{2}{3}$?

   **Sprendimas:**

   (a) Refleksyvumas. Kadangi $x-x=0$, o $0 \in \mathbb{Z}$, tai galioja refleksyvumo sąryšis ir $x \simeq x$.

   (b) Simetriškumas. Kadangi $x-y=(-1)(y-x)$, tai, jei $x-y \in \mathbb{Z}$, tada ir $y-x \in \mathbb{Z}$.

   (c) Tranzityvumas. Turime $x,y,z \in \mathbb{R}$. Pagal $\simeq$ apibrėžimą gauname, kad $x-y \in \mathbb{Z}$ ir $y-z \in \mathbb{Z}$. Tada

$$x-y = x-y+z-z = (x-z)-(y-z)$$

   Kadangi, $x-y \in \mathbb{Z}$ ir $y-z \in \mathbb{Z}$, tai būtinai $x-z \in \mathbb{Z}$, nes dviejų sveikųjų skaičių suma yra sveikasis skaičius.

   Kadangi apibrėžtas sąryšis tenkina refleksyvumo, simetriškumo ir tranzityvumo sąlygas, tai jis yra ekvivalentumo sąryšis.

   1 ekvivalentumo klasė: $\{y \in \mathbb{R} : 1-y \in \mathbb{Z}\} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$.

   $\dfrac{2}{3}$ ekvivalentumo klasė: $\{y \in \mathbb{R} : \frac{2}{3}-y \in \mathbb{Z}\} = \{..., -\frac{8}{3}, -\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, \frac{8}{3}, ...\}$.

### 1.3 Pratybų nr. 5-6 uždavinių sprendimai

Rugsėjo 18, 21, 22 d.

1. Apibrėžkime funkciją $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kaip $f(x) = x^2$. Taip pat apibrėžkime $\mathbb{R}$ intervalus

$$A = [0, 1] \quad B = [-1, 2] \quad C = [-3, 0]$$

   (a) Kokia yra $f$ apibrėžimo sritis?
   (b) Kokia yra $f$ reikšmių sritis?
   (c) Ar $f$ yra bijekcija? Paaiškinkite.
   (d) Ar $f$ yra siurjekcija? Paaiškinkite
   (e) Raskite $f[A]$, $f[B]$ ir $f[C]$.
   (f) Raskite $f^{-1}[A]$, $f^{-1}[B]$ ir $f^{-1}[C]$.

   **Sprendimas:**

   (a) Funkcijos $f$ apibrėžimo sritis yra $\mathbb{R}$.
   (b) Funkcijos $f$ reikšmių sritis yra $[0, \infty]$.
   (c) Funkcija $f$ nėra bijekcija, nes ji nėra injekcija. Iš tikrųjų, jei funkcija yra injekcija, tai iš to, kad $f(x) = f(y)$ išplaukia $x = y$. Imkime $f(x) = f(y) = 4$ ir $x = 2$, $y = -2$. Taigi, funkcijos reikšmės yra lygios, o argumento skiriasi.
   (d) Funkcija $f$ nėra siurjekcija, nes $E(f) \neq \mathbb{R}$.
   (e) $f[A] = [0, 1]$,
   $f[B] = [0, 4]$,
   $f[C] = [0, 9]$.
   (f) $f^{-1}[A] = [-1, 1]$,
   $f^{-1}[B] = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$,
   $f^{-1}[C] = \{0\}$.

2. Įrodyti, kad funkcija $f : X \to Y$ yra injekcija tada ir tik tada, kai bet kuriems $x, y \in X$ iš $x \neq y$ išplaukia $f(x) \neq f(y)$.

   **Sprendimas:** „ $\Rightarrow$ “. Tarkime, kad $f : X \to Y$ yra injekcija. Tada, pagal injekcijos apibrėžimą, turime: kad $\forall x, y \in X$ jei $f(x) = f(y)$ tai $x = y$. Pažymėkime teiginį $A : f(x) = f(y)$, teiginį $B : x = y$. Turime, kad iš $A \Rightarrow B$. Bet $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \Rightarrow \neg B$. Bet tai ir yra reikiamas teiginys.

   „ $\Leftarrow$ “. Įrodymas analogiškas.

3. Tegu $f, \tilde{f} : X \to Y$ ir $g, \tilde{g} : Y \to Z$.

   (a) Įrodyti: jei $g \circ f = g \circ \tilde{f}$ ir $g$ yra injekcija, tai $f = \tilde{f}$. Ar šis teiginys teisingas, jei $g$ nėra injekcija?
   (b) Įrodyti: jei $g \circ f = \tilde{g} \circ f$ ir $f$ siurjekcija, tai $g = \tilde{g}$. Ar šis teiginys teisingas, jei $f$ nėra siurjekcija?

   **Sprendimas:**

   (a) Tegu $x \in X$. Turime, kad $\forall x \in X$

$$g\big(f(x)\big) = g\big(\tilde{f}(x)\big)$$

   Kadangi $g$ injekcija, tai $\forall y, z \in Y$, jei $g(y) = g(z)$, tai $y = z$. Bet tada $f(x) = \tilde{f}(x)$.
   Jeigu $g$ nėra injekcija, tai $\exists y, z \in Y$, tokie, kad $g(y) = g(z)$ ir $y \neq z$. Tai reiškia, kad $\exists f, \tilde{f}$, kad $g(f(x)) = g(\tilde{f}(x))$, bet $f(x) \neq \tilde{f}(x)$.

(b) Turime $\forall x \in X$

$$g\big(f(x)\big) = \tilde{g}\big(f(x)\big)$$

Kadangi $f$ siurjekcija, tai $\forall y \in Y$, $\exists x \in X$ toks, kad $f(x) = y$. Bet tada $\forall y \in Y$, $\exists x \in X$, $g(y) = g(f(x)) = \tilde{g}(f(x)) = \tilde{g}(y)$. Taigi $g = \tilde{g}$.

Jeigu $f$ nėra siurjekcija teiginys nėra teisingas. Tegu $f$ nėra siurjekcija, tada egzistuoja $y \in Y$, toks, kad nėra tokio $x \in X$, kad $f(x) = y$. Tegu $f_E : X \to f[X]$ ir $f_E(x) = f(x)$, visiems $x \in X$. Tada $f_E$ yra siurjekcija ir pagal jau įrodytą dalį gauname, kad $g(y) = \tilde{g}(y)$, visiems $y \in f[X]$. Taškuose $y \in Y \backslash f[X]$ iš funkcijų $g$ ir $\tilde{g}$ nieko nereikalaujama, taigi juose jos gali įgyti skirtingas reikšmes.

4. Tegu funkcija $f : X \to Y$ yra bijekcija ir $f^{-1} : Y \to X$ yra atvirkštinė funkcijai $f$.

(a) Įrodyti, kad $f^{-1}(f(x)) = x$ kiekvienam $x \in X$.

(b) Įrodyti, kad $f(f^{-1}(y)) = y$ kiekvienam $y \in Y$.

(c) Ar funkcija $f^{-1}$ turi atvirkštinę ir jei taip rasti ją.

**Sprendimas:**

(a) Kadangi funkcija yra bijekcija, tai kiekvienam $y \in Y$ egzistuoja vienintelis $x \in X$ toks, kad $f(x) = y$ ir $f^{-1}(y) = x$. Imkime dabar bet kurį $x \in X$ ir pažymėkime $y = f(x)$. Vienintelis $x' \in X$, kuriam $f(x') = y$ yra tas pats $x$. Kadangi $f^{-1}(y) = x'$, o $y = f(x)$ ir $x = x'$, gauname įrodymą.

(b) Kadangi funkcija yra bijekcija, tai kiekvienam $y \in Y$ egzistuoja vienintelis $x \in X$ toks, kad $f(x) = y$ ir $f^{-1}(y) = x$. Taigi turime $y = f(x)$, o pagal apibrėžimą $x = f^{-1}(y)$, taigi $y = f(x) = f(f^{-1}(y))$.

(c) Funkcija $f^{-1}$ turi atvirkštinę, jei ji yra bijekcija. Kadangi $f$ yra bijekcija, tai ir $f^{-1}$ bijekcija. Vadinasi $f^{-1}$ atvirkštinė egzistuoja. Pažymėkime $g = f^{-1}$. Turime $g : Y \to X$ ir $g$ bijekcija. Taigi kiekvienam $x \in X$ egzistuoja vienintelis $y \in Y$ toks, kad $g(y) = x$, ir $g^{-1}(x) = y$. Imkime dabar bet kurį $y \in Y$, turime, kad $g^{-1}(g(y)) = y$. Bet taip pat $f(f^{-1}(y)) = f(g(y)) = y$. Taigi $g^{-1} \circ g = f \circ g$ ir $g$ yra siurjekcija. Vadinasi $g^{-1} = f$.

5. Tegu $X$ yra aibės $Y$ poaibis ir tegul $I_{X \to Y} : X \to Y$ yra funkcija, įgyjanti reikšmes $I_{X \to Y}(x) := x$ kiekvienam $x \in X$, ir vadinama aibės $X$ *įdėjimu* į aibę $Y$. Kai $Y = X$, tai funkcija $I_{X \to X}$ vadinama *tapatingu atvaizdavimu* aibėje $X$. Įrodyti teiginius:

(a) jei $X \subset Y \subset Z$, tai kompozicija $I_{Y \to Z} \circ I_{X \to Y} = I_{X \to Z}$.

(b) jei $f : X \to Y$ yra funkcija, tai $f = f \circ I_{X \to X} = I_{Y \to Y} \circ f$.

(c) jei funkcija $f : X \to Y$ yra bijekcija, tai $f \circ f^{-1} = I_{Y \to Y}$ ir $f^{-1} \circ f = I_{X \to X}$.

**Sprendimas:**

(a) Reikia parodyti, kad kiekvienam $x \in X$, $(I_{Y \to Z} \circ I_{X \to Y})(x) = x$. Tada $I_{Y \to Z} \circ I_{X \to Y} = I_{X \to Z}$. Bet $I_{X \to Y}(x) = x$ kiekvienam $x \in X$ ir $I_{Y \to Z}(y) = y$ kiekvienam $y \in Y$. Taigi

$$I_{Y \to Z}(I_{X \to Y}(x)) = I_{X \to Y}(x) = x$$

(b) Turime kiekvienam $x \in X$, $I_{X \to X}(x) = x$, taigi $f(I_{X \to X}(x)) = f(x)$. Taip pat kiekvienam $y \in Y$ $I_{Y \to Y}(y) = y$. Tegu $x \in X$, tada egzistuoja vienintelis $y \in Y$, kad $f(x) = y$. Taigi $I_{Y \to Y}(f(x)) = f(x)$.

(c) Išplaukia tiesiogiai iš prieš tai buvusio uždavinio.

6. Tegul $f : X \to Y$. Įrodyti: $f$ yra bijekcija tada ir tik tada, kai lygybė $f[A \cap B] = f[A] \cap f[B]$ galioja bet kurioms aibėms $A \subset X$ ir $B \subset X$.

**Sprendimas:** „ $\Rightarrow$ ". Tarkime, kad f yra bijekcija. Reikia parodyti, kad galioja $f[A \cap B] = f[A] \cap f[B]$. Kadangi $f$ yra bijekcija, egzistuoja jos atvirkštinė funkcija $f^{-1}$. Iš jos savybių turime, kad $f^{-1}[f[C]] = C$ bet kuriai aibei $C$. Taigi iš vienos pusės turime $f^{-1}[f[A \cap B]] = A \cap B$. Iš kitos – $f^{-1}[f[A] \cap f[B]] = f^{-1}[f[A]] \cap f^{-1}[f[B]] = A \cap B$. Taigi $f[A \cap B] = f[A] \cap f[B]$.

„ $\Leftarrow$ “. Tarkime, kad $f[A \cap B] = f[A] \cap f[B]$. Parodysime, kad $f$ yra injekcija. Imkime tokius $x$ ir $x'$ priklausiančius $X$, kuriems $f(x) = f(x') = y$. Apibrėžkime aibes $A := \{x\}$ ir $B := \{x'\}$. Turime $f[A] \cap f[B] = \{y\}$. Jeigu $x \neq x'$, tai $A \cap B = \varnothing$ ir $f[A \cap B] = \varnothing$. Gauname prieštarą. Taigi būtinai $x = x'$, vadinasi $f$ yra injekcija.

7. Tegul funkcijos $f : X \to Y$ ir $g : Y \to Z$ yra bijekcijos. Įrodyti, kad kompozicija $g \circ f$ yra bijekcija ir jos atvirkštinės funkcija $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

   **Sprendimas:** Kadangi $g$ yra bijekcija, tai kiekvienam $z \in Z$ egzistuoja vienintelis $y$, toks kad $g(y) = z$. Kadangi $f$ yra bijekcija, tai kiekvienam $y \in Y$ egzistuoja toks $x \in X$, kad $f(x) = y$. Taigi turime, kad kiekvienam $z \in Z$ egzistuos toks $x \in X$, kad $g(f(x)) = z$. Vadinasi $g \circ f$ yra bijekcija.

   Kadangi $g \circ f$ yra bijekcija, tai egzistuoja jos atvirkštinė $h$. Tada pagal apibrėžimą kiekvienam $z \in Z$ egzistuos toks $x$, kad $h(z) = x$. Turime $(g \circ f)(h(z)) = (g \circ f)(x) = z$. Bet taip pat

$$
\begin{aligned}
(g \circ f)((f^{-1} \circ g^{-1})(z)) &= g\left(f\left(f^{-1}\left(g^{-1}(z)\right)\right)\right) \\
&= g\left(g^{-1}(z)\right) = z
\end{aligned}
$$

   nes $f(f^{-1}(y')) = y'$, kiekvienam $y' \in Y$, bei $g(g^{-1}(z')) = z'$, kiekvienam $z' \in Z$. Kadangi $g \circ f$ yra bijekcija gauname, kad $h = f^{-1} \circ g^{-1}$.

8. Įrodyti, kad $\bigcup(A \cup B) = (\bigcup A) \cup (\bigcup B)$.

   **Sprendimas:** Parodysime, kad $\bigcup(A \cup B)$ yra $(\bigcup A) \cup (\bigcup B)$ poaibis. Jeigu $x \in \bigcup(A \cup B)$, tai egzistuoja tokia aibė $y \in A \cup B$, kad $x \in y$. Kadangi $y \in A \cup B$, tai arba $y \in A$ arba $y \in B$. Taigi arba egzistuoja tokia aibė $y \in A$, kad $x \in y$, arba egzistuoja tokia aibė $y \in B$, kad $x \in y$. Tai reiškia, kad arba $x \in \bigcup A$ arba $y \in \bigcup B$. Vadinasi $x \in (\bigcup A) \cup (\bigcup B)$

   Tegu dabar $x \in (\bigcup A) \cup (\bigcup B)$. Tai reiškia, kad arba $x \in \bigcup A$ arba $x \in \bigcup B$. Taigi arba egzistuoja aibė $y \in A$, tokia, kad $x \in y$, arba egzistuoja aibė $y \in B$, tokia, kad $x \in y$. Bet tada $y \in A \cup B$ ir $x \in y$. Taigi $x \in \bigcup(A \cup B)$.

   Parodėme kad sąlygoje duotos aibės yra viena kitos poaibis, reiškiasi jos yra lygios.

## 1.4 Pratybų nr. 7-8 uždavinių sprendimai

1. Sugalvokite kiekvienai iš šių aibių priegaugio operaciją ir nustatykite kurias Peano aksiomas šios aibės tenkina, o kurių ne.

   (a) $\varnothing$

   (b) $\{1\}$

   (c) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

   (d) $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$

   (e) $\{1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4, \frac{9}{2}, \dots\}$

   (f) $\{x \in \mathbb{Q} : x \geq 1\}$

   (g) $[1, \infty)$

   **Sprendimas:** Kiekvienai iš šių aibių reikia nusakyti, kas yra nulinis elementas ir kaip apibrėžiama prieaugio operacija.

   (a) $\varnothing$ - neturi elementų, reiškiasi neįmanoma apibrėžti prieaugio operacijos ir todėl netenkinama nė viena Peano aksioma.

   (b) Aibėje $\{1\}$, nulį laikykime 1, o prieaugio operaciją apibrėžkime taip: $1{+}{+} = 1$. Tada bus tenkinamos P1, P2, P4 ir P5 aksiomos. Aksioma P3 netenkinama bus netenkinama, nes egzistuoja elementas kurio prieaugis yra nulis. Tas elementas ir yra pats nulis pagal apibrėžimą.

   (c) Aibėje $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ nulį laikykime 1, o prieaugio operaciją apibrėžkime taip:

   $$\begin{aligned} 1{+}{+} &= 2 \\ 2{+}{+} &= 3 \\ 3{+}{+} &= 4 \\ 4{+}{+} &= 5 \\ 5{+}{+} &= 1 \end{aligned}$$

   Tenkinamos P1, P2, P4 ir P5 aksiomos, o P3 netenkinama, nes egzistuoja elementas, kurio prieaugis yra nulis. Tas elementas yra 5.

   (d) Aibėje $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$ apibrėžkime nulį, kaip 2, o prieaugio operaciją:

   $$\begin{aligned} 2{+}{+} &= 3 \\ 3{+}{+} &= 4 \\ 4{+}{+} &= 5 \\ 5{+}{+} &= 6 \\ &\dots \end{aligned}$$

   Tenkinamos visos P1, P2, P3, P4 ir P5 Peano aksiomos.

   (e) Aibėje $\{1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4, \frac{9}{2}, \dots\}$ nuliu laikykime 1, o prieaugio operaciją apibrėžkime taip:

   $$\begin{aligned} 1{+}{+} &= \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2}{+}{+} &= 2 \\ 2{+}{+} &= \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2}{+}{+} &= 3 \\ &\dots \end{aligned}$$

   Taip apibrėžus bus tenkinamos visos Peano aksiomos.

(f) Aibei $\{x \in \mathbb{Q} : x \geq 1\}$, nuliu laikykime 1 ir apibrėžkime prieaugio operaciją:

$$\frac{n}{10} + + = \frac{n+1}{10}, \text{ kai } n \geq 10$$
$$x + + = x, \text{ kai } x \neq \frac{n}{10}$$

Tenkinamos P1, P2, P3 ir P4 aksiomos. Aksioma P5 nėra tenkinama, jeigu savybę $S$ tenkina 0 ir bet kurio natūraliojo skaičiaus turinčio savybę $S$ prieaugis turi šią savybę, tai pvz. skaičius $\frac{19}{17}$ šios savybės neturės, nes ją turės tik skaičiai turintys išraišką $\frac{n}{10}$, kai $n \geq 10$.

(g) Aibei $[1, \infty)$ apibrėžkime prieaugio operaciją:

$$\begin{aligned}
1 + + &= 2 \\
2 + + &= 3 \\
3 + + &= 4 \\
4 + + &= 5 \\
5 + + &= 6 \\
&\dots \\
x + + &= x, \text{ jei } x \neq n, \; n \in \mathbb{N}_+
\end{aligned}$$

Tenkinamos P1, P2, P3, P4 aksiomos. Netenkinama aksioma P5,jeigu savybę $S$ tenkina 0 ir bet kurio natūraliojo skaičiaus turinčio savybę $S$ prieaugis turi šią savybę, tai pvz. skaičius $\frac{3}{2}$ šios savybės neturės, nes ją turės tik skaičiai turintys išraišką $x = n$, $n \in \mathbb{N}_+$.

2. Įrodyti lygybę, pasinaudojant apibrėžimu $2 + 2 = 4$;

**Sprendimas:** Naudosimės indukcija ir $\forall m, n \in \mathbb{N}$ galioja

$$m + 0 = m$$
$$m + (n + +) = (m + n) + +$$

Tada $2 + 0 = 2$,

$$\begin{aligned}
2 + 1 &= 2 + (0 + +) \\
&= (2 + 0) + + \\
&= 2 + + \\
&= 3
\end{aligned}$$

Taigi,

$$\begin{aligned}
2 + 2 &= 2 + (1 + +) \\
&= (2 + 1) + + \\
&= 3 + + \\
&= 4
\end{aligned}$$

3. Tegu, $n$ ir $m$ natūralieji skaičiai. Įrodyti, kad

$$n \cdot m = m \cdot n$$

Pagalbiniai faktai:

(a) Irodyti, kad $0 \cdot n = 0$.

(b) Įrodyti, kad $(m + +) \cdot n = m \cdot n + n$

**Sprendimas:** Pirmiausia parodysime pagalbinius faktus:

$$0 \cdot n = 0 \tag{2}$$

ir

$$(m++)\cdot n = m\cdot n + n. \tag{3}$$

Iš pradžių įrodysime (2). Ją įrodžius, turėsime, kad daugyba iš nulio yra komutatyvi. Iš sandaugos apibrėžimo turime:

$$m\cdot 0 = 0 \tag{4}$$

ir

$$m\cdot(n++) = m + m\cdot n \tag{5}$$

Tegu $M := \{n\in\mathbb{N} : 0\cdot n = 0\}$. Tada $0\in M$ dėl (4) lygybės su $m=0$. Tarkime, kad $n\in M$. Tada remiantis (5) lygybe su $m=0$ ir prielaida, gauname:

$$0\cdot(n++) = 0 + 0\cdot n = 0,$$

t.y., $n++\in M$. Remiantis indukcijos principu $M=\mathbb{N}$ ir (2) lygybė galioja $\forall n\in\mathbb{N}$.

Tegu $m\in\mathbb{N}$ ir $M_m = \{n\in\mathbb{N} : (m++)\cdot n = m\cdot n + n\}$. Iš Peano aksiomų turime, kad $m++$ yra natūrinis skaičius. Taigi iš sandaugos apibrėžimo (4) išplaukia, kad $(m++)\cdot 0 = 0$. Analogiškai $m\cdot 0 = 0$. Iš sumos savybių žinome, kad $0+0=0$, taigi $0\in M_m$. Tarkime, kad $n\in M_m$. Tada

$$\begin{aligned}
(m++)\cdot(n++) &= (m++) + (m++)\cdot n\\
&= (m++)\cdot n + (m++) \text{ (dėl sumos komutatyvumo)}\\
&= m\cdot n + n + (m++) \text{ (pagal indukcinę prielaidą)}\\
&= m\cdot n + (n+m)++ \text{ (pagal sumos apibrėžimą)}\\
&= m\cdot n + (m+n)++ \text{ (dėl sumos komutatyvumo)}\\
&= m\cdot n + m + (n++) \text{ (pagal sumos apibrėžimą)}\\
&= m + m\cdot n + (n++) \text{ (dėl sumos asociatyvumo ir komutatyvumo)}\\
&= m\cdot(n++) + (n++) \text{ (pagal sandaugos apibrėžimą)}
\end{aligned}$$

t.y., $(n++)\in M_m$. Remiantis indukcijos principu $M_m=\mathbb{N}$ ir (3) galioja $\forall m\in\mathbb{N}$ ir $\forall n\in\mathbb{N}$.

Galiausiai, tegul $n\in\mathbb{N}$ ir $N=\{m\in\mathbb{N} : m\cdot n = n\cdot m\}$. Remiantis (2) $0\cdot n = 0 = n\cdot 0$, t.y., $0\in N$. Tarkime, kad $m\in N$. Tada

$$\begin{aligned}
(m++)\cdot n &= m\cdot n + n \text{ (pagal įrodytą faktą)}\\
&= n\cdot m + n \text{ (pagal indukcinę prielaidą)}\\
&= n + n\cdot m \text{ (dėl sumos komutatyvumo)}\\
&= n\cdot(m++) \text{ (pagal sandaugos apibrėžimą),}
\end{aligned}$$

t.y., $m++\in N$. Remiantis indukcijos principu $N=\mathbb{N}$ ir $m\cdot n = n\cdot m$ galioja $\forall m\in\mathbb{N}$ ir $\forall n\in\mathbb{N}$.

4. Tegu $n$ yra teigiamas natūralusis skaičius. Įrodykite, kad egzistuoja toks vienintelis natūralusis skaičius $m$, kad $m++=n$.

   **Sprendimas:** Turime $n\neq 0$ ir $n\in\mathbb{N}$. Iš penktos Peano aksiomos turime, kad negali egzistuoti toks teigiamas natūralusis skaičius, kuris nėra jokio natūraliojo skaičiaus prieaugis. Taigi egzistuoja toks $m$, kad $m++=n$. Tarkime, kad $\exists m_1\in\mathbb{N}$ ir $\exists m_2\in\mathbb{N}$, kad $m_1++=n$ ir $m_2++=n$. Tačiau pagal 4 Peano aksiomą tą patį prieaugį turintys skaičiai yra lygūs, vadinasi $m_1=m_2$.

5. Įrodykite, kad natūraliesiems skaičiams $n$, $m$, ir $k$ galioja savybės:

   (a) $n\geq n$

   (b) jei $n\geq m$ ir $m\geq k$, tai $n\geq k$

   (c) jei $n\geq m$ ir $m\geq n$, tai $n=m$

(d) jei $n \geq m$, tai $n + k \geq m + k$

(e) jei $n < m$ ir $l \in \mathbb{N}$ yra teigiamas, tai $n \cdot l < m \cdot l$

(f) $n < m$ tada ir tik tada, kai $m = n + l$ su kuriuo nors teigiamu natūraliuoju skaičiumi $l$

(g) $n < m$ tada ir tik tada, kai $n + + \leq m$

**Sprendimas:**

(a) Pagal apibrėžimą, $n \geq m$, jei egzistuoja toks $k \in \mathbb{N}$, kad $n = m + k$. Bet iš sumos apibrėžimo turime, kad $n = n + 0$, taigi $n \geq n$.

(b) Pagal apibrėžimą $n \geq m$ jei egzistuoja toks $u \in \mathbb{N}$, kad $n = m + u$. Taip pat $m \geq k$, jei egzistuoja toks $v \in \mathbb{N}$, kad $m = k + v$. Taigi turime, kad $n = m + u = k + v + u$. Taigi egzistuoja toks $t \in \mathbb{N}$ $(t = u + v)$, kad $n = k + t$, taigi $n \geq k$.

(c) Pagal apibrėžimą $n \geq m$ jei egzistuoja toks $u \in \mathbb{N}$, kad $n = m + u$. Taip pat $m \geq n$, jei egzistuoja toks $v \in \mathbb{N}$, kad $m = n + v$. Bet tada turime $n = m + u = n + v + u$. Bet taip gali būti, tik tuo atveju, kai $u + v = 0$, o tai savo ruožtu gali būti tik tada kai $u = 0$ ir $v = 0$. Taigi $n = m$.

(d) Pagal apibrėžimą $n \geq m$ jei egzistuoja toks $u \in \mathbb{N}$, kad $n = m + u$. Taigi $n + k = m + u + k$. Iš sumos komutatyvumo turime $m + u + k = m + k + u$. Taigi parodėme, kad egzistuoja toks $u \in \mathbb{N}$, kad $n + k = (m + k) + u$. Vadinasi $n + k \geq m + k$.

(e) Kadangi $n < m$, tai egzistuoja toks $k \in \mathbb{N}_+$, kad $m = n + k$. Taigi $m \cdot l = (n + k) \cdot l = n \cdot l + k \cdot l$. Kadangi $l$ ir $k$ yra teigiami, tai ir $k \cdot l$ yra teigiamas. Taigi radome tokį teigiamą skaičių $u$, kuriam $m \cdot l = n \cdot l + u$. Taigi $n \cdot l < m \cdot l$.

(f) *Būtinumas:* Sakykime, kad $n < m$. Tada, pagal apibrėžimą, $m \geq n$ ir $n \leq m$. Taigi egzistuoja toks $l \in \mathbb{N}$, kad $m = n + l$. Jeigu $l = 0$, tai turime, kad $m = n$, ir gauname prieštarą, taigi $l \neq 0$.

*Pakankamumas:* Sakykime, kad $m = n + l$, ir $l \neq 0$. Tada, pagal apibrėžimą, $m \geq n$. Kadangi $l \neq 0$ tai $m \neq n$ ir gauname, kad $m > n$.

(g) *Būtinumas:* Sakykime, kad $n < m$. Remiantis prieš tai įrodytu uždaviniu turime, kad egzistuoja toks $l \in \mathbb{N}_+$, kad $m = n + l$. Kadangi $l \neq 0$, tai egzistuoja vienintelis $k \in \mathbb{N}$ toks, kad $k + + = l$. Taigi turime $n + l = n + (k + +) = (n + k) + + = (k + n) + + = k + (n + +) = (n + +) + k$. Parodėme, kad egzistuoja toks $k \in \mathbb{N}$, kad $m = (n + +) + k$, taigi $n + + \leq m$.

*Pakankamumas:* Imkime, $(n++) \leq m$. Tada, egzistuoja toks $l \in \mathbb{N}$, kad $m = (n++) + l$. Analogiškai parodome, kad $m = n + (l + +)$. Pažymėkime $k = l + +$. Kadangi $l \in \mathbb{N}$, tai $k$ bus būtinai teigiamas, remiantis trečia Peano aksioma. Taigi parodėme, kad egzistuoja toks $l \in \mathbb{N}_+$, kad $m = n + l$. Remiantis prieš tai išspręstu uždaviniu turime, kad $n < m$.

6. Įrodyti tapatybę $(m + n)^2 = m^2 + 2m \cdot n + n^2$, bet kuriems $n, m \in \mathbb{N}$.

**Sprendimas:** Išskaidykime sandaugą:

$$(m + n)^2 = (m + n) \cdot (m + n).$$

Pažymėkime $k := (m + n)$, tada

$$\begin{aligned} k \cdot (m + n) &= k \cdot m + k \cdot n \\ &= (m + n) \cdot m + (m + n) \cdot n \\ &= m \cdot m + n \cdot m + m \cdot n + n \cdot n \\ &= m^2 + n \cdot m + n \cdot m + n^2 \\ &= m^2 + 1 \cdot (n \cdot m) + 1 \cdot (n \cdot m) + n^2 \\ &= m^2 + (1 + 1) \cdot (n \cdot m) + n^2 \\ &= m^2 + 2 \cdot (n \cdot m) + n^2. \end{aligned}$$

7. Tegul $a, b, c \in \mathbb{N}$ ir $a = b$. Įrodyti, kad $a + c = b + c$.

**Sprendimas:** Tegu $C$ yra aibė $c$ tokių, kuriems galioja $a + c = b + c$, kai $a = b$. Turime, kad $0 \in C$, nes $a + 0 = a = b = b + 0$. Tegu $c \in C$. Parodysime, kad $c + + \in C$. Turime

$a+(c++) = (a+c)++$ pagal sumos apibrėžimą. Kadangi $c \in C$ turime, kad $a+c = b+c$, taigi ir $(a+c)++ = (b+c)++$. Vėl pasinaudojus sumos apibrėžimu turime $(b+c)++ = b+(c++)$. Taigi $c++ \in C$. Taigi pagal indukciją $C = \mathbb{N}$.

8. Tegu $x \in \mathbb{N}$ ir $y \in \mathbb{N}$ yra teigiami. Tada egzistuoja tokie $n \in \mathbb{N}$ ir $m \in \mathbb{N}$, kad

$$x = ny + m \text{ ir } 0 \leq m < y.$$

Parodyti, kad $n$ ir $m$ yra vieninteliai skaičiai tenkinantys šią lygybę.

**Sprendimas:** Tarkime egzistuoja dvi poros $(n_1, m_1)$ ir $(n_2, m_2)$ tenkinančios nurodytą lygybę. Tada turime, kad

$$n_1 y + m_1 = n_2 y + m_2.$$

Tarkime, kad $n_1 \neq n_2$. Tada arba $n_1 < n_2$ arba $n_1 > n_2$. Nemažindami bendrumo tarkime, kad $n_1 < n_2$. Tada turime, kad egzistuoja toks teigiamas $k$, kad $n_2 = n_1 + k$. Taigi

$$n_2 y + m_2 = n_1 y + ky + m_2$$

Įstatę į prieš tai buvusią lygybę gauname:

$$n_1 y + m_1 = n_2 y + m_2 = n_1 y + n_1 k + m_2$$

Iš prastinimo taisyklės tada išplaukia, kad

$$m_1 = ky + m_2.$$

Bet tai prieštarauja tam, kad $m_1 < y$, nes iš to, kad $k \geq 1$, išplaukia, kad būtinai $ky+m_2 \geq y$. Taigi būtinai bus $n_1 = n_2$, išvada $m_1 = m_2$ tada išplaukia pagal prastinimo taisyklę.

# 2 Antroji grupė uždavinių

## 2.1 9-10 paskaita

Spalio 2, 5, 6 d.

1. Įrodyti, kad funkcija $I_N : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ su reikšmėmis $I_N(m) = [(m, 0)]_Z$, $m \in \mathbb{N}$ yra injekcija.

   **Sprendimas:** Pagal $I_N$ apibrėžimą

   $$\begin{aligned}[(m,0)]_Z &= \{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : (p,q) \simeq_Z (m,0)\} \\ &= \{(m,0), (m+1,1), (m+2,2), ...\}.\end{aligned}$$

   Funkcija yra injekcija, jei $\forall x, y \in X$ jei $f(x) = f(y)$, tai $x = y$. Taigi imkime, $I_N(m)$ ir $I_N(n)$. Tegu $I(n) = [(n,0)]_Z$, o $I_N(m) = [(m,0)]_Z$. Tarkime, kad $I(n) = I(m)$. Tai reiškia, kad $(n,0) \simeq_Z (m,0)$. O tai bus tik tada jei

   $$n + 0 = m + 0,$$

   taigi $m = n$. Tą ir reikėjo įrodyti.

2. Įrodyti sveikiesiems skaičiams $n$ ir $m$, kad griežta nelygybė $n > m$ galioja tada ir tik tada, kai $n \geq m + 1$.

   **Sprendimas:** „$\Rightarrow$“. Tarkime, kad $n > m$. Tada pagal apibrėžimą, $n \geq m$ ir $n \neq m$. Turime, kad $n \geq m$, jei egzistuoja $k \in \mathbb{N}$ toks, kad $n = m + k$. Kadangi $n \neq m$, tai $k \geq 1$. Tada turime $n = m + 1 + (k - 1)$, ir $k - 1$ yra natūralusis skaičius. Pagal apibrėžimą $n \geq m + 1$.

   „$\Leftarrow$“. Tarkime, kad $n \geq m + 1$. Tada pagal apibrėžimą $n \geq m + 1$, jei egzistuoja toks $k \in \mathbb{N}$, kad $n = m + 1 + k$. Pažymėkime $l := k + 1$. Turime, kad $l \in \mathbb{N}$ ir kad $n = m + l$. Taigi $n \geq m$. Be to, $n \neq m$, nes priešingu atveju būtinai bus $l = 0$, o prieštarautų antrai Peano aksiomai.

3. Įrodyti, kad $(-1) \cdot (-1) = 1$.

   **Sprendimas:** Turime, kad $-1 = [(0,1)]_Z$. Sveikųjų skaičių $[(k,n)]_Z$ ir $[(p,q)]$ sandauga yra sveikas skaičius $[(k \cdot p + n \cdot q, k \cdot q + n \cdot p)]$. Taigi

   $$(-1) \cdot (-1) = [(0,1)]_Z \cdot [(0,1)]_Z = [(0 \cdot 0 + 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0)]_Z = [(1,0)]_Z = 1$$

4. Tegul $a$ ir $b$ yra tokie sveikieji skaičiai, kad $ab = 0$. Įrodyti, kad tada arba $a = 0$ arba $b = 0$ (arba abu kartu).

   **Sprendimas:** Kadangi $a$ ir $b$ yra sveikieji skaičiai, tai jie yra arba teigiami, arba neigiami arba nulis. Tarkime, kad $a$ ir $b$ yra teigiami. Tada $a$ ir $b$ yra natūralieji skaičiai, o natūraliųjų skaičių sandauga yra nulis, tada ir tik tada kai nors vienas iš jų yra nulis. Taigi gavome prieštarą.

   Tegu $a$ ir $b$ yra abudu neigiami, tada, $ab = (-a) \cdot (-b)$ ir $-a$ ir $-b$ yra natūralieji skaičiai. Taigi gauname, kad nors arba $-a$ arba $-b$ arba jie abu kartu yra nuliai. Bet tada būtinai bus nulis nors vienas iš $a$ ir $b$. Taigi vėl gavome prieštarą.

   Tegu $a$ teigiamas, o $b$ neigiamas. Jei $ab = 0$, tai remiantis nulio savybėmis, bus teisinga $a \cdot (-b) = 0$. Įrodymas toliau analogiškas prieš tai išnagrinėtam atvejui.

   Taigi parodėme, kad jei $ab = 0$, tai negali būti abu skaičiai ne nulis. Vadinasi nors vienas iš jų būtinai bus nulis.

5. Tegul $q$ yra racionalusis skaičius. Įrodyti, kad galioja lygiai viena iš trijų alternatyvų:

   (a) $q$ yra teigiamas racionalusis skaičius;

   (b) $q$ yra nulis;

   (c) $q$ yra neigiamas racionalusis skaičius.

**Sprendimas:** Turime, kad jei $p \in \mathbb{Q}$, tai egzistuoja tokie $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}_+$, kad $p = \frac{a}{b}$. Pastebėkime, kad $\frac{a}{b} = \frac{-a}{-b}$. Vadinasi visados galima pasirinkti tokią $p$ išraišką, kad $b$ būtų teigiamas natūralusis skaičius (jeigu $b$ teigiamas, tai imame $\frac{a}{b}$, jei $b$ neigiamas, tai imame $p = \frac{a'}{b'}$, su $a' = -a$ ir $b' = -b$. Naujoje išraiškoje $b'$ jau teigiamas). Kadangi $a$ yra sveikasis skaičius, tai jam galioja trys alternatyvos, arba jis teigiamas, arba neigiamas, arba nulis. Bet pirmuoju atveju turime $p = \frac{a}{b}$ su $a$ ir $b$ teigiamais. Pagal apibrėžimą $p$ yra teigiamas. Antruoju atveju turime, kad $-a$ yra teigiamas, taigi skaičius $r = \frac{-a}{b}$ yra teigiamas ir turime, kad $p = -r$. Taigi $p$ yra neigiamas. Trečiuoju atveju pagal nulio apibrėžimą racionaliųjų skaičių aibėje turime, kad $p$ yra nulis.

6. Tegul $q$ ir $r$ yra racionalūs skaičiai. Įrodyti,

   (a) $|q| \geq 0$;

   (b) $|q| = 0$ tada ir tik tada, kai $q = 0$;

   (c) $|q \cdot r| = |q| \cdot |r|$;

   (d) $|q + r| \leq |q| + |r|$.

   **Sprendimas:** Įrodydami teiginius remsimės modulio apibrėžimu

$$|q| = \begin{cases} -q & \text{jei } q < 0 \\ 0 & \text{jei } q = 0 \\ q & \text{jei } q > 0 \end{cases}$$

   (a) Imkime $q > 0$, tada pagal apibrėžimą $|q| = q > 0$. Jei $q = 0$, tai $|q| = 0$, pagal apibrėžimą. Galiausiai imkime $q < 0$, tada $|q| = -q > 0$. Taigi gavome, kad $|q| \geq 0$

   (b) *Būtinumas.* Imkime $q = 0$. Tada pagal apibrėžimą $|q| = 0$.

   *Pakankamumas.* Imkime, $|q| = 0$. Kadangi $q$ yra racionalusis skaičius tai galioja viena iš alternatyvų, arba $q$ yra teigiamas, arba neigiamas, arba nulis. Bet pirmaisiais dviem atvejais pagal modulio apibrėžimą $|q| > 0$, taigi gauname, kad $q = 0$.

   (c) Nagrinėsime atskirus atvejus. Jei $q = 0$ arba $r = 0$, arba abu kartu lygūs nuliui, tai lygybė yra akivaizdi. Tarkime, kad $q > 0$ ir $r < 0$, tada pagal modulio apibrėžimą

$$|q \cdot r| = -qr, \text{ nes } qr < 0.$$

   Iš kitos pusės

$$|q| \cdot |r| = q \cdot (-r) = -qr.$$

   Gavome tą patį. Dabar imkime $q > 0$ ir $r > 0$:

$$|q \cdot r| = qr, \text{ nes } qr > 0.$$

   Iš kitos pusės

$$|q| \cdot |r| = q \cdot r = p.$$

   Vėlgi gavome tą patį. Paėmus $q < 0$ ir $r < 0$ bei $q < 0$ ir $r > 0$ įrodymas analogiškas, todėl gauname, kad lygybė yra teisinga.

   (d) Tarkime, kad $q > r$, nes kiti atvejai yra arba analogiški, arba trivialūs. Tada galimi trys atvejai

      i. $q > r \geq 0$. Tada turime $|q + r| = q + r$ ir $|q| + |r| = q + r$. Taigi nelygybė galioja.

      ii. $q \geq 0 > r$. Tada turime $|q + r| = q + r$, jei $|r| < q$ ir $|q + r| = -q + (-r)$, jei $|r| \geq q$. Abiem atvejais turime $|q| + |r| = q + (-r)$. Kadangi $-q \leq q$, tai gauname nelygybę.

      iii. $0 \geq q > r$. Tada turime $|q + r| = -q - r$ ir $|q| + |r| = -q - r$ ir nelygybė vėl teisinga.

7. Tegu $q$ racionalusis skaičius. Įrodyti, kad egzistuoja vienintelis sveikasis skaičius $n$, kad $n \leq q < n + 1$.

**Sprendimas:** Tarkime priešingai, kad egzistuoja du skaičiai $m$ ir $n$, kad $n \leq q < n+1$, $m \leq q < m+1$ bei $n \neq m$. Tada imkime bet kokius $a \in \mathbb{Z}$ ir $b \in \mathbb{Z}$, kad $q = \frac{a}{b}$.

$$n \leq \frac{a}{b} < n+1$$
$$m \leq \frac{a}{b} < m+1$$

Atimkime abi nelygybės puses:

$$n - m \leq 0 < n - m$$

Iš pastarosios nelygybės gauname, kad $n - m = 0$, vadinasi $n = m$. Gavome prieštarą prielaidai. Taigi, egzistuoja vienintelis sveikasis skaičius $n$, kad $n \leq q < n+1$.

8. Tegu $q, r \in \mathbb{Q}$ ir $q < r$. Įrodyti, kad egzistuoja toks $p \in \mathbb{Q}$, kad $q < p < r$.

   **Sprendimas:** Imkime $p = (q+r)/2$. Tada turime $p = q/2 + r/2 < r/2 + r/2 = r$. Taip pat $p = q/2 + r/2 > q/2 + q/2 = q$. Taigi radome tokį $p$, kuris tenkina nurodytas sąlygas.

## 2.2 11-12 paskaita

Spalio 9, 12, 13 d.

1. Suformuluoti ką reiškia, kad racionaliųjų skaičių seka $(q_n)$ nėra *Cauchy* seka. , t. y. loginiais kvantoriais išreikšti teiginį „$(q_n)$ nėra *Cauchy* seka“.

   **Sprendimas:** Racionaliųjų skaičių seka $(q_n)_{n\geq m}$ vadinama *Cauchy* seka, jei bet kuriam teigiamam $\varepsilon \in \mathbb{Q}$, egzistuoja toks $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, kad visiems $n, k > N$, atstumas $\rho(q_n, q_k) = |q_n - q_k| < \varepsilon$. T.y., seka $(q_n)_{n\geq m}$ vadinama *Cauchy* seka, jei

   $$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\colon\ \forall n, k > N \text{ galioja } \rho(q_n, q_k) = |q_n - q_k| < \varepsilon.$$

   Tada $(q_n)$ nėra *Cauchy* seka, jei

   $$\exists\varepsilon > 0,\ \forall N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\colon\ \exists n, k > N \text{ galioja } \rho(q_n, q_k) = |q_n - q_k| > \varepsilon.$$

2. Įrodyti: jei *Cauchy* sekos $(r_n)$ ir $(s_n)$ yra atskirtos nuo nulio ir $(r_n) \simeq_R (s_n)$, tai $(r_n^{-1}) \simeq_R (s_n^{-1})$.

   **Sprendimas:** Tarkime, kad *Cauchy* sekos $(r_n)$ ir $(s_n)$ yra atskirtos nuo nulio, t.y., $\exists$ racionalus $c_r > 0$, kad $|r_n| > c_r$, $\forall n \in \mathbb{N}$ bei $\exists$ racionalus $c_s > 0$, kad $|s_n| > c_s$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

   Turime

   $$|r_n^{-1} - r_m^{-1}| = \frac{|r_m - r_n|}{|r_n r_m|} \leq \frac{|r_m - r_n|}{c_r^2}.$$

   Taigi jei $(r_n)$ yra nuo nulio atskirta *Cauchy* seka, tai $(r_n^{-1})$ irgi bus *Cauchy* seka. Taigi $(r_n^{-1})$ ir $(s_n^{-1})$ yra *Cauchy* sekos. Turime

   $$|r_n^{-1} - s_n^{-1}| = \frac{|s_n - r_n|}{|s_n r_n|} \leq \frac{|s_n - r_n|}{c_r c_s}$$

   Vadinasi $(r_n^{-1}) \simeq_R (s_n^{-1})$.

3. Įrodyti, kad jei $t$ ir $s$ yra teigiami realieji skaičiai ir jei $t > s$, tai $t^{-1} < s^{-1}$.

   **Sprendimas:** Tegu $t = LIM(p_n)$ ir $s = LIM(r_n)$. Kadangi $t$ ir $s$ teigiami, tai egzistuos tokie teigiami racionalūs skaičiai $c_p$ ir $c_r$, kad kiekvienam $n \in \mathbb{N}$ galios $p_n > c_p$, ir $r_n > c_r$. Be to kadangi $t > s$, taigi $t - s > 0$, vadinasi egzistuos toks $c$, kad visiems $n \in N$, $p_n - r_n > c$. Galų gale, kadangi $(p_n)$ ir $(r_n)$ yra *Cauchy* sekos, tai jos yra aprėžtos, taigi egzistuos tokie teigiami skaičiai $M_p$ ir $M_r$, kad visiems $n \in \mathbb{N}$, $p_n < M_p$ ir $r_n < M_r$.

   Pagal apibrėžimą turime, kad $t^{-1} = LIM(p_n^{-1})$ ir $s^{-1} = LIM(r_n^{-1})$, bei $s^{-1} - t^{-1} = LIM(r_n^{-1} - p_n^{-1})$. Kiekvienam $n \in \mathbb{N}$ turime:

   $$r_n^{-1} - p_n^{-1} = \frac{p_n - r_n}{p_n r_n} > \frac{p_n - r_n}{M_p M_r} > \frac{c}{M_p M_r} > 0,$$

   o tai reiškia, kad $s^{-1} - t^{-1}$ yra teigiamas realusis skaičius. Taigi $t^{-1} < s^{-1}$.

4. Įrodyti, kad su kiekvienu teigiamu realiuoju skaičiumi $t$ egzistuoja toks natūralusis skaičius $N$, kad $t > 1/N > 0$.

   **Sprendimas:** Tegu $t$ yra bet koks teigiamas realusis skaičius. Tegu $k = 1/t$. Tada $k$ irgi yra teigiamas realusis skaičius. Bet kuriam realiajam skaičiui egzistuoja teigiamas racionalusis skaičius $c$ ir teigiamas natūralusis skaičius $N$ tokie, kad galioja nelygybė $c < k < N$. Taigi turime, kad $t^{-1} < N$. Remiantis prieš tai buvusiu uždaviniu, gauname, kad $t > 1/N$. Kadangi $N$ teigiamas natūralusis skaičius, tai $1/N > 0$, taigi gavome tai ką reikėjo įrodyti.

5. Įrodyti, kad bet kuri realiųjų skaičių aibė gali turėti ne daugiau kaip vieną mažiausią viršutinį rėžį.

   **Sprendimas:** Tarkime, kad $M_1$ yra mažiausias realiųjų skaičių aibės viršutinis rėžis. Sakykime, kad $M_2$ taip pat mažiausias realiųjų skaičių aibės viršutinis rėžis, tačiau $M_1 \neq M_2$. Pagal apibrėžimą mažiausias viršutinis rėžis $M$ turi tenkinti dvi savybes:

- $M$ yra realiųjų skaičių aibės viršutinis rėžis;
- jei $M'$ yra realiųjų skaičių aibės viršutinis rėžis, tai $M' \geq M$.

Taigi iš vienos pusės turi būti $M_1 \geq M_2$, iš kitos pusės $M_2 \geq M_1$. Bet taip gali būti tik tuo atveju, jei $M_1 = M_2$. Taigi gavome prieštarą. Vadinasi aibė gali turėti ne daugiau kaip vieną mažiausią viršutinį rėžį.

6. Tegul $M$ yra realiųjų skaičių aibės $A$ mažiausias viršutinis rėžis. Įrodyti, kad kiekvienam $\varepsilon > 0$ egzistuoja toks $x \in A$, kad $x > M - \varepsilon$.

   **Sprendimas:** Kadangi $M$ yra aibės $A$ mažiausias viršutinis rėžis, tai $\forall x \in A$ galioja, kad $x \leq M$. Tarkime priešingai. Tada egzistuos toks $\varepsilon > 0$, kad kiekvienam $x \in A$, $x \leq M - \varepsilon$. Bet tada $M - \varepsilon$ yra viršutinis aibės $A$ rėžis. Kadangi $\varepsilon > 0$, tai $M - \varepsilon < M$, taigi $M$ nėra mažiausias viršutinis aibės $A$ rėžis. Gauname prieštarą, vadinasi uždavinio teiginys yra teisingas.

7. Tegul $A$ yra realiųjų skaičių aibė, o $-A := \{-x : x \in A\}$. Įrodyti: jei $M$ yra aibės $-A$ mažiausias viršutinis rėžis, tai $-M$ yra aibės $A$ didžiausias apatinis rėžis.

   **Sprendimas:** Tegu $L$ yra aibės $-A$ viršutinis rėžis, tai turime, kad $y \leq L$, visiems $y \in -A$. Bet tada pagal aibės $-A$ apibrėžimą turime, kad $x \geq -L$ visiems $x \in A$. Vadinasi $-L$ yra aibės $A$ apatinis rėžis. Taigi jeigu $L$ yra aibės $-A$ viršutinis rėžis, tai būtinai $-L$ yra apatinis aibės $A$ rėžis. Analogiškai galima parodyti atvirkščią teiginį.

   Kadangi $M$ yra aibės $-A$ didžiausias viršutinis rėžis, tai kiekvienam viršutiniam aibės $A$ rėžiui $M'$ turime $M \leq M'$. Bet kaip jau parodėme $-M'$ yra apatinis aibės $A$ rėžis. Kadangi $-M' \leq -M$, gauname, kad $-M$ yra didžiausias apatinis aibės $A$ rėžis. Tai ir reikėjo įrodyti.

8. Tegul $r$ yra realusis skaičius. Įrodyti, kad $|r| = (r^2)^{1/2}$.

   **Sprendimas:** Skaičiuokime, kai $r > 0$

   $$(r^2)^{1/2} = r^{2 \cdot 1/2} = r^1 = r.$$

   Tegu $r < 0$. Tada egzistuoja toks realus teigiamas $p$, kad $r = -p$. Tada turime

   $$(r^2)^{1/2} = ((-p)^2)^{1/2} = (p^2)^{1/2} = p = -r.$$

   Imkime $r = 0$

   $$(0^2)^{1/2} = 0^{1/2} = 0.$$

   Taigi gavome,

   $$(r^2)^{1/2} = \begin{cases} -r & \text{jei } r < 0 \\ 0 & \text{jei } r = 0 \\ r & \text{jei } r > 0 \end{cases}$$

   Vadinasi $|r| = (r^2)^{1/2}$.

### 2.3 13-14 paskaita

Spalio 16, 19, 20 d.

1. Įrodyti, kad $\binom{n}{j} \leq 2(n/2)^j$, bet kuriems $1 \leq j \leq n$.

   **Sprendimas:** Turime

$$\binom{n}{j} = \frac{n(n-1)\cdots(n-j+1)}{1\cdot 2\cdots j} \leq n \cdot \frac{n}{2}\cdots\frac{n}{2},$$

   nes

$$\frac{n-j+1}{j} \leq \frac{n}{2}.$$

   Taigi gauname reikiamą lygybę.

2. Tegul realusis skaičius $x \geq -1$ ir $n$ yra teigiamas natūralusis skaičius. Įrodyti, kad $(1+x)^n \geq 1+nx$.

   **Sprendimas:** Naudosimės indukcijos principu. Kai $n = 0$ turime

$$(1+x)^0 = 1 \geq 1 + 0 \cdot x.$$

   Taigi, nelygybė galioja, kai $n = 0$. Tarkime, kad ši nelygybė galioja, kai $n = k$. Parodysime, kad jinai galioja ir $n = k+1$:

$$\begin{aligned}(1+x)^{k+1} &= (1+x)\cdot(1+x)^k \geq (1+x)\cdot(1+kx)\\ &= 1+kx+x+kx^2 = 1+(k+1)x+kx^2 \geq 1+(k+1)x.\end{aligned}$$

   Čia pasinauduojome tuo, kad $kx^2 > 0$. Taigi, gavome, kad nelygybė galioja, kai $n = k+1$, vadinasi remiantis indukcijos principu $(1+x)^n \geq 1+nx$ galioja visiems $n \in \mathbb{N}$.

3. Tegul $x, y \in \mathbb{R}$ ir $n \in \mathbb{N}_+$. Įrodyti, kad

$$x^n - y^n = (x-y)\sum_{j=0}^{n-1} x^j y^{n-1-j}$$

   **Sprendimas:** Turime

$$\begin{aligned}(x-y)\sum_{j=0}^{n-1} x^j y^{n-1-j} &= \sum_{j=0}^{n-1}(x^{j+1}y^{n-1-j} - x^j y^{n-j})\\ &= xy^{n-1} - y^n + x^2y^{n-2} - xy^{n-1} + \cdots + x^{n-1}y - x^{n-2}y^2 + x^n - x^{n-1}y\\ &= x^n - y^n.\end{aligned}$$

4. Tegul $x$, $y$ yra realieji skaičiai, o realusis skaičius $\varepsilon > 0$, Įrodyti, kad $\rho(x,y) < \varepsilon$ tada ir tik tada, kai $y - \varepsilon < x < y + \varepsilon$. Taip pat įrodyti, kad $\rho(x,y) \leq \varepsilon$ tada ir tik tada, kai $x - \varepsilon \leq y \leq x + \varepsilon$.

   **Sprendimas.** *Pakankamumas.* Tegu $\rho(x,y) < \varepsilon$. Tegu $x > y$, tada $\rho(x,y) = |y-x| = x-y$. Taigi $x - y < \varepsilon$, vadinasi $x < y+\varepsilon$. Kadangi $x > y$, tai $x - y > 0$, vadinasi $x - y > -\varepsilon$, taigi $x > y - \varepsilon$. Taigi parodėme, kad kai $x > y$ tai teiginys galioja.

   Tegu $x < y$. Tada $\rho(x,y) = y - x$. Taigi $y - x < \varepsilon$, arba $x - y > -\varepsilon$ vadinasi $x > y - \varepsilon$. Kadangi $x - y < 0$, tai turime $x - y < \varepsilon$, taigi $x < y + \varepsilon$. Vėl parodėme, kad teiginys galioja.

   Atevejis $x = y$ trivialus. Taigi visais įmanomas atvejais teiginys galioja.

   *Būtinumas.* Tarkime, kad $y-\varepsilon < x < y+\varepsilon$. Bet tada turime $-\varepsilon < x-y < \varepsilon$ ir $-\varepsilon < y-x < \varepsilon$. Taigi $|x-y| < \varepsilon$.

   Antrasis teiginys įrodomas analogiškai.

5. Įrodyti, kad kiekviena realiųjų skaičių *Cauchy seka* yra aprėžta.

   **Sprendimas.** Realiųjų skaičių seka $(x_n)$ yra *Cauchy*, jei kiekvienam $\varepsilon > 0$ egzistuoja toks $N$, kad visiems $n, m > N$ galioja

   $$|x_n - x_m| < \varepsilon.$$

   Imkime kurį nors $\varepsilon > 0$. Tada turime, kad egzistuos toks $N$, kad visiems $n \geq N+1$

   $$x_{N+1} - \varepsilon < x_n < x_{N+1} + \varepsilon$$

   Imkime $M_0 = \max\{|x_{N+1} - \varepsilon|, |x_{N+1} + \varepsilon|\}$. Tada turime, kad visiems $n \geq N+1$, $|x_n| < M_0$. Tegu $M_1 = \max\{|x_0|, \ldots, x_N\}$. Turime, kad $M_1$ yra realusis skaičius nes aibė $\{|x_0|, \ldots, |x_N|\}$ yra baigtinė. Taip pat visiems $n \leq N$ turime $|x_n| \leq M_1$. Tegu $M = \max\{M_0, M_1\}$. Tada $|x_n| \leq M$ visiems $n \in \mathbb{N}$. Taigi gavome, kad seka $(x_n)$ yra aprėžta.

6. Tegu $(r_n)$ yra realiųjų skaičių seka ir $r \in \mathbb{R}$. Įrodyti, kad $\lim_{n\to\infty} r_n = r$ tada ir tik tada, kai kiekvienam $k \in \mathbb{N}_+$ egzistuoja toks $N \in \mathbb{N}$, kad $\rho(r_n, r) < 1/k$ kiekvienam $n \geq N$.

   **Sprendimas.** *Būtinumas.* Tegu kiekvienam $k \in \mathbb{N}_+$ egzistuoja toks $N \in \mathbb{N}$, kad $\rho(r_n, r) < 1/k$ kiekvienam $n \geq N$. Imkime $\varepsilon > 0$. Pagal Archimedo principą egzistuoja toks $k \in \mathbb{N}_+$, kad $\varepsilon > 1/k$. Bet tada tam $k$ egzistuos toks $N$, kad visiems $n > N$ turėsime

   $$\varepsilon > 1/k > |r_n - r|,$$

   taigi $\lim r_n = r$.

   *Pakankamumas.* Tegu $\lim r_n = r$, tada kiekvienam $\varepsilon > 0$ egzistuoja toks $N \in \mathbb{N}$, kad visiems $n > N$:

   $$|r_n - r| < \varepsilon.$$

   Imkime $k \in \mathbb{N}_+$. Tada $1/k$ yra racionalus skaičius ir $1/k > 0$. Tarp dviejų racionalių skaičių visados egzistuos realusis skaičius. Taigi egzistuoja toks $\varepsilon$, kad $0 < \varepsilon < 1/k$. Bet kiekvienam $\varepsilon > 0$ egzistuos toks $N$, kad visiems $n > N$ turėsime:

   $$1/k > \varepsilon > |r_n - r|.$$

   Tai ir reikėjo parodyti.

7. Tarkime, kad realiųjų skaičių seka $(r_n)$ konverguoja į skaičių $r$ ir $r \neq 0$. Įrodyti, kad egzistuoja toks $N \geq m$, kad $|r_n| \geq |r|/2$ kiekvienam $n \geq N$.

   **Sprendimas.** Kadangi $(r_n)$ konverguoja, tai kiekvienam $\varepsilon > 0$ egzistuoja toks $N \in \mathbb{N}$, kad visiems $n > N$:

   $$|r_n - r| < \varepsilon.$$

   Tegu $\varepsilon = |r|/2$. Tada egzistuos toks $N$, kad visiems $n \geq N$:

   $$|r_n - r| < |r|/2.$$

   Tai ekvivalentu

   $$-|r|/2 + r < r_n < r + |r|/2.$$

   Arba

   $$r/2 < r_n < 3r/2, \text{ kai } r > 0,$$
   $$-3r/2 > -r_n > -r/2, \text{ kai } r < 0.$$

   Bet tai reiškia, kad $|r_n| > |r|/2$. (Antruoju atveju pasinaudojome tuo, kad $r_n$ bus būtinai neigiamas, jeigu nelygybė galioja).

8. Tarkime, kad teigiamų realiųjų skaičių seka $(r_n)$ konverguoja į teigiamą skaičių $r$. Įrodyti, kad seka $(\sqrt{r_n})$ konverguoja į $\sqrt{r}$.

   **Sprendimas.** Turime

   $$|\sqrt{r_n} - \sqrt{r}| = \frac{|(\sqrt{r_n} - \sqrt{r})(\sqrt{r_n} + \sqrt{r})|}{\sqrt{r_n} + \sqrt{r}} \leq \frac{|r_n - r|}{\sqrt{r}} \to 0, \text{ jei } r_n \to r.$$

   Taigi $\sqrt{r_n} \to \sqrt{r}$.

## 2.4 15-16 paskaita

Spalio 23, 26, 27 d.

1. Tegul $r_n := 1/(n+1)$, $n \in \mathbb{N}$. Įrodyti, kad $\sup_{n\in\mathbb{N}} r_n = 1$ ir $\inf_{n\in\mathbb{N}} r_n = 0$.

   **Sprendimas.** Turime $r_0 = 1$ ir $r_n \geq r_0$ visiems $n \in \mathbb{N}$. Taigi $\sup_{n\in\mathbb{N}} r_n = 1$.

   Turime, kad $r_n > 0$ visiems $n \in \mathbb{N}$. Taigi 0 yra apatinis rėžis. Tarkime egzistuoja kitas didesnis apatinis rėžis $M > 0$. Bet pagal Archimedo principą visados egzistuos $N$ toks kuriam $N > 1/M$. Taigi $M > 1/N = r_{N-1}$. Taigi $M$ nėra apatinis rėžis. Taigi 0 yra didžiausias apatinis rėžis, vadinasi $\inf_{n\in\mathbb{N}} = 0$.

2. Tegul $a$ yra teigiamas realusis skaičius. Parodyti, kad $\lim a^{1/n} = 1$. (Pasinaudoti tuo, kad $a = (1 + (a^{1/n} - 1))^n$)

   **Sprendimas.** Tegu $a > 1$, tada $a^{1/n} > 1$ visiems $n \in \mathbb{N}_+$. Pasinaudoję Niutono binomo formule turime, kad

   $$a = (1 + (a^{1/n} - 1))^n > 1 + n(a^{1/n} - 1) > n(a^{1/n} - 1),$$

   o tai reiškia, kad

   $$0 < a^{1/n} - 1 < a/n \to 0, \text{ kai } n \to \infty$$

   vadinasi $a^{1/n} \to 1$.

   Jeigu $a < 1$. Tai pagal jau įrodytą dalį turime, kad $a^{-1/n} \to 1$. Bet

   $$\lim a^{1/n} = \lim \frac{1}{1/a^{1/n}} = \frac{1}{\lim \frac{1}{a^{1/n}}} = 1.$$

3. Parodyti, kad $\lim n^{1/n} = 1$. (Pasinaudoti tuo, kad $n = (1 + (n^{1/n} - 1))^n$)

   **Sprendimas.** Turime $n^{1/n} > 1$ kiekvienam $n \in \mathbb{N}_+$. Pasinaudoję Niutono binomo formule gauname

   $$\begin{aligned} n = (1 + (n^{1/n} - 1))^n &> 1 + n(n^{1/n} - 1) + \frac{n(n-1)}{2}(n^{1/n} - 1)^2 \\ &> \frac{n(n-1)}{2}(n^{1/n} - 1)^2, \end{aligned}$$

   taigi

   $$0 < n^{1/n} - 1 < \sqrt{\frac{2}{n-1}} \to 0, \text{ kai } n \to \infty.$$

4. Pateikite pavyzdį sekos, kuri turi lygiai du ribinius taškus.

   **Sprendimas**. Tegu seka $r_n$ apibrėžiama taip, $r_{2k} = 2 + 1/k$, $r_{2k+1} = 1 - 1/k$. Ši seka turės du ribinius taškus, 2 ir 1. Taškas $a$ yra sekos $x_n$ ribinis taškas, jei kiekvienam $\varepsilon > 0$ ir kiekvienam $N \in \mathbb{N}$ egzistuoja toks $n \geq N$, kad

   $$|x_n - a| < \varepsilon.$$

   Imkime bet kurį $\varepsilon$. Pagal Archimedo principą egzistuoja toks $N$, kad $\varepsilon > 1/N$. Bet tada paėmus atitinkamai $l = 2N$ ir $m = 2N + 1$ turėsime:

   $$\begin{aligned} |r_l - 2| = |r_{2N} - 2| = |2 + 1/N - 2| = 1/N < \varepsilon \\ |r_m - 1| = |r_{2N+1} - 1| = |1 - 1/N - 1| = 1/N < \varepsilon \end{aligned}$$

   Taigi taškai 2 ir 1 yra sekos $r_n$ ribiniai taškai.

5. Tegul seka $(a_n)$ yra aprėžta iš viršaus. Įrodyti, kad šios sekos ribinių taškų aibė yra aprėžta iš viršaus.

   **Sprendimas.** Kadangi seka $(a_n)$ yra aprėžta iš viršaus, tai egzistuoja toks $M \in \mathbb{R}$, kad $a_n < M$ visiems $n \in \mathbb{N}$. Imkime bet kurį sekos $a_n$ ribinį tašką $a$. Tada kiekvienam $\varepsilon > 0$ ir kiekvienam $N$ egzistuoja toks $n \geq N$, kad $a < a_n + \varepsilon$. Imkime $\varepsilon = 1$ ir $N = 1$, tada egzistuos toks $n \geq 1$, kad $a < a_n + 1 < M + 1$. Taigi jeigu $a$ yra ribinis sekos $(a_n)$ taškas, tai būtinai $a < M + 1$, vadinasi ribinių taškų aibė yra aprėžta iš viršaus.

6. Pateikite pavyzdį neaprėžtos sekos, kuri turi lygiai vieną ribinį tašką.

   **Sprendimas.** Apibrėžkime seką $r_n$ taip: $r_{2k} = 2^{-k}$, $r_{2k+1} = 2^k$. Tada seka bus neaprėžta, nes bet kuriam realiajam skaičiui $M$ galime rasti tokį $l$, kad $2^l > M$, o $2^l$ bus $(2l+1)$-asis sekos $r_n$ narys. Ši seka turės vieną ribinį tašką 0, nes kiekvienam $\varepsilon > 0$ ir kiekvienam $N$ galime rasti tokį $l > N$, kad $2^{-l} < \varepsilon$, o $2^{-l}$ yra $2l$-tasis sekos $r_n$ narys.

7. Tegu $(r_n)$ yra nemažėjanti realiųjų skaičių seka ir tegu ji turi ribinį tašką. Įrodyti, kad $(r_n)$ konverguoja.

   **Sprendimas.** Tegu seka $r$ yra sekos $(r_n)$ ribinis taškas. Tada kiekvienam $\varepsilon > 0$ ir kiekvienam $N$ egzistuos toks $n \geq N$, kad $|r_n - r| < \varepsilon$. Tarkime kad $r_n \leq r$ visiems $n$. Tada turime $|r_n - r| > |r_m - r|$ visiems $m \geq n$, nes seka $(r_n)$ yra nemažėjanti.

   Taigi turime, kad kiekvienam $\varepsilon > 0$ egzistuos toks $N$, kad visems $k > N$ bus $|r_k - r| < \varepsilon$. Tam užtenka pasirinkti bet kokį $N$, jam egzistuos vienas $n \geq N$ toks, kad $|r_n - r| < \varepsilon$, bet dėl to, kad seka nemažėjanti, ši nelygybė galios ir visiems $m \geq n \geq N$.

   Belieka parodyti, kad jei egzistuoja toks $n$, kad $r_n > r$, tai $r$ nebus ribinis sekos $(r_n)$ taškas. Tarkime, kad toks $n$ egzistuoja. Tada turime, kad visiems $m \geq n$, $r_m \geq r_n > r$, nes seka $(r_n)$ yra nemažėjanti. Imkime $\varepsilon = (r_n - r)/2$. Pagal padarytą prielaidą turime, kad $\varepsilon > 0$. Tada visiems $m \geq n$ turime $|r_m - r| > \varepsilon$, taigi $r$ negali būti sekos $(r_n)$ ribinis taškas.

8. Pateikite pavyzdį tokių aprėžtų sekų $(r_n)$ ir $(s_n)$, kad

$$\limsup_{n\to\infty}(r_n + s_n) = 0 \quad \text{ir} \quad \limsup_{n\to\infty} r_n = \limsup_{n\to\infty} s_n = 1.$$

   **Sprendimas.** Tegu $r_n = (-1)^n$, o $s_n = (-1)^{n+1}$. Tada $r_n + s_n = 0$ ir pirma lygybė galioja. Antra lygybė galios taip pat, nes $\sup_{k\geq n} r_k = \sup_{k\geq n} s_k = 1$, visiems $n \geq 2$.

# 3 Trečioji grupė uždavinių

## 3.1 17-18 paskaita

Spalio 30 d., Lapkričio 2, 3 d.

1. Rasti ribą

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right).$$

**Sprendimas:** Pažymėkime $S_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2n}$. Tada

$$\begin{aligned}S_n-\frac{1}{2}S_{n-1}&=\frac{1}{2}+\left(\frac{3}{2^2}-\frac{1}{2^2}\right)+\cdots+\left(\frac{2n-1}{2^n}-\frac{2n-3}{2^n}\right)-\frac{2n-1}{2^{n+1}}\\&=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}\right)-\frac{2n-1}{2^{n+1}}.\end{aligned}$$

Tada

$$\begin{aligned}S_n&=1+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{2n-1}{2^n}\\&=1+\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^n}.\end{aligned}$$

Tokiu atveju

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}S_n&=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^n}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left(1+2-\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{2n-1}{2^n}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}3-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-2}}-2\frac{1}{2^{n-2}}\frac{n}{2^n}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\\&=3-0-0+0=3.\end{aligned}$$

Čia pasinaudojome tuo, kad

$$\begin{aligned}\left|\frac{n}{2^n}\right|&=\frac{n}{(1+1)^n}\\&=\frac{n}{1+n+\frac{n(n-1)}{2}+\cdots+1}<\frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}}\\&=\frac{2}{n-1}<\varepsilon\end{aligned}$$

bet kokiam laisvai pasirinktam $\varepsilon>0$, jei $n>1+\frac{2}{\varepsilon}$, t.y., $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0$.

2. Rasti ribą

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right).$$

**Sprendimas:** Pastebėsime, kad

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\\&=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=1-\frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

Tada

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

3. Rasti ribą $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\ldots\sqrt[2^n]{2})$.

   **Sprendimas:** Kadangi

$$\begin{aligned}&\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\ldots\sqrt[2^n]{2}\\&=2^{1/2+1/4+\cdots+1/2^n}=2^{1-1/2^n}=\frac{2}{2^{1/2^n}}\end{aligned}$$

   ir kai $n>2$

$$\begin{aligned}2&=\left(2^{1/2^n}\right)^{2^n}\\&=\left(1+\left(2^{1/2^n}-1\right)\right)^{2^n}\\&>\left(1+\left(2^{1/2^n}-1\right)\right)^{n}\\&=1+n\left(2^{1/2^n}-1\right)+\cdots+\left(2^{1/2^n}-1\right)^n\\&>n\left(2^{1/2^n}-1\right).\end{aligned}$$

   Vadinasi

$$0<2^{1/2^n}-1<\frac{2}{n}.$$

   Taigi,

$$2^{1/2^n}\to 1,\text{kai } n\to\infty.$$

   Tada

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\ldots\sqrt[2^n]{2})=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{2^{1/2^n}}=2.$$

4. Parodyti, kad $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0$.

   **Sprendimas:** Lygybė seka iš nelygybių

$$0<\frac{2^n}{n!}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{2}{3}\ldots\frac{2}{n}<2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}=\frac{9}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

   ir iš to, kad $\left(\frac{2}{3}\right)^n\to 0$, kai $n\to\infty$.

5. Parodyti, kad $\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0$, kai $a>1$.

   **Sprendimas:** Tegul $m$ yra sveikasis skaičius ir $m\geq k$. Tada

$$0<\frac{n^k}{a^n}\leq\frac{n^m}{a^n}=\left(\frac{n}{\sqrt[m]{a}}\right)^m=\left(\frac{n}{b^n}\right)^m,$$

   čia $b=\sqrt[m]{a}>1$. Bet

$$\begin{aligned}\frac{n}{b^n}&=\frac{n}{(1+(b-1))^n}=\frac{n}{1+n(b-1)+\frac{n(n-1)}{2}(b-1)^2+\cdots+(b-1)^n}\\&<\frac{2n}{n(n-1)(b-1)^2}=\frac{2}{(n-1)(b-1)^2}\to 0,\end{aligned}$$

   kai $n\to\infty$. Tada naudojantis ribų savybėmis (sandaugos riba lygi ribų sandaugai) gauname, kad

$$\left(\frac{n}{b^n}\right)^m\to 0,\text{kai } n\to\infty.$$

   Vadinasi, gauname norimą lygybę.

6. Įrodyti, kad

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{n!}\right)=e.$$

**Sprendimas:** Naudosimės tuo, kad $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$.

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{n}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}$$
$$+\dots+\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{1}{n^k}+\dots+\frac{n(n-1)\dots 2\cdot 1}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}$$
$$>1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\dots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k}{n}\right).$$

Kai $n\to\infty$ gauname nelygybę

$$e\geq 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{k!}=y_k.$$

Pastaroji nelygybė galioja bet kuriam $k$. Kadangi aibėje $\{y_k\}$ nėra didžiausio elemento, tai paėmus $k=n$

$$y_n=2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{n!}<e,$$

t.y., lygybės ženklas yra neįmanomas. Be to,

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{n!}=y_n.$$

Taigi, $x_n<y_n<e$ ir $\lim_{n\to\infty}x_n=e$. Vadinasi, gauname, kad $\lim_{n\to\infty}y_n=e$.

7. Įrodyti nelygybes:

   (a) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$

   (b) $\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$.

   **Sprendimas:**

   (a) Pažymėkime $x_n:=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ir $y_n:=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Nagrinėkime

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\left(\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}$$
$$=\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}>\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdot\frac{n+1}{n}=1.$$

   Taip pat

$$\frac{y_n}{y_{n-1}}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n}\cdot\frac{n+1}{n}<\frac{1}{\left(1+\frac{n}{n^2-1}\right)}\cdot\frac{n+1}{n}$$
$$=\frac{n^3+n^2-n-1}{n^3+n^2-n}<1.$$

   Taigi gavome, kad seka $x_n$ yra didėjanti, o seka $y_n$ yra mažėjanti. Tačiau

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$

   ir

$$\lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=e\cdot 1=e.$$

   Taigi, gauname, kad $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

(b) Logaritmuokime nelygybę $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$:

$$\begin{aligned} n\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) &< \ln e = 1 < (n+1)\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\ n &< \frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} < n+1 \\ \frac{1}{n+1} &< \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Gavome ieškomą nelygybę.

8. Parodyti, kad seka $x_n = 1 + 1/2 + 1/3 + \cdots + 1/n - \ln n$ konverguoja.

**Sprendimas:** Naudosimės natūraliojo logaritmo savybėmis:

$$\frac{x}{x+1} < \ln(1+x) < x$$

Kadangi galioja

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \ln n \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln\frac{n+1}{n} = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 0. \end{aligned}$$

Paskutinioji nelygybė gaunama pagal 7 uždavinio (b) dalį. Vadinasi seka yra monotoniškai mažėjanti. Parodysime, kad ji aprėžta iš apačios:

$$\begin{aligned} x_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \\ &> \ln(1+1) + \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{3}\right) + \cdots + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln n \\ &= \ln\left(2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{n}\right) \\ &= \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) > \frac{1}{n+1} > 0. \end{aligned}$$

Taigi, kadangi seka yra monotoniškai mažėjanti ir ji aprėžta iš apačios, tai seka konverguoja.

### 3.2 19-20 paskaita

1. Tegu $\sum_{i=m}^{\infty} a_i$ or $\sum_{i=m}^{\infty} b_i$ yra neneigiamų skaičių eilutės ir tegul egzistuoja riba $L = \lim_{i\to\infty} a_i/b_i$. Įrodyti:

   (a) jei $L > 0$, tai $\sum_{i\geq m} a_i$ konverguoja tada ir tik tada, kai konverguoja $\sum_{i\geq m} b_i$;

   (b) jei $L = 0$ ir $\sum_{i\geq m} b_i$ konverguoja, tai konverguoja ir $\sum_{i\geq m} a_i$.

   **Sprendimas.** Tegu egzistuoja riba $L = \lim a_i/b_i$ ir $L > 0$. Imkime $\varepsilon = 1$. Tada egzistuos toks $N$, kad kiekvienam $n \geq N$ turėsime $a_n < b_n(L+1)$. Taigi jeigu eilutė $\sum b_i$ konverguoja tai konverguos eilutė $\sum a_i$ pagal eilučių palyginimo požymį. Imkime $\varepsilon = L/2$. Tada egzistuos toks $N$, kad kiekvienam $n \geq N$ turėsime $b_n L/2 < a_n$. Taigi jei konverguos eilutė $\sum a_i$, tai pagal eilučių palyginimo požymį konverguos ir eilutė $\sum b_i$. Taigi pirmoji uždavinio dalis įrodyta.

   Tarkime dabar $L = 0$. Imkime $\varepsilon = 1$. Tada egzistuos toks $N$, kad kiekvienam $n \geq N$ turėsime $a_n < b_n$. Taigi jeigu eilutė $\sum b_i$ konverguoja tai konverguos eilutė $\sum a_i$ pagal eilučių palyginimo požymį.

2. Tegu $(c_i)$ yra teigiamų skaičių seka. Įrodyti, kad

$$\liminf_{i\to\infty} \frac{c_{i+1}}{c_i} \leq \liminf_{i\to\infty} c_i^{1/i}.$$

   **Sprendimas.** Kadangi $c_i$ teigiami, tai nurodytos ribos visados egzistuoja. Tegu $L = \liminf_{i\to\infty} \frac{c_{i+1}}{c_i}$. Jeigu $L = 0$, tai nelygybė galioja. Tegu $L > 0$. Tada kiekvienam $\varepsilon > 0$ egzistuos toks $N$, kad kiekvienam $i \geq N$ bus teisinga

$$\frac{c_{i+1}}{c_i} > L - \varepsilon.$$

   Pastebėkime, kad $N$ bus netrivialus tik tais atvejais, kai $\varepsilon < L$. Todėl toliau nagrinėkime tik tokius $\varepsilon$.

   Iš šios nelygybės išplaukia, kad kiekvienam $i > N$:

$$c_i > c_N(L-\varepsilon)^{i-N}.$$

   Pažymėkime $K = c_n/(L-\varepsilon)^N$. Turime, kad $K > 0$ ir kad

$$c_i^{1/i} > K^{1/i}(L-\varepsilon).$$

   Perėję šioje nelygybėje prie ribos gausime, kad

$$\liminf c_i^{1/i} \geq L - \varepsilon.$$

   Čia pasinaudojome tuo, kad $\lim K^{1/i} = 1$. Kadangi $\varepsilon$ yra laisvai pasirinktas, tai gauname, kad

$$\liminf c_i^{1/i} \geq L,$$

   ką ir reikėjo įrodyti.

3. Įrodyti, kad diverguoja eilutė $\sum_{i\geq 1} \frac{1}{i}$.

   **Sprendimas.** Žinome, kad seka $1 + 1/2 + \cdots + 1/n - \ln n$ konverguoja. Reiškiasi $\sum_{i=1}^{n} 1/i = \ln n + C + r_n$, čia $C$ konstanta, o $r_n \to 0$. Taigi eilutė $\sum_{i\geq 1} \frac{1}{i}$ diverguoja, nes jos dalinių sumų seka yra neaprėžta.

4. Tegul skaičių eilutė $\sum_{i\geq m} a_i$ konverguoja absoliučiai ir tegul $(b_i)$ yra aprėžta skaičių seka. Įrodyti, kad eilutė $\sum_{i\geq m} a_i b_i$ konverguoja absoliučiai.

   **Sprendimas.** Kadangi seka $b_i$ aprėžta, tai egzistuoja toks skaičius $M > 0$, kad $|b_i| < M$ visiems $i$. Taigi $|a_i b_i| < M|a_i|$ visiems $i$. Taigi eilutė $\sum_{i\geq m} a_i b_i$ konverguos absoliučiai pagal eilučių palyginimo požymį.

5. Parodyti, kad eilutė $\sum_{i\geq 1} 2^{-i}\sin(\frac{3\pi}{5}i)$ konverguoja.

   **Sprendimas.** Turime $|\sin x| \leq 1$ visiems realiesiems $x$. Taigi seka $\sin(\frac{3\pi}{5}i)$ yra aprėžta. Tai pat turime, kad $\sum_{i\geq 1} 2^{-i} = 1$. Remiantis prieš tai išspręstu uždaviniu nurodyta eilutė konverguoja.

6. Parodyti, kad eilutė

$$\sum_{n=1} nx \prod_{k=1}^{n} \frac{\sin^2 k\alpha}{1 + x^2 + \cos^2 k\alpha},$$

   čia $x \neq 0$, o $\alpha \in \mathbb{R}$, konverguoja. (Taikyti D'Alembert eilučių konvergavimo požymį).

7. Parodyti, kad eilutė

$$\sum_{n=2} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$$

   konverguoja. (Taikyti Cauchy eilučių konvergavimo požymį).

8. Tegul neneigiamų skaičių eilutė $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konverguoja. Pateikti pavyzdį rodantį, kad eilutė $\sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{a_i}$ diverguoja ir įrodyti, kad $\sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{a_i}/i$ konverguoja. *Nuoroda: naudokitės nelygybe* $xy \leq (x^2 + y^2)/2$.

### 3.3 21-22 paskaita

lapkričio 12,16,17

1. Ar eilutė

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3(\sqrt{2}+(-1)^n)^n}{3^n}$$

konverguoja?

2. Parodyti, kad eilutė $\sum a_n$ konverguoja, jei egzistuoja toks $\alpha > 0$, ir toks $N$, kad $-\dfrac{\ln a_n}{\ln n} > 1+\alpha$.

3. Ar konverguoja eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(\ln(\ln n))^{\ln n}}$?

4. Ar konverguoja eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu(n)}{n^2}$, čia $\nu(n)$ yra skaičiaus $n$ skaitmenų skaičius? Naudokitės tuo, kad eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ konverguoja.

5. Įrodyti, kad sveikųjų skaičių aibė $\mathbb{Z}$ yra suskaičiuojama.

   **Sprendimas.** Apibrėžkime funkciją $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ taip: $f(0) = 0$, $f(n) = [(-1)^{n+1}n/2] + 1$, kai $n$ nelyginis ir $f(n) = -1^{n+1}n/2$, kai $n$ yra lyginis. Ši funkcija yra bijekcija, taigi aibė $\mathbb{Z}$ yra suskaičiuojama.

6. Įrodyti, kad racionaliųjų skaičių aibė $\mathbb{Q}$ yra suskaičiuojama

   **Sprendimas.** Aibė $\mathbb{Q}$ yra $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ poaibis. Kadangi aibė $\mathbb{Z}$ yra suskaičiuojama, ją galima užrašyti taip $\mathbb{Z} = z_0, z_1, \ldots$. Tada $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{(z_i, z_j), i, j \in \mathbb{N}\}$. Aibės $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ elementus galima išdėstyti taip:

$$\begin{array}{cccc} (z_0,z_0) & (z_0,z_1) & (z_0,z_2) & \ldots \\ (z_1,z_0) & (z_1,z_1) & (z_1,z_2) & \ldots \\ (z_2,z_0) & (z_2,z_1) & (z_2,z_2) & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

   Kad parodyti, kad aibė $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ yra suskaičiuojama, reikia sunumeruoti jos elementus. Nulinis elementas bus $(z_0, z_0)$, pirmas elementas $(z_1, z_0)$, antras $(z_0, z_1)$. Visados pradedame nuo pirmo stulpelio elemento ir numeruojame atitinkamos įstrižainės elementus. Taip kiekvienam elementui prisikiriame unikalų numerį:

$$f(z_i, z_j) = j + 1 + \frac{(i+j)(i+j+1)}{2}$$

   Gauta funkcija atvaizduoja $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ į $\mathbb{N}$ ir yra bijekcija. Taigi aibė $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ yra suskaičiuojama. Kadangi $\mathbb{Q}$ yra begalinė ir suskaičiuojamos aibės poaibis, tai ji irgi yra suskaičiuojama.

7. Įrodyti, kad intervalai $(0, 1)$ ir $(0, \infty)$ yra vienodos galios.

   **Sprendimas.** Imkime funkciją $f(x) = -\ln x$. Ji intervalą $(0, 1)$ atvaizduoja į intervalą $(0, \infty)$ ir yra bijekcija. Taigi intervalai yra vienodos galios.

8. Įrodyti, kad bet kurie du uždari intervalai yra vienodos galios.

   **Sprendimas.** Tegu turime intervalus $[a, b]$ ir $[c, d]$. Imkime funkciją $f(x) = c + \frac{x-a}{b-a}d$. Ši funkcija yra bijekcija ir intervalą $[a, b]$ atvaizduoja į intervalą $[c, d]$. Taigi šie intervalai yra vienodos galios.

### 3.4 23-24 paskaita

1. Tegul $a$ ir $b$ yra tokie tiesės taškai, kad $a < b$ ir tegul $x \in (a, b)$. Įrodyti, kad egzistuoja tokia $x$ aplinka $O_\varepsilon(x)$, kuri yra $(a, b)$ poaibis.

   **Sprendimas.** Kadangi $a < x < b$, tai remiantis realiųjų skaičių savybėmis egzistuoja skaičiai $c, d$ tokie, kad $a < c < x < d < b$. Paėmus $\varepsilon = \min\{x - c, d - x\}$ gausime, kad $a < x - \varepsilon < x < x + \varepsilon < b$. Taigi egzistuoja tokia $x$ aplinka kuri yra $(a, b)$ poaibis.

2. Įrodyti, kad $\bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$, $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$ ir $\bar{\varnothing} = \varnothing$.

3. Tarkime, kad $X$ ir $Y$ yra tokios tiesės taškų aibės, kad $X \subset Y \subset \bar{X}$. Įrodyti, kad $\bar{Y} = \bar{X}$.

4. Tegul $a, b \in \mathbb{R}$. Įrodyti, kad uždaras intervalas $[a, b]$ yra uždara aibė.

   **Sprendimas.** Visi intervalo $[a, b]$ taškai yra sąlyčio, taigi teiginys bus teisingas jeigu parodysime, kad jei $x \notin [a, b]$, tai $x$ nėra sąlyčio taškas. Jeigu $x \notin [a, b]$, tai arba $x < a$ arba $x > b$. Tarkime, kad $x < a$. Tada egzistuos toks $c$, kad $x < c < a$. Imkime $\varepsilon = c - x$. Tada $x - \varepsilon < x < x + \varepsilon < a$. Sukonstravome tokią taško $x$ aplinką, kuriai nepriklauso nė vienas intervalo $[a, b]$ taškas. Taigi $x$ nėra $[a, b]$ sąlyčio taškas. Atvejis $x > b$ nagrinėjamas analogiškai.

5. Tegul $n \in \mathbb{N}_+$ ir tegul $X_1, \ldots, X_n$ yra uždaros tiesės taškų aibės. Įrodyti, kad $\cup_{i=1}^n X_i$ yra uždara aibė.

6. Įrodyti, kad aprėžtos aibės uždarinys yra aprėžta aibė.

   **Sprendimas**. Tegu $A$ yra aprėžta aibė ir tegu $y$ yra $A$ sąlyčio taškas. Kadangi $y$ yra sąlyčio taškas, tai kiekvienam $\varepsilon > 0$ taško aplinka $O_\varepsilon(y)$ yra aibės $A$ taškų. Tegu $x \in A$ ir $x \in O_\varepsilon(y)$. Tada $|y - x| < \varepsilon$. Bet tada $x - \varepsilon < y < x + \varepsilon$. Kadangi aibė $A$ aprėžta, tai egzistuoja toks $M > 0$, kad $-M < x < M$ visiems $x \in A$. Bet tada turime, kad kiekvienam aibės $A$ sąlyčio taškui $y$ galioja $-M - \varepsilon < y < M + \varepsilon$. Taigi aibės $A$ uždarinys yra aprėžta aibė.

7. Įrodyti, kad kiekviena baigtinė tiesės taškų aibė yra uždara ir aprėžta.

   **Sprendimas.** Tegu $A$ yra baigtinė tiesės taškų aibė. Tada ji yra aprėžta, nes kiekvienam $x \in A$ turime $x \leq M := \max\{x, x \in A\}$. Čia maksimumas bus baigtinis, nes jis bus vienas iš aibės $A$ elementų. Kadangi $A$ yra baigtinė tiesės taškų aibė, tai remiantis realiųjų skaičių savybėmis galima ją užrašyti taip $A = \{x_1 < x_2 < \cdots < x_n\}$. Imkime dabar tašką $x$ nepriklausantį aibei $A$. Tada arba $x_i < x < x_{i+1}$, kuriam nors $i = 1, \ldots, n - 1$, arba $x < x_1$ arba $x > x_n$. Nagrinėkime pirmąjį atvejį. Kadangi $x_i < x < x_{i+1}$, tai egzistuos tokie realieji skaičiai, kad $x_i < c < x < d < x_{i+1}$. Paėmę $\varepsilon = \min x - c, d - x$ gausime, kad $x_i < x - \varepsilon < x < x + \varepsilon < x_{i+1}$. Taigi mes sukonstravome tokią taško $x$ aplinką, kuriai nepriklauso jokie aibės $A$ taškai. Kiti du atvejai nagrinėjami analogiškai.

   Taigi bet kuris taškas nepriklausantis aibei $A$ nėra aibės $A$ sąlyčio taškas. Vadinasi aibė $A$ yra uždara.

8. Įrodyti, kad intervalai $(a, b]$ ir $[a, b)$ yra nei uždaros nei atviros aibės.

   **Sprendimas.** Imkime intervalą $(a, b]$. Imkime tašką $a$. Kiekvienoje jo aplinkoje yra intervalo $(a, b]$ taškų, taigi jis yra sąlyčio taškas. Kadangi jis nepriklauso intervalui $(a, b]$, tai šis intervalas negali būti uždara aibė. Tegu $B = \mathbb{R} \backslash (a, b] = (\infty a] \cup (b, \infty)$. Imkime tašką $b$. Kiekvienoje jo aplinkoje bus aibės $B$ taškų, bet šis taškas aibei $b$ nepriklauso. Taigi aibė $B$ nėra uždara, o tai reiškia, kad intervalas $(a, b]$ nėra atvira aibė. Taigi šis intervalas nėra nei uždara nei atvira aibė. Intervalas $[a, b)$ nagrinėjamas analogiškai.

9. Tarkime, kad $X$ yra netuščia ir aprėžta iš viršaus tiesės taškų aibė ir tegul $M := \sup X$. Įrodyti, kad $M$ yra $X$ aibės sąlyčio taškas.

   **Sprendimas.** Kadangi $M$ yra supremumas, tai kiekvienam $\varepsilon > 0$ egzistuoja toks $x \in X$, kad $x > M - \varepsilon$. Kadangi tuo pačiu $x \leq M$, tai gauname, kad kiekvienoje taško $M$ $\varepsilon$-aplinkoje egzistuoja aibės $X$ taškas. Taigi $M$ yra sąlyčio taškas.

# 4 Ketvirtoji grupė uždavinių

## 4.1 25-26 paskaita

1. Tegu $\{X_1, \dots, X_n\}$ yra atvirų aibių rinkinys. Įrodyti, kad $\cap_{i=1}^n X_i$ yra atvira aibė.

   **Sprendimas.** Aibė yra atvira, jei kiekvienas jos taškas yra vidinis. Tegu $x \in \cap_{i=1}^n X_i$. Tada $x \in X_i$ kiekvienam $i = 1, \dots, n$ pagal sankirtos apibrėžimą. Kadangi aibės $X_i$ yra atviros, tai gauname, kad kiekvienam $i$ egzistuos toks $\varepsilon_i$, kad $(x - \varepsilon_i, x + \varepsilon_i) \in X_i$. Paimkime $\varepsilon = \min\{\varepsilon_i : i = 1, \dots, n\}$. Tada kiekvienam $i$ $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset (x - \varepsilon_i, x + \varepsilon_i) \subset X_i$. Taigi $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset \cap_{i=1}^n X_i$.

2. Tegu $\mathcal{G}$ yra atvirų aibių rinkinys (baigtinis ar begalinis). Įrodyti, kad $\cup\mathcal{G}$ yra atvira aibė.

   **Sprendimas.** Aibė yra atvira, jei kiekvienas jos taškas yra vidinis. Tegu $x \in \cup\mathcal{G}$. Tada egzistuos tokia aibė $X \in \mathcal{G}$, kad $x \in X$. Kadangi $\mathcal{G}$ yra atvirų aibių rinkinys, tai $X$ yra atvira. Taigi egzistuoja toks $\varepsilon > 0$, kad $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset X$. Bet tada pagal jungties apibrėžimą $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset \cup\mathcal{G}$.

3. Sudarykite aibės $\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}_+\}$ atvirąjį denginį, iš kurio neįmanoma išrinkti baigtinio denginio.

   **Sprendimas.** Tegu $\mathcal{G} = \{I_n := (\frac{n^2-1}{n^3}, \frac{n^2+1}{n^3}), n =\in \mathbb{N}_+\}$. Tada turime kad $1/n \in I_n$, $I_n$ yra atvira visiems $n$, bet bet kuriems $n \neq m \geq 2$ $I_n \cap I_m = \varnothing$. Taigi $\mathcal{G}$ yra atvirasis denginys iš kurio neįmanoma išrinkti baigtinio denginio.

4. Tegul $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ir

   $$f(x) = \begin{cases} 2, x > 0, \\ 0, x = 0, \\ -2, x < 0. \end{cases}$$

   Parodyti, kad taške 0 funkcijos riba neegzistuoja.

5. Įrodyti, kad jei funkcija $f$ taške $a$ konverguoja į $u$, o funkcija $g$ taške $a$ konverguoja į $v$, tai $fg$ taške $a$ konverguoja į $uv$.

6. Tegu $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$. Parodyti, kad $\lim_{x\to\infty} |P(x)| = \infty$

   Rasti ribas:

7. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{x + 1}$.

8. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[4]{x} - 2}{\sqrt{x} - 4}$.

9. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{1 + x} - 1}{x}$, čia $n \in \mathbb{N}_+$.

10. $\displaystyle\lim_{x\to 7} \frac{\sqrt{x + 2} - \sqrt[3]{x + 20}}{\sqrt[4]{x + 9} - 2}$

## 4.2 27-28 paskaita

1. Rasti ribas

   (a) $\lim_{x\to\pi} \frac{\sin mx}{\sin nx}$ *(170)*

   (b) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$ *(172)*

   (c) $\lim_{x\to a} \frac{\sin x - \sin a}{x-a}$ *(176)*

   (d) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+2}{2x+1}\right)^{x^2}$ *(186)*

   (e) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$.*(193)*

   (f) $\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x}$ *(197)*

   (g) $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\mu-1}{x}$.*(197)*

2. Tegul $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ir

$$f(x) = \begin{cases} 0, \, x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, \\ 1, \, x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

   Parodyti, kad funkcija netolydi kiekviename taške.

   **Sprendimas.** Tegu $x \in \mathbb{Q}$. Tada $f(x) = 1$. Remiantis realiųjų skaičių savybėmis kiekvienam $\delta > 0$ egzistuos toks iracionalus skaičius $y \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, kad $|y - x| < \delta$. Bet $f(y) = 0$, taigi $\lim_{t\to x} f(t)$ neegzistuoja. Taigi funkcija nėra tolydi racionaliuose taškuose.

   Tegu $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Tada $f(x) = 0$. Remiantis realiųjų skaičių savybėmis kiekvienam $\delta > 0$ egzistuos toks racionalus skaičius $y \in \mathbb{Q}$, kad $|y - x| < \delta$. Bet $f(y) = 1$, taigi $\lim_{t\to x} f(t)$ neegzistuoja. Taigi funkcija nėra tolydi iracionaliuose taškuose.

3. Tegu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ir

$$f(x) = \begin{cases} 0, \, x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, \\ \dfrac{1}{b}, \, x \in \mathbb{Q}, \; x = \dfrac{a}{b}, \text{ (neprastinama trupmena)} \end{cases}$$

   Parodyti, kad funkcija tolydi iracionaliuose taškuose ir netolydi racionaliuose. *(263)*

4. Tegu funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yra funkcija su reikšmėmis

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 2, & \text{jei } x \le 0, \\ x^2 - 2, & \text{jei } 0 < x \le 2, \\ x, & \text{jei } x > 2. \end{cases}$$

   Rasti funkcijos $f$ tolydumo ir trūkio taškus.

5. Tegu $f(x) := \{x\}$ (skaičiaus trupmeninė dalis). Rasti funkcijos trūkio taškų aibę. *(253)*

6. Tarkime, kad $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ yra tolydi funkcija. Įrodyti, kad egzistuoja tokia tolydi funkcija $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kad $g(x) = f(x)$ kiekvienam $x \in [a, b]$ (tokia funkcija vadinama funkcijos $f$ tolydžiuoju tęsiniu). Įrodykite, kad šis teiginys nėra teisingas bet kuriai tolydžiai funkcijai $f : (a, b) \to \mathbb{R}$.

   **Sprendimas.** Tegu $c < a$ ir $d > b$. Apibrėžkime $g(x)$ taip:

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x < c, \\ f(a)\frac{x-c}{a-c}, & c \le x < a, \\ f(x), & a \le x \le b, \\ f(b) - f(b)\frac{x-b}{d-b}, & b < x \le d, \\ 0, & x > d. \end{cases}$$

   Funkcija $g(x)$ yra tolydi ir tenkina reikiamas savybes.

   Tegu $(a, b) = (0, 1)$ ir $f(x) = \frac{1}{x}$. Tada nebus įmanoma sukonstruoti tolydaus funkcijos $f$ tęsinio, nes taške 0 funkcijos riba neegzistuoja.

### 4.3 29-30 paskaita

1. Tegul $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ir $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ yra tolydžios funkcijos. Tarkime, kad $f(0) < g(0)$ ir $f(1) > g(1)$. Įrodyti egzistuojant tokį tašką $c \in (0,1)$, kad $f(c) = g(c)$.

   **Sprendimas.** Nagrinėkime funkciją $h(x) = f(x) - g(x)$. Ši funkcija bus tolydi intervale $[0,1]$. Be to $h(0) < 0$, o $h(1) > 1$. Pagal vidurinės reikšmės teoremą egzistuos $c \in (0,1)$, kad $h(c) = 0$. Taigi suradome tokį $c \in (0,1)$, kad $f(c) = g(c)$.

2. Tarkime, kad funkcija $f[0,2] \to \mathbb{R}$ yra tolydi ir $f(0) = f(2)$. Įrodyti, kad intervale $[0,2]$ egzistuoja tokie skaičiai $a$ ir $b$, kad $a - b = 1$ ir $f(a) = f(b)$.

   **Sprendimas.** Nagrinėkime funkciją $g(x) = f(x) - f(x+1)$. Ši funkcija apibrėžta intervale $[0,1]$. Turime $g(0) = f(0) - f(1)$, $g(1) = f(1) - f(2)$. Kadangi $f(0) = f(2)$, $g(0)$ ir $g(1)$ bus priešingų ženklų. Taigi pagal vidurinės reikšmės teoremą egzistuos toks $c \in (0,1)$, kad $g(c) = 0$. Bet tada $f(c) = f(c+1)$ ir paėmę $c + 1 = a$ o $c = b$, gausime tai ko reikia.

3. Tarkime, kad $a < b$ ir funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ yra dalimis monotoninė. Jei $f$ turi vidurinės reikšmės savybę intervale $[a,b]$, tai ji yra tolydi intervale $(a,b)$.

4. Rasti funkcijos $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ išvestinę intervalo $(a,b)$ taškuose pagal apibrėžimą, kai:

   (a) $f(x) = r$

   (b) $f(x) = x$

   (c) $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (d) $f(x) = \sin x$.

5. Rasti funkcijų išvestines:

   (a) $\dfrac{\ln(\cos(x^2))}{\tan(e^x)}$

   (b) $\dfrac{\exp(\cos(\ln(x^3)))}{\sqrt{|\sin(x)|}}$

   (c) $4\sqrt{\sqrt{x+2}-1} - 2\sqrt{2}\arctan\sqrt{\frac{\sqrt{x+2}-1}{2}} + 1$

   (d) $\arctan\sqrt{\cos 2x} - \sqrt{\cos 2x}$

   (e) $\sin^2(w\cos\alpha x) + \cos^2(w\sin\alpha x)$

   (f) $\operatorname{ctan}(a\tan(b\arctan(cx)))$

   (g) $\log_a^c\sqrt{\frac{x+1}{x+b}}$

   (h) $\ln^a(\ln^b(\ln^c x))$

   (i) $x^{\sin x} + (\sin x)^x$

   (j) $x^{(\ln x)^x}$

   (k) $x^{x^{x^x}}$

6. Rasti funkcijų išvestines

   (a) $\arcsin\dfrac{1}{|x|}$ *(9)*

   (b) $[x]\sin^2\pi x$ *(9)*