Matematinė analizė. Rudens semestro teorijos pratybų namų darbų sprendimai

Jurgita Markevičiūtė, Vaidotas Zemlys

2009 m. gruodžio 30 d.

Turinys

1 **Pirmoji grupė uždavinių** **2**

2 **Antroji grupė uždavinių** **6**

3 **Trečioji grupė uždavinių** **10**

4 **Ketvirtoji grupė uždavinių** **13**

1 Pirmoji grupė uždavinių

Rugsėjo mėn.

1. Parodyti, kad yra teisingos sudėtinių teiginių formos:

   (a) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A) \vee (\neg B)$

   (b) $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A) \wedge (\neg B)$

   Sprendimas: Sudėtinių teiginių formos teisingos, kai sutampa jų teisingumo lentelės. Abiem atvejais sudarysime teisingumo lenteles:

   (a) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A) \vee (\neg B)$

$\tau(A)$	$\tau(B)$	$\tau(\neg(A \wedge B))$	$\tau((\neg A) \vee (\neg B))$
t	t	k	k
t	k	t	t
k	t	t	t
k	k	t	t

   Teisingumo lentelės sutampa, todėl teiginių formos yra teisingos.

   (b) $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A) \wedge (\neg B)$

$\tau(A)$	$\tau(B)$	$\tau(\neg(A \vee B))$	$\tau((\neg A) \wedge (\neg B))$
t	t	k	k
t	k	k	k
k	t	k	k
k	k	t	t

   Teisingumo lentelės sutampa, todėl teiginių formos yra teisingos.

2. Pasinaudodami savo žiniomis apie realius skaičius nustatykite kurie iš šių teiginių yra teisingi, o kurie klaidingi.

   (a) $\forall x,\ \exists y \ni x + y = 0$

   (b) $\forall x,\ \forall y, x + y = 0$

   (c) $\exists x \ni \forall y, x + y = 0$

   (d) $\exists x, \exists y \ni x + y = 0$

   Sprendimas:

   (a) Teiginys $\forall x,\ \exists y \ni x + y = 0$ yra teisingas, nes kiekvienam x egzistuoja jam priešingas skaičius $y := -x$ ir lygybė galioja.

   (b) Teiginys $\forall x,\ \forall y, x + y = 0$ nėra teisingas. Imkime $x = 5$, $y = 2$. Turime, kad $x + y \neq 0$, o teiginyje reikalaujama, kad savybė $x + y = 0$ galiotų visiems x ir visiems y.

   (c) Teiginys $\exists x \ni \forall y, x + y = 0$ nėra teisingas. Šio teiginio neiginys yra teiginys $\forall x, \exists y : x + y \neq 0$, yra teisingas, nes kiekvienam realiam x paėmus $y = x + 1$ turėsime, kad $x + y \neq 0$. Taigi priešingas teiginys yra teisingas, vadinasi pirmasis teiginys yra neteisingas.

   (d) Teiginys $\exists x, \exists y \ni x + y = 0$ yra teisingas. Imkime $x = 3$, o $y = -3$. Turime, kad $x + y = 0$, taigi teiginys teisingas.

3. Tegu X ir Y yra aibės. Įrodyti, kad $(X \backslash Y) \cup (Y \backslash X) = (X \cup Y) \backslash (X \cap Y)$

Sprendimas:

$$\begin{aligned}
x \in (X\backslash Y) \cup (Y\backslash X) &\Leftrightarrow [(x \in X) \wedge (x \notin Y)] \vee [(x \in Y) \wedge (x \notin X)] \\
&\Leftrightarrow \Big[[(x \in X) \wedge (x \notin Y)] \vee (x \in Y)\Big] \\
&\wedge\ \Big[[(x \in X) \wedge (x \notin Y)] \vee (x \notin X)\Big] \\
&\Leftrightarrow \Big[[(x \in X) \vee (x \in Y)] \wedge [(x \notin Y) \vee (x \in Y)]\Big] \\
&\wedge\ \Big[[(x \in X) \vee (x \notin X)] \wedge [(x \notin Y) \vee (x \notin X)]\Big] \\
&\Leftrightarrow [(x \in X) \vee (x \in Y)] \wedge [(x \notin Y) \vee (x \notin X)] \\
&\Leftrightarrow [(x \in X) \vee (x \in Y)] \wedge \neg[(x \in Y) \wedge (x \in X)] \\
&\Leftrightarrow [x \in (X \cup Y)] \wedge \neg[x \in (Y \cap X)] \\
&\Leftrightarrow [x \in (X \cup Y)] \wedge [x \notin (Y \cap X)] \\
&\Leftrightarrow x \in (X \cup Y)\backslash(Y \cap X)
\end{aligned}$$

4. Tegul $\mathbb{Z}$ yra sveikųjų skaičių aibė ir $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{Z}\backslash\{0\} = \{\pm 1, \pm 2, \dots\}$. Dekarto sandaugoje $X := \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+$ apibrėžkime binarųjį sąryšį $\simeq_Q$ bet kuriems $(a, b) \in X$ ir $(c, d) \in X$ sakydami, kad $(a, b) \simeq_Q (c, d)$, jei $ad = bc$. Parodykite, kad taip apibrėžtas binarusis sąryšis aibėje X yra ekvivalentumo binarusis sąryšis.

   Sprendimas:

   (a) Refleksyvumas. Imkime $(a, b) \in X$, iš sveikųjų skaičių savybių turime, kad $ab = ba$. Taigi $(a, b) \simeq_Q (a, b)$. Taigi sąryšiui $\simeq_Q$ galioja refleksyvumo aksioma.

   (b) Simetriškumas. Imkime $(a, b) \in X$ ir $(c, d) \in X$, tokius kad $(a, b) \simeq_Q (c, d)$. Tada pagal apibrėžimą $ad = bc$. Bet tada $cb = da$, taigi $(c, d) \simeq (a, b)$. Taigi sąryšis $\simeq_Q$ yra simetriškas

   (c) Tranzityvumas. Imkime $(a, b) \in X$, $(c, d) \in X$ ir $(m, n) \in X$. Tegu $(a, b) \simeq_Q (c, d)$ ir $(c, d) \simeq (m, n)$. Tada pagal apibrėžimą turime:

   $$\begin{aligned} ad &= bc \\ cn &= dm. \end{aligned}$$

   Vadinasi:

   $$ad \cdot cn = bc \cdot dm.$$

   Iš sveikųjų skaičių savybių turime, kad:

   $$\begin{aligned} (a \cdot n) \cdot (c \cdot d) &= (b \cdot m) \cdot (c \cdot d), \\ (a \cdot n - b \cdot m) \cdot (c \cdot d) &= 0 \end{aligned}$$

   Tada arba $a \cdot n - b \cdot m = 0$ arba $c \cdot d = 0$ arba abu reiškiniai kartu lygūs nuliui. Pirmu ir trečiu atveju iš karto gauname, kad $(a, b) \simeq_Q (n, m)$. Antruoju atveju turime, kad $c \cdot d = 0$. Bet tada, būtinai $c = 0$, nes $d \neq 0$ pagal aibės X apibrėžimą. Bet jei $c = 0$, tai $a \cdot d = 0$, taigi ir $a = 0$. Taip pat gauname, kad $d \cdot m = 0$, taigi ir $m = 0$. Taigi

   $$a \cdot n = 0 \cdot n = 0 = 0 \cdot b = m \cdot b.$$

   Vadinasi ir šiuo atveju $(a, b) \simeq_Q (n, m)$. Taigi sąryšis $\simeq_Q$ yra tranzityvus.

   Kadangi sąryšis yra refleksyvus, simetriškas ir tranzityvus, tai jis yra ekvivalentumo sąryšis.

5. Kada tuščioji funkcija $f : \varnothing \to Y$ yra injekcija? siurjekcija? bijekcija?

   Sprendimas: Funkcija yra siurjekcija, kai $f[\varnothing] = Y$. Tada

   $$f[\varnothing] = \{y \in Y : \exists x \in \varnothing : y = f(x)\} = \varnothing$$

   Taigi, funkcija f bus siurjekcija, kai $Y = \varnothing$.

   Funkcija injekcija, kai $\forall x, y \in X$ iš $f(x) = f(y)$ išplaukia, kad $x = y$. Kadangi $X = \varnothing$, tai funkcija f yra injekcija visada.

   Funkcija yra bijekcija, kai ji yra injekcija ir siurjekcija.

6. Tegu $f : X \to Y$ ir $g : Y \to Z$. Įrodyti: jei $g \circ f$ yra injekcija, tai f yra injekcija. Ar šiuo atveju g privalo būti injekcija? Įrodyti: jei $g \circ f$ yra siurjekcija, tai g yra siurjekcija. Ar šiuo atveju f privalo būti siurjekcija?

   Sprendimas: Turime, kad $g \circ f$ yra injekcija. Tada bet kuriems $x, x' \in X$, jei $(g \circ f)(x) = g \circ f(x')$, tai $x = x$'. Tegu x, x' tokie, kad $f(x) = f(x')$. Bet kuriai funkcijai h, jei $x = x'$, tai $h(x) = h(x')$. Taigi turime, kad $g(f(x)) = g(f(x'))$. Bet tada $x = x'$. Taigi f yra injekcija. Iš įrodymo matome, kad iš g reikalaujame tik to, kad g būtų funkcija. Taigi g neprivalo būti injekcija.

   Tegu $g \circ f$ yra siurjekcija. Tada turime, kad $(g \circ f)[X] = Z$. Bet tai reiškia, kad $g[f[X])] = Z$. Funkcija g bus siurjekcija, jei $g[Y] = Z$. Bet kadangi $f[X] \subset Y$, tai jei $g[f[X]] = Z$, tai juo labiau $g[Y] = Z$. Taigi g yra siurjekcija. Funkcija f šiuo atveju neprivalo būti siurjekcija. Tegu $g : [-1, 1] \to [0, 1]$, $f : [0, \pi/2] \to [-1, 1]$ ir $g(y) = y^2$, o $f(x) = \sin x$. Turime, kad $g \circ f$ yra siurjekcija, g yra siurjekcija, o f nėra siurjekcija. Taigi šiuo atveju mums svarbiausia yra kad sumažinus funkcijos g apibrėžimo aibę nuo Y iki $f[X]$, funkcija g išliktų siurjekcija. Funkcijos f savybės yra nesvarbios.

7. Su bet kuria funkcija $f : X \to Y$, jos grafikas yra aibė $G(f) := \{(x, f(x)) : x \in X\}$. Įrodyti, kad dvi funkcijos $f : X \to Y$ ir $f' : X \to Y$ lygios tada ir tik tada, kai $G(f) = G(f')$.

   Sprendimas: „$\Rightarrow$“. Sakykime, kad $f : X \to Y$ ir $f' : X \to Y$ yra lygios. Tada, pagal funkcijos lygybės apibrėžimą, $f(x) = f'(x)$, $\forall x \in X$. Taigi turime dvi aibes:

$$G(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\}$$
$$G(f') = \{(x, f'(x)) : x \in X\}.$$

   Paėmę bet kurį $x \in X$ turime, kad $(x, f(x)) = (x, f'(x))$. Aibių $G(f)$ ir $G(f')$ elementai yra aibės $X \times Y$ elementai, t.y. aibių X ir Y elementų poros. Poros yra lygios tik tuo atveju, kai atitinkami porų elementai yra lygūs. Mes turime, kad jei pirmas poros elementas sutampa, sutampa ir antras. Vadinasi poros sutampa, taigi $G(f) = G(f')$.

   „$\Leftarrow$“. Tarkime, kad $G(f) = G(f')$, t.y.,

$$\{(x, f(x)) : x \in X\} = \{(x, f'(x)) : x \in X\}.$$

   Kadangi f ir f' yra funkcijos, tai kiekvienam x egzistuoja vieninteliai y ir y' tokie, kad $f(x) = y$ ir $f'(x) = y'$. Taigi paėmus elementą (x, y) iš aibės $G(f)$ turime, kad $y = f(x)$. Bet kadangi aibės $G(f)$ ir $G(f')$ sutampa, tai $(x, y) \in G(f')$, o tai reiškia, kad $y = f'(x)$. Taigi gavome, kad bet kuriam x, $f(x) = f'(x)$. Tai ir reikėjo įrodyti.

8. Įrodyti lygybę, pasinaudojant apibrėžimu: $2 \cdot 2 = 4$.

   Sprendimas: Natūraliųjų skaičių sandauga ir suma apibrėžiama taip:

$$m + 0 = m$$
$$m + (n + +) = (m + n) + +$$
$$m \cdot 0 = 0$$
$$m \cdot (n + +) = m + m \cdot n.$$

Tada

$$\begin{aligned}
2 \cdot 0 &= 0 \\
2 \cdot 1 &= 2 \cdot (0++) \\
&= 2 + 2 \cdot 0 \\
&= 2 \\
2 \cdot 2 &= 2 \cdot (1++) \\
&= 2 + 2 \cdot 1 \\
&= 2 + 2 \\
&= 2 + (1++) \\
&= (2+1)++ \\
&= (2+0++)++ \\
&= ((2+0)++)++ \\
&= (2++)++ \\
&= 4
\end{aligned}$$

9. Tegu a, b, c, $d \in \mathbb{N}$. Įrodyti, jei $a = b$ ir $c = d$, tai $a + c = b + d$.

   Sprendimas: Tarkime priešingai. Tegu $a = b$ ir $c = d$, bet $a + c \neq b + d$. Tada turime, kad arba $a + c < b + d$, arba $a + c > b + d$. Tarkime, kad $a + c > b + d$. Tada egzistuos toks teigiamas natūrinis k, kad

   $$a + c = b + d + k.$$

   Dabar pagal prastinimo taisyklę ir pasinaudoję tuo, kad $c = d$ gauname, kad

   $$a = b + k.$$

   Vėl pasinaudoję prastinimo taisykle ir tuo, kad $a = b$ gauname, kad

   $$k = 0.$$

   Gauname prieštarą, nes k turi būti teigiamas natūrinis skaičius. Taigi $a+c \leq b+d$. Analogiškai įrodome, kad negali galioti $a + c < b + d$. Taigi gauname, kad $a + c = b + d$.

10. Įrodyti, jog visiems $k, n, m \in \mathbb{N}$, jei $k < n$ ir $n < m$, tai $k < m$

    Sprendimas: Naudosimės nelygybių apibrėžimais. Pirmiausia:

    $$\begin{gathered}
    k < n, \text{ tada, kai } n \geq k \text{ ir } n \neq k \\
    n < m, \text{ tada, kai } m \geq n \text{ ir } m \neq n.
    \end{gathered}$$

    Tada:

    $$\begin{gathered}
    n \geq k, \text{ tada, kai } n = k + l \\
    m \geq n, \text{ tada, kai } m = n + t.
    \end{gathered}$$

    Naudojantis pastarosiomis lygybėmis:

    $$m = n + t = k + l + t = k + z,$$

    čia $z = l + t$. Taigi pagal iš apibrėžimo išplaukia, kad $m \geq k$. Be to, jei $n \neq k$ ir $m \neq n$, tai $m \neq k$, nes jei būtų priešingai, tai iš lygybės tranzityvumo išplauktų, kad $m = k$. Taigi $m > k$.

2 Antroji grupė uždavinių

Spalio mėn.

1. Tegul $q, r \in \mathbb{Q}$ ir $n, m \in \mathbb{N}$. Įrodyti (naudojant indukciją)

   (a) $q^n \cdot q^m = q^{n+m}$, $(q^n)^m = q^{nm}$ ir $(qr)^n = q^n \cdot r^n$;

   (b) $q^n = 0$ tada ir tik tada, kai $q = 0$;

   (c) jei $q \geq r \geq 0$, tai $q^n \geq r^n \geq 0$;

   (d) jei $q > r \geq 0$ ir $n > 0$, tai $q^n > r^n \geq 0$;

   (e) $|q^n| = |q|^n$.

   Sprendimas:

   (a) Fiksuokime kokį nors $n \in \mathbb{N}$ ir tarkime, kad aibė M yra tokia aibė visų $m \in \mathbb{N}$, kad galioja sąryšis $q^n \cdot q^m = q^{n+m}$. Kai $m = 0$ turime:

   $$q^n \cdot q^0 = q^n = q^{n+0}$$

   Taigi, kai $m = 0$ lygybė galioja. Tarkime, kad ji galioja ir kai $m = k$. Parodysime, kad lygybė galios ir kai $m = k + 1$. Turime

   $$q^n \cdot q^{k+1} = q^n \cdot q^k \cdot q = q^{n+k} \cdot q = q^{n+k+1}$$

   Taigi, lygybė galioja ir su $m = k + 1$, vadinasi $M = \mathbb{N}$ ir lygybė galioja kiekvienam natūraliajam skaičiui.

   Fiksuokime kokį nors $n \in \mathbb{N}$ ir tarkime, kad aibė M yra tokia aibė visų $m \in \mathbb{N}$, kad galioja sąryšis $(q^n)^m = q^{nm}$. Tada tarkime, kad $m = 0$, tai

   $$(q^n)^0 = 1 = q^0 = q^{n \cdot 0}.$$

   Lygybė galioja, kai $m = 0$. Tarkime, kad lygybė galioja ir kai $m = k$. Parodysime, kad lygybė galioja ir kai $m = k + 1$:

   $$(q^n)^{k+1} = (q^n)^k \cdot (q^n) = (q^{nk}) \cdot (q^n) = q^{nk+n} = q^{n(k+1)}.$$

   Taigi, lygybė galioja ir $k+1$, vadinasi $M = \mathbb{N}$ ir lygybė galioja kiekvienam natūraliajam skaičiui.

   Tarkime, kad aibė N yra aibė tokių $n \in \mathbb{N}$, kuriems galioja lygybė $(qr)^n = q^n \cdot r^n$. Sakykime, $n = 0$:

   $$(qr)^0 = 1$$
   $$q^0 \cdot r^0 = 1.$$

   Taigi lygybė galioja, kai $n = 0$. Tarkime, kad lygybė galioja, kai $n = k$. Parodysime, kad lygybė galioja ir kai $n = k + 1$:

   $$(qr)^{k+1} = (qr)^k \cdot (qr) = (q)^k \cdot (r)^k \cdot q \cdot r = q^{k+1} \cdot r^{k+1}.$$

   Taigi, lygybė galioja ir $k+1$, vadinasi $M = \mathbb{N}$ ir lygybė galioja kiekvienam natūraliajam skaičiui.

   (b) „$\Rightarrow$“ Sakykime, kad $q^n = 0$. Bet tada $q \cdot q^{n-1} = 0$, o tai reiškia, kad arba $q = 0$ arba $q^{n-1} = 0$. Jei $q = 0$, tai įrodymas baigtas. Tarkime, kad $q \neq 0$, tada būtinai turės būti $q^{n-1} = 0$. Turime $q^{n-1} = q \cdot q^{n-2}$. Taigi vėl analogiškai arba $q = 0$, arba $q^{n-2} = 0$. Taip tęsdami galų gale gausime, kad arba $q = 0$ arba $q^2 = 0$. Taigi $q = 0$.

   „$\Leftarrow$“ Sakykime, kad $q = 0$. Tada $q^n = 0^n$. Kadangi n fiksuotas, tai $0^n = 0$. Taigi ir $q^n = 0$.

(c) Tarkime, kad aibė N yra aibė tokių $n \in \mathbb{N}$, kad galioja, jei $q \geq r \geq 0$, tai $q^n \geq r^n \geq 0$. Tarkime, kad $n = 0$:

$$q^0 = 1 \geq r^0 = 1 \geq 0.$$

Taigi nelygybė galioja, kai $n = 0$. Tarkime, kad nelygybė galioja, kai $n = k$. Parodysime, kad nelygybė galioja ir kai $n = k + 1$:

$$q^{k+1} = q^k \cdot q$$
$$r^{k+1} = r^k \cdot r.$$

Kadangi, pagal prielaidą, $q^k \geq r^k \geq 0$ bei, pagal sąlygą, $q \geq r \geq 0$, vadinasi $q^k \cdot q \geq r^k \cdot r \geq 0$, taigi $q^{k+1} \geq r^{k+1} \geq 0$. Iš to seka, kad nelygybė galioja, kai $n = k+1$. Vadinasi $N = \mathbb{N}$ ir nelygybė galioja kiekvienam natūraliajam skaičiui.

(d) Tarkime, kad aibė N yra aibė tokių $n \in \mathbb{N}_+$, kad galioja, jei $q > r \geq 0$, tai $q^n > r^n \geq 0$. Tarkime, kad $n = 1$:

$$q^1 = q > r^1 = r \geq 0.$$

Taigi nelygybė galioja, kai $n = 1$. Tarkime, kad nelygybė galioja, kai $n = k$. Parodysime, kad nelygybė galioja ir kai $n = k + 1$:

$$q^{k+1} = q^k \cdot q$$
$$r^{k+1} = r^k \cdot r.$$

Kadangi, pagal prielaidą, $q^k > r^k \geq 0$ bei, pagal sąlygą, $q > r \geq 0$, vadinasi $q^k \cdot q > r^k \cdot r \geq 0$, taigi $q^{k+1} > r^{k+1} \geq 0$. Iš to seka, kad nelygybė galioja, kai $n = k+1$. Vadinasi $N = \mathbb{N}_+$ ir nelygybė galioja kiekvienam teigiamam natūraliajam skaičiui.

(e) Tarkime, kad aibė N yra aibė tokių $n \in \mathbb{N}_+$, kad galioja $|q^n| = |q|^n$. Tarkime, kad $n = 0$:

$$|q^0| = |1| = 1$$
$$|q|^0 = 1.$$

Taigi lygybė galioja, kai $n = 0$. Tarkime, kad lygybė galioja, kai $n = k$. Parodysime, kad lygybė galioja ir kai $n = k + 1$:

$$|q^{k+1}| = |q^k \cdot q| = |q^k| \cdot |q| = |q|^k \cdot |q| = |q|^{k+1}.$$

Taigi, lygybė galioja ir $k + 1$, vadinasi $N = \mathbb{N}$ ir lygybė galioja kiekvienam natūraliajam skaičiui.

2. Tarkime, kad x yra realusis skaičius ir (a_n) yra racionaliųjų skaičių *Cauchy* seka. Įrodyti: jei $x \leq a_n$ su kiekvienu $n \in \mathbb{N}$, tai $x \leq LIM(a_n)$. Taip pat įrodyti, kad $x \geq LIM(a_n)$, jei $x \geq a_n$ su kiekvienu $n \in \mathbb{N}$. Nuoroda: jei taip nėra, tai galima rasti racionalųjį skaičių tarp dviejų realiųjų.

Sprendimas. Kadangi x yra realusis skaičius, tai jį atitinka ekvivalenčių racionaliųjų skaičių Koši sekų klasė. Iš šios klasės imkime vieną jos elementą (p_n). Jeigu a_n priklauso šiai ekvivalentumo klasei, t.y. $LIM(a_n) = x$, tai iš karto gauname įrodymą. Taigi nagrinėkime atvejį, kai a_n nepriklauso x ekvivalentumo klasei. Tada egzistuoja toks c, kad kiekvienam N, egzistuoja toks $m \geq N$, kad

$$|p_m - a_m| > c. \tag{1}$$

Sąlygoje nurodyta, kad kiekvienam n, turime $x \leq a_n$. Tarkime, kad egzistuoja toks N, kad kiekvienam $n \geq N$ turime $x < a_n$. Tai reiškia, kad realusis skaičius $x - a_n$ yra neigiamas, o tai savo ruožtu reiškia, kad jį atitinkanti racionaliųjų skaičių seka yra atskirta nuo nulio ir neigiama. Skaičių $x - a_n$ atitinkančią seką galime paimti $p_m - a_n$. Tada kadangi $x - a_n$ yra neigiamas skaičius, tai turime, kad egistuos toks $d > 0$ ir N_1, kad visiems $m \geq N_1$ turėsime

$$p_m - a_n < -d. \tag{2}$$

Kadangi p_n yra Koši seka, tai kiekvienam $\varepsilon > 0$ egzistuos toks N_2, kad visiems $n, m \geq N_2$ turėsime

$$|p_n - p_m| < \varepsilon.$$

Imkime $\varepsilon = d/2$. Tada

$$-d/2 < p_n - p_m < d/2.$$

Įstatę šią nelygybę į (2) gausime, kad egzistuoja toks $d > 0$ ir toks $N_3 = \max N_1, N_2$, kad kiekvienam $n \geq N_3$ turime

$$p_n - a_n < -d/2$$

Taigi seka $p_n - a_n$ yra neigiama ir atskirta nuo nulio. Tai reiškia, kad $LIM(p_n - a_n) < 0$, o tai reiškia, kad $x < LIM(a_n)$.

Tarkime, kad kiekvienam N egzistuoja toks $n \geq N$, kad $x = a_n$. Tai reiškia, kad $LIM(p_n) = a_n$, o tai reiškia, kad kiekvienam $\varepsilon > 0$ egzistuoja toks N_4, kad kiekvienam $m \geq N_4$

$$-\varepsilon < p_m - a_n < \varepsilon$$

Paėmę $\varepsilon = c/2$ ir įstatę šią nelygybę į (1) gausime, kad egzistuoja toks c, kad kiekvienam N egzistuoja tokie $n, m > N$, kad

$$|a_m - a_n| > c/2.$$

Taigi gauname, kad a_n nėra Koši seka. Taigi gavome prieštarą. Taigi jeigu $x \leq a_n$ kiekvienam n ir a_n nėra iš x ekvivalentumo klasės, tai būtina egzistuos toks N, kad $x < a_n$ visiems $n \geq N$. O kaip matėme tokiu atveju $x < LIM(a_n)$. Taigi gavome, kad jei $x \leq a_n$ kiekvienam n, tai arba $x = LIM(a_n)$ arba $x < LIM(a_n)$. Ką ir reikėjo įrodyti.

3. Tegul D yra realiųjų skaičių aibės A didžiausias apatinis rėžis. Įrodyti, kad kiekvienam $\varepsilon > 0$ egzistuoja toks $x \in A$, kad $x < D + \varepsilon$.

   Sprendimas: Kadangi D yra aibės A didžiausias apatinis rėžis, tai $\forall x \in A$ galioja, kad $x \geq D$. Tarkime priešingai, tegu egzistuoja toks $\varepsilon > 0$, kad kiekvienam $x \in A$, $x > D + \varepsilon$. Bet tada $D + \varepsilon$ yra apatinis aibės A rėžis. Kadangi $\varepsilon > 0$, tai $D + \varepsilon > D$, taigi D nėra didžiausias apatinis aibės A rėžis. Gauname prieštarą, vadinasi uždavinio teiginys yra teisingas.

4. Tegu A ir B yra netuščios ir aprėžtos realiųjų skaičių aibės. Tegul $C := \{x+y : x \in A, y \in B\}$. Įrodyti, kad $\sup C = \sup A + \sup B$

   Sprendimas. Kadangi turime $x \leq \sup A$ visiems $x \in A$ bei $y \leq \sup B$ visiems $y \in B$, tai iš karto gauname, kad $\sup C \leq \sup A + \sup B$. Tarkime, kad $\sup C < \sup A + \sup B$. Iš supremumo savybių turime, kad kiekvienam $\varepsilon > 0$ galime rasti tokį $x \in A$, kad $x > \sup A - \varepsilon$ ir $y > \sup B - \varepsilon$. Tada $x+y > \sup A + \sup B - 2\varepsilon$. Imkkime $\varepsilon = \frac{1}{4}(\sup A + \sup B - \sup C) > 0$. Tada $x+y > \frac{1}{2}(\sup A + \sup B) - \frac{1}{2}\sup C$. Dar kartą pasinaudoję tuo, kad $\sup A + \sup B > \sup C$ gauname, kad $x + y > \sup C$. Kadangi $x + y$ pagal apibrėžimą priklauso aibei C, gavome prieštarą. Taigi $\sup C = \sup A + \sup B$.

5. Tegul realusis skaičius $r > 0$ ir n yra teigiamas natūralusis skaičius. Įrodyti, kad lygtis $x^n = r$ atžvilgiu x turi vienintelį sprendinį tarp visų teigiamų realiųjų skaičių.

   Sprendimas. Tegu $x_1, x_2 > 0$ ir $x_1^n = r$ bei $x_2^n = r$. Tada

$$0 = x_1^n - x_2^n = (x_1 - x_2)(x_1^{n-1} + x_1^{n-2}x_2^2 + \cdots + x_1 x_2^{n-2} + x_2^{n-1})$$

   Taigi gauname, kad jei $x_1^n = x_2^n$, tai arba $x_1 = x_2$ arba

$$x_1^{n-1} + x_1^{n-2}x_2^2 + \cdots + x_1 x_2^{n-2} + x_2^{n-1} = 0$$

   Kadangi $x_1, x_2 > 0$, tai pastarasis reiškinys visados teigiamas. Vadinasi būtinai $x_1 = x_2$. Tai ir reikėjo įrodyti.

6. Tarkime, kad realiųjų skaičių aibė A turi viršutinį rėžį M ir egzistuoja tokia iš aibės A elementų sudaryta seka (x_n), kad $x_n \to M$, kai $n \to \infty$. Įrodyti, kad M yra aibės A mažiausias viršutinis rėžis.

   Sprendimas: Skaičius M yra aibės viršutinis rėžis, kai jis yra viršutinis rėžis ir mažiausias iš visų viršutinių rėžių, t.y., jei iš jo atimsime teigiamą skaičių, tai M jau nebebus viršutiniu rėžiu. Pagal ribos apibrėžimą turime, kad

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon), \forall n \geq N : |x_n - M| < \varepsilon.$$

   Tada

$$\begin{aligned} |x_n - M| < \varepsilon \Rightarrow \\ -\varepsilon < x_n - M < \varepsilon \Rightarrow \\ M - \varepsilon < x_n < M + \varepsilon. \end{aligned}$$

   Taigi radome, tokį aibės elementą (n-tąjį sekos narį), kad $x_n > M - \varepsilon$. Taigi jeigu paimsime bet kokį viršutinį rėžį $M' < M$, tai galėsime gausime, kad egzistuos toks aibės A elementas, kad $x > M'$, taigi gauname prieštarą. Taigi M yra mažiausias viršutinis rėžis.

7. Įrodyti: jei skaičių seka (r_n) konverguoja į r ir $|r_n| \leq C$ visiems pakankamai dideliems n, tai $|r| \leq C$

   Sprendimas: Kadangi (r_n) konverguoja į r, tai pagal apibrėžimą

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon), \forall n \geq N : |r_n - r| < \varepsilon.$$

   Tada

$$\begin{aligned} |r_n - r| < \varepsilon \\ -\varepsilon < r_n - r < \varepsilon \\ -r_n - \varepsilon < -r < -r_n + \varepsilon \\ r_n - \varepsilon < r < r_n + \varepsilon. \end{aligned}$$

   Tada gauname, kad $|r| < \max\{|r_n - \varepsilon|, |r_n + \varepsilon|\} \leq C + \varepsilon$. Vadinasi $|r| \leq C$.

8. Tegu realiųjų skaičių sekos (r_n) ir (s_n) konverguoja atitinkamai į realiuosius skaičius r ir s. Įrodyti, kad seka $\min\{r_n, s_n\}$ konverguoja į $\min\{r, s\}$.

   Sprendimas: Tarkime, kad $r > s$. Turime, kad kiekvienam $\varepsilon_1 > 0$ egzistuoja toks N_1, kad visiems $n > N_1$

$$r - \varepsilon_1 < r_n < r + \varepsilon_1$$

   Taipogi kiekvienam $\varepsilon_2 > 0$ egzistuoja toks N_2, kad visiems $n > N_2$

$$s - \varepsilon_2 < s_n < s + \varepsilon_2$$

   Kadangi $r > s$, tai galima parinkti tokius ε_1 ir ε_2, kad $s + \varepsilon_2 < r - \varepsilon_1$. Taigi turime, kad visiems $n \geq \max\{N_1, N_2\}$ turėsime, kad $s_n < r_n$. Taigi $\min_{r_n, s_n} = s_n$. Taigi seka $\min\{r_n, s_n\}$ pradedant nuo kažkurio tai nario sutaps su seka s_n ir tada akivaizdu jos riba bus $s = \min\{r, s\}$. Analogiškai nagrinėjamas atvejis, jei $s > r$.

   Jeigu $s = r$, tai turime, kad kiekvienam $\varepsilon > 0$ egzistuoja toks N_1, kad visiems $n > N_1$

$$|r_n - s| < \varepsilon$$

   Taipogi kiekvienam $\varepsilon > 0$ egzistuoja toks N_2, kad visiems $n > N_2$

$$|s - s_n| < \varepsilon$$

   Kadangi $|\min\{r_n - s_n\} - s|$ yra arba $|r_n - s|$ arba $|s_n - s|$, tai visiems $n \geq \max\{N_1, N_2\}$ turėsime $|\min\{r_n - s_n\} - s| < \varepsilon$. O tai ir reikėjo įrodyti.

3 Trečioji grupė uždavinių

Lapkričio mėn.

1. Rasti sekų ribas:

   (a) n^{1/n^2}

   (b) $(n^2)^{1/n}$

   (c) $(1+n^2)^{1/n^3}$

   (d) $(1+1/n)^{2/n}$.

   Sprendimas:

   (a) Turime $n^{1/n^2} > 1$. Bet $n^{1/n^2} = (n^{1/n})^{1/n} \le n^{1/n}$. Kadangi $n^{1/n} \to 1$, tai ir $n^{1/n^2} \to 1$.

   $$\lim_{n\to\infty} n^{1/n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(n^{1/n}\right)^{\lim_{n\to\infty} 1/n} = 1^0 = 1.$$

   (b)

   $$\lim_{n\to\infty}(n^2)^{1/n} = \lim_{n\to\infty}(n^{1/n})(n^{1/n}) = \left(\lim_{n\to\infty}(n^{1/n})\right)\left(\lim_{n\to\infty}(n^{1/n})\right) = 1^2 = 1.$$

   (c) Turime $1 \le (1+n^2)^{1/n^3} = ((1+n^2)^{1/n^2})^{1/n} < e^{1/n} \to 1$, taigi

   $$\lim_{n\to\infty}(1+n^2)^{1/n^3} = 1.$$

   (d) Turime $1 \le (1+1/n)^{2/n} \le (1+1/n) \to 1$. Taigi

   $$\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^{2/n} = 1.$$

   .

2. Tegul $r_1 = 1/2$, tegul kiti trys nariai yra $1/4,\ 1/2,\ 3/4$. Tegul kiti septyni nariai yra $1/8, 1/4, 3/8, 1/2, 5/8, 3/4, 7/8$ ir taip toliau. Rasti visus šios sekos ribinius taškus.

   Sprendimas. Visi intervalo $[0,1]$ taškai yra šios sekos ribiniai taškai. Tegu $x \in [0,1]$. Tegu $J \in \mathbb{N}$. Tada

   $$[2^J x] \le 2^J x < [2^J x] + 1$$
   $$\frac{[2^J x]}{2^J} \le x < \frac{[2^J x]+1}{2^J}$$

   Skaičiai $\frac{[2^J x]}{2^J}$ ir $\frac{[2^J x]+1}{2^J}$ priklauso sekai pagal sekos apibrėžimą. Be to jie nuo skaičiaus x yra nutolę per $\frac{1}{2^J}$. Kadangi J gali būti kiek norimai didelis, gauname, kad kiekvienam taškui x galime parinkti kiek norimai artimą sekos narį. Taigi taškas x yra sekos ribinis taškas.

3. Rasti ribą:

   $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!}\right)$$

   Sprendimas: Turime, kad $\frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$. Taigi

   $$\left(\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!}\right) = 1 - \frac{1}{(n+1)!} \to 1,\ \text{kai } n \to \infty$$

4. Įrodykite, kad eilutė $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{3i+1}$ diverguoja.

   Sprendimas: Turime, kad $\frac{1}{3i+1} > \frac{1}{3i+3} = \frac{1}{3(i+1)}$ ir kiekvienam $n \in \mathbb{N}$:
$$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{3i+1} > \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{3(i+1)} = \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$
   Kadangi $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverguoja, tai diverguoja ir $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{3i+1}$.

5. Ištirkite eilutės $\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}+\ldots$ konvergavimą.
   Nuoroda: pasinaudokite tuo, kad $\sqrt{2} = 2\cos\pi/4$, *bei tuo, kad* $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$.

   Sprendimas: Bendrasis narys turi pavidalą
$$a_n = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}},\ n \in \mathbb{N},$$
   ir naudodamiesi tuo, kad $\sqrt{2} = 2\cos\pi/4$ gauname $a_n = \sqrt{2-2\cos\frac{\pi}{2^n}} = 2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}} < \frac{\pi}{2^n}$. Kadangi eilutė $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi}{2^n}$ konverguoja, tai konverguoja ir eilutė $\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}+\ldots$.

6. Ištirkite eilutės $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^n}{n!}\cos n^n$ konvergavimą.

   Sprendimas: Kadangi $|\cos n^n| \leq 1$, tai
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{e^n}{n!}\cos n^n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n!}.$$
   Taikysime d'Alambert'o požymį
$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\dfrac{e^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{e^n}{n!}} = \limsup_{n\to\infty} \frac{e}{n+1} = 0 < 1.$$
   Kadangi konverguoja eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^n}{n!}$, tai pagal eilučių palyginimo požymį turime, kad konverguoja ir $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\dfrac{e^n}{n!}\cos n^n\right|$. Vadinasi eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^n}{n!}\cos n^n$ konverguoja absoliučiai. Vadinasi ji konverguoja.

7. Įrodyti, kad racionaliųjų skaičių porų aibė $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ yra suskaičiuojama

   Sprendimas. Kadangi $\mathbb{Q}$ yra suskaičiuojama, tai ją galima užrašyti kaip $\mathbb{Q} = \{z_0, z_1, \ldots\}$. Toliau sprendimas analogiškas 21-22 pratybų 6 uždavinio sprendimui.

8. Tegu X yra baigtinė aibė. Įrodyti, kad jei $f : X \to Y$ yra funkcija, tai vaizdas $f[X]$ irgi yra baigtinė aibė ir $|f[X]| \leq |X|$; be to jei f yra injekcija, tai $|f[X]| = |X|$.

   Sprendimas. Kadangi X baigtinė galime ją užrašyti kaip $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, kokiam nors $n \in \mathbb{N}$. Tada $f[X] = \{f(x_1), \ldots, f(x_n)\}$, pagal funkcijos apibrėžimą, nes funkcija f yra taisyklė kuri kiekvienam $x \in X$ prisikiria vienintelį $f(x)$. Taigi gavome kad $f[X]$ yra baigtinė aibė. Kadangi funkcija keliems x gali priskirti vieną ir tą pačią reikšmę turime, kad $|f[X]| \leq |X|$. Jeigu f yra injekcija, tai tada $f(x_i) \neq f(x_j)$ visiems $x_i \neq x_j$. Taigi tarp $f(x_i)$ nėra pasikartojančių reikšmių. Vadinasi $|f[X]| = |X|$, jei f yra injekcija.

9. Tegu X yra baigtinė aibė, o $\mathcal{P}(X)$ aibė, kurios elementai yra visi aibės X poaibiai. Parodyti, kad $\mathcal{P}(X)$ yra baigtinė ir kad $|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$. *(Pasinaudoti Niutono binomo formule).*

Sprendimas. Kadangi aibė X baigtinė, tai jos poaibiai irgi yra baigtiniai. Juos galima sugrupuoti pagal dydį. Tegu $|X| = n$, tada iš viso įmanoma rasti $\binom{n}{k}$, k dydžio aibės X poaibių. Taigi

$$|\mathcal{P}(X)| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^{|X|}$$

Kadangi $|X| < \infty$, tai ir $2^{|X|} < \infty$, taigi aibė $\mathcal{P}(X)$ yra baigtinė.

4 Ketvirtoji grupė uždavinių

1. Tegul a ir b yra tokie tiesės taškai, kad $a < b$. Įrodyti, kad $\overline{(a,b)} = [a,b]$, $\overline{(-\infty,b)} = (\infty,b]$, $\overline{(a,\infty)} = [a,\infty)$

   Sprendimas. Imkime intervalą (a,b). Visi jo taškai yra ribiniai. Taip pat ribiniai yra taškai a ir b, nes kiekvienoje jų ε aplinkoje bus intervalo (a,b) taškų. Tada, jei $x \notin [a,b]$, tai x nėra ribinis $[a,b]$ taškas, nes žinome, kad $[a,b]$ yra uždara aibė. Taigi jis tuo pačiu nėra ir (a,b) ribinis taškas. Taigi $[a,b]$ yra (a,b) uždarinys.

   Imkime intervalą $(-\infty,a)$. Taškas a yra ribinis, nes kiekvienoje ε aplinkoje bus intervalo $(-\infty,a)$ taškų. Imkime tašką $x \notin (-\infty,a]$. Tada $x > a$ ir paėmus $\varepsilon = (x-a)/2$ gausime kad $O_\varepsilon(x) \cap (-\infty,a] = \varnothing$. Taigi x nėra ribinis $(-\infty,a]$ taškas ir juo labiau ribinis $(-\infty,a)$ taškas. Taigi aibės $(-\infty,a)$ uždarinys yra aibė $(-\infty,a]$.

   Atvejis (a,∞) nagrinėjamas analogiškai.

2. Tegul I yra bet kokia aibė (baigtinė ar begalinė). Tarkime, kad su kiekvienu $i \in I$, X_i yra uždara tiesės taškų aibė. Įrodyti, kad sankirta $\cap_{i\in I} X_i$ yra uždara aibė.

   Sprendimas. Norint parodyti, kad aibė $\cap_{i\in I} X_i$ yra uždara užtenka parodyti, kad jei taškas x nepriklauso šiai aibei, tai jis negali būti šios aibės ribinis taškas. Tegu x nepriklauso šiai aibei. Tada būtinai atsiras tokia aibė X_i, kuriai šis taškas nepriklausys. Kadangi X_i yra uždara, tai gauname, kad taškas x nėra šios aibės ribinis taškas, nes jis jai nepriklauso. Vadinasi egzistuoja tokia x ε aplinka, kad $O_\varepsilon(x) \cap X_i = \varnothing$. Bet tada $O_\varepsilon(x) \cap \cap_{i\in I} X_i = \varnothing$, nes $\cap_{i\in I} X_i \subset X_i$. Taigi sukonstravome tokią taško ε aplinką, kurios sankirta su $\cap_{i\in I}$ yra tuščia aibė. Taigi x nėra ribinis $\cap_{i\in I}$ ribinis taškas.

3. Tarkime, kad funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yra tolydi ir $c \in \mathbb{R}$ yra toks, kad $f(c) > 0$. Įrodyti egzistuojant tokį δ, kad $f(x) > f(c)/2$ kiekvienam $x \in O_\delta(c)$.

   Sprendimas. Kadangi funkcija tolydi taške c, tai kiekvienam $\varepsilon > 0$ egzistuoja toks $\delta > 0$, kad kiekvienam $x \in O_\delta(c)$:

   $$|f(x) - f(c)| < \varepsilon$$

   Imkime $\varepsilon = f(c)/2$. Tada turime

   $$\begin{aligned} -\varepsilon < f(x) - f(c) < \varepsilon \\ f(c) - \varepsilon < f(x) < f(c) + \varepsilon \\ f(c)/2 < f(x) < 3f(c)/2 \end{aligned}$$

   Tai ir reikėjo įrodyti.

4. Tegu $a \in \mathbb{R}$ ir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yra funkcija su reikšmėmis

   $$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1, & \text{jei } x \le 1, \\ ax + 1, & \text{jei } x > 1. \end{cases}$$

   Kokioms a reikšmėms funkcija f yra tolydi?

   Sprendimas. Funkcijos $x^2 - x + 1$ ir $ax + 1$ yra tolydžios visoje tiesėje, todėl

   $$\begin{aligned} f(1-) &= \lim_{x\to 1-} x^2 - x + 1 = (x^2 - x + 1)|_{x=1} = 1 - 1 + 1 = 1 \\ f(1+) &= \lim_{x\to 1+} ax + 1 = (ax + 1)|_{x=1} = a + 1 \end{aligned}$$

   Taip pat turime, kad $f(1) = 1$. Kad funkcija f būtų tolydi reikia, kad būtų $f(1-) = f(1+) = f(1)$. Matome, kad taip bus tik tuo atveju, kai $a = 0$.

5. Tarkime, kad $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ yra tokia funkcija, kad

   $$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

   visiems $x, y \in (a,b)$ ir $\lambda \in (0,1)$ (tokia funkcija vadinama iškiliąja). Įrodyti, kad f yra tolydi

Sprendimas. Tegu $x, y \in (a,b)$. Turime, kad

$$f(\lambda x + (1-\lambda y)) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

Pertvarkę šį reiškinį gauname:

$$f(\lambda x + (1-\lambda y)) - f(y) \leq \lambda (f(x) - f(y)) \leq \lambda |f(x) - f(y)|$$

Tegu $\mu \in [0, 1/2]$. Turime

$$\begin{aligned} f(y) = f(\mu(2y-x) + (1-2\mu)y + \mu x) &= f\left(\mu(2y-x) + (1-\mu)\left(\frac{1-2\mu}{1-\mu}y + \frac{\mu}{1-\mu}x\right)\right) \\ &\leq \mu f(2y-x) + (1-\mu) f\left(\mu(2y-x) + (1-\mu)\left(\frac{1-2\mu}{1-\mu}y + \frac{\mu}{1-\mu}x\right)\right) \end{aligned}$$

Padalinę abejas nelygybės puses iš $(1-\mu)$, bei pažymėję $\lambda = \frac{\mu}{1-\mu}$ turime

$$(1+\lambda) f(y) \leq \lambda f(2y-x) + f((1-\lambda)y + \lambda x)$$

Taigi

$$-\lambda(f(y) - f(2y-x)) \leq f((1-\lambda)y + \lambda x) - f(y)$$

ir

$$-\lambda |f(y) - f(2y-x)| \leq f((1-\lambda)y + \lambda x) - f(y)$$

Pasirinkime tokį x, kad $y+y-x \in (a,b)$. Tada $f(x)-f(y)$ ir $f(2y-x)-f(y)$ yra realūs skaičiai. Perėjus nelygybėse prie ribos, kai $\lambda \to 0$ gauname, kad $f((1-\lambda)y + \lambda x) = f(y + \lambda(x-y))$ artėja į $f(y)$. Bet tai tas pats, kas parodyti, kad funkcijos f riba taške y iš kairės ir dešinės egzistuoja, ir lygi $f(y)$ (atitinkamai pasirinkus $x < y$ ir $x > y$). Taigi gauname, kad f tolydi taške y. Kadangi y pasirinkome laisvai, gauname, kad f tolydi kiekviename apibrėžimo taške.

6. Tarkime, kad $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ yra funkcija, $\alpha \in (0,1]$ ir egzistuoja toks skaičius $C \in \mathbb{R}$, kad

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^\alpha$$

visiems $x, y \in [a,b]$ (tada sakoma, kad funkcijai f galioja *Hölder*io sąlyga su rodikliu α). Įrodyti, kad f yra tolygiai tolydi.

Sprendimas. Funkcija yra tolygiai tolydi, kai kiekvienam $\varepsilon > 0$ egzistuoja toks $\delta > 0$, kad visiems $|x-y| < \delta$ teisinga

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Kadangi f tenkina *Hölderio* sąlygą su rodikliu α, tai visiems $|x-y| < \delta$ turime:

$$|f(x) - f(y)| < |x-y|^\alpha < C\delta^\alpha < \varepsilon,$$

jei $\delta < (\varepsilon/C)^\alpha$. Taigi funkcija f yra tolygiai tolydi.

7. Pateikti tokį tolygiai tolydžios funkcijos f pavyzdį, kuriai negalioja *Hölder*io sąlyga su rodikliu 1. *Nuoroda: nagrinėti funkciją su reikšmėmis $f(x) = \sqrt{x}$.*

Sprendimas. Nagrinėjime funkciją $f(x) = \sqrt{x}$ intervale $[0,1]$. Šiame intervale funkcija bus tolygiai tolydi, nes kiekviena tolydi funkcija uždarame intervale yra tolygiai tolydi. Parodysime, kad šiai funkcija negalioja *Hölder* sąlyga su rodikliu 1.

Kad funkcijai f negaliotų *Hölder* sąlyga su rodikliu 1, kiekvienam $C > 0$ turi egzistuoti tokie $x, y \in [0,1]$, kad $|f(x) - f(y)| > C|x-y|$. Turime

$$|f(x) - f(y)| = |\sqrt{x} - \sqrt{y}| = |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \frac{|\sqrt{x} + \sqrt{y}|}{|\sqrt{x} + \sqrt{y}|} = \frac{|x-y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} > \frac{|x-y|}{\sqrt{x}}$$

Kadangi turime, kad $x^{-1/2} \to \infty$, kai $x \to 0$, tai visiems $C > 0$ galime rasti tokį x, kad $C < \frac{1}{\sqrt{x}}$. Taigi galime parinkti $x, y \in [0,1]$ tokius, kad

$$|f(x) - f(y)| > C|x-y|$$

visiems $C > 0$ (čia y galime rinktis bet kurį tašką iš intervalo $[0,1]$).

8. Kuriuose taškuose diferencijuojamos funkcijos $|\sin x|$ ir $\sin|x|$?

   Sprendimas. Nagrinėkime funkciją $\sin|x|$. Visiems $x > 0$ turime, kad $\sin|x| = \sin x$, o visiems $x < 0$ turime, kad $\sin|x| = \sin(-x) = -\sin x$. Taigi funkcija $\sin|x|$ yra diferencijuojama visiems $x \neq 0$, kadangi funkcijos $\sin x$ ir $-\sin x$ yra diferencijuojamos visoje skaičių tiesėje. Taške nulis funkcijos $\sin|x|$ išvestinė iš kairės bus funkcijos $-\sin x$ išvestinė iš kairės ir ji bus lygi $-\cos 0$. Analogiškai išvestinė iš dešinės bus lygi $\cos 0$. Kadangi $\cos 0 = 1$ gauname, kad funkcijos $\sin|x|$ išvestinės iš kairės ir iš dešinės taške 0 nesutampa, taigi funkcija $\sin|x|$ yra diferencijuojama visoje tiesėje išskyrus tašką 0.

   Nagrinėkime funkciją $|\sin x|$. Ši funkcija intervaluose $(2\pi k, \pi + 2\pi k)$, kai $k \in \mathbb{Z}$ yra lygi funkcijai $\sin x$, o intervaluose $(\pi + 2\pi, 2\pi(k+1))$ yra lygi funkcijai $-\sin x$. Taigi šiuose intervaluose funkcija yra diferencijuojama. Belieka išnagrinėti taškus πk, kurie yra šių intervalų galai. Analogiškai jau išnagrinėtai funkcijai $\sin|x|$ galima parodyti, kad išvestinės iš kairės ir dešinės šiuose taškuose nesutaps (taškuose $2\pi k$ išvestinės bus atitinkamai -1 ir 1, taškuose $2\pi(k+1)$ atitinkamai 1 ir -1) . Taigi funkcija $|\sin x|$ nėra diferencijuojama taškuose πk.

9. Tarkime, kad tolydi funkcija $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ yra diferencijuojama atvirame intervale (a, b) ir $f'(x) = 0$, kiekvienam $x \in (a, b)$. Įrodyti, kad f yra pastovioji funkcija su vienintele reikšme $r \in \mathbb{R}$, t.y. $f(x) = r$, kiekvienam $x \in [a, b]$.

   Sprendimas. Imkime bet kuriuos du intervalo (a, b) taškus $x < y$. Intervale $[x, y]$ funkcija bus tolydi ir diferencijuojama intervale (x, y). Pagal vidurinės reikšmės teoremą egzistuos toks $c \in (x, y)$, kad

   $$f'(c) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

   Kadangi $f'(c) = 0$ visiems $c \in (a, b)$, gauname, kad $f(y) = f(x)$ bet kuriems intervalo (a, b) taškams, o taip gali būti tik tada, kai $f(x) = r$, visiems $x \in (a, b)$ kuriam nors $r \in \mathbb{R}$.

10. Tarkime, kad $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yra funkcija su reikšmėmis $0 \leq f(x) \leq x^2$ kiekvienam $x \in \mathbb{R}$. Įrodyti, kad f yra diferencijuojama taške 0 ir $f'(0) = 0$.

    Sprendimas. Kadangi $0 \leq f(x) \leq x^2$ tai turime, kad $f(0) = 0$. Išvestinė taške 0 iš dešinės pagal apibrėžimą bus

    $$0 \leq \lim_{x\to 0+} \frac{f(x)}{x} \leq \lim_{x\to 0+} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0+} x = 0$$

    Taigi $f'(0+) = 0$. Išvestinė taške 0 iš kairės pagal apbrėžimą bus

    $$0 \geq \lim_{x\to 0-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0-} \frac{-f(x)}{-x} \geq \lim_{x\to 0-} \frac{-x^2}{-x} = \lim_{x\to 0-} x = 0$$

    Taigi $f'(0-) = 0$. Kadangi išvestinė iš kairės ir dešinės sutampa, tai funkcijos išvestinė egzistuoja ir yra lygi 0.